R F 2557 1-3. no-

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA“

114

1
ANUL XIII
1962

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;
M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacția: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

F
2557

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

1

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1989

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóirat
252/1963

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*
- Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei numite chestiuni.*
- Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*
- *Hidromecanică* (*hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice*).
- *Construcţii de maşini* (*cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue*).
- *Mecanică generală* (*rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice*).
- *Statica şi dinamica construcţiilor* (*metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii*).
- *Tehnica măsurătorilor* (*aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică*).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti str. C. Mille nr. 15, raionul „16 februarie”.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIII, nr. 1 1962

SUMAR

STUDII

Pag.

AEROHIDROMECANICĂ

ELIE CARAFOLI şi ADRIANA GHIA-NĂSTASE, Asupra problemei de rezistenţă minimă a aripii de grosime simetrică în curent supersonic 11
N. N. PATRAULEA, Obstacole fluide cu pînză de jet rotitoare 25
T. HACKER, Despre calităţile de zbor ale avioanelor DAV parţial controlate (fără automat de stabilizare) 31
DAN GH. IONESCU, Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. III. Soluţia pentru domenii simplu conexe 47

TEORIA MECANISMELOR

CHR. PELECUDI, Folosirea arcelor de came de translaţie cu tachet de translaţie la reprezentarea funcţiilor 51
R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI şi L. CALMACIUC, Asupra unor curbe sferice şi a mecanismelor necesare producerii lor 63
FL. DUDIŢĂ, Transmisii policardanice 79

ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR

SMRITI KANA BHOWMICK, Asupra tensiunilor produse de un cuplu izolat care acţionează într-un punct din interiorul unei benzi elastice infinite cu laturile paralele încastrate 97
V. VISARION şi D. DRĂGHICESCU, Calculul cuptoarelor rotative de clincher . . . 105
L. LIBRESCU, Problema dinamică a învelitorilor subţiri, viscoelastice, de mică curbură 137
VALERIU PETCU, Momente de plastificare în grinzi continue de beton armat, încastrate la extremităţi 151

Pag.

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

V. N. CONSTANTINESCU, Unele considerații asupra calculului lagărelor cu aer alimentate sub presiune printr-un număr mare de orificii sau prin suprafețe poroase 173

D. PAVELESCU, I. ILIUC și S. BARBUL, Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităților lubrifiante ale uleiurilor aditivate, prin prisma uzurii suprafețelor. II 191

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

M. POPOV, I. MITRICĂ și E. DECIU, Influența fațetei și a razei de racordare asupra uzurii sculei așchietoare 203

I. LĂZĂRESCU, G. ABRUDAN și G. ARGHIR, Asupra preciziei de prelucrare a pieselor conice 217

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE

D. MANGERON, A III-a conferință generală poloneză asupra teoriei mecanismelor și mașinilor, Rogów-Warszawa, 8–10 iunie 1961 233

D. MANGERON, Simpozionul internațional asupra oscilațiilor neliniare, Kiev, 12–18 septembrie 1961 239

RECENZII 245

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE 261

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XIII, № 1 1962

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

Стр.

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

ЕЛИЕ КАРАФОЛИ и АДРИАНА ГИЯ-НЭСТАСЕ, К задаче минимального сопротивления крыла симметричной толщины в сверхзвуковом потоке 11
Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Препятствия с вращающейся струйной пеленой 25
Т. ХАКЕР, О летных качествах частично контролируемых (без стабилизирующего автомата) самолетов с взлетом и посадкой по вертикали 31
ДАН Г. ИОНЕСКУ, О применении теории функции комплексного переменного в гидродинамике вязких жидкостей. III. Решение для односвязных областей 47

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

К. ПЕЛЕКУДИ, Применение дуг поступательных кулачков с поступательным толкателем при изображении функций 51
Р. К. БОГДАН, К. ПЕЛЕКУДИ и Л. КАЛМАЧУК, О некоторых сферических кривых и механизмах, необходимых для их построения 63
Ф. ДУДУЦЭ, Многокарданные передачи 79

УПРУГОСТЬ — ПЛАСТИЧНОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

СМРИТИ КАНА БАУМИК, О напряжениях, произведенных изолированной парой, действующей в некоторой точке внутри бесконечной упругой полосы с защемленными параллельными сторонами 97
В. ВИСАРИОН и Д. ДРЭГИЧЕСКУ, Вращающаяся печь для производства клинкера 105
Л. ЛИБРЕСКУ, Динамическая задача пологих вязко-упругих тонких оболочек 137
ВАЛЕРИУ ПЕТКУ, Пластические моменты в железобетонных неразрезных балках, заделанных по концам 151

Стр.

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Некоторые соображения о расчете воздушных подшипников, питаемых под давлением через большое число отверстий или через пористые клапаны 173

Д. ПАВЕЛЕСКУ, И. ИЛЮК и С. БАРБУЛ, Исследование радиактивного метода для оценки смазочных качеств масел с присадками по износу поверхностей (II) 191

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

М. ПОПОВ, И. МИТРИКЭ и Е. ДЕЧУ, Влияние грани и радиуса сопряжения на износ режущего инструмента 203

И. ЛЭЗЭРЕСКУ, Г. АБРУДАН и Г. АРГИР, О точности обработки конических деталей 317

УЧАСТИЕ В НАУЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЯХ ЗА РУБЕЖОМ

Д. МАНДЖЕРОН, III Общепольская Конференция по теории машин и механизмов (8—10 июня 1961 г., Рогув у Варшавы) 233

Д. МАНДЖЕРОН, Меджународной симпозиум по нелинейным колебаниям, Киев, сентябрь, 12—18, 1961 239

РЕЦЕНЗИИ 245

ПУБЛИКАЦИИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ . . . 261

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

● Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

● Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

● Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

● Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

● *Астродинамика (оптимальные траектории, расчет орбит или отрезков орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа).*

● *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция ветродвигатели).*

● *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*

● *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*

● *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, элекрические и гидравлические аналогии).*

— *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*

— *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике).*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

Le périodique

«STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»
(ÉTUDES et RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie:

- *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique* ;
- *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question* ;
- *des* exposés scientifiques et techniques *ou l'on expose* : *l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau* ; *des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée* ;
- *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

- *astrodynamique (réalisation des trajectoires optimum, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique).*
- *aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*) ;
- *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotehniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*) ;
- *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*) ;
- *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*) ;
- *statique et dynamique des constructions* (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*) ;
- *technique des mesures* (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées, les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites, de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XIII, nº 1 1962

SOMMAIRE

ÉTUDES

Page

AÉRO-HYDROMÉCANIQUE

ELIE CARAFOLI and ADRIANA GHIA-NĂSTASE, On the minimum drag problem of the wing of symmetrical thickness in supersonic flow 11
N. N. PATRAULEA, Bodies with rotating jet sheets 25
T. HACKER, On the flight qualities of partially controlled VTOL aircrafts (without automatic pilot) 31
DAN GH. IONESCU, Sur l'application de la théorie des fonctions d'une variable complexe dans l'hydrodynamique des fluides visqueux. III. Solution pour les domaines simplement connexes 47

THÉORIE DES MÉCANISMES

CHR. PELECUDI, Use of the arcs of translation cams with translation tappet for the representation of functions 51
R.C. BOGDAN, CHR. PELECUDI und L. CALMACIUC, Über sphärische Kurven und die zu ihrer Erzeugung erforderlichen Getriebe 63
FL. DUDIŢĂ, Transmissions par plusieurs cardans 79

ÉLASTICITÉ-PLASTICITÉ-RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

SMRITI KANA BHOWMICK, Note on the stresses produced by an isolated couple acting at a point inside an infinite elastic strip with its parallel edges fixed . . 97
V. VISARION et D. DRĂGHICESCU, Calcul des fours à clinker rotatifs 105
L. LIBRESCU, Dynamic problem of shallow viscoelastic shells 137
VALERIU PETCU, Plastic moments in reinforced concrete continuous beams built-in at their ends 151

Page

LUBRIFICATION – FROTTEMENT – USURE

V. N. CONSTANTINESCU, Some considerations on the calculation of hydrostatic gas bearings supplied through a large number of holes or through porous surfaces 173

D. PAVELESCU, I. ILIUC and S. BARBUL, Study of a radioactive method for estimating the lubricating qualities of compound oils by using the wear of surfaces. II . 191

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

M. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, Influence d'une face de coupe secondaire et du rayon d'arrondissement du coin sur l'usure des outils de coupe 203

I. LĂZĂRESCU, G. ABRUDAN und G. ARGHIR, Über die Bearbeitungsgenauigkeit kegelförmiger Werkstücke 217

PARTICIPATIONS À LA VIE SCIENTIFIQUE À L'ÉTRANGER

D. MANGERON, III. Gesamtpolnische Konferenz über Theorie von Maschinen und Getrieben, Rogów bei Warschau, 8–10.VI.1961 233

D. MANGERON, International Symposium on non-linear oscillations 239

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 245

PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION 261

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

STUDII

AEROHIDROMECANICĂ

ASUPRA PROBLEMEI DE REZISTENȚĂ MINIMĂ A ARIPII DE GROSIME SIMETRICĂ ÎN CURENT SUPERSONIC [1]

DE

ELIE CARAFOLI și ADRIANA GHIA-NĂSTASE

Ne propunem să determinăm forma suprafeței unei aripi de grosime simetrică (fig. 1) avînd rezistența minimă la înaintare la care sînt date o serie de condiții geometrice cum ar fi de exemplu proiecția în plan, volumul aripii, închiderea aripii pe bordurile sale de atac și de fugă, continuitatea suprafeței aripii la traversarea muchiei etc.

Vom presupune că aripa are ca formă în plan un triunghi nesimetric pentru a lua astfel în considerare cazul general care poate fi aplicat atît la aripile delta cît și la aripile trapezoidale.

Pentru generalizare, vom considera o muchie de separație a cărei utilitate o vom preciza mai tîrziu. Problema aripii de grosime simetrică de rezistență minimă a făcut obiectul unor cercetări anterioare folosind diverse metode dintre care menționăm metoda armonică [1], ... [6] și metoda variațională [7], [8], [9], [10].

În cele ce urmează vom utiliza de asemenea metoda variațională. Folosind însă pentru viteza axială de perturbație u expresia dată într-una din lucrările noastre anterioare [11], am reușit să sistematizăm în așa fel problema rezistenței minime a aripii triunghiulare de grosime simetrică prevăzută eventual și cu muchie de separație încît ea să depindă de efectuarea unui singur tip de integrală pe care o vom nota cu I_K la fel ca și în lucrarea anterioară [10] și pentru care se dă și o formulă de recurență algebrică simplă.

Considerăm, în cele ce urmează, un sistem de axe $Ox_1x_2x_3$ axa Ox_1, fiind paralelă cu viteza de la infinit U_∞, iar aripa fiind presupusă aplatizată în planul Ox_1x_2 (fig. 1).

---

[1] Lucrare parțial inclusă în Conferința *Sur l'aile de resistence minimum en courant supersonique* ținută în cadrul Academiei de Științe Cehoslovace (C.S.A.V.), Praga, ianuarie 1961.

Vom presupune că viteza verticală de perturbaţie w este exprimată prin superpoziţia unor polinoame omogene w_r adică

$$w = \sum_{r=1}^{n} w_r = \sum_{r=1}^{n} x_1^{r-1} \sum_{q=0}^{r-1} w_{r-q-1,\, q}\; y^q, \qquad (1)$$

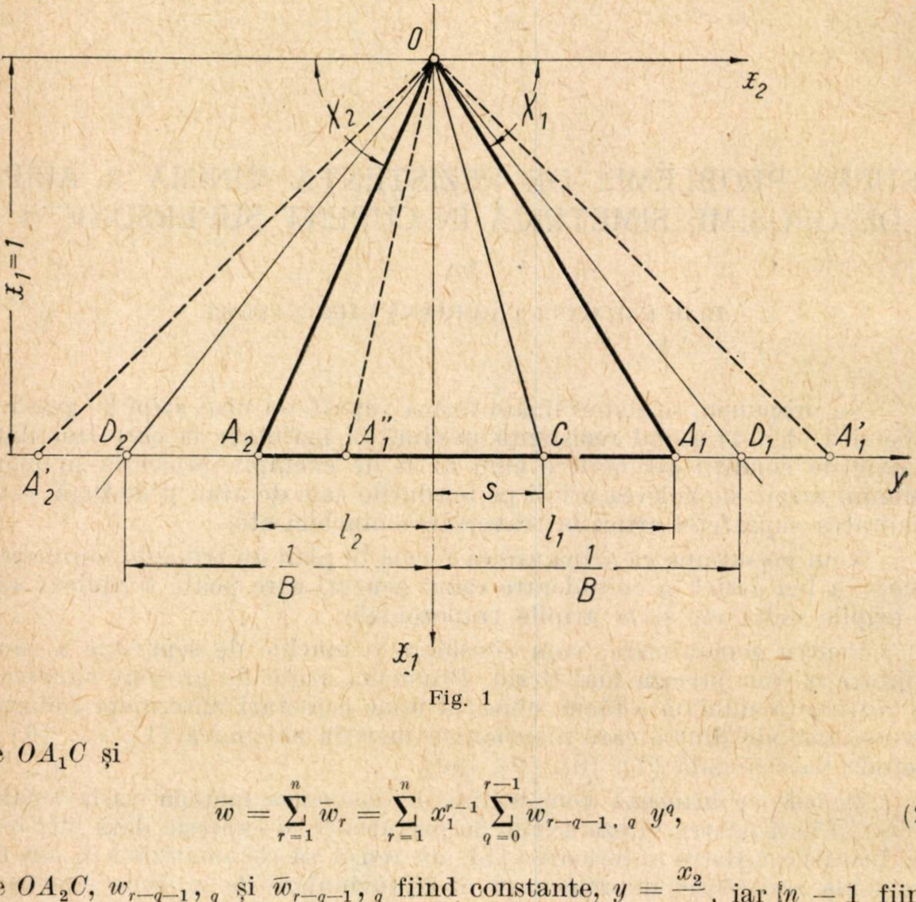


Fig. 1

pe OA_1C şi

$$\overline{w} = \sum_{r=1}^{n} \overline{w}_r = \sum_{r=1}^{n} x_1^{r-1} \sum_{q=0}^{r-1} \overline{w}_{r-q-1,\, q}\; y^q, \qquad (2)$$

pe OA_2C, $w_{r-q-1,\, q}$ şi $\overline{w}_{r-q-1,\, q}$ fiind constante, $y = \dfrac{x_2}{x_1}$, iar $n - 1$ fiind gradul polinomului omogen de cel mai mare ordin luat în consideraţie în expresiile lui w şi $\overline{w}$.

Dacă $w\,(x_1,\, x_2)$ este dat sub forma (1) atunci cota suprafeţei superioare a aripii $Z\,(x_1,\, x_2)$ se obţine prin integrare în raport cu x_1

$$Z = \frac{1}{U_\infty} \int w\, dx_1 + f(x_2) = \frac{1}{U_\infty} \sum_{r=1}^{n} x_1^r \sum_{q=0}^{r-1} \frac{w_{r-q-1,\, q}\, y^q}{r-q} + f(x_2) \qquad (3)$$

unde $f\,(x_2)$ este o funcţie arbitrară de x_2, care ne va folosi pentru a impune condiţii geometrice pe bordurile aripii. O formulă analoagă se obţine pentru $\bar{Z}$ înlocuind în (3) w prin $\bar{w}$ dat de (2) și f prin $\bar{f}$, o altă funcție arbitrară de x_2.

Să vedem acum ce condiții geometrice trebuie să impunem aripii de grosime simetrică pentru ca ea să poată fi compatibilă cu aplicațiile practice.

În acest scop, trebuie să punem condițiile ca aripa să se închidă pe bordurile sale de atac și de fugă. De asemenea, aripa trebuie, în general, să fie continuă la traversarea muchiei OC.

Din condiția de închidere pe bordul de fugă A_1C ($x_1 = 1$, $Z = 0$), determinăm pe $f(x_2)$ și obținem cota Z a aripii sub următoarea formă

$$Z = \frac{1}{U_\infty} \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{r-1} \frac{w_{r-q-1,\,q}}{r-q} x_2^q (x_1^{r-q} - 1). \tag{4}$$

Analog din condiția de închidere pe bordul de fugă A_2C ($x_1 = 1$, $\bar{Z} = 0$) determinăm pe $\bar{f}(x_2)$. Cota $\bar{Z}$ a aripii are în acest caz expresia

$$\bar{Z} = \frac{1}{U_\infty} \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{r-1} \frac{\bar{w}_{r-q-1,\,q}}{r-q} x_2^q (x_1^{r-q} - 1), \tag{5}$$

care se obține din Z, înlocuind coeficienții lui w cu coeficienții respectivi ai lui $\bar{w}$. Impunînd acum condiții de închidere pe bordul de atac OA_1 ($y = l_1$, $Z_1 = 0$) obținem relații de forma :

$$E_t^{(1)} \equiv \sum_{r=t}^{n} \sum_{q=0}^{t} d_{rq}^{(t)} w_{r-q-1,\,q} = 0, \quad (t = 0, 1, 2 \ldots n), \tag{6}$$

iar

$$d_{rq}^{(t)} = \frac{l_1^q}{r-q} (\delta_r^t - \delta_q^t) \qquad (r \geqq q + 1). \tag{7}$$

Condiția de închidere pe bordul de atac OA_2 ($y = -l_2$, $Z = 0$) ne conduce la relații de legătură similare cu (6) și anume

$$E_t^{(2)} \equiv \sum_{r=t}^{n} \sum_{q=0}^{t} \bar{d}_{rq}^{(t)} \bar{w}_{r-q-1,\,q} = 0 \quad (t = 0, 1, 2 \ldots n) \tag{8}$$

unde

$$\bar{d}_{rq}^{(t)} = \frac{(-l_2)^q}{r-q} (\delta_r^t - \delta_q^t) \qquad (r \geqq q + 1). \tag{9}$$

De asemenea, din condiția de continuitate a aripii la traversarea muchiei OC ($y = s$, $Z = \bar{Z}$) obținem următoarele condiții de legătură :

$$E_t \equiv \sum_{r=t}^{n} \sum_{q=0}^{t} c_{rq}^{(t)} (w_{r-q-1,\,q} - \bar{w}_{r-q-1,\,q}) = 0, \tag{10}$$

în care

$$c_{rq}^{(t)} = \frac{s^q}{r-q} (\delta_r^t - \delta_q^t). \tag{11}$$

Observație. În cazul cînd nu avem muchie ($w_{r-q-1,q} = \bar{w}_{r-q-1,q}$) relația (10) de continuitate a aripii pe dreapta $y = s$ este automat satisfăcută așa cum era și de așteptat.

În sfîrșit, o ultimă relație de legătură între coeficienții $w_{r-q-1,q}$, $\bar{w}_{r-q-1,q}$ ai vitezei verticale se obține impunînd condiția geometrică de volum constant

$$V = \int_{OA_1C} Zx_1\,dx_1\,dy + \int_{OA_2C} \bar{Z}x_1\,dx_1\,dy = V_0 = \text{const.} \tag{12}$$

În acest mod obținem următoarea relație liniară între coeficienții

$w_{r-q-1,q}$ și $\bar{w}_{r-q-1,q}$.

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{r-1} (\tau_{rq}\, w_{r-q-1,q} + \bar{\tau}_{rq}\, \bar{w}_{r-q-1,q}) = V_0 \tag{13}$$

în care

$$\tau_{rq} = -\frac{(l_1^{q+1} - s^{q+1})}{(r+2)(q+1)(q+2)U_\infty} \tag{14}$$

și

$$\bar{\tau}_{rq} = -\frac{s^{q+1} - (-l_2)^{q+1}}{(r+2)(q+1)(q+2)U_\infty}. \tag{15}$$

În relațiile de mai sus l_1, l_2 și s definesc poziția bordurilor de atac OA_1 și OA_2 precum și a muchiei OC pe axa Oy. Dacă impunem condițiile ca aripa să aibă un volum dat, să se închidă pe bordurile de atac și de fugă și să fie continuă la traversarea muchiei OC obținem $3(n+1)+1$ relații de legătură între coeficienții $w_{r-q-1,q}$ și $\bar{w}_{r-q-1,q}$. Pe de altă parte numărul coeficienților $w_{r-q-1,q}$ și $\bar{w}_{r-q-1,q}$ este $2 \times \frac{n(n+1)}{2}$. Deci, pentru ca să fie posibil să punem condiția de extremum la aripa cu muchie trebuie ca

$$2\,\frac{n(n+1)}{2} \geqq 3(n+1)+1 \quad \text{adică} \quad n \geqq 4. \tag{16a}$$

Observație. În cazul aripii fără muchie toți coeficienții lui $\bar{w}$ sînt nuli iar numărul coeficienților $w_{r-q-1,q}$ este $\frac{n(n+1)}{2}$. Pe de altă parte numărul condițiilor de legătură este $2(n+1)+1$ deoarece condițiile de continuitate (10) a aripii pe muchie dispar. Deci, pentru ca să putem pune condiția de extremum la aripa fără muchie este necesar ca

$$\frac{n(n+1)}{2} \geqq 2(n+1)+1 \quad \text{adică} \quad n \geqq 5. \tag{16b}$$

Pentru a putea trece la punerea condiției de extremum mai este necesară explicitarea expresiei coeficientului de rezistență de undă care după cum se știe [12] are forma următoare :

$$c_x = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)} \left[\int_{OA_1C} w u x_1 \, dx_1 \, dy + \int_{OA_2C} \overline{w} u x_1 \, dx_1 \, dy \right], \tag{17}$$

în care intră și viteza axială de perturbație u.

Considerînd că viteza verticală de perturbație w, este dată sub forma (1), (2) s-a obținut în [11] următoarea expresie pentru viteza axială de perturbație u în cazul aripii de grosime simetrică cu borduri de atac subsonice prevăzută cu muchie de separație a distribuției vitezelor verticale de perturbație w

$$\begin{aligned} u = \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{k=0}^{p} \Bigg[& \frac{G_k^{(p)} y^k}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} + \delta_k^{(p)} A_k^{(p)} y^k \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bs)(1 - By)}{2B(s - y)}} + \\ & + \delta_k^{(p)} A_k^{(1,p)} y^k \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - By)}{2B(l_1 - y)}} + \\ & + \delta_k^{(p)} A_k^{(2,p)} y^k \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + By)}{2B(l_2 + y)}} \Bigg] \end{aligned} \tag{18}$$

în care $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$, $\delta_k^{(p)} = 1 - \delta_k^p$ iar δ_k^p este simbolul lui Kroenecker.

La fel ca și la aripa subțire am dat primului termen forma convenabilă pentru a sistematiza mai bine calculele caracteristicilor aerodinamice. Modificarea făcută este următoarea :

$$\sum_{k=0}^{p-2} C_k^{(p)} y^k \sqrt{1 - B^2 y^2} \equiv \sum_{k=0}^{p} \frac{G_k^{(p)} y^k}{\sqrt{1 - B^2 y^2}}, \tag{19}$$

în raport cu expresia lui u care este dată obișnuit în mod necesar sub prima formă. Din această identitate se obțin ușor relațiile de legătură între coeficienții $G_k^{(p)}$ și $C_k^{(p)}$.

În cazul cînd unul sau ambele borduri de atac ale aripii devin supersonice folosim tot expresia (18) pentru viteza axială de perturbație u, în care însă înlocuim în expresiile corespunzătoare bordurilor supersonice „argch" cu „arccos" iar în exteriorul conului Mach (de ex. în dreapta)

$$u = \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{k=0}^{p} \delta_k^{(p)} A_k^{(1,p)} y^k .$$

Relațiile între coeficienții vitezei axiale de perturbație u și cei ai vitezei verticale de perturbație w și $\overline{w}$ fiind liniare și perfect determinate sub forma indicată în lucrările noastre anterioare [11], vom putea scrie

$$G_k^{(p)} = \sum_{j=0}^{p-1} \left[g_{kj}^{(p)} w_{p-j-1,\,j} + \overline{g}_{kj}^{(p)} \overline{w}_{p-j-1,\,j} \right] \tag{20}$$

și relații analoge pentru $A_{kj}^{(p)}$, $A_{kj}^{(1,p)}$, $A_{kj}^{(2,p)}$ în care $g_{kj}^{(p)}$, $\overline{g}_{kj}^{(p)}$, $a_{kj}^{(p)}$, $\overline{a}_{kj}^{(p)}$, $a_{kj}^{(1,p)}$ etc. sînt funcții de forma în plan a aripii (l_1, l_2) de poziția muchiei (s) și de numărul Mach dat. Deci pentru un număr Mach dat, o formă în plan dată și o poziție determinată a proiecției în plan a muchiei acești coeficienți au o valoare determinată independent de forma suprafeței aripii. Cu această observație obținem ușor următoarea expresie pentru coeficientul de rezistență de undă în cazul aripii cu ambele borduri de atac subsonice [12]

$$
\begin{aligned}
c_x = \sum_{p=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{p-1} [\, & \Omega_{prqj}\, w_{r-q-1,\,q}\, w_{p-j-1,\,j} + \Omega_{prqj}\, \overline{w}_{r-q-1,\,q}\, w_{p-j-1,\,j} + \\
& + \overline{\Omega}_{prqj}\, w_{r-q-1,\,q}\, \overline{w}_{p-j-1,\,j} + \overline{\Omega}^{(1)}_{prqj}\, \overline{w}_{r-q-1,\,q}\, \overline{w}_{p-j-1,\,j}\,],
\end{aligned}
\tag{21}
$$

în care

$$
\begin{aligned}
\Omega_{prqj} = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)(r + p)} \sum_{k=0}^{p} \Bigg\{ & g_{kj}^{(p)}\, \mathcal{J}_{k+q}(s) + \frac{\delta_k^{(p)}\, a_{kj}^{(p)}}{k + q + 1} \Bigg[\widetilde{\mathcal{K}}_{k+q,\,s}(s) + \\
& + ({l_1}^{k+q+1} - s^{k+q+1}) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bs)\,(1-Bl_1)}{2\,B\,(s - l_1)}} \Bigg] + \frac{\delta_k^{(p)}\, a_{kj}^{(1)\,p}}{k+q+1} \Bigg[\widetilde{\mathcal{K}}_{k+q,\,l_1}(s) + \\
& + ({l_1}^{k+q+1} - s^{k+q+1}) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bl_1)\,(1-Bs)}{2\,B(l_1 - s)}} \Bigg] + \frac{\delta_k^{(p)}\, a_{kj}^{(2,\,p)}}{k+q+1} \Bigg[\mathcal{K}_{k+q,\,(-l_2)}(s) + \\
& + {l_1}^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)\,(1 + Bl_2)}{2\,B(l_1 + l_2)}} - \\
& - s^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)\,(1 + Bs)}{2\,B(l_2 + s)}} \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

și analog

$$
\begin{aligned}
\Omega^{(1)}_{prqj} = \frac{8}{U_\infty^2 (l_1 + l_2)\,(r + p)} \sum_{k=0}^{p} \Bigg\{ & g_{kj}^{(p)}\, \mathcal{J}^{(1)}_{k+q}(s) + \frac{\delta_k^{(p)}\, a_{kj}^{(p)}}{k+q+1} \Bigg[\widetilde{\mathcal{K}}^{(1)}_{k+q,\,s}(s) + \\
& + \left(s^{k+q+1} - (-l_2)^{k+q+1} \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bs)\,(1+Bl_2)}{2\,B\,(l_2 + s)}} \Bigg] + \\
& + \frac{\delta_k^{(p)}\, a_{kj}^{(1,\,p)}}{k+q+1} \Bigg[\mathcal{K}^{(1)}_{k+q,\,l_1}(s) + s^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)\,(1 - Bs)}{2\,B(l_1 - s)}} - \\
& - (-l_2)^{k+q+1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bl_1)\,(1+Bl_2}{2\,B(l_1 + l_2)}} \Bigg] + \frac{\delta_k^{(p)}\, a_{kj}^{(2,\,p)}}{k+q+1} \Bigg[\mathcal{K}^{(1)}_{k+q,\,(-l_2)}(s) + \\
& + (s^{k+q+1} - (-l_2)^{k+q+1}) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bl_2)\,(1+Bs)}{2\,B(l_2 + s)}} \Bigg] \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

unde $\mathcal{J}_t(s)$, $\mathcal{J}_t^{(1)}(s)$, $\mathcal{K}_{t,\,\alpha}(s)$, $\widetilde{\mathcal{K}}_{t,\,\alpha}(s)$, $\mathcal{K}^{(1)}_{t,\,\alpha}(s)$ și $\widetilde{\mathcal{K}}^{(1)}_{t,\,\alpha}(s)$ au semnificațiile din (A—5), (A—6), (A—11), (A—15), (A—12) și (A—11 și obs), iar $\overline{\Omega}_{prqj}$ și $\overline{\Omega}^{(1)}_{prqj}$ se obțin din Ω_{prqj} și respectiv $\Omega^{(1)}_{prqj}$ înlocuind $g_{kj}^{(p)}$, $a_{kj}^{(p)}$ etc. prin corespondentele lor barate.

În cazul aripilor cu un bord de atac subsonic și cu altul supersonic, coeficientul de rezistență de undă C_x are aceeași formă ca în (21), în care însă se înlocuiesc expresiile Ω_{prqj} prin corespondentele lor stelate, care se obțin în modul următor: $\overset{\star}{\Omega}_{prqj}$ rezultă din Ω_{prqj} dat de (22), înlocuind „argch'' cu „arccos'' în termenii care provin din contribuția bordului l_2 (termeni care conțin pe $a_{kj}^{(2,\,p)}$ iar $\Omega_{prqj}^{\star(1)}$ are următoarea expresie:

$$\begin{aligned}\Omega_{prqj}^{\star(1)} = \frac{8}{U_\infty^2(l_1+l_2)(r+p)}\sum_{k=0}^{p}\Bigg\{ & g_{kj}^{(p)}\,\mathcal{J}_{k+q}^{\star(1)}(s) + \frac{\delta_k^{(p)}\,a_{kj}^{(p)}}{k+q+1}\,\widetilde{\mathcal{K}}_{k+q,\,s}^{\star(1)}(s) + \\ & + \frac{\delta_k^{(p)}\,a_{kj}^{(1,\,p)}}{k+q+1}\left[\mathcal{K}_{k+q,\,l_1}^{\star(1)}(s) + s^{k+q+1}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bs)}{2B(l_1-s)}} + \right. \\ & + \frac{\delta_k^{(p)}\,a_{kj}^{(2,\,p)}}{k+q+1}\left[\overline{\mathcal{K}}_{k+q,\,(-l_2)}^{\star(1)}(s) + s^{k+q+1}\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bs)}{2B(l_2+s)}} - \right. \\ & \left.\left. - \frac{\pi}{2}(-l_2)^{k+q+1}\right]\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{24}$$

$\mathcal{J}_t^{\star(1)}(s)\ \mathcal{K}_{t,\,\alpha}(s)$ și $\widetilde{\mathcal{K}}_{t,\,s}^{\star(1)}(s)$ au semnificațiile din (A—6), (A—11) și (A—15) iar $\overline{\Omega}_{prqj}^{\star}$ și $\overline{\Omega}_{prqj}^{\star(1)}$ se obțin din $\overset{\star}{\Omega}_{prqj}$ și respectiv $\Omega_{prqj}^{\star(1)}$ înlocuind în aceste ultime expresii $g_{kj}^{(p)}$, $a_{kj}^{(p)}$, $a_{kj}^{(1\,p)}$ etc. prin corespondentele lor barate.

Formula (21) a coeficientului de rezistență este valabilă și pentru aripa cu ambele borduri de atac supersonice în care însă se înlocuiesc expresiile Ω_{prqj} prin corespondentele lor dublu stelate, care se obțin în modul următor: Expresiile $\Omega_{prqj}^{\star\star(1)}$ se obțin din $\Omega_{prqj}^{\star(1)}$ date de (24) înlocuind în aceste expresii „argch'' cu „arccos'' în termenii care provin din contribuția bordului OA_1 (adică termenii care conțin pe $a_{kj}^{(1\,p)}$ iar expresiile $\Omega_{prqj}^{\star\star}$ au următoarea formă:

$$\begin{aligned}\Omega_{prqj}^{\star\star} = \frac{8}{U_\infty^2(l_1+l_2)(r+p)}\sum_{k=0}^{p}\Bigg\{ & g_{kj}^{(p)}\,\mathcal{J}_{k+q}^{\star\star}(s) + \frac{\delta_k^{(p)}\,a_{kj}^{(p)}}{k+q+1}\,\widetilde{\mathcal{K}}_{k+q,\,s}^{\star\star}(s) + \\ & + \frac{\delta_k^{(p)}\,a_{kj}^{(1,\,p)}}{k+q+1}\left[\overline{\mathcal{K}}_{k+q,\,l_1}^{\star\star}(s) + \frac{\pi l_1^{k+q+1}}{2} - s^{k+q+1}\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bs)}{2\,B(l_1-s)}}\right] + \\ & + \frac{\delta_k^{(p)}\,a_{kj}^{(2\,p)}}{k+q+1}\left[\overline{\mathcal{K}}_{k+q,\,(-l_2)}^{\star\star}(s) - s^{k+q+1}\arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bs)}{2\,B(l_2+s)}}\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{25}$$

Expresia coeficientului de rezistență obținut mai sus pentru aripa cu ambele borduri supersonice este identică cu cea a coeficientului de rezistență obținută în [10] pentru aripa subțire cu ambele borduri de atac supersonice, $\mathcal{J}_t^{\star\star}(s)\ \mathcal{K}_{t,\,s}^{\star\star}(s)$ etc. au semnificațiile din (A—5), (A—11) etc. iar $\overline{\Omega}_{prqj}^{\star\star}$ și $\overline{\Omega}_{prqj}^{\star\star(1)}$ se obțin din $\Omega_{prqj}^{\star\star}$ și respectiv $\Omega_{prqj}^{\star\star(1)}$ înlocuind în aceste ultime expresii $g_{kj}^{(p)}$, $a_{kj}^{(p)}$ etc. prin corespondentele lor barate.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Din observaţiile făcute rezultă că problema găsirii aripii de rezistenţă minimă se reduce la determinarea coeficienţilor $w_{p-j-1,\,j}$ şi $\overline{w}_{p-j-1,\,j}$ care intervin în expresiile lui w şi $\overline{w}$. Trebuie găsit deci c_x = minim cu următoarele condiţii de legătură :

a) volum constant, adică relaţia (13) $V_0 = \text{const.}$

b) închiderea aripii pe bordurile de atac OA_1 şi OA_2 adică relaţiile (6) şi (8) $E_t^{(1)} = 0$ şi $E_t^{(2)} = 0$;

c) continuitatea aripii la traversarea muchiei OC adică relaţiile (10) $E_t = 0$.

Această problemă de extremum cu legături se poate reduce la calculul extremumului fără legături a expresiei

$$H = C_x + \lambda^{(0)} V_0 + \sum_{t=0}^{n} [\, \lambda_t E_t + \lambda_t^{(1)} E_t^{(1)} + \lambda_t^{(2)} E_t^{(2)} \,], \tag{26}$$

în care $\lambda^{(0)}$ λ_t $\lambda_t^{(1)}$ şi $\lambda_t^{(2)}$ sînt multiplicatorii Lagrange.

Expresia extremumului funcţiei H se obţine anulînd prima sa variaţie adică $\delta H = 0$. Avînd toţi termenii care intră în expresia lui H putem calcula uşor prima sa variaţie. Anulînd această variaţie şi ţinînd seama că coeficienţii $w_{r-q-1,\,q}$ şi $\overline{w}_{r-q-1,\,q}$ sînt liniari independenţi, vom obţine relaţii de forma

$$\Pi_{\theta\sigma} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{r-1} [\, \Omega_{\theta+\sigma+1,\,r,\,q,\,\sigma}\, w_{r-q-1,\,q} + \Omega^{(1)}_{\theta+\sigma+1,\,r,\,q,\,\sigma}\, \overline{w}_{r-q-1,\,q} \,] = 0, \tag{27}$$

ecuaţie care reprezintă coeficientul variaţiei $\delta w_{\theta\sigma}$ şi

$$\overline{\Pi}_{\theta\sigma} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=0}^{r-1} [\, \overline{\Omega}_{\theta+\sigma+1,\,r,\,q,\,\sigma}\, w_{r-q-1,\,q} + \overline{\Omega}^{(1)}_{\theta+\sigma+1,\,r,\,q,\,\sigma}\, \overline{w}_{r-q-1,\,q} \,] = 0, \tag{28}$$

care reprezintă coeficientul variaţiei $\delta \overline{w}_{\theta\sigma}$ şi se obţine din ecuaţia (27) barînd expresiile Π şi Ω, iar

$$\begin{aligned} \Pi_{\theta\sigma} = {} & \lambda^{(0)}\, \tau_{\theta+\sigma+1,\,\sigma} + \sum_{t=0}^{n} [\, \lambda_t\, c^{(t)}_{\theta+\sigma+1,\,\sigma} + \lambda_t^{(1)}\, d^{(t)}_{\theta+\sigma+1,\,\sigma} \,] + \\ & + \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=0}^{p-1} [\, \Omega_{p,\,\theta+\sigma+1,\,\sigma,\,j}\, w_{p-j-1,\,j} + \overline{\Omega}_{p,\,\theta+\sigma+1,\,\sigma,\,j}\, \overline{w}_{p-j-1,\,j} \,] \end{aligned} \tag{29}$$

şi analog

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{\theta\sigma} = {} & \lambda^{(0)}\, \overline{\tau}_{\theta+\sigma+1,\,\sigma} + \sum_{t=0}^{n} [\, \lambda_t^{(2)}\, \overline{d}^{(t)}_{\theta+\sigma+1,\,\sigma} - \lambda_t\, c^{(t)}_{\theta+\sigma+1,\,\sigma} \,] + \\ & + \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=0}^{p-1} [\, \Omega^{(1)}_{p,\,\theta+\sigma+1,\,\sigma,\,j}\, w_{p-j-1,\,j} + \overline{\Omega}^{(1)}_{p,\,\theta+\sigma+1,\,\sigma,\,j}\, \overline{w}_{p-j-1,\,j} \,]. \end{aligned} \tag{30}$$

Ecuaţiile (26) şi (28) împreună cu condiţiile de legătură

$$V_0 = \text{const.},\ E_t^{(1)} = 0,\ E_t^{(2)} = 0,\ E_t = 0 \quad (t = 0,\, 1,\, 2 \ldots n)$$

formează un sistem liniar care determină în mod univoc valorile coeficienţilor $w_{p-j-1,\,j}$ şi $\overline{w}_{p-j-1,\,j}$ şi a multiplicatorilor $\lambda^{(0)}$ $\lambda_t^{(1)}$ $\lambda_t^{(2)}$ şi λ_t. Problema poate fi deci socotită rezolvată.

Rezultatele obținute mai sus se pot ușor particulariza și se pot obține o serie de aripi importante din punct de vedere practic, de exemplu : aripa delta, aripa trapezoidală, aripa dreptunghiulară, aripa poligonală cu sau fără volet de bord de atac.

I. ARIPA TRIUNGHIULARĂ CU MUCHIE

1) *Aripa delta de grosime simetrică cu muchie centrală.* În acest caz facem $l_1 = l_2 = l$ și $s = 0$ în caracteristicile aerodinamice în condițiile de legătură cît și în ecuațiile (27) și (28).

2) *Aripa trapezoidală de grosime simetrică prevăzută cu muchii laterale* (fig. 2). Pentru a obține expresia vitezei axiale de perturbație u în acest caz trebuie să facem $l_2 \to \infty$ în expresia vitezei axiale de perturbație u dată de (18) pentru aripile triunghiulare cu unul sau ambele borduri de atac supersonice după cum aripa trapezoidală are bordul lateral subsonic sau respectiv supersonic. Obținem astfel următoarea expresie pentru u :

$$u = \sum_{p=1}^{n} x_1^{p-1} \sum_{k=0}^{p} \left[\frac{G_k^{(p)} y^k}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} + \delta_k^{(p)} A_k^{(p)} y^k \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bs)(1 - By)}{2B(s - y)}} + \right.$$
$$\left. + \delta_k^{(p)} A_k^{(1,p)} y^k \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - By)}{2B(l_1 - y)}} + \delta_k^{(p)} A_k^{(2,p)} y^k \arccos \sqrt{\frac{1 + By}{2}} \right] \quad (32)$$

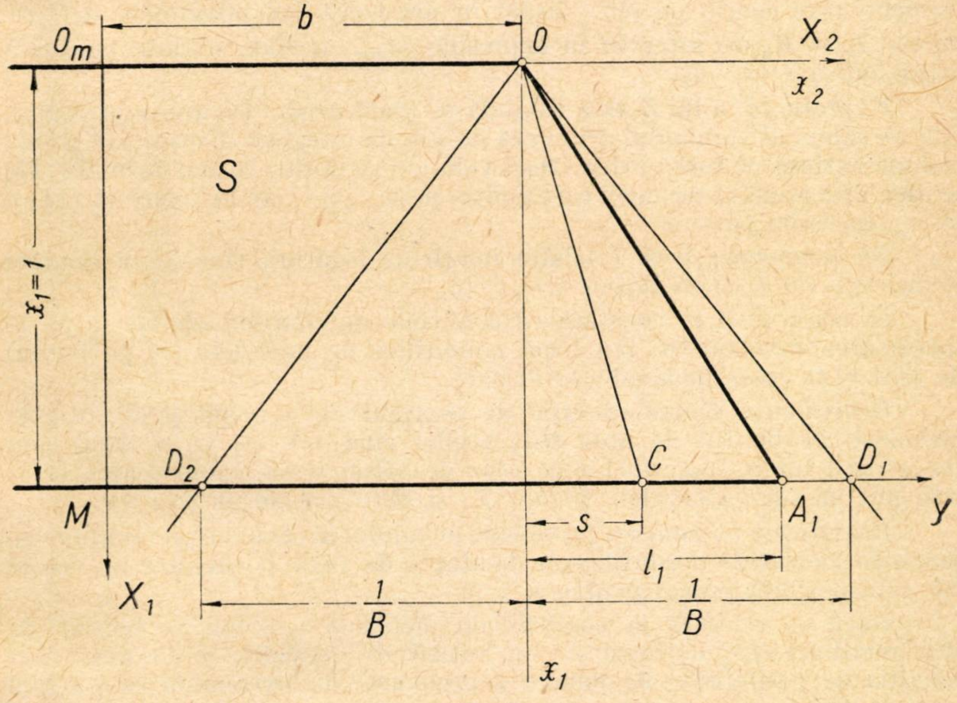


Fig. 2

în cazul semi-aripii trapezoidale cu un bord de atac lateral OA_1 subsonic (fig. 2). Dacă bordul OA_1 devine supersonic atunci expresia lui u se obţine din cea dată mai sus în care însă înlocuim ,,argch,, cu ,,arc cos'' în termenul al treilea din paranteză care este datorit contribuţiei bordului OA_1.

Dacă trecem acum la calculul coeficientului de rezistenţă trebuie să includem şi contribuţia porţiunii centrale (S) a aripii care se obţine uşor, deoarece pe această porţiune u se exprimă sub formă polinomială. Informaţii suplimentare se pot găsi şi în lucrarea [13].

În mod analog şi relaţiile de legătură (continuitatea aripii la traversarea muchiei OC, expresia volumului, închiderea semiaripii pe bordul său de atac lateral) trebuie adaptate în acest caz.

Alte tipuri interesante de aripi cu muchii sînt aripile delta şi aripile pentagonale cu două muchii dispuse simetric. Indicaţii pentru efectuarea particularizărilor necesare se pot găsi şi în lucrarea noastră [10].

II. ARIPA TRIUNGHIULARĂ FĂRĂ MUCHIE

În acest caz trebuie să anulăm toţi coeficienţii $\overline{w}_{p-j-1,\,j}$ ai lui $\overline{w}$ în expresiile: caracteristicilor aerodinamice ale condiţiilor de legătură cît şi în ecuaţiile sistemului (27)—(28). De asemenea, expresia (1) a lui w trebuie extinsă pe toată aripa. Singularităţile datorite muchiei (adică termenii care conţin pe $a_{kj}^{(p)}$) dispar în acest caz iar integralele definite de tip I_k şi K_k ce intervin în expresiile Ω_{prqj} trebuie extinse pe toată aripa (adică $s = -l_2$).

Expresia (4) a lui Z este valabilă pe toată aripa. De aceea în relaţia (12) de calcul al volumului aripii cea de-a doua integrală dispare iar prima trebuie extinsă pe toată aripa. Deci volumul se obţine tot cu formula (13) în care însă anulăm termenii care conţin pe $\overline{w}_{r-q-1,\,q}$ iar în expresia (14) a lui τ_{rq} înlocuim pe s cu $-l_2$.

De asemenea, şi în celelalte relaţii de legătură trebuie să anulăm coeficienţii lui $\overline{w}$ şi să facem $s = -l_2$.

În acest mod se constată că condiţiile de continuitate ale aripii la traversarea muchiei OC iau locul condiţiilor de închidere (8) pe bordul de atac OA_2 (care în acest caz dispar).

Echivalenţa dintre condiţia de continuitate a aripii şi condiţia de închidere pe bordul de atac OA_2 atunci cînd $s \to -l_2$ şi în cazul cînd coeficienţii lui $\overline{w}$ sînt nuli este uşor de văzut dacă ţinem seama că w este nul pe semiintervalele $[-\infty - l_2)$ şi $(l_1 + \infty]$ de pe axa Oy.

Reamintim că punerea problemei de minim în cazul aripii fără muchie care este închisă pe bordurile sale de atac şi de fugă şi care are un volum dat este posibilă numai pentru $n \geqq 5$.

Dacă se renunţă la condiţia de închidere a aripii pe bordul de atac rectiliniu OA_2 obţinem $n + 2$ relaţii de legătură şi în acest caz condiţia de posibilitate de punere a problemei de extremum este $n > 2$ ca şi în [8].

Observații

1. Problema aripii fără muchie se poate trata și punînd $\overline{w} = w$.
2. Aplicații importante ale acestui tip de aripă sînt aripile delta, trapezoidale, dreptunghiulare, poligonale fără muchie etc.

Observații

Rezultatele obținute mai sus ne vor folosi ulterior și la studiul aripii de formă generală (portantă cu grosime) de rezistență minimă. De asemenea, considerînd și expresiile lui u pe care le-am obținut anterior în [14] vom putea extinde prezentele rezultate la aripile groase prevăzute cu placă normală de rezistență minimă.

ANEXA DE CALCUL

1. *Integrale de tip* I_k

$$I_k = \int \frac{y^k\,dy}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} = -\frac{y^{k-1}}{kB^2}\sqrt{1 - B^2y^2} + \frac{k-1}{kB^2} I_{k-2}, \qquad (A-1)$$

$$I_0 = \frac{1}{B} \arcsin By, \qquad I_1 = -\frac{1}{B^2}\sqrt{1 - B^2y^2}. \qquad (A-2)$$

2. *Tabelul integralelor definite de tip* I_k (notate cu $\mathcal{J}_k$)

$$\mathcal{J}_k = \int_{-l_2}^{l_1} \frac{y^k\,dy}{\sqrt{1 - B^2y^2}} = \mathcal{J}_k(l_1, l_2), \qquad (A-3)$$

$$\mathcal{J}_k^{*} = \mathcal{J}_k\left(l_1, l_2 = \frac{1}{B}\right) \quad \mathcal{J}_k^{**} = \mathcal{J}_k\left(l_1 = l_2 = \frac{1}{B}\right), \qquad (A-4)$$

$$\mathcal{J}_k(s) = \mathcal{J}_k^{*}(s) = \mathcal{J}_k(l_1, l_2 = -s)\ \mathcal{J}_k^{**}(s) = \mathcal{J}_k\left(l_1 = \frac{1}{B}, l_2 = -s\right), \qquad (A-5)$$

$$\mathcal{J}_k^{(1)}(s) = \mathcal{J}_k(l_1 = s, l_2)\,;\mathcal{J}_k^{*(1)}(s) = \mathcal{J}_k^{**(1)}(s) = \mathcal{J}_k\left((l_1 = s, l_2 = \frac{1}{B}\right). \qquad (A-6)$$

Observații

a) Integralele $\mathcal{J}_k$, $\mathcal{J}_k^{*}$, $\mathcal{J}_k^{**}$ intervin în calculul caracteristicilor aerodinamice ale aripii fără muchie.

b) Integralele $\mathcal{J}_k(s)$ și $\mathcal{J}_k^{(1)}(s)$ se obțin din integrala $\mathcal{J}_k$ înlocuind limita inferioară și respectiv limita superioară cu s.

c) Expresia tuturor acestor integrale de tip I_k, se obțin din $\mathcal{J}_k(l_1, l_2)$ prin simple schimbări de notații.

3. *Integrale de tip* $K_{k,\alpha}$ *și reducerea lor la integrale de tip* I_k.

$$K_{k,\alpha} = \frac{\sqrt{1 - B^2\alpha^2}}{2} \int \frac{y^{k+1}\,dy}{(y - \alpha)\sqrt{1 - B^2y^2}} = s_*^{k+1} K_{-1,\alpha} + \frac{\sqrt{1 - B^2\alpha^2}}{2} \sum_{j=0}^{k} \alpha^j I_{k-j}; \qquad (A-7)$$

unde

$$K_{-1,\,\alpha} = \frac{\sqrt{1 - B^2\alpha^2}}{2} \int \frac{dy}{(y-\alpha)\sqrt{1 - B^2y^2}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{\left[\sqrt{(1+B\alpha)(1-By)} - \sqrt{(1-B\alpha)(1+By)}\,\right]^2}{y-\alpha} & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{1 - B^2\alpha y}{B\,|y-\alpha|} & \text{(b)} \end{cases} \qquad (A-8)$$

a) fiind valabile pentru $1 - B^2\alpha^2 > 0$;
b) fiind valabile pentru $1 - B^2\alpha^2 < 0$.

4. *Integrale definite de tip* $K_{k,\,\alpha}$

$$\mathcal{K}_{k,\,\alpha} = \frac{\sqrt{1 - B^2\alpha^2}}{2} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y-\alpha)\sqrt{1 - B^2y^2}} = \mathcal{K}_k(\alpha, l_1, l_2), \qquad (A-9)$$

$$\mathcal{K}^{\star}_{k,\,\alpha} = \mathcal{K}_k\left(\alpha, l_1, l_2 = \frac{1}{B}\right), \quad \mathcal{K}^{\star\star}_{k,\,\alpha} = \mathcal{K}_k\left(\alpha, l_1 = l_2 = \frac{1}{B}\right), \qquad (A-10)$$

$$\mathcal{K}_{k,\,\alpha}(s) = \mathcal{K}_k(\alpha, l_1 = s, l_2), \quad \mathcal{K}^{\star}_{k,\,\alpha}(s) = \mathcal{K}^{\star\star}_{k,\,\alpha}(s) = \mathcal{K}_k\left(\alpha, l_1 = s, l_2 = \frac{1}{B}\right), \qquad (A-11)$$

$$\mathcal{K}^{(1)}_{k,\,\alpha}(s) = \mathcal{K}^{\star(1)}_{k,\,\alpha}(s) = \mathcal{K}_k(\alpha, l_1, l_2 = -s), \qquad (A-12)$$

$$\mathcal{K}^{\star\star(1)}_{k,\,\alpha}(s) = \mathcal{K}_k\left(\alpha, l_1 = \frac{1}{B}, l_2 = -s\right), \qquad (A-13)$$

$$\overline{\mathcal{K}}_{k,\,\alpha} = \frac{\sqrt{B^2\alpha^2 - 1}}{2} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{y^{k+1}\,dy}{(y-\alpha)\sqrt{1 - B^2y^2}}. \qquad (A-14)$$

Observații

1. Pentru integralele $\mathcal{K}_{k,\,\alpha}$ este valabilă expresia lui $\mathcal{K}_{-1,\,\alpha}$ sub forma (a)
2. Pentru integralele $\overline{\mathcal{K}}_{k,\,\alpha}$ e valabilă expresia lui $\mathcal{K}_{-1,\,\alpha}$ sub forma (b)
3. Toate integralele de tip $\mathcal{K}_{k,\,\alpha}$ scrise mai sus se obțin din integrala $\mathcal{K}_k(\alpha, l_1, l_2)$ dată în (A—9) prin simple schimbări de notații.
4. Pentru integralele $\overline{\mathcal{K}}_{k,\,\alpha}$ se pot scrie relații similare cu cele date pentru $\mathcal{K}_{k,\,\alpha}$.
5. *Integralele* $\widetilde{\mathcal{K}}_{k,\,\alpha}$ Prin definiție

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{k,\,\alpha} = \frac{\sqrt{1 - B^2\alpha^2}}{2} \sum_{j=0}^{k} \alpha^j \mathcal{J}_{k-j}. \qquad (A-15)$$

Observații

Relații analoge de definiție pentru $\mathcal{K}^{\star}_{k,\,\alpha}$ $\mathcal{K}_{k,\,\alpha}(s)$ etc... se obțin din relația de mai sus prin înlocuirea lui $\mathcal{J}_k$ prin $\mathcal{J}^{\star}_k$ $\mathcal{J}_k(s)$ etc.

Primită la redacție la 11 octombrie 1961

К ЗАДАЧЕ МИНИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КРЫЛА СИММЕТРИЧНОЙ ТОЛЩИНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

РЕЗЮМЕ

В работе авторы определяют вид поверхности крыла симметричной толщины с минимальным лобовым сопротивлением при задании проекции в плоскости (несимметричный треугольник) и объема крыла. Кроме того, эта поверхность должна удовлетворять условиям, что крыло является замкнутым на ее передних и задних кромках.

Также, для общности, считают, что крыло имеет разделительное ребро, при прохождении через которое поверхность крыла сохраняется непрерывной.

Применяя общее выражение возмущающей осевой скорости — в виде, данном в одной из предыдущих их работ, авторы смогли систематизировать расчет так, чтобы задача минимального сопротивления треугольных крыльев с разделительным ребром зависела от выполнения лишь одного типа интеграла, обозначенного через I_k, для которого дается также и алгебраическая рекуррентная формула.

ON THE MINIMUM DRAG PROBLEM OF THE WING OF SYMMETRICAL THICKNESS IN SUPERSONIC FLOW

ABSTRACT

This paper determines the shape of the surface of a minimum drag wing of symmetrical thickness, whose plan projection (an asymmetrical triangle) and volume are given and which must satisfy in addition the condition that the wing be closed on its leading and trailing edges.

For the sake of generality, it is also assumed that the wing is fitted with a separation ridge.

By using the general expression of the axial disturbance velocity u under the form given in a previous paper, the authors have systematized the calculation in such a manner that the minimum drag problem of triangular wings fitted with separation ridge depends on the performing of a single type of integral denoted by I_k, for which an algebraic recurrence formula is also given.

BIBLIOGRAFIE

1. M. E. Graham, Pa. Lagestrom, *Reduction of Minimum Drag Problem in Supersonic Flow to two dimension al Potential Problems by Means of the Combined Flow Field.* Douglas Air Co-Rep. SM. 23.901, March 1960.

2. Н. В. Жигулев, Ю. Л. Жилин, *О неустановившемся движении крыла прямоугольной формы в плане*. Прикладная математика и механика, **XXII**, *6* (1959).
3. М. Н. Коган, *О телах минимального сопротивления в сверхзвуковом потоке газа*. Прикладная математика и механика, **XXI**, *2* (1957).
4. В. Е. Булыгина, *К задаче о крыле заданного объема с минимальным волновым сопротивлением*. Прикладная математика и механика, **XXII**, *6* (1958).
5. W. E. Graham, *The Calculation of Minimum Supersonic Drag by Solution of an Equivalent Two-Dimensional Potential Problem*. Douglas Aircraft Report, SM-22666, Dec. (1956).
6. — *Note on the Use of Artificial Distribution of Singularites in Supersonic Minimum Drag Problems*. Douglas Aircraft Corporation Report, SM 23.022.
7. F. Strand, *Minimum Wing Wave Drag With Volume Constraint*. Journal of Aero Space Science, August (1960).
8. Maurice Fénain, Denise Vallé, *Application de la théorie des écoulements homogènes à la recherche de l'adaptation de certaines ailes en régime supersonique*. ONERA Mémo Technique, 2e partie, 4 (1959).
9. P. Germain, *Aile symétrique à portance nulle et de volume donné réalisant le minimum de trainée en écoulement supersonique*. Comptes Rendus, **244** (1957).
10. Elie Carafoli, Adriana Năstase, *Triangular Wings With Minimum Drag, Fitted With Seperation Ridge in Supersonic Flow*. Revue de mécanique Appliquée, *5*, **X** (1960).
11. E. Carafoli, M. Ionescu, *Écoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à epaisseur symétrique*. Revue de Mécanique Appliquée, *1* (1957).
12. E. Carafoli, *High Speed Aerodynamics*. Ed. tehnică, Bucureşti, 673 (1956).
13. Элие Карафоли, Адриана Нэстасе, *Трапециевидные крылья с минимальным лобовым сопротивлением в сверхзвуковом потоке*. Механика, **I** (1961). Comunicare făcută la Primul Congres de Mecanică teoretică şi aplicată de la Moscova din ian.-febr. 1960.
14. Elie Carafoli şi colab., *Écoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces à plaque normale*. Revue de Mécanique Appliquée, *2* (1957).

STUDII

AEROHIDROMECANICĂ

OBSTACOLE FLUIDE CU PÎNZĂ DE JET ROTITOARE1)

DE

N. N. PATRAULEA

Într-o lucrare precedentă [1] am considerat problema determinării scurgerii în jurul unei aripi inelare cu pînză de jet. În lucrarea de față vom considera pînze de jet axial-simetrice, care au și o mișcare de rotație în jurul axei de simetrie a mișcării. Pînza de jet rotitoare poate fi aplicată fie corpurilor carenate fie corpurilor toroidale.

Condiții fizice pe pînza de jet în mișcarea permanentă. Presupunînd că viteza jetului este mult mai mare decît vitezele în fluidul ambiant, modulul vitezei în pînza de jet v_j, poate fi considerat practic constant.

Debitul impulsului, corespunzător unității de lungime a unui cerc transversal al pînzei de jet, de rază r este

$$I' = \rho_j\, v_j\, \frac{Q_j}{2\pi r} \tag{1}$$

unde ρ este masa specifică a jetului, v_j viteza sa și Q_j debitul total al jetului.

Vom defini și un debit de impuls corespunzător unității de lungime a cercului transversal de la bordul de fugă, de rază r_1 prin

$$I = \rho_j\, v_j \cdot \frac{Q_j}{2\pi r_1}. \tag{2}$$

Componentele vectorului $\overline{I}$ după direcția liniei meridiane și după direcția tangentei la cercul transversal respectiv, vor fi notate cu I_λ și I_τ (fig. 1) și avem

$$\begin{aligned} I_\lambda &= I \cos\vartheta, \quad I_\tau = I \sin\vartheta, \\ I_\lambda' &= I' \cos\vartheta, \quad I_\tau' = I' \sin\vartheta. \end{aligned} \tag{3}$$

---

1) Comunicare prezentată la Colocviul de mecanica fluidelor Brașov, octombrie 1961.

Aplicînd teorema momentului cinetic în raport cu axa de simetrie la o porțiune a pînzei de jet delimitată de două secțiuni oarecare, se obține

$$\rho_j\, v_j\, Q_j\, r = \text{const.} \tag{4}$$

și cum în mișcarea permanentă (pe care o presupunem aici), Q_j și v_j sînt constante, rezultă relația

$$r \sin \vartheta = r_1 \sin \vartheta_1 = \text{const.} \tag{5}$$

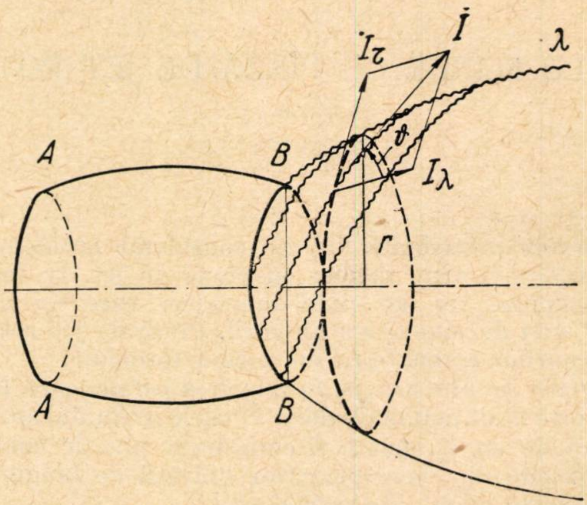


Fig. 1

Saltul presiunii la traversarea pînzei de jet depinde între altele de curbura liniei de curent a jetului, $1/R$. Aceasta din urmă se poate exprima, după cum se știe, în funcție de curburile liniilor determinate pe suprafața de jet de două secțiuni normale principale. În cazul nostru, una din secțiunile normale principale este secțiunea meridiană. Avem

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \vartheta}{R_\lambda} + \frac{\sin^2 \vartheta}{R_\tau}, \tag{6}$$

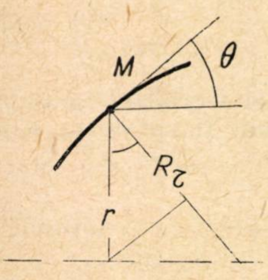


Fig. 2

R_λ și R_τ fiind razele de curbură ale celor două secțiuni normale amintite.

Avem mai departe (fig. 2).

$$r = R_\tau \cos\ \theta \tag{7}$$

și deci,

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \vartheta}{R_\lambda} + \frac{\sin^2 \vartheta \cos\ \theta}{r}. \tag{8}$$

Aplicînd acum ecuația de mișcare pe o direcție normală la suprafața de jet, se obține

$$\delta p = \rho_j \delta_j v_j^2 / R, \tag{9}$$

sau ținînd seama de (6),

$$\delta p = \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{R_\lambda} + \frac{\sin^2 \vartheta \cos \theta}{r} \right) \rho_j \delta_j v_j^2 \tag{10}$$

și cum

$$2\pi r \delta_j v_j \cos \vartheta = Q_j \tag{11}$$

și ținînd seama de (5), avem

$$\delta p = \frac{I_1 \sin^4 \vartheta \cos \theta}{r_1 \cos \vartheta \sin^2 v_1} + \frac{I_1 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{R_\lambda \sin^2 \vartheta_1}. \tag{12}$$

Dacă există o secțiune asimptotică S_0, presiunea în tubul fluid la infinit aval nu mai este egală cu presiunea atmosferică deoarece există un salt de presiune la traversarea pînzei de jet, după cum rezultă din (10) în care facem $R_\lambda = \infty$, $r = r_0$, $\theta = 0$ și $\vartheta = \vartheta_0$

$$\left. \begin{aligned} \delta p_0 &= \frac{I_1 r_1 \cdot \sin^2 \vartheta_0}{r_0^2 \cos \vartheta_0}, \\ r_0 \sin \vartheta_0 &= r_1 \sin \vartheta_1. \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

OBSTACOL CARENAT CU PÎNZĂ DE JET, ÎN VÎNĂ LIMITATĂ DE CURENT

Să considerăm un obstacol carenat cu pînză rotitoare de jet plasat într-o vînă limitată de curent. Această problemă ar putea avea aplicații la deflectarea vînei unui motor cu reacție în vederea inversării tracțiunii. Prin obstacolul central cu pînză de jet se caută să se lărgească vîna principală de curent pentru a *îndemna* să atace grătarul de palete, deviatar, periferic.

Pentru a se evalua efectul obstacolului central vom presupune aici o vînă liberă de curent care vine de la infinit amonte (fig. 3), fără a suferi efectele frecării.

Va fi interesant să se determine unghiul asimptotic de deviere θ_0 pentru diferite rapoarte dintre debitul de impuls al pînzei de jet deflectoare și debitul de impuls al pînzei de jet care trebuie să fie deflectată (lărgită).

Din aplicarea teoremei impulsului se obține următoarea formulă:

$$\cos \theta_0 = \frac{1 + k_j \cos \theta_1 \cos \vartheta_1}{1 + k_j}. \tag{14}$$

K_j este un coeficient de jet definit prin raportul dintre debitul modulului impulsului total al jetului şi debitul impulsului în vîna de curent care trebuie deflectată.

Pentru obţinerea acestei formule s-a presupus că corpul din care este emis jetul este un cilindru de lungime infinită. În acest caz se demonstrează uşor că rezultanta presiunilor pe cilindru este nulă.

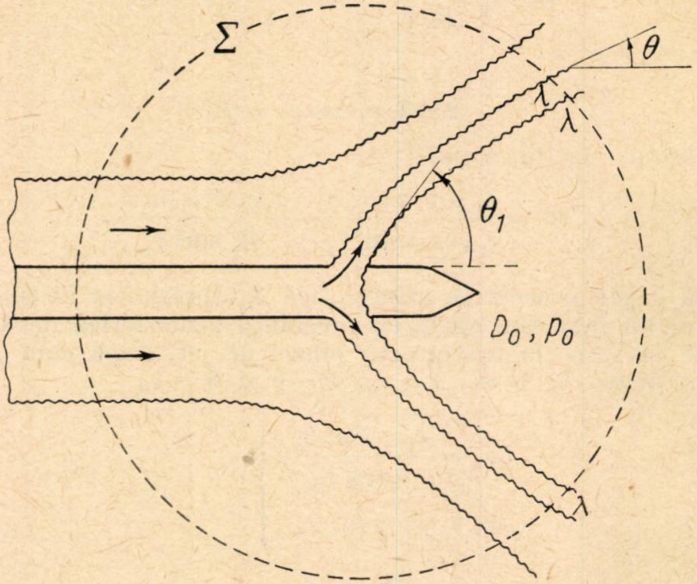


Fig. 3

Cînd corpul axial simetric este de lungime finită devierea vînei creşte şi cu atît mai mult cu cît pînza de jet este mai apropiată de extremitatea amonte a corpului. Devierea maximă la care ne putem aştepta rezultă din ipoteza că presiunile pe partea amonte a corpului sînt egale cu presiunea de stagnare. Acesta este însă un caz limită, pentru K_j foarte mare. Formula respectivă pentru θ_0, rezultă

$$\cos\theta_0 = \frac{1 - \mathrm{s}/2S + K_j \cos\theta_1 \cos\vartheta_1}{1 + K_j} \tag{15}$$

unde *s* este secţiunea maximă a corpului central, iar *S* secţiunea vînei libere la infinit amonte.

ARIPĂ INELARĂ CILINDRICĂ LUNGĂ CU VOLET FLUID-ROTITOR

Forţele centrifuge din pînza de jet rotitoare fac ca în tubul fluid să poată exista presiuni mai mici decît în exteriorul tubului. În absenţa curentului de la infinit, pînza de jet are evident forma unui hiperboloid (traiectori rectilinii ale particulelor sale). Vîna de curent din amonte deformează suprafața de jet micșorînd secțiunile transversale.

Se poate dezvolta și în cazul pînzei de jet rotitoare o teorie analogă a aceleia dezvoltate în lucrarea [1], pentru determinarea vitezei v_0 și a secțiunii asimptotice S_0.

Ecuațiile finale sînt însă mai complicate:

$$\left.\begin{aligned} &K_j^{*}(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta_1\cos\theta_1)=(\overline{v}-1)^2-\frac{\overline{v}}{v_0}(\overline{v}_0-1)^2,\\ &\frac{K_j^{*}}{2}\cdot\frac{\overline{v}_0}{\overline{v}}\cdot\frac{\sin^2\vartheta_0}{\cos\vartheta_0}=\overline{v}_0^2-1,\\ &\frac{\overline{v}_0}{\overline{v}}=\frac{\sin^2\vartheta_0}{\sin\vartheta_1},\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

unde

$$\overline{v}=v/V_\infty,\quad K_j^{*}=\frac{2\pi r_1 I_1}{\frac{\rho}{2}S\,V_\infty^2}.\qquad(17)$$

Pentru a pune în evidență efectul rotirii pînzei de jet să considerăm cazul particular $\theta_1=0$, pentru care se verifică soluția $\overline{v}=\overline{v}_0$, $\vartheta_0=\vartheta_1$ cu alte cuvinte cilindrul *solid se continuă cu un cilindru fluid de același diametru pînă la infinit aval.*

Se poate pune întrebarea cum se formează circulația în jurul aripii inelare din moment ce dîra este cilindrică și nu opune deci nici o rezistență curentului de aer din amonte. Credem că explicația este următoarea. În primele momente, pînza de jet rotitoare are, evident, o lungime finită și în acest caz tubul fluid nu este cilindric deoarece circulația nefiind formată, nu există depresiune în interiorul aripii inelare. Aripa inelară se va termina deci la un moment dat cu un *divergent fluid.* Acest divergent constitue un obstacol evident pentru scurgerea exterioară și în consecință circulația în jurul profilelor aripii va crește. Ca urmare un supradebit intră în aripa inelară, ceea ce produce conform teoremei lui Bernoulli, o depresiune în interior, inclusiv în regiunea bordului de fugă.

Existența acestei depresiuni face ca secțiunile pînzei de jet care vor fi emise ulterior să nu se mai dilate, particulele urmînd traectorii mai apropiate de generatoarele cilindrului. În acest fel partea cilindrică a dîrei se poate prelungi treptat pînă la infinit.

Influența frecării. Așa cum s-a remarcat și în lucrarea noastră anterioară [1], influența frecării poate să fie importantă și în cazul prezent al pînzei de jet rotitoare. Aerul din tubul fluid este antrenat de către pînza tubulară de jet cu tendința de a se produce o creștere a circulațiilor în jurul profilelor aripii inelare. În anumite experiențe preliminare noi am constatat inducerea vitezelor suplimentare datorită frecărilor în funcționarea sistemului la punct fix ($V_\infty=0$). Această chestiune nu este încă pe deplin lămurită și va face obiectul unor cercetări ulterioare.

Primită la redacție la 26 octombrie 1961

ПРЕПЯТСТВИЯ С ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРУЙНОЙ ПЕЛЕНОЙ

РЕЗЮМЕ

Автор рассматривает взаимодействие между телом с осевой симметрией и вращающейся струйной пеленой, испускаемой изнутри тела. Частицы вращающейся струйной пелены не описывают меридиальные линии, а имеют винтообразные траектории благодаря тому, что при выходе из сопла скорости имеют и составляющую вращения.

Препятствиями считаются обтекаемые тела или кольцевые крылья с вращательным жидким закрылком. Пишутся условия, которые должны выполняться на струйной поверхности и даются несколько оценок, основанных на общих теоремах, для некоторых параметров течения.

BODIES WITH ROTATING JET SHEETS

ABSTRACT

The autor considers the interaction between an axisymmetrical body and a rotating jet sheet issuing from its interior. The rotating jet sheet particles do not describe meridian lines, but have spiral shaped paths due to the fact that when issuing from the nozzle they have also a rotation component.

Slender bodies or annular wings with rotating jet flap are considered. The conditions which are to be fulfilled on the jet sheet are written and several estimations of some important flow parameters are made on the basis of general theorems.

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. PATRAULEA, *Aripi inelare cu jet de bord de fugă.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, 5 (1961).

STUDII

AEROHIDROMECANICĂ

DESPRE CALITĂȚILE DE ZBOR ALE AVIOANELOR DAV PARȚIAL CONTROLATE (FĂRĂ AUTOMAT DE STABILIZARE)

DE

T. HACKER

NOTAŢII

$xOyz$ — sistem de axe de coordonate legat de avion cu originea în centrul de greutate al avionului;

$V(V_x, V_y, V_z)$ — viteza centrului de greutate al avionului față de pămînt (m/s);

$\omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ — viteza unghiulară a avionului în jurul centrului său de greutate (rad/s);

Ω — viteza unghiulară a organelor mobile principale ale motorului în jurul axului de tracțiune (rad/s);

X, Y, Z — componentele forțelor exterioare exercitate asupra avionului (kg);

M_x, M_y, M_z — componentele momentelor exterioare (kgm);

Φ — unghiul format de axa de tracțiune cu Oy (rad);

m — masa avionului ($\mathrm{kg.\,m^{-1}.\,s^2}$);

I_x, I_y, I_z — momentele de inerție ale avionului în raport cu axele de coordonate adoptate ($\mathrm{kg.m.s^2}$);

I_{xy} — momentul de inerție centrifugal al avionului în raport cu axele Ox și Oy ($\mathrm{kg.\,m.\,s^2}$);

J — momentul de inerție al organelor mobile principale ale motorului în jurul axului de tracțiune ($\mathrm{kg.m.s^2}$);

t — timpul (s).

1. UNELE PARTICULARITĂŢI ALE TEORIEI STABILITĂŢII AVIOANELOR DAV

Avioanele cu decolare şi aterizare verticală (DAV) prezintă, în ceea ce priveşte problema stabilităţii, unele particularităţi care fac necesară o punere şi o tratare specială a acestei probleme, diferită de teoria obişnuită aplicată în cazul avionului de tip clasic. Dintre aceste particularităţi se vor considera în acest articol două, esenţiale, şi anume : 1) necesitatea de a se ţine seama de efectul giroscopic al organelor rotitoare ale motoarelor, datorită utilizării pentru aceste aparate a unor motoare foarte puternice, capabile să dea un însemnat exces de putere în cazul evoluţiilor pe verticală, şi 2) necesitatea de a se cerceta mişcarea perturbată pentru anumite regimuri (mişcări de bază) specifice, caracterizate prin viteze de zbor mici sau nule, deci prin forţe aerodinamice exterioare neglijabile sau chiar nule. În aceste regimuri (zbor pe verticală şi, în special, zborul ,,la punct fix'') aparatul, de obicei, nu prezintă o stabilitate inerentă (proprie), stabilitatea zborului trebuind să fie asigurată prin comenzi fie de către pilot, fie de către o instalaţie automată de stabilizare. Deci cea de-a doua particularitate, aceea legată de considerarea unor evoluţii specifice, conduce la necesitatea unei noi puneri a problemei stabilităţii aparatelor de zbor, la necesitatea cercetării stabilităţii sistemului aparat de zbor — stabilizor (uman sau automat), ca sistem dinamic unic.

2. CERCETAREA MIŞCĂRII PERTURBATE A SISTEMULUI DINAMIC APARAT DE ZBOR-STABILIZOR (UMAN SAU AUTOMAT)

La aparatele DAV, ca şi la cele mai multe avioane obişnuite, stabilitatea zborului , adică menţinerea regimului de zbor dorit, se realizează pe de o parte prin calităţile inerente ale aparatului, care asigură stabilitatea dinamică a zborului liber (nestabilizat) faţă de anumiţi parametri cinematici, în anumite regimuri de zbor, iar pe de altă parte prin intervenţia stabilizatoare a comenzilor acţionate fie de către pilot, fie de către instalaţia de stabilizare automată. Prin urmare cerinţele care se impun unui aparat din punctul de vedere al stabilităţii sînt :

1. Să prezinte asemenea calităţi inerente, încît variaţia în timp a perturbaţiilor unora dintre parametrii cinematici esenţiali să permită o intervenţie stabilizatoare eficace, sau, cu alte cuvinte, viteza de creştere şi frecvenţa de oscilaţie a deviaţiilor respective în mişcarea perturbată necontrolată să fie într-o anumită relaţie cu timpul de reacţie al pilotului sau cu întîrzierea în funcţionarea stabilizorului automat, precum şi cu răspunsul aparatului la comenzi[1]).

2. În condiţiile constrîngerii (stabilizării) prin comenzi a acestor parametri, în rest, avionul să prezinte o stabilitate dinamică proprie sau,

---

[1]) Pentru unele date cantitative, vezi, de exemplu [1] p. 4.

cu alte cuvinte, să aibă asemenea calităţi inerente ca deviaţiile parametrilor neconstrînşi, induse de o perturbaţie, să rămînă mici sau să se amortizeze.

Unei asemenea puneri a problemei corespunde fie o rezolvare pe calea includerii ecuaţiilor de funcţionare a factorului stabilizator (pilot + comenzi, sau stabilizor automat + comenzi) în sistemul de ecuaţii ale mişcării perturbate, fie o soluţie bazată pe teoria stabilităţii mişcărilor parţial controlate.

Dar în cazul avioanelor DAV, spre deosebire de avioanele de tip clasic, apar situaţii de totală instabilitate, adică instabilitate faţă de toţi parametrii esenţiali [1]) ai mişcării. Asemenea situaţii apar în unele regimuri de zbor specifice acestui tip de aparat zburător, ca, de exemplu, în regimul de zbor „la punct fix". În acest caz de instabilitate esenţială (instabilitate faţă de toţi parametrii esenţiali) accentul se mută, în ceea ce priveşte problema matematică, de la cercetarea stabilităţii aparatului (faţă de parametrii liberi), la cercetarea caracterului variaţiei deviaţiilor tuturor parametrilor cinematici esenţiali în mişcarea perturbată liberă, adică la considerarea problemei posibilităţii unei intervenţii stabilizatoare eficace.

3. STABILITATEA ÎN REGIM DE CROAZIERĂ

În regimul de croazieră, singura particularitate esenţială a aparatelor DAV sub raportul stabilităţii, care le distinge de avioanele de tip clasic, constă în influenţa pe care o exercită asupra zborului momentele giroscopice ale organelor rotitoare ale motoarelor. Precum s-a arătat, această particularitate provine din necesitatea unui însemnat exces de putere.

Această influenţă se traduce în primul rînd prin aceea că sistemul de ecuaţii de primă aproximaţie (liniarizat) al mişcării perturbate libere, care, dacă se neglijează efectul giroscopic al motorului, se desface în două sisteme independente unul de altul (vezi [2] p. 227), dacă se ţine seama de momentele giroscopice, se modifică în aşa fel încît această separare nu mai este posibilă. Într-adevăr, dacă K_x, K_y, K_z reprezintă componentele, pe cele trei axe ale sistemului de coordonate legat de avion ale momentului principal al cantităţii de mişcare al organelor mobile ale motorului (al rotorului turbinei şi al compresorului), care pentru simplificare se poate lua aproximativ egal cu $J\vec{\Omega}$, componentele pe axele adoptate ale vectorului $\vec{\Omega}$ fiind Ω_x, Ω_y, 0, atunci sistemul de ecuaţii al mişcării perturbate fără ecuațiile reprezentînd legăturile cinematice dintre unghiuri și viteze unghiulare, se poate scrie sub forma:

---

[1]) Prin parametri esenţiali se înţeleg aci acei parametri cinematici care au o influenţă hotărîtoare asupra unor anumite caracteristici, considerarea cărora este impusă de natura problemei tratate. Astfel în cazul dat aceste caracteristici constau în calităţile de zbor cerute de considerente de securitate şi confort. Ecuaţiile de mişcare se scriu numai pentru aceşti parametri.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta V_x}{dt} &= a_{11}\,\Delta V_x + a_{12}\,\Delta V_y + a_{16}\,\omega_z + a_{18}\,\Delta\theta \\
\frac{d\Delta V_y}{dt} &= a_{21}\,\Delta V_x + a_{22}\,\Delta V_y + a_{26}\,\omega_z \\
\frac{d\Delta V_z}{dt} &= a_{33}\,\Delta V_z + a_{34}\,\omega_x + a_{35}\,\omega_y + a_{37}\,\Delta\gamma \\
\frac{d\omega_x}{dt} &= a_{43}\,\Delta V_z + a_{44}\omega_x + \left(a_{46} - \frac{K_z}{I_x}\right)\omega_y + \frac{K_y}{I_x}\,\omega_z \\
\frac{d\omega_y}{dt} &= a_{53}\,\Delta V_z + \left(a_{54} + \frac{K_z}{I_y}\right)\omega_x + a_{55}\,\omega_y - \frac{K_x}{I_y}\,\omega_z \\
\frac{d\omega_z}{dt} &= a_{61}\,\Delta V_x + a_{62}\,\Delta V_y - \frac{K_y}{I_z}\,\omega_x + \frac{K_x}{I_z}\,\omega_y + a_{66}\omega_z
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

În urma apariției termenilor de cuplare cu coeficienții $\frac{K_y}{I_x}$, $-\frac{K_x}{I_y}$, $-\frac{K_y}{I_z}$, $\frac{K_x}{I_z}$ comparabili ca mărime cu restul coeficienților, descompunerea în primă aproximație a sistemului într-un sistem corespunzător mișcării longitudinale și unul corespunzător mișcării laterale, independente unul de celălalt, nu mai este posibilă. O asemenea descompunere este totuși realizabilă, dacă se ține seama de acțiunea organelor de comandă, pe baza procedeului indicat în unele lucrări anterioare[1]).

Într-adevăr dacă în urma comenzii se stabilizează mișcarea de rotație a aparatului în jurul axelor *Ox* și *Oy* (adică, cu alte cuvinte, dacă valorile perturbațiilor ω_x și ω_y sînt menținute suficient de mici), atunci ecuația auxiliară liniarizată este similară cu ecuația cunoscută a mișcării perturbate longitudinale pentru avionul de tip obișnuit.

Stabilizarea vitezelor unghiulare ω_x și ω_y este, într-adevăr, posibilă. Acest fapt apare intuitiv din unele considerente calitative. Astfel, după cum se știe, din rezolvarea ecuațiilor obținute prin neglijarea efectului giroscopic, rezultă (la aparatele cu stabilitate oscilatorie) că în jurul axei *Ox* predomină în general componenta aperiodică, ceea ce permite intervenția stabilizatoare din partea pilotului sau a pilotului automat. În ceea ce privește mișcarea în raport cu axa *Oy*, din cauza valorilor relativ mari ale momentelor de inerție corespunzătoare ale aparatului, ea va decurge destul de încet.

În consecință, pentru aparatul cu momente giroscopice mici, se cer astfel de caracteristici constructive, care să permită pe de o parte o rapidă amortizare a mişcărilor oscilatorii (spre exemplu valori absolute mari pentru derivatele de rotaţie respective şi, pe de altă parte, înlăturarea instabilităţii oscilatorii şi asigurarea unor valori mici pentru frecvenţa oscilatorie (valori mici pentru unii din coeficienţii stabilităţii statice, valori mari pentru momentele de inerţie ş.a.m.d.)

---

[1]) Vezi, de exemplu [3].

La punctul 6 se va considera comportarea aparatului în regimul de zbor „la punct fix", sub acţiunea forţelor de greutate, de tracţiune şi a momentelor giroscopice imprimate aparatului din partea organelor rotative ale motorului. După cum se va vedea, chiar dacă se neglijează frînările aerodinamice, viteza de creştere a perturbaţiilor unghiulare, în general sînt suficient de mici. Dacă, în acest caz, valoarea expresiei (6.6) care pentru zborul orizontal capătă în mod aproximativ forma

$$J\Omega\sqrt{\frac{\sin^2\Phi}{I_y I_z}+\frac{\cos^2\Phi}{I_z I_x}}\approx\frac{J\Omega}{\sqrt{I_y I_z}}$$

nu depăşeşte o anumită limită (de ordinul unei jumătăţi de ciclu pe secundă, în cazul stabilizării realizate de către pilot), atunci viteza este controlabilă.

S-au considerat mai sus două cazuri limită : într-unul s-au neglijat forţele giroscopice, iar în celălalt cele aerodinamice. Riguros vorbind, de aici nu se poate trage o concluzie pentru cazul considerat în acest paragraf, cînd acţionează concomitent ambele categorii de forţe. Totuşi, intuitiv, este de aşteptat ca, acele caracteristici constructive care permit o intervenţie eficientă din partea pilotului sau a stabilizorului automat în fiecare din aceste două cazuri limită, vor permite o stabilizare suficient de activă în cazul suprapunerii celor două cazuri date.

4. MIŞCAREA PERTURBATĂ ÎN REGIMUL DE „ZBOR LA PUNCT FIX"

Ceea ce caracterizează în mod esenţial în privinţa problemei stabilităţii regimurile de mică viteză de zbor ale aparatelor DAV considerate, în particular zborul la punct fix, constă în faptul că, dintre forţele şi momentele exterioare, dominante sînt tracţiunea exercitată de motoare precum şi forţele şi momentele masice şi de inerţie — greutatea proprie şi momentele giroscopice transmise de organele rotitoare ale motoarelor — iar forţele şi momentele aerodinamice sînt neglijabile, respectiv nule. Această împrejurare este deosebit de importantă pentru modul de a pune problema matematică şi determină de la început o divergenţă esenţială faţă de cazul avionului de tip clasic în regim normal de zbor, în care dominante sînt forţele şi momentele aerodinamice, greutatea şi, în mai mică măsură, tracţiunea iar efectul giroscopic al motorului de obicei se neglijează.

Considerînd aparatul de zbor ca un corp perfect rigid, ecuațiile de mişcare față de un sistem legat de avion se pot scrie, precum se ştie[1]) sub următoarea formă :

$$
\begin{aligned}
& m\left(\frac{dV_x}{dt}+V_z\,\omega_y-V_y\,\omega_z\right)=X,\\
& m\left(\frac{dV_y}{dt}+V_x\,\omega_z-V_z\,\omega_x\right)=Y,\\
& m\left(\frac{dV_z}{dt}+V_y\,\omega_x-V_x\,\omega_y\right)=Z,\\
& I_x\,\frac{d\omega_x}{dt}+(I_z-I_y)\,\omega_y\,\omega_z=M_x,\\
& I_y\,\frac{d\omega_y}{dt}+(I_x-I_z)\,\omega_z\,\omega_x=M_y,\\
& I_z\,\frac{d\omega_z}{dt}+(I_y-I_x)\,\omega_x\,\omega_y=M_z.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Se consideră cazul constrîngerii prin comenzi (stabilizării) a parametrilor mişcării centrului de greutate. Posibilitatea acestui caz de stabilizare parțială pare evidentă, avîndu-se în vedere inerția destul de mare a aparatului. Sistemul auxiliar corespunzător, deci, va fi format din ultimele trei ecuații din (4.1), la care se pot adăuga la nevoie, ecuațiile exprimînd relația cinematică dintre vitezele şi deplasările unghiulare.

Prin urmare se consideră sistemul

$$
\begin{aligned}
& \frac{d\omega_x}{dt}=m_y\,\omega_z+I_1\,\omega_y\,\omega_z+P_1\,(V,\,\Delta V,\,\Delta\alpha,\ldots),\\
& \frac{d\omega_y}{dt}=-\,m_x\,\omega_z+I_2\,\omega_z\,\omega_x+P_2\,(V,\,\Delta V,\,\Delta\alpha,\ldots),\\
& \frac{d\omega_z}{dt}=-\,n_y\,\omega_x+n_x\,\omega_y+I_3\,\omega_x\,\omega_y+P_3\,(V,\,\Delta V,\,\Delta\alpha,\ldots),
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

unde

$$
m_x=\frac{K_x}{I_y},\qquad n_x=\frac{K_x}{I_z},\qquad m_y=\frac{K_y}{I_x},\qquad n_y=\frac{K_y}{I_z};
$$

$$
I_1=\frac{I_y-I_z}{I_x},\qquad I_2=\frac{I_z-I_x}{I_y},\qquad I_3=\frac{I_x-I_y}{I_z},
$$

---

[1]) Vezi [2] p. 222. Pentru simplificare, s-a presupus că axele legate sînt chiar axele principale de inerție ale aparatului şi, prin urmare, momentele de inerție centrifugale sînt nule.

K_x, K_y, K_z avînd semnificația dată în paragraful precedent. Atunci Φ fiind unghiul format de axa rotorului cu Oy,

$$K_x \approx J\Omega \sin \Phi, \qquad K_y \approx J\Omega \cos \Phi, \qquad K_z = 0.$$

Se presupune că axa tracțiunii rezultante trece tot timpul prin centrul de greutate al aparatului. Atunci P_1, P_2, P_3 reprezintă momente de natură aerodinamică egale cu zero în zbor neperturbat. În vecinătatea regimului de ,,punct fix'', în mișcarea perturbată, P_1, P_2 și P_3 reprezintă funcții neliniare în raport cu perturbațiile.

Se consideră sistemul liniarizat

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= m_y \, \omega_z, \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= -\, m_x \, \omega_z, \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= -\, n_y \, \omega_x + n_x \, \omega_y . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Se vede imediat că ecuația caracteristică a sistemului (4.3) admite o rădăcină nulă și o pereche de rădăcini pur imaginare

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2.3} = \pm i\lambda$$

cu

$$\lambda = \sqrt{m_x \, n_x + m_y \, n_y}. \tag{4.4}$$

Pentru a fi asigurată stabilitatea sistemului dinamic complet este necesar ca soluția banală a sistemului (4.2) reprezentînd regimul neperturbat să fie uniform asimptotic stabilă, și anume cu o descreștere suficient de rapidă a perturbațiilor (a oricărei soluții corespunzătoare unor condiții inițiale suficient de mici) pentru a se putea asigura stabilitatea și în raport cu parametrii unghiulari.

Presupunînd că termenii de grad superior nu sînt de natură a asigura stabilitatea asimptotică uniformă a soluției banale, cum se întîmplă în general în toate cazurile practice, devine necesară intervenția comenzii și pentru stabilizarea mișcării în jurul centrului de greutate.

Se vede ușor că nici un fel de stabilizare parțială nu poate asigura rădăcini cu părți reale negative ale sistemului auxiliar liniarizat și, prin urmare, în acest caz este necesară stabilizarea tuturor celor 3 variabile dinamice ale sistemului (4.2).

Intervenția stabilizatoare a pilotului uman sau automat în vederea contracarării perturbațiilor unghiulare se traduce, în ceea ce privește ecuațiile mișcării perturbate, precum se știe, prin apariția unor coeficienți de amortizare sau prin mărirea celor existenți. Acești coeficienți au de obicei un rol hotărîtor în determinarea semnului părții reale a rădăcinilor ecuației caracteristice și anume existența unor coeficienți de amortizare (negativi) [1]) atrage după sine rădăcini cu părți reale negative.

Prin urmare cercetarea stabilității în sine a soluției banale a sistemului auxiliar (4.3) prin metodele cunoscute din teoria cazurilor critice, practic, nu prezintă interes. Dar o cercetare a comportării soluției sistemului (4.2) poate furniza totuși unele informații cu privire la natura instabilității (aprecieri estimative asupra mărimii frecvenței, vitezei de creștere a perturbațiilor etc.), deosebit de utile din punctul de vedere al cercetării posibilității unei intervenții stabilizatoare eficiente [2]).

Pentru început, sistemul (4.3) va fi adus la o formă canonică ca în metodica indicată de G. V. Kamenkov [3]) printr-o transformare avînd matricea

$$\begin{pmatrix} n_x & 0 & m_y \\ n_y & 0 & -m_x \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

În urma acestei transformări sistemul (4.3) devine

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\lambda}(I_1 m_x n_y + I_2 n_x m_y)\, xy - \frac{1}{\lambda}(I_1 m_x^2 - I_2 m_y^2)\, yz + X, \\ \frac{dy}{dt} &= -\lambda z + \frac{I_3 n_x n_y}{\lambda} x^2 - \frac{I_3 (m_x n_x - m_y n_y)}{\lambda} zx - \frac{I_3 m_x n_y}{\lambda} z^2 + Y, \\ \frac{dz}{dt} &= \lambda y + \frac{1}{\lambda}(I_1 m_y^2 - I_2 n_x^2)\, xy - \frac{1}{\lambda}(I_1 m_x n_y + I_2 n_x m_y)\, yz + Z. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Trecînd, mai departe, la coordonate cilindrice prin transformarea

$$x = x, \qquad y = r \cos \theta, \qquad z = r \sin \theta, \tag{4.7}$$

se obține sistemul

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{12} \cos \theta\, x r + a_{22} \cos \theta \sin \theta\, r^2 + \overline{X}, \\ \frac{dr}{dt} &= b_{11} \cos \theta\, x^2 + b_{12} \cos \theta \sin \theta\, xr + b_{22} \sin^2 \theta \cos \theta\, r^2 + R, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \lambda + c_0 \sin \theta \frac{x^2}{r} + c_1 x + c_2 r + \Theta, \end{aligned} \tag{4.8}$$

---

[1]) Precum se știe, în cazul avionului necontrolat, coeficienții de amortizare reprezintă derivatele de rotație, sau funcții, de obicei, liniare ale acestora.

[2]) Mișcările centrului de greutate fiind suficient de lente (chiar și fără o stabilizare a lor) iar pe de altă parte coeficienții cinematici respectiv apărînd în expresiile termenilor P_i, în general, cel puțin la puterea a 3-a, se poate presupune că soluția sistemului auxiliar (4.2), în condițiile constrîngerii parametrilor mișcării centrului de greutate, descrie cu o aproximație satisfăcătoare mișcarea perturbată reală în jurul centrului de greutate.

[3]) Vezi [4] p. 81 și următoarele.

unde a_{ik}, b_{ik}, c_i sînt constante cunoscute, depinzînd de coeficienții termenilor de gradul întîi și doi din sistemul (4.2), Θ este o funcție cel puțin de gradul doi în raport cu x și r, iar $\overline{X}$ și R, la fel cu P_1, P_2, P_3 din (4.2), reprezintă funcții care în vecinătatea lui $V = 0$ sînt cel puțin de gradul trei în raport cu noile variabile x și r. Deci termenii $\overline{X}$, R și Θ vor putea fi neglijați în raționamentele de mai jos.

Mișcarea reprezentată de (4.8) este în general instabilă. Pentru ca raționamentele, care urmează, să fie valabile este necesar ca ele să fie făcute pentru un interval finit de timp, suficient de mic, în sensul reclamat de însăși aceste raționamente (convergența unor serii, suficient de rapide pentru a se putea neglija termenii de la un anumit grad în sus etc.).

Pentru asigurarea unui asemenea interval de timp se pune condiția ca variabilele dinamice să rămînă mai mici în modul decît anumite margini superioare

$$\begin{aligned} |x| &\leqslant \xi, \\ |r| &\leqslant \eta. \end{aligned} \tag{4.9}$$

La alegerea cantităților ξ și η se vor avea în vedere considerente practice legate de securitatea sau confortul zborului. Este natural, și acest lucru va rezulta din cele ce urmează, că asemenea margini superioare asigură în același timp cu prisosință valabilitatea raționamentelor matematice de care s-a vorbit.

5. O EVALUARE A GRADULUI DE INSTABILITATE

Se evaluează intervalul de timp pentru care sînt asigurate inegalitățile de tipul (4.9) cu ξ și η alese din considerente practice. Aceasta va da o primă indicație asupra eficacității intervenției stabilizatoare : intervalul de timp obținut va trebui să întreacă timpul de reacție al pilotului, respectiv întîrzierea în funcționarea stabilizorului automat, plus întîrzierea intervenită în răspunsul aparatului de zbor la comandă.

Pentru simplificarea evaluării propuse se face o nouă transformare a sistemului de forma

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad r = \rho \sin \varphi. \tag{5.1}$$

În locul celor două inegalități (4.9) va apare acum una singură, care se va scrie sub forma

$$\rho \leqslant \varkappa \rho_0 \tag{5.2}$$

unde ρ_0 este valoarea razei vectoare ρ în momentul inițial, iar $\varkappa$ un număr supraunitar suficient de mic.

Efectuînd transformarea (5.1) din primele două ecuații (4.8) în care s-au neglijat termenii $\overline{X}$ și R, se obține

$$\frac{d\rho}{dt} = P(\theta, \varphi)\, \rho^2, \tag{5.3}$$

unde

$$P=\chi_1 \cos\theta \cos^2\varphi \sin\varphi+\chi_2 \cos\theta \sin\theta \cos\varphi \sin^2\varphi+\chi_3 \cos\theta \sin^2\theta \sin^3\varphi,$$

cu

$$\chi_1=\frac{1}{\lambda}(I_1 m_x n_y+I_2 n_x m_y+I_3 n_x n_y),$$

$$\chi_2=\frac{1}{\lambda}[I_1(-m_x^2+n_y^2)+I_2(-n_y^2+m_y^2)+I_3(-m_x n_x+m_y n_y)],$$

$$\chi_3=\frac{1}{\lambda}[-I_1 m_x n_y-I_2 n_x m_y+I_3(-m_x n_x+m_y n_y)].$$

Funcţia P poate fi uşor majorată

$$|P(\theta, \varphi)| \leqslant P_0$$

cu P_0 avînd, de exemplu, următoarea formă :

$$P_0=\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(|\chi_1|+\frac{1}{2}|\chi_2|+|\chi_3|\right).$$

Atunci se vede uşor că

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^2} \leqslant P_0(t-t_0) \qquad (5.4)$$

şi deci

$$\rho \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\rho_0}-P_0(t-t_0)}.$$

Condiţia (5.2) este asigurată prin satisfacerea inegalităţii

$$\frac{1}{\frac{1}{\rho_0}-P_0(t-t_0)} \leqslant \varkappa \rho_0$$

deci în orice caz pe un interval de timp pînă la

$$\Delta t=\frac{1-\frac{1}{\varkappa}}{P_0 \rho_0}. \qquad (5.5)$$

Pentru o perturbaţie iniţială (ρ_0) suficient de mică şi pentru un $\varkappa$ suficient de mare, acest interval de timp este destul de mare pentru a permite o stabilizare în condiţii comode.

6. O EVALUARE A FRECVENȚEI DE OSCILAȚIE A VALORII PERTURBAȚIILOR

După cum s-a arătat, cea de-a doua caracteristică importantă care influențează în mod hotărîtor posibilitatea unei stabilizări eficiente, este natura variației perturbațiilor în cazul aparatului necontrolat (nestabilizat) și anume o variație oscilatorie de mare frecvență poate reduce sau anula eficiența intervenției comenzilor, făcută în scopul stabilizării zborului.

Se vede ușor că evaluarea mărimii frecvenței revine la evaluarea membrului al doilea al ultimei ecuații (4.8). Se va arăta că pentru condiții inițiale suficient de mici și pentru un interval de timp suficient de mic (ceea ce este echivalent cu satisfacerea inegalității (5.2) pentru un $\varkappa$ suficient de mic) frecvența se evaluează cu o aproximație mulțumitoare cu ajutorul numai a mărimii λ.

Variabilele x și r se presupun suficient de mici ($\varkappa$ suficient de mic) pentru ca să se poată neglija chiar și termenii liniari (deci evident și Θ) în comparație cu λ. Rămîne de arătat că raportul $\frac{x^2}{r}$ rămîne și el mic în comparație cu λ în intervalul de timp considerat, adică în intervalul pentru care sînt satisfăcute inegalitățile

$$\begin{aligned} |x| &\leqslant \varkappa\, x_0, \\ |r| &\leqslant \varkappa\, r_0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Se notează

$$u = \frac{x^2}{r}.$$

Atunci, se vede ușor că, în virtutea primelor două ecuații (4.8), derivata în raport cu timpul a variabilei u se poate scrie sub forma

$$\frac{du}{dt} = (2a_{12} \cos\theta - b_{22} \cos\theta \sin^2\theta)\, x^2 + 2a_{22} \cos\theta \sin\theta\, xr -$$

$$- b_{12} \cos\theta \sin\theta\, xu - b_{11} \cos\theta\, u^2.$$

Ținîndu-se seama de relațiile (6.1) precum și de inegalitățile evidente

$$\cos\theta \sin\theta \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\cos\theta \sin^2\theta \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9},$$

se poate scrie

$$\frac{du}{dt} \leqslant a + 2b\, u + c\, u^2,$$

unde

$$a = \varkappa^2 (\delta x_0^2 + | a_{22} | x_0 r_0),$$

$$b = \frac{\varkappa}{4} | b_{12} | x_0 ,$$

$$c = | b_{11} | ,$$

cu

$$\delta = \begin{cases} \max \left(2a_{12} ; \; \frac{2\sqrt{3}}{9} b_{22} \right) & \text{pentru } b_{22} > 0, \\ 2a_{12} - \frac{2\sqrt{3}}{9} b_{22} & \text{pentru } b_{22} < 0, \end{cases}$$

sau

$$\int_{u0}^{u} \frac{du}{a + 2bu + cu^2} \leqslant t - t_0 . \tag{6.2}$$

Din ultima inegalitate evaluarea lui u rezultă imediat și anume pentru $ac - b^2$ mai mare, egal, sau mai mic decît zero, aceasta va fi dată respectiv de relațiile

$$u \leqslant \frac{1}{c} \left\{ - b + \sqrt{ac - b^2} \, \mathrm{tg} \left[\sqrt{ac - b^2} \, (t - t_0) + \mathrm{arctg} \frac{b + cu_0}{\sqrt{ac - b^2}} \right] \right\}, \tag{6.3}$$

$$u \leqslant \frac{1}{c} \left[\frac{b + cu_0}{1 - (b + cu_0)(t - t_0)} - b \right], \tag{6.4}$$

$$u \leqslant \frac{1}{c} \, \frac{A e^{D(t - t_0)} - B}{1 - C e^{D(t - t_0)}} , \tag{6.5}$$

unde

$$A = c \left[a + b \left(1 + \sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}} \right) \right],$$

$$B = b \left[1 - \sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}} \right],$$

$$C = \frac{cu_0 + b \left(1 - \sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}} \right)}{cu_0 + b \left(1 + \sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}} \right)} ,$$

$$D = 2b \sqrt{1 - \frac{ac}{b^2}} .$$

Deoarece a şi b (deci şi A şi B) sînt mici o dată cu x_0 şi r_0, iar c este independent de aceste mărimi, pentru o perturbaţie iniţială suficient de mică raportul $u = \frac{x^2}{r}$ rămîne oricît de mic, cu condiţia ca în momentul iniţial să fi avut o valoare destul de mică.

În particular, pentru o perturbaţie iniţială şi o valoare iniţială a raportului $\frac{x^2}{r}$ suficient de mici, termenul în $\frac{x^2}{r}$ din membrul al doilea al ultimei ecuaţii (4.8) poate fi neglijat şi el în comparaţie cu λ în intervalul de timp în care rămîn satisfăcute inegalităţile (6.1).

Prin urmare, ordinul de mărime al frecvenţei de oscilaţie al perturbaţiilor poate fi evaluat cu ajutorul cantităţii

$$\lambda = \sqrt{\frac{K_x^2}{I_y I_z} + \frac{K_y^2}{I_z I_x}} \approx J\Omega \sqrt{\frac{\sin^2\Phi}{I_y I_z} + \frac{\cos^2\Phi}{I_z I_x}}. \qquad (6.6)$$

Dacă, de exemplu, se presupune că rotirea axei de tracţiune în jurul centrului de greutate în planul de simetrie al aparatului se realizează prin bascularea motoarelor însăşi, unghiul Φ format de axa rotoarelor motoarelor cu planul yOz este mic în regimul considerat şi deci se poate lua, în continuare, pentru ordinul de mărime al frecvenţei perturbaţiilor următoarea expresie aproximativă :

$$\lambda = \frac{J\Omega}{\sqrt{I_z I_x}}. \qquad (6.7)$$

7. EXEMPLU NUMERIC DE CALCUL

Cu formulele stabilite mai sus se va face o estimare a timpului în care perturbaţiile iniţiale (ρ_0) devin de $\varkappa$ ori mai mari. Aprecierea acestui timp este necesară pentru a se stabili dacă pilotul, sau automatul de stabilizare, au la dispoziţie un timp suficient pentru intervenţie.

Se vor face aceste aprecieri în cazul concret al unui avion cu următoarele caracteristici :

masa : $m = 500$ kg.s². m⁻¹,

semianvergura aripilor : $l = 10$ m,

momentele de inerţie :

$I_x = 625$ kg m s²,

$I_y = 2\,500$ kg m s²,

$I_z = 2\,000$ kg m s².

Avionul este prevăzut cu două motoare turboreactoare dezvoltînd o tracţiune totală $F_{t_0} = 6\,000$ kg. Momentul de inerţie J_1 al fiecărui motor în jurul axei sale este de 1,8 kg m s^2, iar viteza de rotație a organelor sale mobile principale este de, aproximativ, 1 000 rad/s.

Atunci, luînd pentru unghiul Φ, valorile 0°, 5° și 10°, se poate întocmi tabela 1 de valori aproximative pentru coeficienții m_x, m_y, n_x și n_y.

Tabela 1

Φ	m_x rad/s	m_y rad/s	n_x rad/s	n_y rad/s
0	0	5,76	0	1,8
5°	0,1256	5,74	0,157	1,79
10°	0,25	5,67	0,3125	1,77

Din transformările care s-au făcut se observă că

$$|\omega_{x_0}| \leqslant |n_x|\,|x_0| + |m_y|\,|z_0| \leqslant \{|n_x| + |m_y|\}\,\rho_0 .$$

Fie date pentru ρ_0 valorile 0,01; 0,02 și 0,03, pentru care valorile inițiale respective ale vitezei unghiulare de ruliu nu întrec 0,18 rad, o valoare practic admisibilă.

Pentru $\varkappa$ se vor lua valorile 1,5; 2; 3. Folosindu-se formulele (6.6), (5.4) pentru calcularea mărimilor λ respectiv P_0 se întocmește tabela 2.

Tabela 2

Φ	0	5°	10°
λ	3,223	3,2218	3,19
P_0	1,84	1,886	2,025

Cu aceste date și cu formula

$$\Delta t = \frac{1 - \dfrac{1}{\varkappa}}{\rho_0 P_0}$$

rezultă pentru Δt valorile din tabelele 3, 4 și 5, date în secunde.

Tabela 3

$\varnothing = 0$

ρ^0 \ $\varkappa$	1,5	2	3
0,01	18,1	27,2	36,2
0,02	9,05	13,6	18,1
0,03	6,033	9,067	12,066

Tabela 4

$\varnothing = 5°$

ρ_0 \ $\varkappa$	1,5	2	3
0,01	17,22	26,54	35,4
0,02	8,61	13,27	17,7
0,03	5,77	8,85	11,8

Tabela 5

$\Phi = 10°$

ρ_0 \ $\varkappa$	1,5	2	3
0,01	16,45	24,35	33
0,02	8,22	12,18	16,5
0,03	5,5	8,12	11

Primită la redacție la 26 octombrie 1961.

О ЛЕТНЫХ КАЧЕСТВАХ ЧАСТИЧНО КОНТРОЛИРУЕМЫХ САМОЛЕТОВ С ВЗЛЕТОМ И ПОСАДКОЙ ПО ВЕРТИКАЛИ (БЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО АВТОМАТА)

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются летные качества в двух режимах: при висении и при равномерном прямолинейном полете (крейсерском режиме).

Для случая полета при висении исследуется возмущенное движение вокруг центра тяжести аппарата, в предположении вынуждения параметров движения самого центра тяжести посредством управлений. Исследование этого существенно неустойчивого движения полезно для определения тех характеристик управляемости, которые дают указания о возможности эффективного стабилизирующего вмешательства управлений. Для этой цели оценивается, с одной стороны, степень неустойчивости (скорость нарастания амплитуды отклонений), а с другой — частота колебания значения возмущений.

Что касается случая крейсерского режима, то указывается возможность сведения его к аналогичному случаю самолета классического типа путем вынуждения, при помощи управлений, одних из динамических переменных, характеризующих возмущенное движение.

ON THE FLIGHT QUALITIES OF PARTIALLY CONTROLLED VTOL AIRCRAFTS (WITHOUT AUTOMATIC PILOT)

ABSTRACT

This paper examines the flight qualities under two flight regimes, i.e., hovering flight and steady straight flight (cruising regime).

In the case of hovering flight, the disturbed motion about the aircraft c.g. is investigated, assuming that the motion parameters of the c.g.

itself are constrained. The study of this essentially unstable motion is useful for determining the characteristics of controllability (which give indications on the possibility of an efficient stabilizing intervention of the controls). For this purpose the paper evaluates on the one hand the degree of instability (the velocity with which the deviation amplitude increases), and on the other hand the oscillation frequency of the disturbance value.

As regards the cruising regime, the possibility is indicated for reducing the problem to the similar case of a conventional aircraft by constraining with the aid of controls some of the dynamic variables characterizing the disturbed motion.

BIBLIOGRAFIE

1. W. J. DUNCAN, *Principles of Control and Stability of Aircraft.* Cambridge University Press, 1952.
2. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, *Аэродинамика самолета.* Оборонгиз, Москва, 1957.
3. T. HACKER, *Stability of Partially Controlled Motions of an Aircraft.* Journal of the Aerospace Sciences, **28**, *1*, (ianuarie 1961).
4. Г. В. КАМЕНКОВ, *Об устойчивости движения.* Сборник трудов Казанского авиационного института, *9* (1939).

STUDII

AEROHIDROMECANICĂ

ASUPRA APLICĂRII TEORIEI FUNCȚIILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ ÎN HIDRODINAMICA FLUIDELOR VÎSCOASE

III. SOLUȚIA PENTRU DOMENII SIMPLU CONEXE

DE

DAN GH. IONESCU

1. În continuarea notelor [2], [3], dăm soluția problemei la limită pentru cazul unui domeniu simplu conex D, a cărui frontieră este o curbă L de clasă C^3. Un arc de curbă finit, dat sub formă parametrică $x = x(s)$, $y = y(s)$, $(a \leqq s \leqq b)$, va fi numit de clasă C^3 dacă funcțiile $x(s)$ și $y(s)$ sînt continue împreună cu derivatele lor de primele trei ordine și dacă derivatele lor de ordinul întîi nu se anulează simultan. O curbă închisă va fi numită de clasă C^3 dacă, în plus, odată cu relațiile $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$, sînt îndeplinite și relații asemănătoare pentru derivatele de primele trei ordine: $x'(a) = x'(b), \ldots, y'''(a) = y'''(b)$, aceste derivate fiind considerate la dreapta, respectiv la stînga.

2. Înmulțind ambii termenii ai relației (21) din nota I cu $\frac{1}{2\pi i} \times \frac{d\tau}{\tau - \zeta}$, $(\tau = e^{i\vartheta} \in \Lambda)$, apoi integrînd pe Λ, rezultă

$$\Phi(\zeta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \frac{\overline{\Phi'(\tau)}\, d\tau}{\tau - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{G(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta}, \tag{1}$$

ecuație care determină pe $\Phi(\zeta)$. Procedînd analog cu conjugata relației (21) din nota I, se obține formula următoare, care determină funcția $\Psi(\zeta)$, fiind cunoscută funcția $\Phi(\zeta)$:

$$\Psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} \frac{\Phi'(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{\overline{G(\tau)}\, d\tau}{\tau - \zeta} + \overline{\Phi(0)}. \tag{2}$$

Presupunem întotdeauna că funcțiile $\Phi(\zeta)$, $\Phi'(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ sînt continue în $\Delta + \Lambda$ și că funcția $G(\tau)$ este continuă și uniformă, iar derivata sa în raport cu ϑ satisface o condiție Hölder.

3. Ecuația (1) poate fi redusă la o ecuație integrală de tip Fredholm. Într-adevăr, dacă D este finit și dacă notăm

$$\Phi(\zeta) = k\omega(\zeta) + \Phi^0(\zeta), \quad k = \frac{\overline{\Phi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}, \tag{3}$$

(1) se mai poate scrie sub forma

$$\Phi^0(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{\omega(\tau) - \omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\tau)}(\tau-\zeta)}\overline{\Phi^{0\prime}(\tau)}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{G(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} \equiv A(\zeta). \tag{4}$$

Derivînd în raport cu ζ, apoi făcînd punctul $\zeta \in \Delta$ să tindă către un punct curent τ_0 al circumferinței Λ, rezultă ecuația integrală următoare, asemănătoare celor obținute de N. I. Mushelișvili în teoria elasticității, [4]:

$$\Phi^{0\prime}(\tau_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda K(\tau_0, \tau)\overline{\Phi^{0\prime}(\tau)}\,d\tau = A'(\tau_0), \tag{5}$$

unde

$$K(\zeta, \tau) = \frac{1}{\overline{\omega'(\tau)}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\omega(\tau) - \omega(\zeta)}{\tau-\zeta}\right]. \tag{6}$$

Funcția $\Phi(\zeta)$, astfel determinată, este o soluție a problemei numai dacă este îndeplinită condiția

$$\mathfrak{R}\left[\frac{\Phi^{0\prime}(0)}{\omega'(0)}\right] = \frac{1}{2S}\,\mathfrak{I}\left[\int_L \overline{g(t)}\,dt\right] = \frac{1}{S}[U]_L = 0, \tag{7}$$

unde S este aria domeniului D, deci dacă funcția de curent U este uniformă.

Dacă domeniul D este infinit, reprezentarea conformă este dată de $z = \omega(\zeta) = \omega^0(\zeta) + \lambda/\zeta$, $\omega^0(\zeta)$ fiind o funcție olomorfă în Δ, iar analogele ecuațiilor (4) și (5) sînt

$$\Phi(\zeta) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{\omega^0(\tau) - \omega^0(\zeta)}{\overline{\omega'(\tau)}(\tau-\zeta)}\overline{\Phi'(\tau)}\,d\tau = A(\zeta), \tag{8}$$

$$\Phi'(\tau_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda K^0(\tau_0, \tau)\overline{\Phi'(\tau)}\,d\tau = A'(\tau_0), \tag{9}$$

$$K^0(\zeta, \tau) = \frac{1}{\overline{\omega'(\tau)}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\omega^0(\tau) - \omega^0(\zeta)}{\tau - \zeta}\right]. \tag{10}$$

4. Existența soluției ecuațiilor integrale (5) sau (9) se demonstrează aplicînd alternativa lui Fredholm. Astfel, să presupunem că ecuația omogenă corespunzătoare lui (5) are o soluție nenulă $\Phi^{0\prime}(\tau) \not\equiv 0$, astfel încît $\Phi(\zeta) = k\,\omega(\zeta) + \Phi^0(\zeta)$. Dar, dacă viteza este nulă pe conturul Λ, funcția

$\Phi(\zeta)$ este de forma $a\omega(\zeta) + \alpha$, a fiind o constantă reală, iar α o constantă complexă; deci $\Phi^0(\zeta) = (a - k)\,\omega(\zeta) + \alpha$. Introducînd această valoare în ecuația (4) cu $A(\zeta) = 0$, rezultă $f(\zeta) = \text{const.}$, deci $\Phi^0(\tau) = \text{const.}$, ceea ce contrazice ipoteza $\Phi^{0\prime}(\tau) \not\equiv 0$. Analog se demonstrează existența soluției ecuației (9).

5. Dacă funcția $\omega(\zeta)$ este rațională, nucleele ecuațiilor (5) și (9) sînt degenerate și soluțiile se obțin sub formă finită. Aceasta permite calculul unor soluții aproximative. Într-adevăr, în conformitate cu o teoremă a lui J. L. Walsh, funcțiile $\omega(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$, $\omega''(\zeta)$ admit aproximări uniforme prin polinoame în ζ. Dacă șirurile de funcții $\{G_n(\tau)\}$, $\{G_n'(\tau)\}$, $\{G_n''(\tau)\}$, date pe curba Λ de clasă C^3, sînt uniform convergente respectiv către funcțiile $G(\tau)$, $G'(\tau)$, $G''(\tau)$, șirurile $\{\Phi_n(\zeta)\}$ și $\{\Psi_n(\zeta)\}$ converg uniform respectiv către $\Phi(\zeta)$ și $\Psi(\zeta)$, unde $\Phi_n(\zeta)$, $\Psi_n(\zeta)$ sînt soluțiile ecuațiilor de tip (5) sau (9) corespunzătoare lui $G_n(\tau)$, iar $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ sînt soluțiile corespunzătoare lui $G(\tau)$. În acest fel, se poate obține, sub formă finită, o soluție corespunzătoare unui domeniu D_n, care diferă oricît de puțin de domeniul D dat.

Primită la redacție la 27 octombrie 1961

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ГИДРОДИНАМИКЕ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

III. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

РЕЗЮМЕ

В продолжение исследований в заметках [2], [3], рассматривается установившееся медленное плоское движение вязких жидкостей. Дается решение для случая односвязанных областей, применяя метод, аналогичный данному Н.И. Мусхелишвили в теории упругости, [4].

SUR L'APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE DANS L'HYDRODYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX

III. SOLUTION POUR LES DOMAINES SIMPLEMENT CONNEXES.

RÉSUMÉ

En poursuivant les recherches effectuées dans [2], [3], l'auteur considère le mouvement plan, lent et permanent d'un liquide visqueux. On donne la solution pour le cas des domaines simplement connexes, en employant une méthode analogue à celle développée par N. I. Muskhélishvili dans la théorie de l'élasticité [4].

BIBLIOGRAFIE

1. I. BABUŠKA, K. REKTORYS Fr. VYČICHLO, *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme*. Akademie-Verlag, Berlin, 1960.
2. DAN GH. IONESCU, *Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. I. Formulele fundamentale.* Comunicările Acad. R.P.R., **6**, 981–984, (1956).
3. — *Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. II. Rezolvarea primei probleme la limită pentru cerc şi coroana circulară, cu ajutorul seriilor de puteri.* Comunicările Acad. R.P.R., **6**, 1059–1063 (1956).
4. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1954.

STUDII

TEORIA MECANISMELOR

FOLOSIREA ARCELOR DE CAME DE TRANSLAȚIE CU TACHET DE TRANSLAȚIE LA REPREZENTAREA FUNCȚIILOR

DE

CHR. PELECUDI

Reprezentarea funcțiilor sub forma unor tensiuni electrice este necesară adesea în instalațiile electrice de calcul sau în dispozitivele de comandă automată. Astfel comanda mecanismelor, după o anumită lege dată, este legată de introducerea în dispozitivul de reglaj a unei anumite dependențe funcționale [1]. Pentru aceasta sînt cunoscute așa-numitele potențiometre funcționale cu ajutorul cărora poate fi obținută reprezentarea funcțiilor de o variabilă independentă. O altă metodă [1] constă în reprezentarea funcțiilor cu ajutorul profilării electrice a potențiometrului pe calea distribuirii forțate a tensiunii electrice în lungul său, după o lege dată. Dacă în primul caz se urmărește o profilare a rezistenței potențiometrului, în cazul al doilea se montează în paralel cu diferitele porțiuni ale rezistenței potențiometrului rezistențe de diferite valori, astfel încît să se obțină o tensiune variabilă în modul dorit față de deplasarea cursorului

Avantajul întrebuințării unor fire rezistive întinse la periferia unor came profilate apare mai ales în dispozitivele care funcționează în regim variabil continuu. Problema constă deci în găsirea formei camei astfel ca lungimea arcului său să varieze în conformitate cu funcția dorită. În lucrarea [2] s-a prevăzut utilizarea arcelor camelor de rotație la reprezentarea funcțiunilor sin θ sau cos θ necesare instalației mecano-electronice de măsurare a parametrilor cinematici ai mecanismelor [3]. Întrebuințarea camelor duce, de asemenea, la lărgirea domeniului de utilizare a traductorului polar utilizat [4].

Metoda expusă în lucrarea [2] pentru camele de rotație poate fi transpusă cu succes și pentru camele de translație. În același mod, arcul camei $l(\lambda)$

$$l(\lambda) = LF(\lambda), \quad x = \lambda A, \tag{1}$$

trebuie să fie proporțional cu $F(\lambda)$, funcție pozitivă și monoton crescătoare ($F'(\lambda) > 0$) fără dimensiuni. În rest, x, y, l, L, A au dimensiunile unei lungimi.

Tensiunea culeasă de pe firul rezistiv întins la periferia camei, de rezistență R și alimentat sub tensiunea constantă U, este proporțională cu valorile funcțiunii $F(\lambda)$, , astfel.

$$V = U\frac{r}{R} = KF(\lambda), \tag{2}$$

și dacă

$$r = Rf(\lambda), \tag{3}$$

rezultă

$$f(\lambda) = mF(\lambda), \tag{4}$$

cu

$$m = \frac{K}{U} \text{ și } 0 \leqslant f(\lambda) \leqslant 1. \tag{5}$$

Prin utilizarea rezistenței $r' = R - r = Rf'(\lambda)$ se poate obține și funcția monoton descrescătoare

$$0 \leqslant f'(\lambda) = 1 - f(\lambda) \leqslant 1. \tag{6}$$

Rezolvarea problemei pe cale grafică se face din aproape în aproape după relația

$$l(\lambda_{k+1}) - l(\lambda_k) = L[F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)], \tag{7}$$

iar determinarea analitică a ordonatei profilului camei reiese din ecuația integrală

$$l(\lambda) = \int_0^\lambda \sqrt{A^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha = LF(\lambda). \tag{8}$$

Prin derivare se obține ecuația diferențială cu variabile separate

$$\frac{dy}{d\lambda} = \sqrt{L^2F'^2(\lambda) - A^2}. \tag{9}$$

Această situație avantajoasă față de camele de rotație, la care se obținea o ecuație diferențială neliniară, permite de multe ori o rezolvare directă

$$y = \int \sqrt{L^2F'^2(\lambda) - A^2}\, d\lambda + C. \tag{10}$$

În orice caz pe intervalul de variație a lui λ, în care se urmărește integrarea ecuației (9) trebuie ca

$$LF'(\lambda) \geqslant A,$$

$$-LF'(\lambda) \leqslant y'(\lambda) \leqslant +LF'(\lambda). \tag{11}$$

De asemenea, din condiția ca unghiul de presiune să fie sub limita sa admisibilă α_0 se obține

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{L^2 F'^2(\lambda) - A^2}}{A} \leqslant \operatorname{tg} \alpha_0,$$

sau

$$LF'(\lambda) \leqslant \frac{A}{\cos \alpha_0} \tag{12}$$

așa încît

$$\frac{A}{L} \leqslant F'(\lambda) \leqslant \frac{A}{L \cos \alpha_0}. \tag{13}$$

Rezultă de altfel că $F'(\lambda)$ trebuie să aibă variații reduse.

Dar din cauza acelorași neajunsuri arătate în lucrarea [2] și anume depășirea limitelor impuse de relațiile (11) și (12), fie mai ales în apropierea maximului funcției $F(\lambda)$ (respectiv $F'(\lambda) = 0$) fie obținerea unor unghiuri de presiune prea mari, cu variații mari ale ordonatei profilului camei, (fig.1) este necesar să se întrebuințeze și în cazul acestor came, pentru funcțiile monoton crescătoare, montajele potențiometrice de înmulțire sau adunare formate cu fire rezistive întinse la periferia a două came. S-a întrebuințat în acest sens aproximarea funcției pe porțiunea de lucru fie cu un trinom de gradul doi în primul caz, fie cu un binom de gradul întîi în cazul al doilea, urmărindu-se apoi ca diferențele să fie repartizate fiecărei came în diferite moduri [2]. În felul acesta funcțiile aferente fiecărei came diferă mult mai puțin de la funcția liniară și deci camele au o formă cu variații minime. Rezultatele sînt asemănătoare cu cele din lucrarea anterioară [2] privind camele de rotație, cu deosebire că diferențele între funcțiile utilizate și aproximatele lor produc aici la forma camei variații mai evidente. Într-adevăr, distanța între două abscise consecutive este constantă

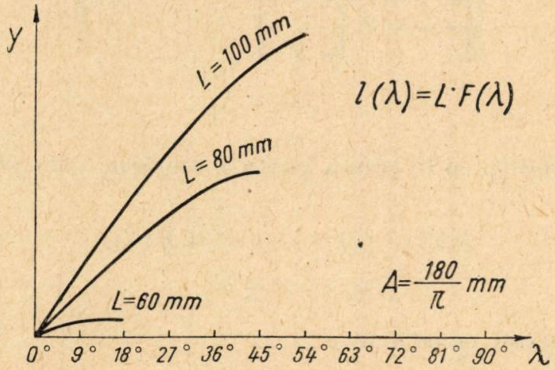


Fig. 1

în opunere cu intervalele camelor de rotație, care cresc sau descresc după cum ne depărtăm sau ne apropiem de centru.

Alte posibilități de ameliorarea formei camei și în special pentru utilizarea porțiunilor din vecinătatea maximelor funcțiilor și chiar a porțiunilor descrescătoare se obțin prin considerarea unor montaje potențiometrice de integrare aproximativă. Se întrebuințează o singură camă dar cu două cursoare așezate la o distanță fixă (h) între ele, care culeg tensiunea după firul rezistiv de la periferia camei.

Fie schema din figura 2, în care :

$$V = U \frac{r(x) - r(x-h)}{R} = KF(x), \qquad h \leqslant x \leqslant H \tag{14}$$

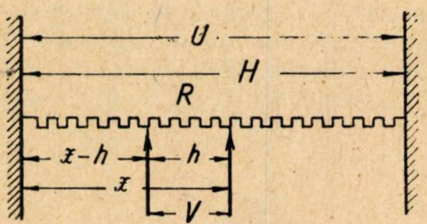


Fig. 2

și în aceleași condiții ca în prima parte a lucrării, vom obține ecuația cu diferențe finite

$$f(\lambda) - f(\lambda - \lambda_h) = m\,F(\lambda), \tag{15}$$
$$\lambda_h \leqslant \lambda \leqslant \lambda_H.$$

Soluția acestei ecuații este :

$$f(\lambda) = m\,\mathcal{F}(\lambda)$$
$$\mathcal{F}(\lambda) = F(\lambda) + F(\lambda - \lambda_h) + \ldots + F(\lambda - k\lambda_h) + \ldots \tag{16}$$

în cazul cînd seria din membrul al doilea este convergentă, avînd suma $\mathcal{F}(\lambda)$. La aceasta se poate adăuga și o funcție $C(\lambda)$ de perioadă λ_h, care în particular poate fi și o constantă, corespunzătoare ecuației omogene, adică

$$f(\lambda) = m\,[C(\lambda) + \mathcal{F}(\lambda)]. \tag{17}$$

De exemplu pentru $F(\lambda) = \sin\lambda$ se obține soluția principală [5],

$$\mathcal{F}(\lambda) = -\frac{\cos\left(\lambda + \frac{\lambda_h}{2}\right)}{2\sin\frac{\lambda_h}{2}} \tag{18}$$

şi

$$f(\lambda) = m\left[C - \frac{\cos\left(\lambda + \frac{\lambda_h}{2}\right)}{2\sin\frac{\lambda_h}{2}}\right]. \tag{19}$$

Condiţiile (13) determină domeniul de variaţie λ astfel:

$$\frac{A}{L} \leqslant \frac{\sin\left(\lambda + \frac{\lambda_h}{2}\right)}{2\sin\frac{\lambda_h}{2}} \leqslant \frac{A}{L\cos\alpha_0},$$

respectiv (în apropierea maximului funcţiunii sinus)

$$\sin\left(\lambda + \frac{\lambda_h}{2}\right) \geqslant \frac{2A}{L}\sin\frac{\lambda_h}{2} \geqslant \cos\alpha_0,$$

ceea ce duce la

$$\frac{\pi - \lambda_h}{2} + \alpha_0 \geqslant \lambda \geqslant \frac{\pi - \lambda_h}{2} - \alpha_0,$$

cu un domeniu de variaţie $\pm\alpha_0$ în jurul valorii $\lambda_0 = \frac{\pi - \lambda_h}{2}$.

Condiţiile (5) determină constanta de integrare şi coeficientul de amplificare

$$C \geqslant \frac{\sin\alpha_0}{2\sin\frac{\lambda_h}{2}} \qquad m \leqslant \frac{1}{2C}.$$

Cum $\lambda \geqslant \lambda_{\min} + \lambda_h$, domeniul de utilizare se restrînge la : $\Delta = 2\alpha_0 - \lambda_h$.

Figura 3 redă cama pentru valorile

a) $\alpha_0 = 30°$, $\lambda_h = 40°$, $\lambda_0 = 70°$, $C = 0{,}75$, $m = 0{,}6$,

$L = 50$ mm, $A = 63$ mm, $\Delta = 20°$,

$$l(\lambda) = 50\left[0{,}75 - \frac{\cos(\lambda + 20°)}{0{,}684}\right].$$

b) $\alpha_0 = 30°$, $\lambda_h = 10°$, $\lambda_0 = 85°$, $C = 3$, $m = 0{,}17$,

$L = 12{,}5$ mm, $A = 63$ mm, $\Delta = 50°$,

$$l(\lambda) = 12{,}5\left[3 - \frac{\cos(\lambda + 5°)}{0{,}17432}\right].$$

După cum se observă mărirea domeniului de utilizare Δ reduce coeficientul de amplificare m.

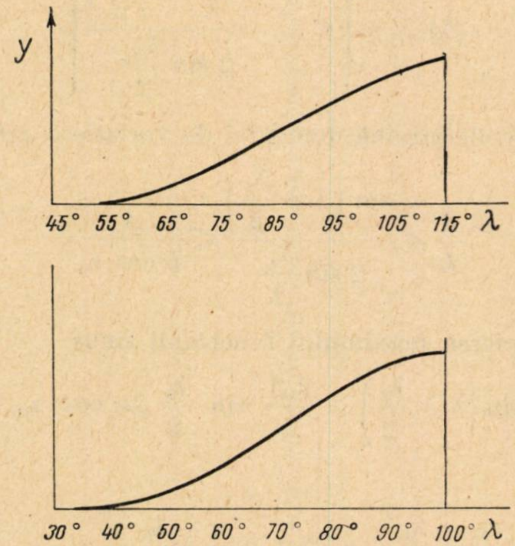


Fig. 3

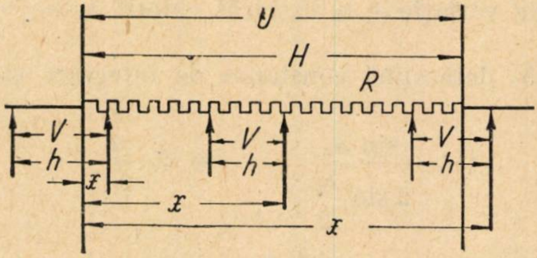


Fig. 4

În mod asemănător în cadrul schemei din figura 4, obținem

$$f(\lambda) = \begin{cases} f_1(\lambda) = m\,F(\lambda) + f_0(\lambda - \lambda_h) \qquad \text{pentru} & \lambda_h \leqslant \lambda \leqslant 2\lambda_h, \\ f_2(\lambda) = m[F(\lambda) + F(\lambda - \lambda_h)] + f_0(\lambda - 2\lambda_h), & 2\lambda_h \leqslant \lambda \leqslant 3\lambda_h, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_k(\lambda) = m\,\mathfrak{F}_k(\lambda) + f_0(\lambda - k\lambda_h) & k\lambda_h \leqslant \lambda \leqslant (k+1)\lambda_h, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_{n-1}(\lambda) = m\mathfrak{F}_{n-1}(\lambda) + f_0(\lambda - (n-1)\lambda_h), & (n-1)\lambda_h \leqslant \lambda \leqslant \lambda_H \leqslant, n\lambda_h \\ F(\lambda) = \dfrac{1 - f_{n-2}(\lambda - \lambda_h)}{m}, & \lambda_H \leqslant \lambda \leqslant n\lambda_h \\ F(\lambda) = \dfrac{1 - f_{n-1}(\lambda - \lambda_h)}{m}, & n\lambda_h \leqslant \lambda \leqslant \lambda_H + \lambda_h, \end{cases} \tag{20}$$

în care $\mathcal{F}_k(\lambda)$ reprezintă sumele de k termeni

$$\mathcal{F}_k(\lambda) = F(\lambda) + F(\lambda - \lambda_h) + \dots + F(\lambda + (k-1)\lambda_h), \tag{21}$$

iar ultimele două relaţii definesc pe $F(\lambda)$ pe intervalul $\lambda_H \leqslant \lambda \leqslant \lambda_H + \lambda_h$.

Funcţia $f(\lambda) = \dfrac{r(\lambda)}{R}$ este monoton crescătoare cu limitele $0 \leqslant f(\lambda) \leqslant 1$, iar diferenţa

$$f_k(\lambda_{\max}) - f_k(\lambda_{\min}) = m\,F((k+1)\lambda_h), \tag{22}$$

creşte sau descreşte în acelaşi fel cu $F((k+1)\lambda_h)$ şi nu depinde de $f_0(\lambda)$. Pentru intervalul λ_h, condiţiile (13) devin

$$\frac{A}{L} < \frac{mF((k+1)\lambda_h)}{\lambda_h} < \frac{A}{L\cos\alpha_0}. \tag{23}$$

Funcţia $f_0(\lambda)$ joacă rolul unei constante iterative de perioadă λ_h şi are pe intervalul $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_h$ o formă oarecare, dar cu limitele :

$$f_0(0) = 0 \quad f_0(\lambda_h) = m\,F(\lambda_h). \tag{24}$$

Se poate lua astfel forma liniară

$$f_0(\lambda) = mF(\lambda_h)\frac{\lambda}{\lambda_h}, \tag{25}$$

sau se se poate cere ca în intervalul $k\lambda_h \leqslant \lambda \leqslant (k+1)\lambda_h$funcţia $f_k(\lambda)$ să fie liniară.

$$f_k(\lambda) = m\,\mathcal{F}_k(\lambda) + f_0(\lambda - k\lambda_h) = \alpha\lambda + \beta, \tag{26}$$

ceea ce conduce la

$$f_0(\lambda) = \alpha\lambda - m\,\overline{\mathcal{F}}_k(\lambda) + \alpha k\lambda_h + \beta, \tag{27}$$

$$\overline{\mathcal{F}}_k(\lambda) = \mathcal{F}_k(\lambda + k\lambda_h) = F(\lambda + \lambda_h) + F(\lambda + 2\lambda_h) + \dots + F(\lambda + k\lambda_h) \tag{28}$$

rezultînd

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{m}{\lambda_h} F(\lambda_{\max}), \\ \beta &= m\,[\mathcal{F}_k(\lambda_{\min}) - kF(\lambda_{\max})]. \end{aligned} \tag{29}$$

Pentru acelaşi exemplu $F(\lambda) = \sin\lambda$ avem

$$\mathcal{F}_k(\lambda) = \frac{\sin\left(\lambda - \frac{k-1}{2}\lambda_h\right)\sin\frac{k\lambda_h}{2}}{\sin\frac{\lambda_h}{2}},$$

$$\mathcal{F}_k(\lambda) = \frac{\sin\left(\lambda + \frac{k+1}{2}\lambda_h\right)\sin\frac{k\lambda_h}{2}}{\sin\frac{\lambda_h}{2}}, \tag{30}$$

şi rezultatele sînt asemănătoare cu cele din situaţia schemei precedente.

În cazul valorilor $m = \lambda_h$ mici, soluţia ecuaţiei cu diferenţe finite (15) tinde spre soluţia ecuaţiei diferenţiale limită, $\lambda_h \to 0$.

$$f(\lambda) \simeq \int F(\lambda)\,d\lambda + C. \tag{31}$$

Schema din figura 5 conduce la

$$V = U\frac{r(x) - r(x-h)}{r(x) + R_0} = KF(x), \qquad h \leqslant x \leqslant H, \tag{32}$$

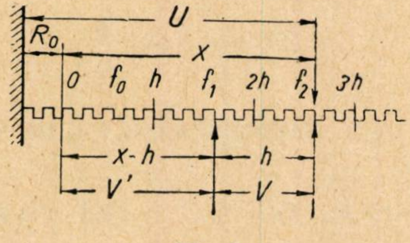


Fig. 5

sau cum $f(\lambda) = \frac{r(\lambda)}{R} > 0$ este monoton crescătoare avem $0 < mF(\lambda) < 1$

şi se ajunge la ecuaţia cu diferenţe finite

$$P(\lambda) f(\lambda) - f(\lambda - \lambda_h) = a\,Q(\lambda), \tag{33}$$

unde

$$a = \frac{R_0}{R}, \quad P(\lambda) + Q(\lambda) = 1, \tag{34}$$

$$0 < P(\lambda) = 1 - mF(\lambda) < 1, \quad 0 < Q(\lambda) = mF(\lambda) < 1.$$

Soluția sa, pe diferite intervale, este

$$f(\lambda) = \begin{cases} f_1(\lambda) = a\,\dfrac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} + \dfrac{f_0\, f(\lambda - \lambda_h)}{P(\lambda)} & \text{pentru} \quad \lambda_h \leqslant \lambda \leqslant 2\,\lambda_h, \\ f_2(\lambda) = a\left[\dfrac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} + \dfrac{Q(\lambda - \lambda_h)}{P(\lambda)P(\lambda-\lambda_h)}\right] + \dfrac{f_0(\lambda - 2\,\lambda_h)}{P(\lambda)P(\lambda-\lambda_h)} & 2\lambda_h \leqslant \lambda \leqslant 3\lambda_h. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ f_k(\lambda) = a\,\Sigma_k(\lambda) + \dfrac{f_0(\lambda - k\,\lambda_h)}{\Pi_k(\lambda)} & k\lambda_h \leqslant \lambda < k+1)\,\lambda_h, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases} \tag{35}$$

cu

$$\Sigma_k(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} + \frac{Q(\lambda - \lambda_h)}{P(\lambda)P(\lambda-\lambda_h)} + \dots + \frac{Q(\lambda - (k-1)\,\lambda_h)}{P(\lambda)P(\lambda-\lambda_h),\cdots P(\lambda-(k-1)\lambda_h)},$$

$$\Pi_k(\lambda) = P(\lambda)P(\lambda - \lambda_h)\dots P(\lambda - (k-1)\,\lambda_h) \tag{36}$$

și unde $f_0(\lambda)$ joacă același rol de constantă iterativă de formă oarecare pe intervalul $0\dots\lambda_h$ dar cu limitele.

$$f_0(0) = 0, \quad f_0(\lambda_h) = a\,\frac{Q(\lambda_h)}{P(\lambda_h)}. \tag{37}$$

Dacă se consideră

$$V' = U\,\frac{r(x-h) + R_0}{r(x) + R_0} = kF(\lambda), \tag{38}$$

se obține o ecuație cu diferențe finite de aceeași formă dar cu coeficienții $P(\lambda)$ și $Q(\lambda)$ schimbați

$$Q(\lambda)\,f(\lambda) - f(\lambda - \lambda_h) = a\,P(\lambda). \tag{39}$$

Ambele ecuații (33) și (39) devin omogene prin schimbarea

$$\bar f(\lambda) = f(\lambda) + a > a, \tag{40}$$

adică

$$P(\lambda)\,\bar f(\lambda) - \bar f(\lambda - \lambda_h) = 0, \tag{41}$$

$$Q(\lambda)\,\bar f(\lambda) - \bar f(\lambda - \lambda_h) = 0, \tag{42}$$

cu soluțiile

$$f(\lambda = \begin{cases} \bar f_1(\lambda) = \dfrac{\bar f_0(\lambda - \lambda_h)}{P(\lambda)}, & \text{pentru} \quad \lambda_h \leqslant \lambda \leqslant 2\,\lambda_h, \\ \bar f_2(\lambda) = \dfrac{\bar f_0(\lambda - 2\,\lambda_h)}{P(\lambda)P(\lambda-\lambda_h)}, & \text{etc.} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \bar f_k(\lambda) = \dfrac{\bar f_0(\lambda - k\,\lambda_h)}{\Pi_k(\lambda)}, & \end{cases} \tag{43}$$

în care

$$\overline{f}_0(0) = a, \quad \overline{f}_0(\lambda_h) = \frac{a}{P(\lambda_h)} \cdot \tag{44}$$

Raportul

$$0 < \frac{\overline{f}_k(\lambda_{\min})}{\overline{f}_k(\lambda_{\max})} = P(\lambda_{\max}) < 1, \tag{45}$$

nu depinde de $\overline{f}_0(\lambda)$, iar condițiile (13) se transformă pe intervalul λ_h în :

$$\frac{A}{L} < \frac{a}{\Pi_{k+1}[(k+1)\lambda_h]} \frac{m\overline{f}[(k+1)\lambda_h]}{\lambda_h} < \frac{A}{L\cos\alpha_0} \cdot \tag{46}$$

De asèmenea, dacă $m = \lambda_h$ iau valori mici :

$$\overline{f}(\lambda) \simeq C \cdot e^{\int \overline{f}(\lambda)\, d\lambda}, \tag{47}$$

soluția ecuației cu diferențe finite urmează îndeaproape soluția ecuației diferențiale ce se obține la limită ($\lambda_h \rightarrow 0$).

Primită la redacție la 27 octombrie 1961

ПРИМЕНЕНИЕ ДУГ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ КУЛАЧКОВ С ПОСТУПАТЕЛЬНЫМ ТОЛКАТЕЛЕМ ПРИ ИЗОБРАЖЕНИИ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В работе распространяются возможности применения кулачковых дуг на электрическое изображение функций. В начале дается обзор потенциометрических схем умножения и сложения, используемых в работе [3], составленных из проволок сопротивления, натянутых по периферии поступательных кулачков для которых следят, чтобы длина дуги изображала функцию $f(\lambda)$. Далее рассматриваются различные схемы интегрирования с тем, чтобы можно было увеличить класс функций, которые могут быть изображены. Таким образом, можно использовать и участки в окрестности максимальных точек функций, а также и нисходящие участки, как это показывается в тексте на примере.

USE OF THE ARCS OF TRANSLATION CAMS WITH TRANSLATION TAPPET FOR THE REPRESENTATION OF FUNCTIONS

ABSTRACT

The paper extends the possibility of using the arcs of cams for the electrical representation of functions. The addition and multiplication potentiometer circuits presented in a previous paper, are reviewed. They consist of resistive wires placed on the translation cams whose arc length should represent the function $f(\lambda)$. Various integration circuits are then examined in order to augment the class of functions which may be represented. Thus, the portions situated in the vicinity of the maximum of the function and even of the decreasing portions may be used.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Problemele modelării electrice.* I.S.R.S., Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1953.
2, CHR. PELECUDI, *Reprezentarea funcţiilor cu ajutorul arcelor de came de rotaţie şi tachet de translaţie.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *6* (1960).
3. R. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC, *Study on the mechanical transducers for the determination of paths in plane mechanisms, in Cartesian or polar coordinate systems.* Bul. Inst. politehnic Iaşi, *1*—2 (1958).
4. R. BBOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC, GR. ANTONESCU, *Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *3* (1959).
5. M. GHERMĂNESCU, *Ecuaţii funcţionale.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1960.

ASUPRA UNOR CURBE SFERICE ȘI A MECANISMELOR NECESARE PRODUCERII LOR

DE

R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI și L. CALMACIUC

1. În tehnologia de fabricație a bilelor de rulmenți, în afară de sortarea bilelor după dimensiuni, se impune a fi cercetată și calitatea suprafețelor lor. Orice zgîrietură sau alt defect clasează bila drept necorespunzătoare. Explorarea suprafețelor sferice și descoperirea defectelor se face uneori vizual, dar bine automat, prin procedeul trimiterii unui spot luminos pe suprafața bilei, care apoi reflectat cu intensitate variabilă în funcție de starea suprafeței, cade pe placa unei celule fotoelectrice producînd un curent de intensitate variabilă. Acesta amplificat poate să pună în funcție clapete pentru sortarea bun-rău. În acest sens se pune problema ca centrul spotului luminos să descrie pe sfera în rotație o curbă de lungime minimă, dar între ramurile căreia să nu existe o depărtare mai mare decît grosimea spotului luminos, pentru a acoperi deci întreaga suprafață. Totodată, producerea rotației sferei trebuie făcută cu mijloace cît mai simple, urmărindu-se ca parcurgerea curbei să se facă într-un timp cît mai scurt și de preferință cu viteză constantă.

2. Pentru ușurarea urmăririi calculelor prezentăm, înaintea studiului, formulele generale ajutătoare, legate de mișcarea unui solid cu un punct fix (centrul sferei).

Să considerăm un sistem de coordonate cartezian ortogonal, mobil, legat de sfera în mișcare $Oxyz$ și respectiv coordonatele polare ale unui punct de pe sferă α și θ (fig. 1). Ecuația unei curbe sferice în coordonate polare va fi de forma $\alpha = f(\theta)$.

Dacă se consideră și un sistem de axe fixe $Ox_f\, y_f\, z_f$ cu axa Oz_f trecînd prin punctele O și P_f, unde P_f este punctul în repaus ce descrie pe sfera în rotație curba căutată și se iau unghiurile lui Euler (fig. 1)

$$\begin{aligned}&\psi = \text{precesia}\\ &\varphi = \text{rotația proprie și } \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad (1)\\ &\theta = \text{nutația}\end{aligned}$$

atunci coordonatele punctului P_f faţă de axele mobile sînt

$$\begin{aligned} x &= R \sin\theta \sin\varphi, \\ y &= R \sin\theta \cos\varphi, \\ z &= R \cos\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

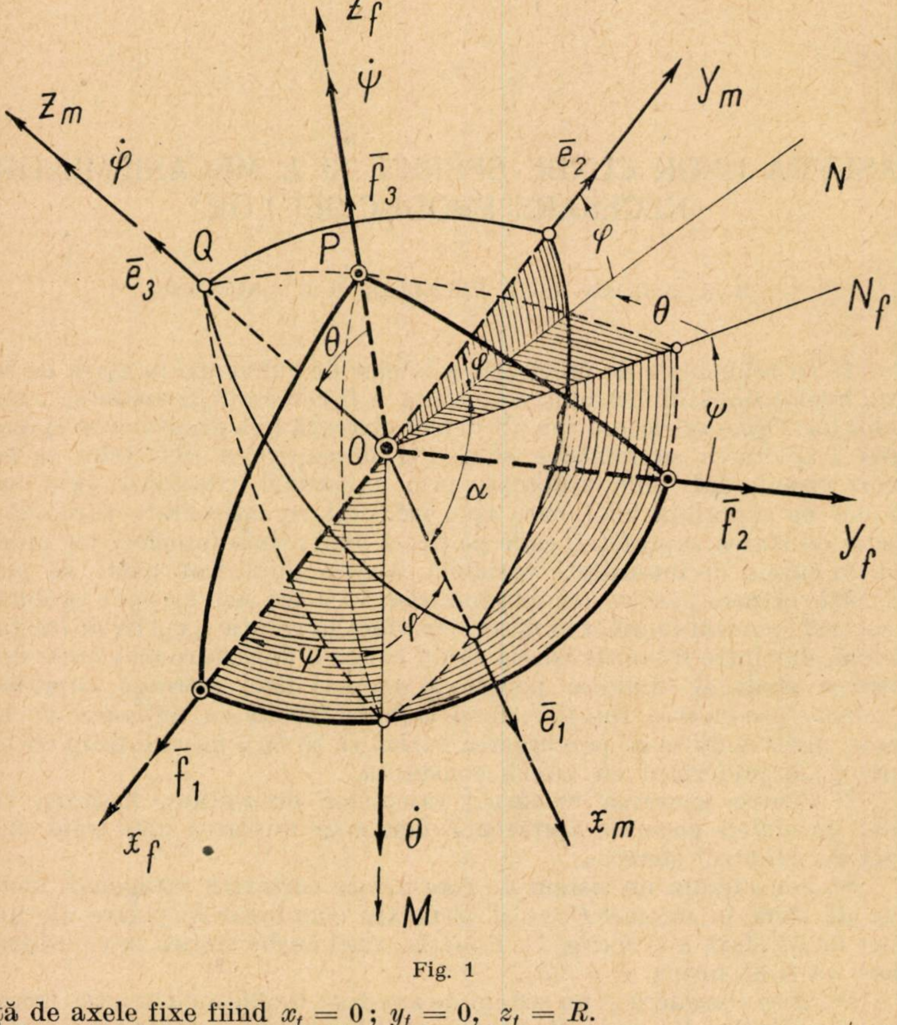

z_f
$\dot{\psi}$
z_m
$\dot{\varphi}$
y_m
$\bar{e}_2$
$\bar{f}_3$
N
Q
P
φ
$\bar{e}_3$
θ
N_f
θ
φ
ψ
O
α
$\bar{f}_2$
y_f
φ
ψ
$\bar{e}_1$
$\bar{f}_1$
x_f
$\dot{\theta}$
x_m
M

Fig. 1

faţă de axele fixe fiind $x_f = 0$; $y_f = 0$, $z_f = R$.

Proiecţiile vectorului $\overline{\omega}$ pe axele mobile sînt

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos\varphi + \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi, \\ \omega_y &= -\dot{\theta} \sin\varphi + \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

iar pe axele fixe avem

$$\begin{aligned}\omega_{xf} &= \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi,\\ \omega_{yf} &= \dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi,\\ \omega_{zf} &= \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta.\end{aligned}\tag{4}$$

Dacă se consideră că repaosul absolut al punctului P_f provine dintr-o mişcare de transport o dată cu sfera şi o mişcare inversă (relativă) faţă de axele mobile, avem :

$$\begin{aligned}&\bar v_r = \bar v\\ &\bar v_t = \bar\omega\times\bar r \qquad \bar v_a = \bar v + \bar\omega\times\bar r = 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Proiecţiile vitezei relative $\bar v$ pe axele triedului mobil

$$\begin{aligned}v_x &= \dot x = R\,[\cos\theta\sin\varphi\ \dot\theta + \sin\theta\cos\varphi\ \dot\varphi] = -\,[z\omega_y - y\omega_z],\\ v_y &= \dot y = R\,[\cos\theta\cos\varphi\ \dot\theta - \sin\theta\sin\varphi\ \dot\varphi] = -\,[x\omega_z - z\omega_x],\\ v_z &= \dot z = -\,R\sin\theta\ \dot\theta = -\,[y\omega_x - x\omega_y],\\ &\qquad v = R\sqrt{\dot\theta^2 + \sin^2\theta\ \dot\varphi^2},\end{aligned}\tag{6}$$

sînt egale şi de semn contrar cu cele ale vitezei de transport $\bar\omega\times\bar r$. Analog avem pentru proiecţiile vitezei pe axele triedului fix

$$\begin{aligned}v_{xf} &= -\,R\,[\dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\cos\psi\sin\theta] = -\,R\,\omega_{yf},\\ v_{yf} &= R\,[\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\psi\sin\theta] = R\,\omega_{xf},\\ v_{zf} &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Pentru transformarea componentelor vectorilor dintr-un sistem de coordonate în celălalt, avem mai întîi :

$$\bar f_j = a_j^i\bar e_i \qquad \bar e_i = b_i^j\bar f_j \tag{8}$$

(cu sumare după indicii muţi), în care $\bar e_i$ şi $\bar f_j$ sînt versorii axelor mobile şi fixe (fig. 1).

Coeficienţii a_j^i în raport cu unghiurile lui Euler sînt

$$\begin{aligned}a_1^1 &= \cos(\bar e_1\bar f_1) = -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi \mp \cos\varphi\cos\psi,\\ a_1^2 &= \cos(\bar e_2\bar f_1) = -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi \pm \sin\varphi\cos\psi,\\ a_1^3 &= \cos(\bar e_3\bar f_1) = \sin\theta\sin\psi,\\ a_2^1 &= \cos(\bar e_1\bar f_2) = \cos\theta\sin\varphi\cos\psi \mp \cos\varphi\sin\psi,\\ a_2^2 &= \cos(\bar e_2\bar f_2) = \cos\theta\cos\varphi\cos\psi \pm \sin\varphi\sin\psi,\\ a_2^3 &= \cos(\bar e_3\bar f_2) = -\sin\theta\cos\psi,\\ a_3^1 &= \cos(\bar e_1\bar f_3) = \sin\theta\sin\varphi,\\ a_3^2 &= \cos(\bar e_2\bar f_3) = \sin\theta\cos\varphi,\\ a_3^3 &= \cos(\bar e_3\bar f_3) = \cos\theta.\end{aligned}\tag{9}$$

Determinantul transformării ortogonale este $A = \mp 1$. Coeficienţii transformării inverse devin :

$$\begin{aligned}
b_1^1 &= \frac{a_1^1}{A} = \cos\varphi\cos\psi \pm \cos\theta\sin\varphi\sin\psi,\\
b_1^2 &= \frac{a_2^1}{A} = \cos\varphi\sin\psi \mp \cos\theta\sin\varphi\cos\psi,\\
b_1^3 &= \frac{a_3^1}{A} = \mp\sin\theta\sin\varphi,\\
b_2^1 &= \frac{a_1^2}{A} = -\sin\varphi\cos\psi \pm \cos\varphi\cos\theta\sin\psi,\\
b_2^2 &= \frac{a_2^2}{A} = -\sin\varphi\sin\psi \mp \cos\theta\cos\varphi\cos\psi,\\
b_2^3 &= \frac{a_3^2}{A} = \mp\sin\theta\cos\varphi,\\
b_3^1 &= \frac{a_1^3}{A} = \mp\sin\theta\sin\varphi,\\
b_3^2 &= \frac{a_2^3}{A} = \pm\sin\theta\cos\psi,\\
b_3^3 &= \frac{a_3^3}{A} = \mp\cos\theta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Dacă vectorul $\overline{V}$ are componentele F^i şi E^j în cele două sisteme de coordonate

$$\overline{V} = F^1\overline{f}_1 + F^2\overline{f}_2 + F^3\overline{f}_3 = E^1\bar{e}_1 + E^2\bar{e}_2 + E^3\bar{e}_3, \tag{11}$$

transformarea lor se face conform relaţiilor cunoscute (cu sumare după indicii muţi)

$$F^i = b_j^i E^j, \qquad E^j = a_i^j F^i. \tag{12}$$

3. Dat fiind condiţiile problemei, curba optimă de cercetat trebuie să aibă lungimea minimă, eventual să nu se intersecteze, fără puncte multiple, să treacă prin punctele Q_+ $(0,0,+R)$; $(0,0,-R)$ şi să fie intersectată de un cerc mare variabil, normal pe curbă, în două puncte consecutive la o distanţă mai mică decît a — grosimea spotului luminos. La aceste condiţii răspunde spirala sferică de ecuaţie

$$\text{arc } QP = R\theta = k\alpha, \tag{13}$$

sau

$$\alpha = m\theta \quad \text{şi} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - m\theta. \tag{14}$$

Pentru valorile lui $m = \frac{R}{k} \gg 1$ mari (fig. 2), distanța pe un cerc mare care trece prin polii Q_+ și Q_- aproape normal curbei între două puncte consecutive de intersecție este

$$\Delta = R\,\theta_{2\pi} = 2\pi k \quad \text{cu} \quad \alpha = 2\pi \tag{15}$$

și poate fi făcută mai mică decît grosimea spotului de explorat, pentru

$$k \leqslant \frac{a}{2\pi} \quad \text{sau} \quad m \geqslant \frac{2\pi R}{a} \cdot \tag{16}$$

In acest caz este nevoie de o singură ramură a curbei între punctele Q_+ și Q_-.

Dacă se consideră valorile lui $m = \frac{R}{k} \ll 1$ mici (fig. 3) spirala se apropie de forma cercurilor mari, care trec prin punctele Q_+ și Q_- și în acest caz sînt necesare mai multe ramuri de curbă pentru a acoperi întreaga suprafață. Distanța pe cercul mare $z = 0$ între două ramuri consecutive ale curbei este

$$\Delta = R\alpha_{2\pi} = 2\pi m R \quad \text{cu} \quad \theta = 2\pi, \tag{17}$$

obținîndu-se condiția

$$k \geqslant \frac{2\pi R^2}{a} \quad \text{sau} \quad m \leqslant \frac{a}{2\pi R} \cdot \tag{18}$$

Numărul de ramuri necesare ale curbei între punctele Q_+ și Q_- va fi

$$p = \frac{2\pi R}{\Delta} = \frac{1}{m} \geqslant \frac{2\pi R}{a} \cdot \tag{19}$$

Lungimea spiralei se calculează din relația (6)

$$L = p \int_{Q_+}^{Q_-} v\,dt = 2pR \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + m^2 \sin^2 \theta}\, d\theta, \tag{20}$$

care pentru schimbarea de variabilă $\theta = \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi}$ capătă forma unei integrale eliptice complete de speța a doua

$$L = 2pR\sqrt{1 + m^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \bar{k}^2 \sin^2 \bar{\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= 2pR\sqrt{1 + m^2}\; E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}\right), \tag{21}$$

cu

$$\bar{k} = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} \quad \text{sau} \quad \bar{k} = \sin \bar{\alpha}\,; \quad \bar{\alpha} = \operatorname{arctg} m. \tag{22}$$

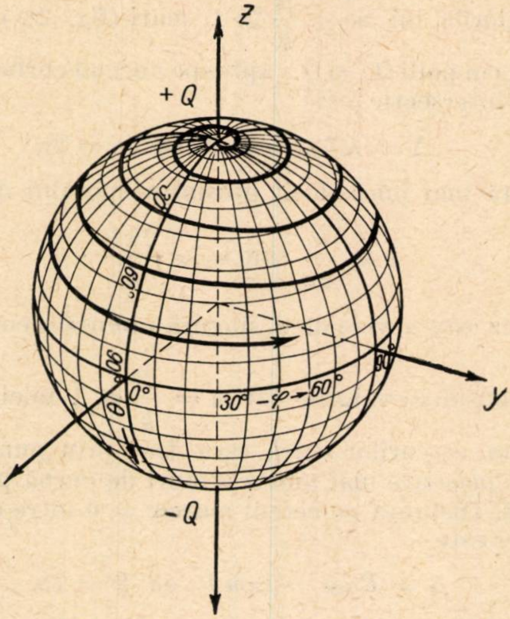

z
+Q
30°
60°
90°
0°
θ
30°
−φ
60°
90°
y
x
−Q

Fig. 2

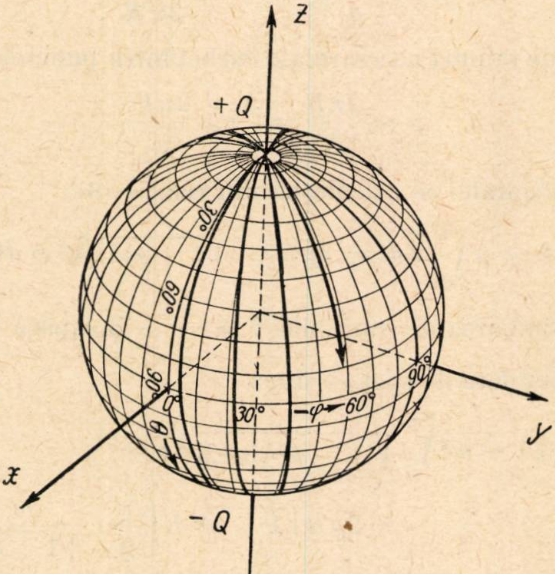

z
+Q
30°
60°
90°
0°
θ
30°
φ
60°
90°
y
x
−Q

Fig. 3

Astfel pentru o bilă de rulment $\varnothing = 6$ mm și un spot luminos $a = 1$ mm, avem :

— Pentru figura 2 : $m = 20 > \frac{2\pi 3}{1}$; $\bar{\alpha} = \text{arctg } 20 = 87°8'$; $p = 1$;

$E = 1{,}0050$; $L \simeq 6.20\ 1{,}0050 \simeq 121$ mm.

— Pentru figura 3 : $m = \frac{1}{20} < \frac{1}{2\pi 3}$; $\bar{\alpha} = \text{arctg } \frac{1}{20} = 2° \cdot 52'$; $p = 20$;

$E = 1{,}5698$; $L \simeq 6.20.1{,}001.1.5698 = 190$ mm.

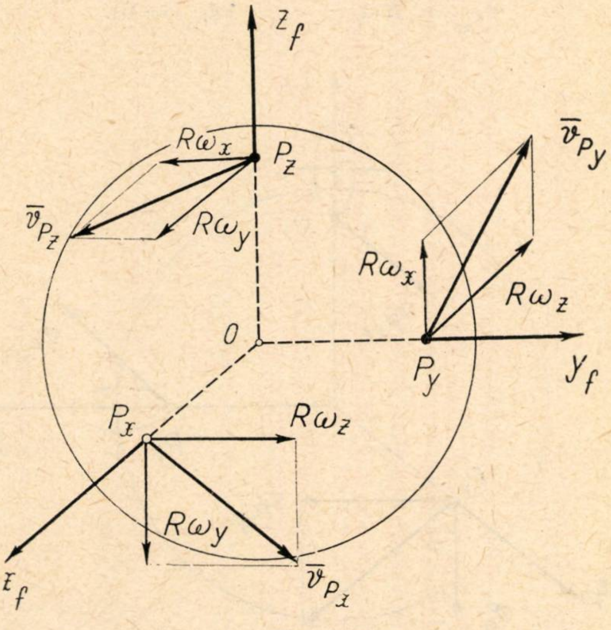


Fig. 4

4. Producerea mișcării bilei la prescrierea valorilor componentelor vitezei pe axele fixe se face prin antrenare cu roți de fricțiune în punctele unde axele triedului fix intersectează suprafața sferei. Acest procedeu necesită o orientare și o viteză periferică a roților antrenoare după rezultanta vitezelor din punctele respective, ținînd seama de componentele rotațiilor după celelalte două axe (fig. 4).

Astfel

$$\begin{aligned} \bar{v}_{P_x} &= R\,(\omega_{zf}\,\bar{f}_2 - \omega_{yf}\,\bar{f}_3), \\ \bar{v}_{P_y} &= R\,(\omega_{xf}\,\bar{f}_3 - \omega_{zf}\,\bar{f}_1), \qquad (23) \\ \bar{v}_{P_z} &= R\,(\omega_{yf}\,\bar{f}_1 - \omega_{xf}\,\bar{f}_2). \end{aligned}$$

Or, dacă ω_{xf} ; ω_{yf} ; ω_{zf} nu sînt constante, direcţia şi mărimea vitezelor $\overline{v}_{Px}$, $\overline{v}_{Py}$, $\overline{v}_{Pz}$ sînt variabile, ceea ce face o astfel de instalaţie dificilă. Chiar dacă două din componentele vectorului $\overline{\omega}$ sînt constante, numai viteza unui punct P va fi constantă.

În mod normal pentru determinarea lui ω_{xf}, ω_{yf}, ω_{zf} trebuie prescrise trei mărimi scalare, oricare din componentele vitezelor punctelor P_x, P_y, P_z, dar din cauza poziţiilor particulare ale punctelor, va trebui să considerăm ($\omega_x = 0$)

$$\begin{aligned} v_{P_{yx}} &= - R\omega_z & v_{P_{yt}} &= 0, \\ v_{P_{zx}} &= R\omega_y & (v_{P_{zy}} &= 0). \end{aligned} \tag{24}$$

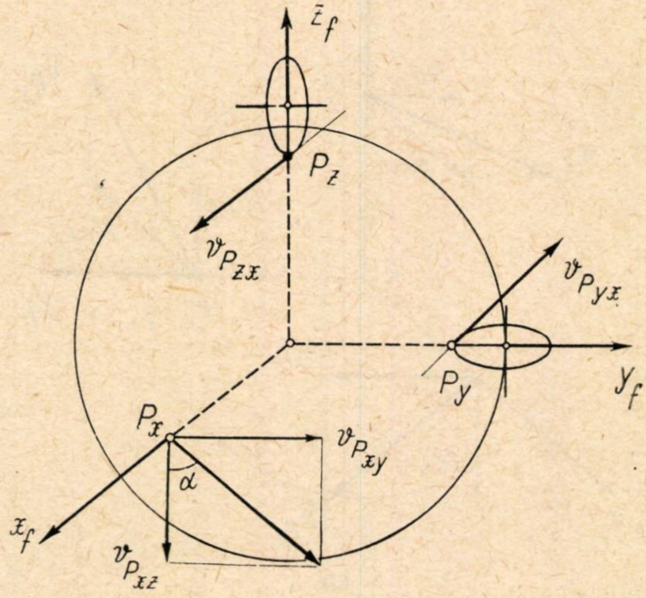


Fig. 5

Considerarea componentelor $v_{P_{xy}}$ şi $v_{P_{xz}}$ numai din punctul P_x nu determină univoc pe ω_x.

Sprijinirea sferei în trei puncte pe care ar aluneca cu frecare minimă şi acţionarea ei prin două roţi de fricţiune în punctele P_y şi P_z, conform formulelor de mai sus (fig. 5) ar asigura practic sferei în tot timpul mişcării un mers liniştit, cu centrul perfect fix. De asemenea, prin construcţia aleasă vitezele punctelor P_y şi P_z au în acest fel direcţie constantă prezentîndu-se numai inconvenientul frecării pe cele trei puncte fixe sau eventual numai în P_x.

5. Dacă se notează componentele vitezei unghiulare pe axele fixe cu C_1, C_2, C_3 şi se consideră ecuaţia curbei, avem

$$\begin{aligned} \varphi &= F(\theta), \\ \omega_{xf} &= [\cos\psi + \sin\theta\sin\psi\, F'(\theta)]\,\dot{\theta} = C_1, \\ \omega_{yf} &= [\sin\psi - \sin\theta\cos\psi\, F'(\theta)]\,\dot{\theta} = C_2, \\ \omega_{zf} &= [\dot{\psi} + \cos\theta\, F'(\theta)\,\dot{\theta}] = C_3, \end{aligned} \tag{25}$$

patru relaţii care leagă între ele şase mărimi $C_1\ C_2\ C_3$ şi $\psi\ \varphi\ \theta$. Alegerea arbitrară a trei dintre mărimi presupune îndeplinirea unei condiţii de compatibilitate (se consideră C_1 şi C_2 constanţi)

$$\dot{\varphi} = F'(\theta)\,\dot{\theta} \tag{26}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{1 + \sin^2\theta\, F'^2(\theta)}}, \tag{27}$$

$$\dot{\psi} = \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{[1 + \sin^2\theta\, F'^2(\theta)]^3}}\,[\cos\theta\, F'(\theta) + \sin\theta\, F''(\theta)] \tag{28}$$

şi deci

$$\frac{C_3^2}{C_1^2 + C_2^2} = \frac{[2\cos\theta\, F'(\theta) + \sin\theta\, F''(\theta) + \cos\theta\sin^2\theta\, F'^3(\theta)]^2}{[1 + \sin^2\theta\, F'^2(\theta)]^3}. \tag{29}$$

Cunoaşterea curbelor $\varphi = F(\theta)$ ne dă posibilitatea alegerii a două viteze constante şi a determinării celei de-a treia, care în general va fi variabilă, în conformitate cu formula (29).

Pentru spirala sferică $\varphi = \frac{\pi}{2} - m\,\theta$ avem

$$\frac{C_3^2}{C_1^2 + C_2^2} = \frac{(2 + m^2\sin^2\theta)^2}{(1 + m^2\sin^2\theta)^3}\cdot m^2\cos^2\theta. \tag{30}$$

Determinarea curbelor $\varphi = F(\theta)$ prin cunoaşterea vitezelor C_1, C_2, C_3 se face din ecuaţia diferenţială (29) prin schimbarea de variabilă

$$\sin\theta\, F'(\theta) = \operatorname{tg} u. \tag{31}$$

Prin relaţiile

$$\begin{aligned} \cos\theta\, F'(\theta) + \sin\theta\, F''(\theta) &= \frac{1}{\cos^2 u}\cdot\frac{du}{d\theta} \\ F'(\theta) &= \frac{\operatorname{tg} u}{\sin\theta}, \end{aligned} \tag{32}$$

se ajunge la ecuaţia diferenţială

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cdot\frac{1}{\cos u} - \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg}\theta} \tag{33}$$

şi mai departe cu

$$v = \sin\theta \sin u = \frac{\sin^2\theta\, F'(\theta)}{\sqrt{1 + \sin^2\theta\, F'^2(\theta)}}, \quad (34)$$

obţinem

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin\theta. \quad (35)$$

Dacă se pot separa variabilele

$$\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = f_1(v) \cdot f_2(\theta), \quad (36)$$

soluţia este

$$\int \frac{dv}{f_1(v)} = \int f_2(\theta) \sin\theta\, d\theta + C. \quad (37)$$

De exemplu în cazul cînd $\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = K$ (const.), respectiv cînd componentele vitezelor unghiulare sînt constante, duce desigur la obţinerea unor cercuri meridiane pe sferă, axa de rotaţie fiind fixă. Avînd în vedere că $v = c - K \cos\theta$, ecuaţia lor este

$$\varphi = F(\theta) = \int \frac{C - K\cos\theta}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - (C - K\cos\theta)^2}}\, d\theta$$

şi care pentru $C = K$ devine

$$\varphi = \arc\sin K \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}; \quad \psi = \varphi + \operatorname{arctg}\frac{C_2}{C_1}$$

reprezentînd un cerc descris de punctul P_z, cînd axa mobilă Oz_m se sprijină pe el iar axa de rotaţie se află în planul mobil $Ox_m z_m$ şi în planul fix $Ox_f z_f$.

Obţinerea funcţiei $v(\theta)$ conduce la ecuaţia curbei prin

$$\varphi = F(\theta) = \int \frac{v(\theta)\, d\theta}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - v^2}}, \quad (38)$$

iar

$$\psi = \arcsin\frac{v(\theta)}{\sin\theta} + \operatorname{arctg}\frac{C_2}{C_1}. \quad (39)$$

6. Producerea curbelor de explorare a suprafeţei sferice prin cunoaşterea componentelor vitezelor unghiulare pe axele mobile, conduce la aceleaşi rezultate, corespunzînd din punct de vedere al calculului schimbării unghiului φ cu ψ.

Pentru punctul P poziționat prin coordonatele ψ și θ cu ecuația de legătură

$$\psi = F(\theta)$$

avem asemănător

$$\begin{aligned} \omega_x &= [\cos\varphi + \sin\varphi \sin\theta\, F'(\theta)]\, \dot\theta = C_1, \\ \omega_y &= [-\sin\varphi + \cos\varphi \sin\theta\, F'(\theta)]\, \dot\theta = C_2, \\ \omega_z &= \dot\varphi + \cos\theta\, F'(\theta)\, \dot\theta = C_3, \end{aligned} \tag{40}$$

obținînd în final pentru schimbarea $\sin\theta\, F'(\theta) = \operatorname{tg} u$

$$\begin{aligned} &\varphi = u - \operatorname{arctg}\frac{C^2}{C_1}, \\ &\dot\varphi = \dot u = \frac{du}{d\theta}\dot\theta = \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{[1 + \sin^2\theta\, F'^2(\theta)]^3}}\,[\cos\theta\, F'(\theta) + \sin\theta\, F''(\theta)], \\ &\dot\psi = F'(\theta)\,\dot\theta \\ &\dot\theta = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\cos u = \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{1 + \sin^2\theta\, F'^2(\theta)}}. \end{aligned} \tag{41}$$

De asemenea, ecuația de compatibilitate

$$\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \frac{2\cos\theta\, F'(\theta) + \sin\theta\, F''(\theta) + \cos\theta \sin^2\theta\, F'^3(\theta)}{[1 + \sin^2\theta\, F'^2(\theta)]^{3/2}}, \tag{42}$$

sau

$$\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos u\left[\frac{du}{d\theta} + \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg}\theta}\right] \tag{43}$$

este identică cu cea de la paragraful precedent.

7. Pentru prescrierea unor viteze unghiulare de precesie $\dot\psi$ de rotație proprie $\dot\varphi$ și de nutație $\dot\theta$, eventual constante, și pentru mai multă generalitate vom considera un punct oarecare de coordonate fixe $x_f\ y_f\ z_f$ deoarece P_z față de axa Oz, respectiv față de vectorul $\dot\theta$, are o situație particulară. Coordonatele unui astfel de punct față de sistemul mobil în conformitate cu formulele (12) sînt

$$\begin{aligned} x_m &= (-\cos\theta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi)\, x_f + \\ &\quad (\cos\theta \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi)\, y_f + \\ &\quad \sin\varphi \sin\theta\, z_f, \\ y_m &= (-\cos\theta \cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi)\, x_f + \\ &\quad (\cos\theta \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi)\, y_f + \\ &\quad \cos\varphi \sin\theta\, z_f, \\ z_m &= \sin\theta \sin\psi\, x_f - \sin\theta \cos\psi\, y_j + \cos\theta\, z_f. \end{aligned} \tag{44}$$

Dacă presupunem pe φ, ψ, θ funcții de un anumit parametru t, se obține ecuația curbei sub formă parametrică

$$\begin{aligned} &x_m = x_m(t), \quad y_m = y_m(t), \quad z_m = z_m(t), \\ &x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = R^2, \quad x_f^2 + y_f^2 + z_f^2 = R^2, \end{aligned} \tag{45}$$

iar viteza de deplasare a punctului față de sferă este, în modul

$$v^2 = (\bar{\omega} \times \bar{r})^2 = r^2\omega^2 - (\bar{r}\cdot\bar{\omega})^2, \tag{46}$$

sau

$$\begin{aligned} v^2 + R^2 [\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + 2\,\dot\psi\dot\varphi\cos\theta] - \\ - [x_f(\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi) + y_f(\dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi) \\ + z_f(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)]^2. \end{aligned} \tag{47}$$

Dacă luăm drept parametru pe θ și considerăm legătura $\varphi = F(\theta)$ în cazul punctului $P_z\,(0, 0, R)$ studiat anterior, formulele curbei sînt independente de ψ. Cazul $\psi = 0$, reduce formulele la

$$\begin{aligned} x_m &= \cos\varphi\, x_f + \cos\theta\sin\varphi\, y_f + \sin\theta\sin\varphi\, z_f, \\ y_m &= -\sin\varphi\, x_f + \cos\theta\cos\varphi\, y_f + \sin\theta\cos\varphi\, z_f, \\ z_m &= -\sin\theta\, y_f + \cos\theta\, z_f, \end{aligned} \tag{48}$$

și cel puțin două din componentele vitezei unghiulare, fie pe axele fixe, fie pe axele mobile, sînt variabile ($\varphi = m\,\theta$)

$$\begin{aligned} \omega_{xf} &= \dot\theta, & \omega_{xm} &= \dot\theta\cos\varphi, \\ \omega_{yf} &= -\dot\varphi\sin\theta, & \omega_{ym} &= -\dot\theta\sin\varphi, \\ \omega_{zf} &= \dot\varphi\cos\theta, & \omega_{zm} &= \dot\varphi, \end{aligned} \tag{49}$$

iar

$$v^2 = R^2 [\dot\theta^2 + \dot\varphi^2] - [x_f\,\dot\theta - y_f\sin\theta\,\dot\varphi + z_f\cos\theta\,\dot\varphi]^2. \tag{50}$$

Curbele depinzînd în continuare de poziția punctului P sînt :

— pentru P_x

$$\begin{aligned} &x_f = R, \quad y_f = 0, \quad z_f = 0, \\ &x_m = R\cos\varphi, \quad y_m = -R\sin\varphi \quad z_m = 0, \end{aligned}$$

ceea ce corespunde unui cerc mare

$$x_m^2 + y_m^2 = R^2, \quad z_m = 0,$$

parcurs cu viteza

$$v_{P_x} = R\dot\varphi\,;$$

— pentru P_y

$$x_f = 0, \qquad y_f = R, \qquad z_f = 0,$$

$$x_m = R\cos\theta\sin\varphi, \quad y_m = R\cos\theta\cos\varphi, \quad z_m = -R\sin\theta,$$

curba descrisă pe sferă fiind o spirală ($\varphi = \sin\theta$),

$$x_m^2 + y_m^2 = R\cos\theta, \qquad z_m = -R\sin\theta,$$

parcursă cu viteza $v_{P_y} = R\sqrt{\dot\theta^2 + \cos^2\theta\,\dot\varphi^2}$.

Acelaşi lucru se obţine şi pentru curba descrisă de P_z.

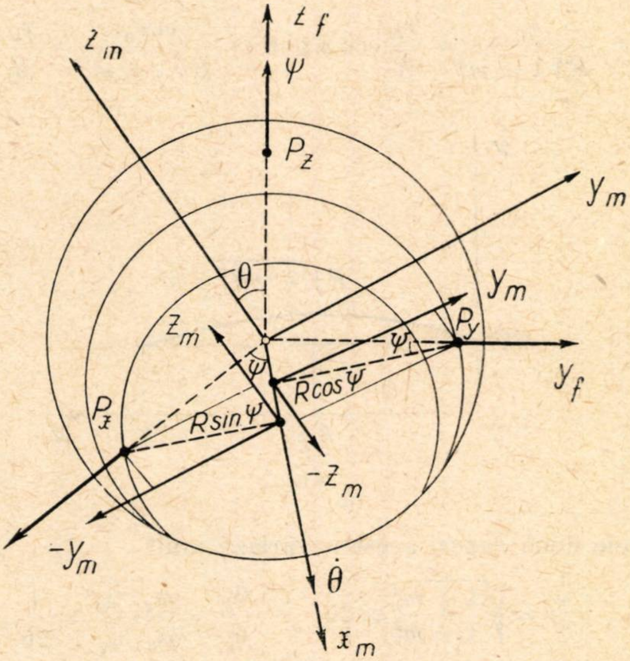


Fig. 6

Pentru legătura $\psi = F(\theta)$ în cazul $\varphi \equiv 0$ se obţine pentru P_x şi P_y spirale ($\theta = m\,\psi$) iar pentru P_z un cerc mare (fig. 6). Situaţii asemănătoare avem şi pentru legătura $\varphi = F(\psi)$.

8. Mecanismul pentru producerea mişcării prin cunoaşterea vitezelor $\dot\psi$ şi $\dot\theta$ ($\dot\varphi = 0$) ar prezenta ca dezavantaj faptul că viteza de parcurgere a spiralei este variabilă (fig. 7)

$$v = R\sqrt{\dot\psi^2 + \sin^2\theta\;\dot\theta^2}, \tag{51}$$

şi

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\psi}}\right)^2} = \sqrt{1 + m^2} = \frac{1}{\cos \bar{\alpha}} \cdot \qquad (52)$$

În cazul unei singure ramuri a spiralei între punctele $+ P_x$ şi $- P_x$ $(m = 20)$ variaţia este mare $v_{\max}/v_{\min} \simeq 20{,}025$, dar în cazul al doilea cu mai multe ramuri de spirală $\left(m = \frac{1}{20}\right)$ variaţia este neglijabilă $v_{\max}/v_{\min} = 1{,}0025$.

Dacă se consideră o viteză limită admisibilă V_0, atunci pentru rotaţiile ψ şi θ avem :

$$\dot{\psi} = \frac{v_0}{R\sqrt{1 + m^2}} = \frac{v_0}{R} \cos \bar{\alpha}\,; \quad \dot{\theta} = \frac{m\, v_0}{R\sqrt{1 + m^2}} = \frac{v_0}{R} \sin \bar{\alpha}, \qquad (53)$$

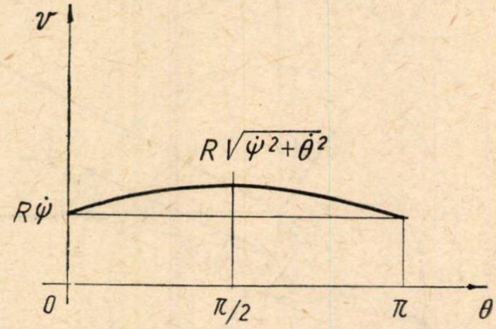


Fig. 7

aşa că în cele două cazuri acestea variază mult

$$\frac{\dot{\psi}_2}{\dot{\psi}_1} = \sqrt{\frac{1 + m_1^2}{1 + m_2^2}} \simeq 20 \qquad \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\dot{\psi}_2}{\dot{\psi}_i} \simeq \frac{1}{20}, \qquad (54)$$

în schimb însă timpul de explorare completă a sferei este sensibil acelaşi (cca. $200/v_0$)

$$T = p\,\frac{\pi}{\dot{\psi}} = \frac{\pi p\, R\sqrt{1 + m^2}}{v_0} \cdot \qquad (55)$$

În ambele cazuri punctele situate în apropierea polilor sînt avantajate deoarece, în primul caz sînt explorate cu o viteză mai mică, deci un timp mai îndelungat, iar în cazul al doilea sînt explorate cu aceeaşi viteză mare timp mai scurt, dar de mai multe ori.

Primită la redacţie la 2 august 1961

О НЕКОТОРЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КРИВЫХ И МЕХАНИЗМАХ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ИХ ПОСТРОЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются сферические кривые, необходимые при эксплуатации поверхностей шариков шарикоподшипников для выявления дефектов способом исследования при помощи светового луча. Осуществление сферического движения получается наложением составляющих угловой скорости, либо по неподвижным, либо по подвижным осям или при помощи углов Эйлера.

ÜBER SPHÄRISCHE KURVEN UND DIE ZU IHRER ERZEUGUNG ERFORDERLICHEN GETRIEBE

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden sphärische Kurven studiert, die für die Untersuchung von Kugellagern zum Zwecke der Feststellung von Formalabweichungen erforderlich sind. Das Verfahren beruht auf der Untersuchung der Kugeln mit Hilfe eines Lichtstrahls.

Die Bewegung der Kugel wird durch Vorgabe der Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten entweder auf den festen oder den beweglichen Achsen oder aber mittels der Eulerschen Winkel erzielt.

STUDII

TEORIA MECANISMELOR

TRANSMISII POLICARDANICE

DE

FL. DUDIȚĂ [1]

Mecanismele cu articulații cardanice (universale) care servesc transmiterii de putere sau mișcare — transmisii cardanice — au o mare răspîndire în construcția de mașini, îndeosebi în construcția mașinilor de transport: automobile, locomotive Diesel, vapoare etc. O serie de factori importanți (mărirea turației critice, îmbunătățirea randamentului și a confortabilității etc.) au necesitat o serie de perfecționări: mărirea numărului de articulații (transmisii policardanice), rulmenți cu ace în cuplele articulațiilor cardanice, elemente elastice în articulații și axe etc.

O deosebită importanță capătă transmisiile policardanice în legătură cu mărirea cantității și confortabilității transportului cu autobuze și camioane (studiul și înlăturarea vibrațiilor de torsiune din transmisia de forță). În unele țări, datorită eficacității economice, există firme specializate în fabricarea transmisiilor cardanice.

Pentru rezolvarea cu succes a problemelor puse de dezvoltarea vertiginoasă a mașinilor de transport — în special a autobuzelor și camioanelor de tonaj ridicat — devine necesară cunoașterea amănunțită a cinematicii și dinamicii transmisiilor policardanice. Este ceea ce își propune studiul de față.

1. CINEMATICA

Transmisia policardanică, principial, se compune din $n + 1$ axe cardanice cuplate, succesiv, prin n articulații cardanice (fig. 1).

În componența articulației cardanice — mecanism spațial sferic, cu cuple de rotație — intră două furci cardanice, conducătoare și condusă, cuplate printr-o cruce cardanică (brațe ortogonale) (fig. 4).

---

[1] Institutul politehnic Brașov

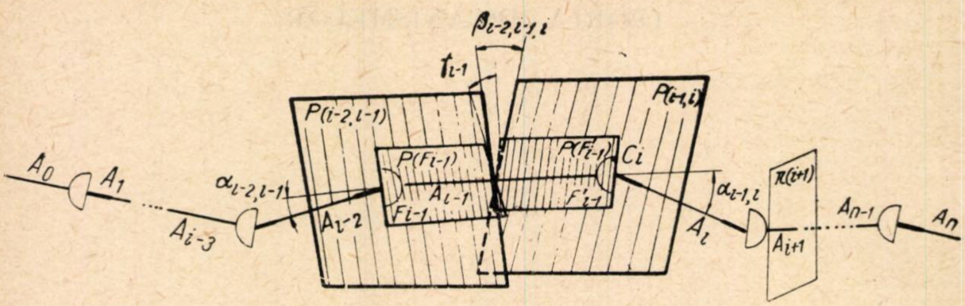


Fig. 1

Se va nota :

A_i — ax cardanic ; A_0 și A_n se numesc inițial, respectiv final ; axele A_1 ; $A_2 \ldots A_{n-1}$ se numesc intermediare ;

C_i — articulația cardanică ce cuplează A_{i-1} cu A_i ;

F'_{i-1} și F_i — furcile — conducătoare și condusă — ale articulației C_i ;

$P(i-1, i)$ — planul axelor A_{i-1} și A_i ;

$\Pi\,(i)$ — planul perpendicular pe A_i ;

$P(F_i)$ — planul furcii F_i ;

$P(C_i)$ — planul crucii cardanice a articulației C_i ;

S_i — suprafața sferică a articulației C_i ;

$\alpha_{i-1.i}$ — unghiul ascuțit între A_{i-1} și A_i ;

ε_i — unghiul ascuțit între $\pi(i-1)$ și $P\,(C_i)$;

δ_i — unghiul ascuțit între $P(C_i)$ și $\pi(i)$;

φ_i — deplasarea unghiulară, în jurul axei geometrice proprii a axului A_i ;

γ_i — unghiul între $P(F'_i)$ și $P(F_i)$; defazarea furcilor F'_i și F_i ;

$\beta_{i-1.i.i+1}$ — unghiul între $P(i-1, i)$ și $P(i, i+1)$; defazarea planelor $P(i-1, i)$ și $P(i, i+1)$;

$\psi_i = \gamma_i - \beta_{i-1.\,i.\,i+1}$ — defazarea articulațiilor C_i și C_{i+1}[2].

1.1. *Relații trigonometrice.* Între deplasările unghiulare φ_0 și φ_1 ale celor două furci ale articulației cardanice, funcție de sistemul de referință ales, există relația [1], [2], [3].

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_1} = (\cos \alpha_{01})^{\pm 1} . \tag{1}$$

Ne propunem, funcție de parametrii cinematici ai transmisiei policardanice — α, β, γ — să găsim o formulă de recurență de forma (1) valabilă pentru oricare articulație din transmisia considerată [2] (fig. 2).

În figură s-au reprezentat intersecțiile sferei articulației cardanice cu planele notate în figura 1 [2]

$$\varphi_{i-1,\,i} = \frac{\pi}{2} + \varphi_{i-1,\,i-1} + \gamma_{i-1} - \beta_{i-2,\,i-1,\,i} = \frac{\pi}{2} + \varphi_{i-1,\,i-1} + \psi_{i-1} \tag{2}$$

este faza inițială totală a furcii conducătoare F'_{i-1} față de sistemul de referință ales.

φ_{ii} — faza inițială totală a furcii F_i, adică faza $\varphi_{i-1,i}$ transmisă, prin crucea cardanică a articulației C_i, furcii F_i.

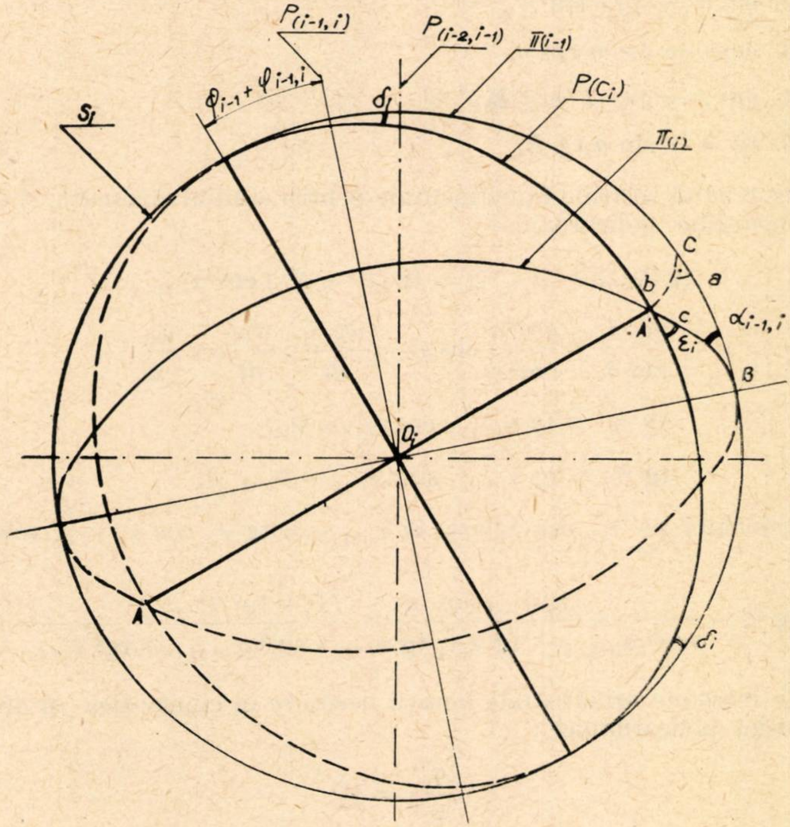

P(i-1, i)
P(i-2, i-1)
π(i-1)
P(Ci)
π(i)
Si
φi-1 + φi-1,i
δi
C
a
b
c
A'
εi
αi-1,i
B
Oi
A
δi

Fig. 2

Din figura 2 desprindem triunghiul sferic dreptunghic $A'BC$

$$A' = \frac{\pi}{2} - \varepsilon_i\,, \qquad a = \varphi_{i-1} + \varphi_{i-1\,.\,i}\,,$$

$$B = \alpha_{i-1\,.\,i}\,, \qquad b = \delta_i\,,$$

$$C = \frac{\pi}{2}, \qquad c = \varphi_i + \varphi_{ii}\,.$$

În trigonometria sferică pentru triunghiul sferic dreptunghic $A'BC$ sînt cunoscute relațiile :

1. $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos B$,
2. $\sin a = \sin c \sin A'$,
3. $\cos c = \cos a \cos b$,
4. $\cos c = \operatorname{ctg} A' \operatorname{ctg} B$,
5. $\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B$,

din care rezultă relațiile fundamentale pentru studiul cinematic și dinamic al transmisiilor policardanice

$$\operatorname{tg}(\varphi_{i-1} + \varphi_{i-1,\,i}) = \operatorname{tg}(\varphi_i + \varphi_{ii}) \cos \alpha_{i-1,\,i} \tag{3}$$

$$\frac{\cos \varepsilon_i}{\cos \delta_i} = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 c} \cos B = \frac{d\varphi_{i-1}}{dt} : \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\omega_{i-1}}{\omega_i} \tag{4}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_i = \operatorname{tg} \alpha_{i-1,\,i} \cos(\varphi_i + \varphi_{ii}) \tag{5}$$

$$\operatorname{tg} \delta_i = \operatorname{tg} \alpha_{i-1,\,i} \sin(\varphi_{i-1} + \varphi_{i-1,\,i}). \tag{6}$$

Dacă înlocuim pe φ_{ii} din relația $\operatorname{tg} \varphi_{i-1,\,i} = \operatorname{tg} \varphi_{ii} \cos \alpha_{i-1,\,i}$, relația (3) devine

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{\operatorname{tg} \varphi_{i-1} \cos \alpha_{i-1,\,i} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{i-1,\,i})}{\cos^2 \alpha_{i-1,\,i} + \operatorname{tg} \varphi_{i-1} \operatorname{tg} \varphi_{i-1,\,i} \sin^2 \alpha_{i-1,\,i} + \operatorname{tg}^2 \varphi_{i-1,\,i}}. \tag{7}$$

Se introduc următoarele notații necesare în cinematica și dinamica transmisiei policardanice :

$$\frac{\varphi_0^{(l)}}{\varphi_i^{(l)}} = \chi_i^{(l)}$$

unde l indică ordinul derivatei în raport cu timpul.

În general $\chi_i^{(l)}$ este funcție periodică

$$\chi_i^{(l)}(t) = \chi_i^{(l)}(t + T). \tag{8}$$

O deosebită importanță prezintă $\chi_i = \dfrac{\varphi_0}{\varphi_i}$ care se numește factor homocinetic și $\chi_i^{(1)} = \dfrac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}_i}$ care se numește factor homodinamic $\left(\text{conform teoremei conservării impulsului, } \dfrac{M_t^i}{M_t^0} = \dfrac{\omega_0}{\omega_i} = \chi_i^{(1)}\right)$. Pentru o deosebire netă notăm factorul homocinetic cu χ_i^C şi factorul homodinamic cu χ_i^D adică

$$\chi_i^C = \frac{\varphi_0}{\varphi_i}\,; \qquad \chi_i^D = \frac{d\varphi_0}{dt} : \frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}_i}\,. \tag{9}$$

Dacă factorul homocinetic şi homodinamic sînt identic unitari ($\chi_n^C \equiv 1$; $\chi_n^D \equiv 1$) transmisiile se numesc homocinetice respectiv homodinamice.

Observaţia 1

Din ipoteza $\chi_n^C \equiv 1$ rezultă $\chi_n^D \equiv 1$ însă, în general $\chi_k^C \not\equiv 1$ adică $\varphi_k \not\equiv \varphi$.

Deci :

În transmisia policardanică homocinetică ($\varphi_n \equiv \varphi_0$) axele intermediare au, în general, legi de mişcare diferite de cea a axului iniţial ($\varphi_k \not\equiv \varphi_0$).

1.2. *Condiţiile realizării transmisiei policardanice homocinetice.* Transmisia policardanică se numeşte, deci homocinetică dacă

$$\varphi_n \equiv \varphi_0 \;(\text{sau } \operatorname{tg}\varphi_n \equiv \operatorname{tg}\varphi_0), \tag{10}$$

φ_n, care depinde de toţi parametrii cinematici ai transmisiei n-cardanice,

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_0, \alpha_{01}, \alpha_{12} \ldots \alpha_{n-1,\,n}, \beta_{012} \ldots \beta_{n-2,\,n-1,\,n}, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{n-1}), \tag{11}$$

se obţine eliminînd din şirul de egalităţi (7), pentru $i = 1, 2, 3 \ldots n$ variabilele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$.

Prin eliminarea $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ din egalităţile (7), se poate obţine o expresie de forma

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \operatorname{tg}\varphi_0\, K \tag{12}$$

unde

$$K = K(\alpha_{01}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{n-1,\,n}), \tag{13}$$

numai dacă egalităţile (7) sînt de forma

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \operatorname{tg}\varphi_{i-1} K_i \tag{14}$$

unde

$$K_i = (\cos \alpha_{i-1,\,i})^{\pm 1}. \tag{15}$$

Deci

$$K = \prod_{i=1}^{n} K_i\,. \tag{16}$$

Egalităţile (7) devin de forma (14) dacă este îndeplinită condiţia evidentă

$$\varphi_{i-1,\,i} = k\frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{17}$$

În consecinţă, transmisia policardanică homocinetică este posibilă dacă sînt satisfăcute concomitent condiţiile

$$\begin{cases} \varphi_{i-1,\,i} = k\dfrac{\pi}{2}, \\ K = \prod\limits_{i=1}^{n} K_i \equiv 1. \end{cases} \tag{18}$$

Prin K se va înţelege expresia $K(\alpha_{01}, \alpha_{12}, \alpha_{23} \ldots \alpha_{n-1,\,n})$ obţinută prin eliminarea $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_{n-1}$ din şirul de egalităţi (7) care presupune satisfăcută condiţia $\varphi_{i-1,\,i} = k\dfrac{\pi}{2}$; se foloseşte semnul identic pentrucă, uneori, unghiurile dintre axe (α) sînt, de asemenea, variabile.

Introducem următoarele prescurtări, folosite în teoria mulţimilor, care se citesc:

$\in$ — aparţine (apartenenţă),
$\subset$ — include (incluziune),
$\not\subset$ — nu include (non-incluziune),
$\cup$ — reuniune,
$\cap$ — intersecţie,
$\Longleftrightarrow$ — echivalent (echivalenţă logică),
$\Rightarrow$ — rezultă (implicaţie logică),
$\wedge$ — şi (conjuncţie logică).

Se va înţelege prin

M — mulţimea $0;\ \dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{2\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2} \ldots$
M_1 — mulţimea $\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{2} \ldots$
M_2 — mulţimea $0;\ \dfrac{2\pi}{2};\ \dfrac{4\pi}{2} \ldots$
Φ — mulţimea $\varphi_{01}; \varphi_{12}; \varphi_{23} \ldots$
Ψ — mulţimea $\psi_1; \psi_2; \psi_3 \ldots$
Γ — mulţimea $\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3 \ldots$

Aplicaţia 1

1. $\dfrac{\pi}{2} \in M$; $0 \in M_2$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\right.$ aparţine mulţimii M etc.$\left.\right)$;
2. $M_1 \subset M$ (M include M_1 sau M_1 este inclusă de M);
3. $M = M_1 \cup M_2$ (M este reuniunea mulţimilor M_1 şi M_2);
4. $M_1 \cap M_2 = \emptyset$; mulţimile M_1 şi M_2 nu au elemente comune; nu se intersectează ($\emptyset$ — mulţime vidă).

Cu aceste notaţii condiţiile generale (18) ale realizării homocineticităţii, simbolic se transcriu

$$[(\Phi \subset M) \wedge (K \equiv 1)] \Longleftrightarrow (\chi_n^c \equiv 1). \tag{19}$$

Analizînd concomitent (2), (7), (18), desprindem următoarele cazuri importante :

1. $(\Psi \not\subset M_1) \Rightarrow (\Phi \not\subset M) \Rightarrow (\chi_n^c \not\equiv 1)$,

2. $(\Psi \subset M_1) \Rightarrow (\Phi \subset M_1) \Rightarrow \left(K_\psi = \prod_{i=1}^{n} \cos \alpha_{i-1,\,i} \not\equiv 1\right) \Rightarrow (\chi_n^c \not\equiv 1)$,

3. $(\Psi \subset M_2) \Rightarrow (\Phi \subset M) \wedge \left[K_\psi = \prod_{i=1}^{n} (\cos \alpha_{i-1,\,i})^{(-1)^{i+1}}\right]$ însă

$[(\Phi \subset M) \wedge (K_\psi \equiv 1)] \Longleftrightarrow (\chi_n^c \equiv 1)$,

4. $[(\Psi \subset M) \wedge (\Psi \cap M_2 \neq \Phi)] \Rightarrow \left[(\Phi \subset M) \wedge \left(K_\psi \neq \prod_{i=1}^{n} \cos \alpha_{i-1,\,i}\right)\right]$.

Rezumînd raționamentele precedente, condiția generală a realizării transmisiei policardanice spațiale homocinetice, simbolic, se scrie

$$[(\Psi \subset M) \wedge (\Psi \cap M_2 \neq \Phi) \wedge (K_\psi \equiv 1)] \Rightarrow (\chi_n^c \equiv 1) \tag{20}$$

și se citește :

Transmisia policardanică homocinetică $(\chi_n^c \equiv 1)$ este realizabilă prin alegerea unor anumite unghiuri între axe $(K_\psi \equiv 1)$ numai dacă mulțimea defazărilor articulațiilor (Ψ) fiind submulțime a lui M_1 $(\Psi \subset M)$, nu este submulțime a lui M_1, $(\Psi \cap M_2 \neq \Phi)$.

Pentru transmisiile policardanice plane $(\beta \equiv 0)$, des folosite în construcția de automobile, condiția (20) se transcrie :

$$[(\Gamma \subset M) \wedge (\Gamma \cap M_2 \neq \Phi) \wedge (K_\gamma \equiv 1)] \Rightarrow (\chi_n^c \equiv 1) \tag{21}$$

și se citește analog.

$K_{\psi(\gamma)}$ este expresia (13) obținută prin eliminarea $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_{n-1}$ din egalitățile (7), defazările articulațiilor $\psi_i(\gamma_i)$ aparținînd mulțimii date $\Psi(\Gamma)$.

Aplicația 2

Transmisia policardanică plană cu furcile axelor intermediare coplanare $(\Gamma \subset M_2)$.

Prin eliminarea $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_{n-1}$ din (7) rezultă

$$K_\gamma = \prod_{i=1}^{n} (\cos \alpha_{i-1,\,i})^{(-1)^{i+1}},$$

deci condiția (21) este :

$$(\Gamma \subset M_2) \wedge (K_\gamma \equiv 1) \Rightarrow (\chi_n^c \equiv 1). \qquad \text{(22}$$

1.3. *Numărul schemelor cinematice homocinetice.* Transmisia n- cardanică are n-1 defazări. În ipoteza $\Psi \subset M$, pentru fiecare defazare sînt posibile două cazuri : $\Phi_i = 0$ şi $\Phi_i = \frac{\pi}{2}$; toate celelalte sînt echivalente acestora.

Numărul schemelor cinematice posibile în această ipoteză este

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} = 2^{n-1}, \qquad (23)$$

unde C_{n-1}^{k} este numărul schemelor cinematice ale transmisiei n-cardanice cu k articulaţii defazate ortogonal iar restul nedefazate.

În ipoteza $(\Psi \subset M) \wedge (\Psi \cap M_2 \neq \Phi)$ numărul schemelor cinematice posibile este

$$N_H = N - C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1} - 1. \qquad (24)$$

Se exclude, deci cazul C_{n-1}^{n-1} cînd toate defazările sînt ortogonale.

CONCLUZIE

În transmisia n-cardanică există $N_H = 2^{n-1} - 1$ scheme cinematice care pot realiza condiţia $K_{\psi(\gamma)} \equiv 1$ adică pot realiza homocineticitatea.

Aplicaţia 3

Transmisia tricardanică plană.
În ipoteza $\Gamma \subset M$, $N = 2^{3-1} = 4$; $N_H = 3$ (fig. 3).

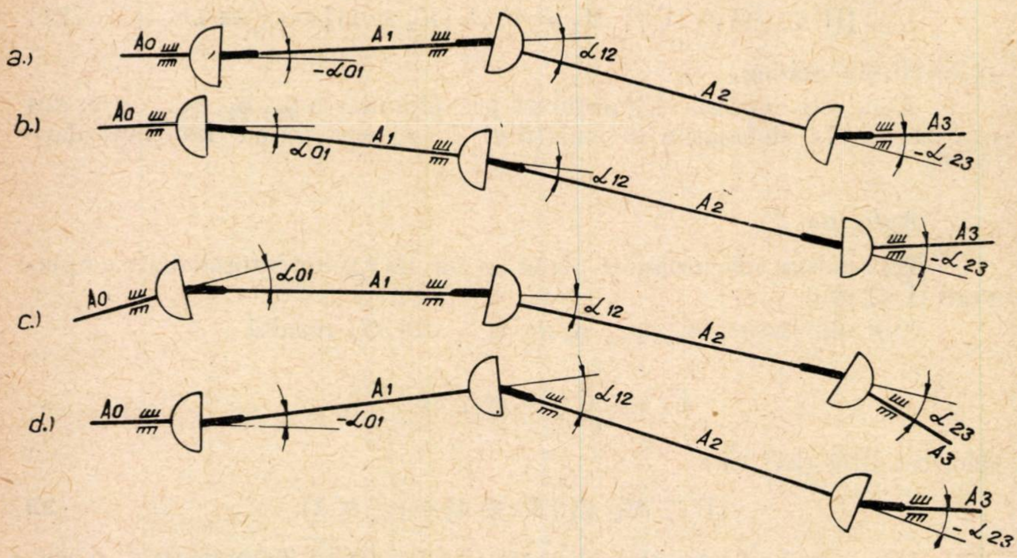


Fig. 3

— Schema 3 *a*:

$(\Gamma \subset M) \wedge (\Gamma \cap M_2 \neq \emptyset)$ adică $(\gamma_1 = \gamma_2 = 0)$ rezultă $K_\gamma = \dfrac{\cos\alpha_{01}\cos\alpha_{23}}{\cos\alpha_{12}}$.

Deci, transmisia tricardanică plană este homocinetică dacă:

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma_1 = \gamma_2 = 0\\ &\frac{\cos\alpha_{01}\cos\alpha_{23}}{\cos\alpha_{12}} \equiv 1. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

— Schema 3 *b*:

$(\Gamma \subset M) \wedge (\Gamma \cap M_2 \neq \emptyset)$ adică $\gamma_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $\gamma_2 = 0$ rezultă $K_\gamma = \dfrac{\cos\alpha_{01}\cos\alpha_{12}}{\cos\alpha_{23}}$.

Deci, transmisia tricardanică plană este homocinetică dacă

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma_1 = \frac{\pi}{2};\ \gamma_2 = 0\\ &\frac{\cos\alpha_{01}\cos\alpha_{12}}{\cos\alpha_{23}} \equiv 1. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

— Schema 3 *c*:

$(\Gamma \subset M) \wedge (\Gamma \cap M_2 \neq \emptyset)$ adică $\gamma_1 = 0$; $\gamma_2 = \dfrac{\pi}{2}$ rezultă $K_\gamma = \dfrac{\cos\alpha_{01}}{\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{23}}$.

Deci , transmisia tricardanică plană este homocinetică dacă

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma_1 = 0;\ \gamma_2 = \frac{\pi}{2}\\ &\frac{\cos\alpha_{01}}{\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{23}} \equiv 1. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

— Schema 3 *d*:

$(\Gamma \cap M_2 = \emptyset) \Longleftrightarrow (\Gamma \subset M_1)$ adică $\gamma_1 = \gamma_2 = \dfrac{\pi}{2}$ rezultă

$$K_\gamma = \cos\alpha_{01}\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{23}.$$

Deci, transmisia tricardanică plană este totdeauna nehomocinetică dacă furcile axelor intermediare sînt ortodefazate.

Observația 2

Transmisia tricardanică plană, $(\alpha_{01} \neq 0;\ \alpha_{12} \neq 0;\ \alpha_{23} \neq 0)$ cu un palier mobil (două unghiuri α variabile; α_{01} și α_{12} sau α_{12} și α_{23}) care are mare răspîndire în automobile *nu poate fi strict homocinetică* (vezi K_γ pentru cazurile 3*a*, 3*b*).

2. DINAMICA

2.1. *Forțe în cuple.* Analizînd mecanismul transmiterii cuplului motor prin articulația cardanică (C_i), se observă că forța rezultantă din cruce se descompune, diferit, în fiecare din cele două furci ale articulației (fig 4).

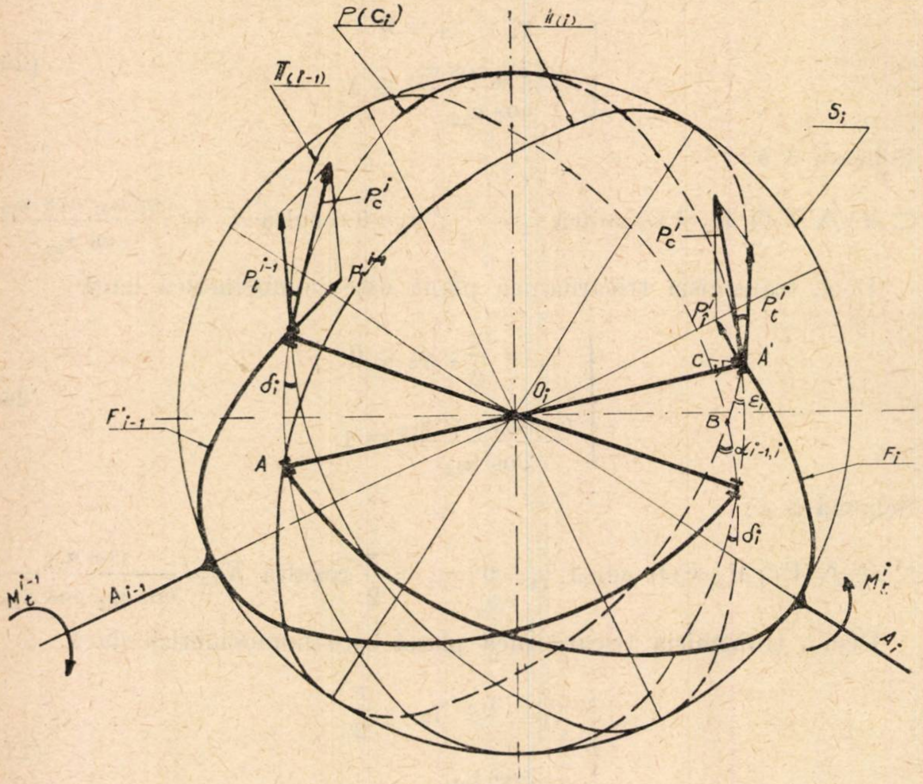

$P(C_i)$
$II(i)$
$II(i-1)$
S_i
P_c^i
P_t^{i-1}
F_i^{i-1}
P_c^i
P_i^i
P_t^i
C
A'
O_i
δ_i
ε_i
B
$\alpha_{i-1,i}$
F'_{i-1}
F_i
A
δ_i
M_t^{i-1}
A_{i-1}
M_r^i
A_i

Fig. 4

S-a notat

P_C^i — forța rezultantă care acționează asupra bolțului crucii cardanice în $P(C_i)$,
P_t^i — componenta P_C^i perpendiculară pe F_i,
P_i^i — componenta P_C^i care se găsește în planul F_i,
S_i — suprafața sferică a articulației cardanice C_i,
D_i — diametrul suprafeței sferice S_i.

2.1.1. *Cupluri complementare.* Respectînd figura 4 se găsesc cu ușurință formulele de recurență

$$\frac{M_t^i}{M_t^{i-1}} = \frac{\cos \varepsilon_i}{\cos \delta_i}; \quad \frac{M_i^i}{M_t^{i-1}} = \frac{\sin \varepsilon_i}{\cos \delta_i}; \quad \frac{M_i'^i}{M_t^{i-1}} = \frac{\cos \varepsilon_i}{\cos \delta_i} \operatorname{tg} \delta_{i+1} \qquad (28)$$

unde

M_t^i — momentul (cuplul) de torsiune în A_i; $M_t^i = P_t^i\, D_i$; $\overline{M}_t^i \parallel A_i$

M_i^i și $M_i^{'i}$ — momentul (cuplul) încovoietor din F_i și F_i' respectiv; M_i^i și $M_i^{'i}$ se mai numesc *cupluri complementare*;

$$M_i^i = P_i^i\, D_i\,;\ \overline{M}_i^i \perp P(F_i).$$

În orice transmisie se cunoaște, în general, cuplul motor — în cazul dat M_t^0. Interesează deci exprimarea tuturor solicitărilor ca funcție de M_t^0. Cu ajutorul formulelor (28), expresiile solicitărilor din axul A_k sînt

$$\frac{M_t^k}{M_t^0} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\cos \varepsilon_i}{\cos \delta_i}\,;\quad \frac{M_i^k}{M_t^0} = \operatorname{tg} \varepsilon_k \prod_{i=1}^{k} \frac{\cos \varepsilon_i}{\cos \delta_i}\,;\quad \frac{M_i^{'k}}{M_t^0} = \operatorname{tg} \delta_{k+1} \prod_{i=1}^{k} \frac{\cos \varepsilon_i}{\cos \delta_i}. \tag{29}$$

Conform relației (4)

$$\frac{\cos \varepsilon_i}{\cos \delta_i} = \frac{\omega_{i-1}}{\omega_i} \quad \text{deci} \quad \prod_{i=1}^{k} \frac{\cos \varepsilon_i}{\cos \delta_i} = \frac{\omega_0}{\omega_k} = \chi_k^D.$$

Formulele (29) se transformă în

$$\frac{M_t^k}{M_t^0} = \chi_k^D\,;\quad \frac{M_i^k}{M_t^0} = \chi_k^D \operatorname{tg} \varepsilon_k\,;\quad \frac{M_i^{'k}}{M_t^0} = \chi_k^D \operatorname{tg} \delta_{k+1}, \tag{30}$$

care sînt utile pentru reprezentarea grafică a solicitărilor funcție de cuplul motor.

Pentru reprezentarea grafică a variației cuplurilor complementare M_i^i și $M_i^{'i}$ (fig. 5) din (28) se deduc relațiile

$$\frac{M_i^i}{M_t^i} = \operatorname{tg} \varepsilon_i\,;\quad \frac{M_i^{'i}}{M_t^i} = \operatorname{tg} \delta_{i+1}. \tag{31}$$

Dacă în (31) înlocuim pe $\varphi_{i,\,i+1} = \frac{\pi}{2} + \varphi_{ii} + \gamma_i - \beta_{i-1,\,i,\,i+1}$ (2), rezultă (fig. 5)

$$\begin{aligned} M_i^i &= M_t^i \operatorname{tg} \alpha_{i-1,\,i} \cos (\varphi_i + \varphi_{ii}),\\ M_i^{'i} &= M_t^i \operatorname{tg} \alpha_{i,\,i+1} \cos (\varphi_i + \varphi_{ii} + \gamma_i - \beta_{i-1,\,i,\,i+1}). \end{aligned} \tag{32}$$

Așa cum se desprinde din figura 5 vectorul — moment complementar rezultant $\overline{M}_{iR}^i = \overline{M}_i^i + \overline{M}_i^{'i}$ depinde de defazarea furcilor γ_i și de semnul unghiurilor $\alpha_{i-1,\,i}$ și $\alpha_{i,\,i+1}$; pentru stabilirea semnului unghiului α este utilă observația:

Omogenitatea semnului curburii lanțului cinematic al transmisiei policardanice presupune omogenitatea semnului unghiurilor α (fig. 6) și, contrar, neomogenitatea semnului unghiurilor α atrage după sine neomogenitatea semnului curburii lanțului cinematic (fig. 3).

2.1.2. *Reacțiuni în palierele intermediare.* La realizarea unei transmisii n-cardanice cu un singur grad de libertate, pentru cele $n-1$ axe intermediare sînt necesare $n-2$ paliere — paliere intermediare — care se pot așeza în diferite moduri (fig. 3); palierele transmisiilor policardanice pot fi fixe și mobile (automobile) [2].

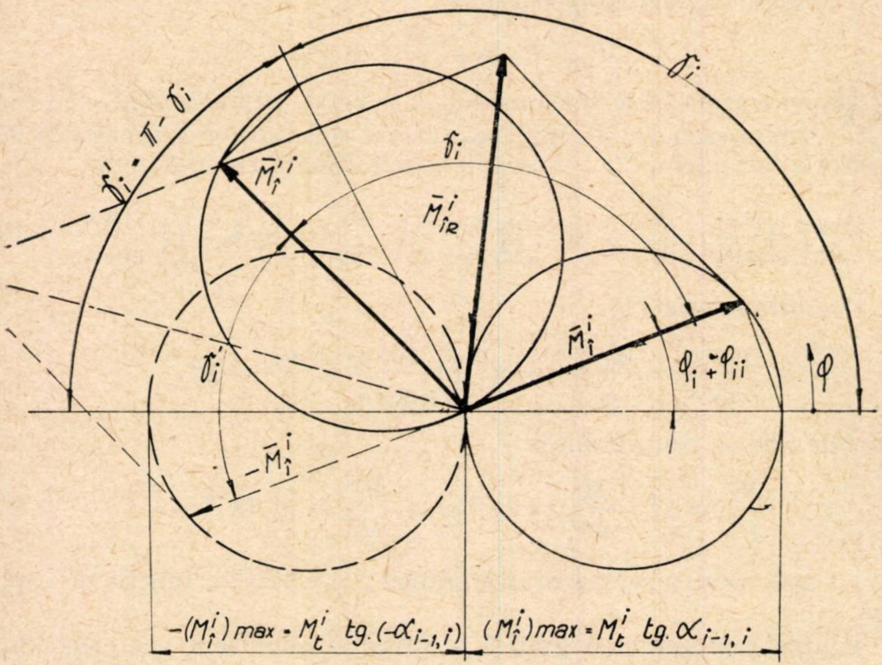

$\gamma'_i = \pi - \gamma_i$
γ_i
γ_i
$\bar{M}'^i_î$
$\bar{M}^i_{îR}$
$\bar{M}^i_î$
$\varphi_i \mp \varphi_{ii}$
φ
γ'_i
$-\bar{M}^i_î$
$-(M^i_î)max = M^i_t\ tg.(-\alpha_{i-1,i})$
$(M^i_î)max = M^i_t\ tg.\alpha_{i-1,i}$

Fig. 5

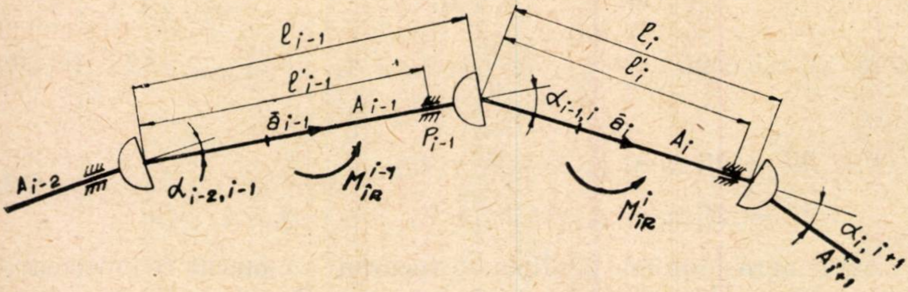

l_{i-1}
l'_{i-1}
A_{i-1}
$\bar{a}_{i-1}$
P_{i-1}
A_{i-2}
$\alpha_{i-2,i-1}$
$M^{i-1}_{îR}$
l_i
l'_i
$\alpha_{i-1,i}$
$\bar{a}_i$
A_i
$M^i_{îR}$
$\alpha_{i,i+1}$
A_{i+1}

Fig. 6

Reacțiunea într-un palier intermediar oarecare se găsește examinînd figura 6.

S-a notat cu

p_i — palier intermediar,

$\bar{a}_i$ — versorul vitezei unghiulare $\frac{d\varphi_i}{dt}$,

$\overline{M}^i_{iR} = \overline{M}^i_i + \overline{M}'^i_i$,

$\overline{R}^{i-1}_i$ — reacțiunea cuplului complementar rezultant $\overline{M}^i_{iR}$ în p_{i-1},

$\overline{R}^{i-1}_{i-1}$ — reacțiunea cuplului complementar rezultant $\overline{M}^{i-1}_{iR}$ în p_{i-1},

$\overline{R}^{i-1} = \overline{R}^{i-1}_{i-1} + \overline{R}^{i-1}_i$.

Însă

$$\overline{R}^{i-1}_{i-1} = \frac{\bar{a}_{i-1} \times \overline{M}^{i-1}_{iR}}{l'_{i-1}}\,;\ \overline{R}^{i-1}_i = -\frac{\bar{a}_{i-1} \times \overline{M}^i_{iR}}{l'_i}\,\frac{l_{i-1}}{l'_{i-1}} \cos \alpha_{i-1,\,i},$$
$$\overline{R}^{i-1} = \frac{1}{l'_{i-1}} \cdot \bar{a}_{i-1} \times (\overline{M}^{i-1}_{iR} - K\,\overline{M}^i_{iR})\,;\ K = \frac{l_{i-1}}{l'_i} \cos \alpha_{i-1,\,i}. \tag{33}$$

2.1.3. *Palier intermediar descărcat.* Din cauza urmărilor dăunătoare (vibrațiilor), reacțiunile în palierele intermediare (33) se evită ; ele devin nule dacă este îndeplinită una din condițiile :

$$\begin{aligned} &1.\ M^{i-1}_{iR} = M^i_{iR} = 0,\\ &2.\ \overline{M}^{i-1}_{iR} = K\,\overline{M}^i_{iR},\\ &3.\ \overline{M}^{i-1}_{iR} - K\,\overline{M}^i_{iR} = \lambda\,\bar{a}_{i-1}, \end{aligned} \tag{34}$$

λ-parametru.

Aplicația 4

Transmisia policardanică plană.

În acest caz, deoarece unghiurile β sînt nule, este verosimilă numai condiția

$$M^i_{iR} = 0\,;\quad i = 1, 2, 3 \ldots n-1.$$

Momentul complementar rezultant (M^i_{iR}) este nul dacă cele două momente complementare componente sînt egale și de sens contrar ($\overline{M}^i_i + \overline{M}'^i_i = 0$) (fig. 5), adică dacă

$$\begin{cases} \gamma_i = \pi\,(\Gamma \subset M_2) \\ \alpha_{i-1,\,i} = \alpha_{i,\,i+1}\,; \quad i = 1, 2, \ldots n-1. \end{cases} \tag{35}$$

Deci :

Transmisia policardanică plană cu palierele intermediare descărcate trebuie să aibă furcile axelor intermediare coplanare ($\gamma_i = \pi$) și unghiurile dintre axe egale ($\alpha_{i-1,\,i} = \alpha_{i,\,i+1}$) — semnul curburii lanțului cinematic să fie omogen.

Observația 3

Din (22) și (35) rezultă :

Transmisiile policardanice plane cu număr impar de articulații nu pot fi, concomitent, homocinetice și cu palierele intermediare descărcate.

2.1.4. *Forțe axiale.* Uneori, în transmisiile policardanice este necesară mobilitatatea anumitor paliere care este condiționată de posibilitatea de variație a anumitor unghiuri dintre axe. În asemenea cazuri — transmisii cardanice de automobil — se impune cu necesitate introducerea în lanțul cinematic al transmisiei a cuplelor de translație capabile să transmită moment de torsiune (îmbinări prin caneluri). Forța de frecare T_i din îmbinarea prin caneluri a axului A_i care prin articulații cardanice, se transmite palierelor intermediare este

$$\pm T_i = 2\mu_i \frac{M_t^i}{d_i}, \tag{36}$$

μ_i — coeficientul de frecare,
d_i — diametrul mediu al canelurilor cuplei.

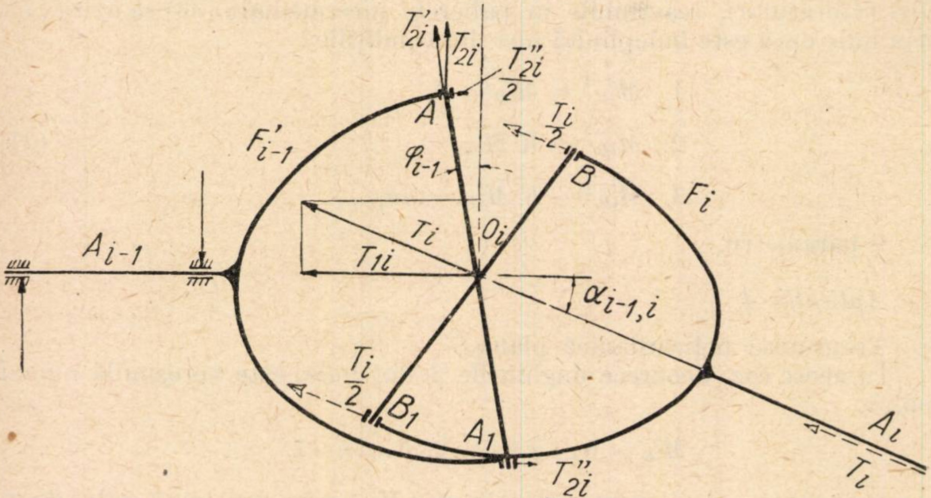


Fig. 7

Urmărind mecanismul transmiterii forței axiale T_i prin articulația cardanică C_i (fig. 7) se pun în evidență forțele :

$$\begin{aligned} T_{1i} &= T_i \cos \alpha_{i-1,\,i} \parallel A_{i-1}, \\ T_{2i} &= T_i \sin \alpha_{i-1,\,i} \perp A_{i-1}, \\ T'_{2i} &= T_i \sin \alpha_{i-1,\,i} \cos \varphi_{i-1} \parallel AA_1, \\ T''_{2i} &= T_i \sin \alpha_{i-1,\,i} \sin \varphi_{i-1} \perp AA_1. \end{aligned} \tag{37}$$

Observaţia 4

Forţele axiale T_i au o deosebită importanţă în transmisiile cardanice de automobil ele cauzînd, în principal, solicitări axiale în rulmenţii palierelor.

2.1.5. *Forţe dinamice cauzate de acceleraţii unghiulare.* Aşa cum s-a subliniat în observaţia 1, în transmisia policardanică homocinetică axele intermediare au, în general, legi de mişcare diferite de cea a axului iniţial.

$$\varphi_n \equiv \varphi_0 \quad \text{însă} \quad \varphi_k \not\equiv \varphi_0 .$$

Rezultă că $\ddot{\varphi}_k \not\equiv \ddot{\varphi}_0$ adică

$$\ddot{\varphi}_k = F(\varphi_0, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0, \alpha_{01}, \alpha_{12} \ldots \alpha_{k-1,k}, \beta_{012} \ldots \beta_{k-2,k-1,k}, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{k-1}) = \\ = F(t) = F(t+T).$$

Momentul forţelor de inerţie M_d^k este

$$M_d^k = -I_k \ddot{\varphi}_k .$$

Forţele de şoc din cuplele axului A_k vor fi evitate dacă

$$M_t^k - M_d^k \geqslant 0. \tag{38}$$

Observaţia 5

În studiul vibraţiilor de torsiune din transmisia automobilului M_d^k este factor perturbator.

2.2. *Randamentul transmisiei policardanice.* Se consideră cazul general cînd în lanţul cinematic al transmisiei sînt incluse şi cuple de translaţie. Randamentul se calculează pentru cicluri energetice complete în perioade de funcţionare staţionară.

2.2.1. *Randamentul articulaţiei cardanice.* În articulaţia cardanică există pierderi în cuplele de rotaţie. La fiecare rotaţie completă a axului A_i în cuple are loc o deplasare unghiulară relativă totală de $4\alpha_{i-1,i}$

$$\eta_i^C = 1 - 4\mu_i \frac{d_i}{D_i} \frac{\alpha_{i-1,i}}{\pi}, \tag{39}$$

η_i^C — randamentul articulaţiei cardanice C_i,
d_i — diametrul bolţului crucii cardanice,
D_i — diametrul suprafeţei sferice a articulaţiei cardanice,

2.2.2. *Randamentul cuplei de translaţie* . Pierderi există din cauza deplasărilor relative liniare din cuplă [2]

$$\eta_i^T = 1 - \frac{\mu_i a_i}{\pi D_i} \frac{N_i}{N}, \tag{40}$$

η_i^T — randamentul cuplei de translaţie,
a_i — deplasarea medie relativă din cupla de translaţie,
N_i — numărul deplasărilor relative în cupla de translaţie
N — numărul total de rotaţii ale axului cardanic.

Raportul $\frac{N_i}{N}$ se evaluează statistic funcţie de viteza medie de rotaţie şi de numărul mediu de deplasări relative (la automobil, funcţie de starea drumurilor şi de viteza medie de deplasare).

2.2.3. *Randamentul total al transmisiei policardanice cu mecanismele legate în serie* [2].

$$\eta_{ts} = \prod_{i=1}^{n} \eta_i^C \prod_{i=1}^{p} \eta_i^T \prod_{i=1}^{q} \eta_i^R \qquad (41)$$

η_i^R — randamentul rulmentului palierului,

n, p, q — numărul articulaţiilor cardanice, al cuplelor de translaţie şi al palierelor respective.

2.2.4. *Randamentul total al transmisiei policardanice cu mecanisme legate mixt* („paralel şi serie") [2]

$$\eta_{tps} = \sum_{r=1}^{k} \rho_r \, \eta_{tsr} \qquad (42)$$

r — ordinul ramificaţiei paralele,

k — numărul ramificaţiilor paralele,

$\rho_r = \frac{L_r}{L}$ coeficient de repartiţie a lucrului mecanic (puterii) total pe ramificaţia r,

η_{tsr} — randamentul total al ramificaţiei r; se calculează cu formula de forma (41).

Observaţia 6

Transmisii policardanice cu mecanisme legate în „paralel şi serie" se găsesc la automobilele : GAZ—63 (două ramificaţii), ZIL—151 (trei ramificaţii) etc.

Primită la redacţie la 18 septembrie 1961

МНОГОКАРДАННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

РЕЗЮМЕ

В первой части настоящего исследования выявляются параметры и устанавливаются рекуррентные формулы, необходимые в кинематике и динамике многокарданных передач.

Для краткости, применяя методы теории множеств, рассматриваются и устанавливаются, в общем случае, условия необходимые для осуществления гомокинетичности; находится число возможных гомокинетических кинематических схем.

Во второй части излагаются общие законы изменения нагружений: крутящие моменты, дополнительные изгибающие моменты, осевые силы, реакции в промежуточных подшипниках, моменты

инерционных сил и пр. Учитывая важность исследования колебаний, рассматриваются и устанавливаются условия, необходимые для получения многокарданной передачи с разгруженными промежуточными подшипниками. В конце работы, имея в виду возможности сборки („последовательной''; „параллельной и последовательной'') механизмов, находится выражение полного к.п.д., причем подчеркивается влияние к.п.д. поступательной пары (шлицевого соединения).

При изложении работы делается ряд ценных замечаний и приводится ряд примеров, имеющих практическое применение главным образом для автостроения.

TRANSMISSIONS PAR PLUSIEURS CARDANS

RÉSUMÉ

Dans la première partie de cette étude, l'auteur met en évidence les paramètres et établit les formules de récurrence utilisées dans la cinématique et la dynamique des transmissions à plusieurs cardans.

Afin d'être plus concis, en se servant des méthodes de la théorie des ensembles, il étudie et établit, dans le cas général, les conditions permettant de réaliser des dispositifs homocinétiques ; il indique le nombre de schémas cinématiques homocinétiques possibles.

Dans la seconde partie, l'auteur établit les lois générales de variation des sollicitations : moments de torsion, moments de flexion complémentaires, forces axiales, réactions dans les paliers intermédiaires, moments des forces d'inertie, etc. En tenant compte de leur importance dans l'étude des vibrations, il étudie et établit les conditions nécessaires pour obtenir une transmission à plusieurs cardans à paliers intermédiaires sans charge.

Enfin, en prenant en considération les possibilités de monter ces mécanismes (en «série» ; en «série-parallèle»), l'auteur propose une formule pour le rendement total, tout en s'appuyant sur l'influence du rendement du couplage de translation (assemblage par cannelures).

Au cours du travail, l'auteur fait beaucoup de remarques importantes et donne plusieurs exemples applicables dans la pratique courante, surtout dans le domaine de la construction d'automobiles.

BIBLIOGRAFIE

1. Fl. DUDIȚĂ, *Cinematica transmisiilor cardanice.* Metalurgia şi construcţii de maşini, *9* (1960).
2. — *Dinamica transmisiei cardanice a automobilului.* Metalurgia şi construcţii de maşini, *2* (1961).
3. В. Ф. РОДИОНОВ, *Проектирование карданной передачи и тенденция к снижению высоты легковых автомобилей.* Автомобильная промышленность, I (1961).
4. P. GUIMBRETIÈR, *La transmission à joints de cardan.* Ingénieurs de l'automobile, *2* (1959).

ASUPRA TENSIUNILOR PRODUSE DE UN CUPLU IZOLAT CARE ACȚIONEAZĂ ÎNTR-UN PUNCT DIN INTERIORUL UNEI BENZI ELASTICE INFINITE CU LATURILE PARALELE ÎNCASTRATE

DE

SMRITI KANA BHOWMICK [1]

INTRODUCERE

Scopul acestei note este de a determina tensiunile într-o bandă elastică de lungime infinită, cu laturi paralele, în cazul în care aceste laturi sînt încastrate, iar în interiorul benzii acționează un cuplu avînd axa normală pe planul ei. Pentru a simplifica problema, poziția cuplului va fi considerată la jumătatea distanței dintre laturi, deși se poate da o soluție pentru orice poziție a cuplului în interiorul benzii. Problema examinată aici diferă de aceea considerată de Sen (1942) care a presupus că laturile sînt libere.

REZOLVAREA PROBLEMEI

Vom considera o bandă infinită dintr-un material elastic izotrop, avînd grosimea constantă. Axele x și y vor fi luate în planul median al benzii ale cărei laturi sînt date de $x = \pm a$. Asupra acestei plăci acționează în orgine un cuplu de moment Q, avînd axa normală pe placă. Deplasările datorite cuplului sînt date de:

$$u = -\frac{Ay}{x^2 + y^2},\qquad v = \frac{Ax}{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

---

[1] Facultatea de matematică, Universitatea Jaderpur, Calcutta.

unde u, v sînt deplasările după direcțiile axelor x și y, ([1], p. 214) iar

$$A = -\frac{Q}{4\,\pi\mu}. \tag{2}$$

Pe latura $x = a$, obținem

$$\left.\begin{aligned} [u]_{x=a} &= \frac{Ay}{a^2+y^2}, \\ [v]_{x=a} &= -\frac{Aa}{a^2+y^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

iar pe latura $x = -a$.

$$\left.\begin{aligned} [u]_{x=-a} &= \frac{Ay}{a^2+y^2}, \\ [v]_{x=-a} &= \frac{Aa}{a^2+y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Să considerăm acum un alt sistem de deplasări $(U,\ V)$ care satisfac ecuațiile de echilibru și anulează deplasările (3) și (4). Pentru $x = a$ vom avea

$$\left.\begin{aligned} [U]_{x=a} &= -\frac{Ay}{a^2+y^2} = f_1(y), \\ [V]_{x=a} &= \frac{Ay}{a^2+y^2} = -f_2(y), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

iar pentru $x = -a$

$$\left.\begin{aligned} [U]_{x=-a} &= -\frac{Ay}{a^2+y^2} = f_1(y), \\ [V]_{x=-a} &= -\frac{Aa}{a^2+y^2} = f_2(y). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Deoarece sistemul $(U,\ V)$ satisface ecuațiile de echilibru, obținem

$$\nabla^2(U,\ V) = -\frac{1}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta.$$

Fie

$$\Delta = -2\,(1-2\sigma)\,\frac{\partial F}{\partial x}$$

astfel încît

$$\nabla^2 F = 0$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} \nabla^2 U &= 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \nabla^2 V &= 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} U &= x\,\frac{\partial F}{\partial x} + \Phi_1 \\ V &= x\,\frac{\partial F}{\partial y} + \Phi_2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

unde Φ_1, Φ_2 sînt funcții armonice. Apoi

$$\begin{aligned} \Delta = -2(1-2\sigma)\,\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \\ \therefore \quad \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{4\sigma - 3}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Fie

$$\Phi_1 = \int_0^\infty B(m)\,\mathrm{ch}\, mx \,\sin my \, dm,$$

$$\Phi_2 = \int_0^\infty C(m)\,\mathrm{sh}\, mx \,\cos my \, dm.$$

Ca urmare, folosind (9) obținem

$$F = \frac{1}{4\sigma - 3}\int_0^\infty \{B(m) - C(m)\}\,\mathrm{ch}\, mx \,\sin my \, dm.$$

Din (8) avem

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{4\sigma - 3}\int_0^\infty &\{B(m)\,[mx\,\mathrm{sh}\, mx + (4\sigma - 3)\,\mathrm{ch}\, mx] \\ &- C(m)\, mx\,\mathrm{sh}\, mx\}\,\sin my\, dm, \\ V = \frac{1}{4\sigma - 3}\int_0^\infty &\{B(m)\, mx\,\mathrm{ch}\, mx - C(m)\,[mx\,\mathrm{ch}\, mx \\ &- (4\sigma - 3)\,\mathrm{sh}\, mx]\}\,\cos my\, dm. \end{aligned} \tag{10}$$

Din condițiile la limită (5) și (6) rezultă clar

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \{B(m)\,[ma \operatorname{sh} ma + (4\sigma - 3)\operatorname{ch} ma] - C(m)\, ma \operatorname{sh} ma\} \sin my\, dm = \\
&\qquad = (4\sigma - 3)\, f_1(y), \\
&\int_0^\infty \{B(m) \operatorname{ch} ma - C(m)\,[ma \operatorname{ch} ma - (4\sigma - 3) \operatorname{sh} ma]\} \cos my\, dm = \\
&\qquad = -(4\sigma - 3)\, f_2(y).
\end{aligned} \tag{11}$$

Fie

$$B(m)\,[ma \operatorname{sh} ma + (4\sigma - 3)\operatorname{ch} ma] - C(m)\, ma \operatorname{sh} ma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, F_1(m),$$

$$B(m)\, ma \operatorname{ch} ma - C(m)\,[ma \operatorname{ch} ma - (4\sigma - 3)\operatorname{sh} ma] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, F_2(m).$$

Apoi din (11) rezultă

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_1(m) \sin my\, dm = (4\sigma - 3)\, f_1(y),$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_2(m) \cos my\, dm = -(4\sigma - 3)\, f_2(y),$$

cu ajutorul teoremei de transformare

$$F_1(m) = (4\sigma - 3)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_1(y) \sin my\, dy = -(4\sigma - 3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, A \int_0^\infty \frac{y \sin my}{\alpha^2 + y^2}\, dy, \tag{12}$$

$$F_2(m) = -(4\sigma - 3)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_2(y) \cos my\, dy = (4\sigma - 3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Aa \int_0^\infty \frac{\cos my}{a^2 + y^2}\, dy. \tag{13}$$

Se știe că

$$\int_0^\infty \frac{y \sin my\, dy}{a^2 + y^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-ma},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos my\, dy}{a^2 + y^2} = \frac{\pi}{2a}\, e^{-ma}.$$

Deci din (12) și (13)

$$F_1(m) = -(4\sigma - 3)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot A\, \frac{\pi}{2}\, e^{-ma},$$

$$F_2(m) = (4\sigma - 3)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot A\, \frac{\pi}{2}\, e^{-ma}.$$

Atunci

$$B(m)\,[ma \,\text{sh}\, ma + (4\sigma-3)\,\text{ch}\, ma] - C(m)\, ma \,\text{sh}\, ma = -(4\sigma-3)\, Ae^{-ma},$$

$$B(m)\, ma \,\text{ch}\, ma - C(m)\,[ma \,\text{ch}\, ma - (4\sigma-3)\,\text{sh}\, ma] = (4\sigma-3)\, Ae^{-ma}.$$

Din ecuațiile de mai sus obținem valorile lui $B(m)$ și $C(m)$ după cum urmează:

$$B(m) = \frac{ma\,(\text{sh}\, ma + \text{ch}\, ma) - (4\sigma-3)\,\text{sh}\, ma}{(4\sigma-3)\,\text{sh}\, ma \,\text{ch}\, ma - ma}\, Ae^{-ma},$$

$$C(m) = \frac{ma\,(\text{sh}\, ma + \text{ch}\, ma) + (4\sigma-3)\,\text{ch}\, ma}{(4\sigma-3)\,\text{sh}\, ma \,ch\, ma - ma}\, Ae^{-ma},$$

sau

$$B(m) = \frac{ma - (4\sigma-3)\,\text{sh}\, ma\, e^{-ma}}{(4\sigma-3)\,\text{sh}\, ma \,\text{ch}\, ma - ma}\, A,$$

$$C(m) = \frac{ma + (4\sigma-3)\,\text{ch}\, ma\, e^{-ma}}{(4\sigma-3)\,\text{sh}\, ma \,\text{ch}\, ma - ma}\, A.$$

Fie σ_{x1}, σ_{y1} și σ_{x2}, σ_{y2} tensiunile datorite respectiv lui (1) și (10). Atunci

$$\sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2},$$

$$\sigma_y = \sigma_{y1} + \sigma_{y2}.$$

Ca urmare

$$[\sigma_x - \sigma_y]_{x=a} = 2\mu\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right]_{x=a}$$

$$= -\frac{8\mu Aay}{(a^2+y^2)^2} + \frac{2\mu}{4\sigma-3}\int_0^\infty [\,B(m)\,\{2\,m^2x \,\text{ch}\, mx + (4\sigma-2)\,m \,\text{sh}\, mx\} -$$

$$- C(m)\,\{-(4\sigma-4)\,m \,\text{sh}\, mx + 2\,m^2x \,\text{ch}\, mx\}\,]_{x=a}.\ \sin my\, dm.$$

Punînd $\sigma = \frac{1}{2}$ și $y = a\eta$ obținem

$$[\sigma_x - \sigma_y]_{x=a} = -\frac{8\mu A\eta}{a^2(1+\eta^2)^2} - \frac{2\mu}{a^2}\int_0^\infty [\,B(m)\,\{2\,m^2a^2 \,\text{ch}\, ma\}$$

$$- C(m)\,\{2\,m^2a^2 \,\text{ch}\, ma + 2\,ma \,\text{sh}\, ma\}\,]\sin my\, d(ma),$$

$$= -\frac{8\mu A\eta}{a^2(1+\eta^2)^2} - \frac{2\mu}{a^2}\int_0^\infty [\,B(m)\,\{2\,u^2 \,\text{ch}\, u\}$$

$$- C(m)\,\{2\,u^2 \,\text{ch}\, u + 2\,u \,\text{sh}\, u\}\,]\sin u\eta\, du,$$

unde $ma = u$. Adică:

$$[\sigma_x - \sigma_y]_{r=a} = -\frac{8\mu A\eta}{a^2(1+\eta^2)^2} + \frac{8\mu A}{a^2}\int_0^\infty \left\{\frac{u^2e^{-u} + \frac{u}{2}e^{-u}\,\mathrm{sh}\,2u}{\mathrm{sh}\,2u + 2u}\right\}\sin u\eta\, du.$$

Cînd η are valori mici, avem

$$[\sigma_x - \sigma_y]_{r=a} = -\frac{8\mu A}{a^2}\eta(1 - 2\eta^2) + \frac{8\mu A}{a^2}\left[\eta\int_0^\infty \frac{u^3e^{-u}du}{\mathrm{sh}\,2u + 2u} + \right.$$

$$+\frac{\eta}{2}\int_0^\infty \frac{u^2e^{-u}\,\mathrm{sh}\,2u}{\mathrm{sh}\,2u + 2u}du - \frac{\eta^3}{6}\int_0^\infty \frac{u^5e^{-u}du}{\mathrm{sh}\,2u + 2u} -$$

$$\left. - \frac{\eta^3}{12}\int_0^\infty \frac{u^4e^{-u}\,\mathrm{sh}\,2u\,du}{\mathrm{sh}\,2\,u + 2u}\right] =$$

$$= \frac{8\mu A}{a^2}[1{,}93839\,\eta - 3{,}90816\,\eta^3] \qquad \text{aproximativ.}$$

Introducînd $A = -\dfrac{Q}{4\pi\mu}$, obținem

$$[\sigma_x - \sigma_y]_{r=a} = \frac{2Q}{\pi a^2}[3{,}90816\,\eta^3 - 1{,}93839\,\eta].$$

Știm că

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_0^\infty F(u)\sin u\eta\,du = \frac{\pi}{2}\lim_{u\to\infty} u\,F(u) \quad \text{cînd} \quad F(u)\to 0 \quad \text{ca} \quad u\to\infty.$$

Deci pentru valori mari ale lui η obținem

$$\lim_{\eta\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-u}\left\{u^2 + \frac{u}{2}\,\mathrm{sh}\,2u\right\}}{\mathrm{sh}\,2u + 2u}\sin u\eta\,du = 0.$$

Valorile lui $[\sigma_x - \sigma_y]_{r=-a}$ pot fi găsite în mod analog.

În încheiere, doresc să exprim mulțumirile mele sincere domnului B. B. Sen pentru ajutorul său binevoitor la pregătirea acestui articol.

Primită la redacție la 2 august 1961

О НАПРЯЖЕНИЯХ, ПРОИЗВЕДЕННЫХ ИЗОЛИРОВАННОЙ ПАРОЙ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ В НЕКОТОРОЙ ТОЧКЕ ВНУТРИ БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОРОНАМИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается напряженное состояние, произведенное сосредоточенной парой, действующей на бесконечную упругую полосу с защемленными параллельными сторонами.

Для удовлетворения контурных условий на защемленных сторонах, ищется в виде интеграл Фурье система перемещений, удовлетворяющих уравнениям равновесия и путем наложения аннулируют перемещения, произведенные парой на параллельных сторонах полосы. Путем наложения напряженных состояний, соответствующих двум систем перемещений, получается искомое напряженное состояние.

NOTE ON THE STRESSES PRODUCED BY AN ISOLATED COUPLE ACTING AT A POINT INSIDE AN INFINITE ELASTIC STRIP WITH ITS PARALLEL EDGES FIXED

ABSTRACT

This paper examines the stress state produced by a concentrated couple acting on an infinite elastic strip with its parallel edges fixed.

For satisfying the boundary conditions on the fixed edges, a system of displacements is sought under the form of Fourier integrals which satisfies the equilibrium equations and by superposition cancels the displacements produced by the couple on the strip parallel edges. By the superposition of the stress states corresponding to the two systems of displacements, the looked for stress state is obtained.

BIBLIOGRAFIE

1. A.E.H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical.* Theory of Elasticity, 1927.
2. B. B. SEN, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society.* **34** (1942).

CALCULUL CUPTOARELOR ROTATIVE DE CLINCHER

DE

V. VISARION și D. DRĂGHICESCU

1. INTRODUCERE

Cunoașterea distribuției de tensiuni, deformații și deplasări este o condiție esențială în proiectarea rațională a cuptoarelor rotative de clincher de altfel ca și în cazul altor mașini și utilaje. În special, în cazul acestor cuptoare cunoașterea precisă a deplasărilor în toate punctele este indispensabilă, pentru a putea trece la realizarea lor întrucît trebuie să se ia în considerare modul de conlucrare între învelișul metalic și cel refractar.

Metodele de calcul utilizate în prezent cu precădere în proiectarea cuptoarelor de clincher se bazează pe ipoteza nedeformabilității secțiunilor transversale (grindă) ceea ce conduce în ultimă instanță la cunoașterea deplasărilor doar ca funcție de lungimea cuptorului.

Ipoteza de grindă continuă nu coincide însă cu realitatea și acest fapt se reflectă printr-o serie de defecțiuni privind conlucrarea dintre învelișul metalic și cel refractar care se distruge uneori repede ca urmare a eforturilor periodice pe care i le impune învelișul metalic și acest fapt produce o seamă de neajunsuri în exploatare și în ultimă instanță o mărire importantă a prețului de cost al cimentului.

Pentru a evita aceste fenomene dăunătoare este necesar ca proiectantul unor asemenea cuptoare să cunoască variația deplasărilor, deformațiilor și tensiunilor de-a lungul conturului secțiunii transversale și să găsească mijloacele tehnice de evitare a dizlocărilor în învelișul refractar.

Metoda de calcul care se impune în această situație trebuie să considere cuptorul ca o structură spațială cilindrică cu secțiuni transversale deformabile deci trebuie să se încadreze în teoria plăcilor curbe. Întrucît raportul dintre grosimea cuptorului și raza de curbură a secțiunii sale transversale este pentru toate cazurile uzuale inferioară lui 1/20 se poate considera învelișul metalic ca o placă curbă subțire pentru care există o teorie relativ bine pusă la punct.

Metoda de calcul pe care o vom prezenta în cele ce urmează îndeplinește într-o mare măsură condițiile de accesibilitate și precizie a rezultatelor ceea ce o recomandă ca potrivită pentru utilizare la calculul şi proiectarea cuptoarelor rotative de clincher.

În formularea problemei ce face obiectul acestei lucrări se consideră, conform cu realitatea că forţele exterioare nu au componente decît după raza secţiunii transversale circulare a cuptorului (forţele ce acţionează în lungul tubului fiind mici în raport cu cele normale, se pot neglija).

În cele ce urmează va fi prezent calculul unei porţiuni de la mijlocul cilindrului metalic simetrică în raport cu unul din reazeme. În acest caz se poate considera cu o bună aproximaţie că problema este simetrică pe lungimea acestei porţiuni în raport cu originea coordonatelor care se ia în mijlocul reazemului. Încărcarea tubului se consideră concentrată în reazem şi se obţine din calculul de grindă al reacţiunilor.

2. ECUAŢII DE BAZĂ

Calculul de rezistenţă al cuptoarelor rotative de clincher după cum s-a arătat se reduce la calculul plăcii curbe subţiri cilindrice circulare elastice închise.

Considerăm că suprafaţa mediană a plăcii, este referită la un sistem de coordonate curbilinii ortogonale α, β corespunzînd secţiunilor circulare, respectiv generatoarelor (fig. 2.1).

Ipotezele ce vor sta la baza acestui calcul sînt cele utilizate în mod curent în formularea teoriei plăcilor curbe subţiri elastice :

1. Grosimea plăcii este mică în raport cu celelalte dimensiuni. În general în literatura de specialitate [1] se acceptă ca limită de la care o placă poate fi considerată ca avînd grosime mică

$$\max \frac{2h}{R} \leqslant \frac{1}{20},$$

fiind semigrosimea plăcii.

Eroarea cu care vor fi stabilite ecuaţiile este apreciată ca fiind de ordinul de mărime al lui $\frac{2h}{R}$ faţă de unitate ceea ce arată că limitarea anterioară permite, teoretic vorbind, abateri de ordinul 5 % la limita inferioară de precizie.

2. Materialul din care este alcătuită placa este elastic cu alte cuvinte satisface legea lui Hooke a liniarităţii relaţiilor dintre eforturi şi deformaţii.

3. Datorită micii grosimi a plăcii curbe şi comportării elastice a materialului, elementul normal la suprafaţa mediană rămîne rectiliniu şi normal la suprafaţa mediană deformată şi nu suferă alungiri. Această ipoteză generalizează cunoscuta ipoteză a lui Bernoulli privind comportarea grinzilor elastice.

Ea este denumită ipoteza lui Love — Kirchoff.

Adoptarea acestor ipoteze, permite ca studiul plăcii curbe subţiri tridimensionale să poată fi redus la un studiu bidimensional.

Eforturile mediului tridimensional sînt legate prin relaţii reversibile cu rezultantele lor pe grosime N_α, N_β, $N_{\alpha\beta}$, Q_α, Q_β, denumite forţe axiale de lunecare respectiv forțe tăietoare și momentele rezultante M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$, denumite momente încovoietoare și de torsiune (fig. 2.2, 2.3).

Sarcinile exterioare sînt aplicate la suprafața mediană avînd drept componente după α, β și normala la suprafața mediană X, Y, $-Z$ (fig. 2.4.)

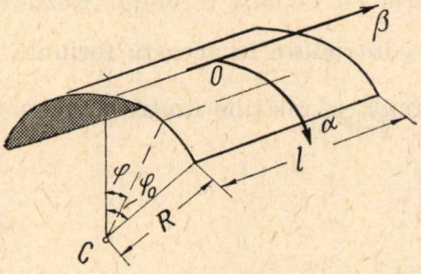


Fig. 2.1

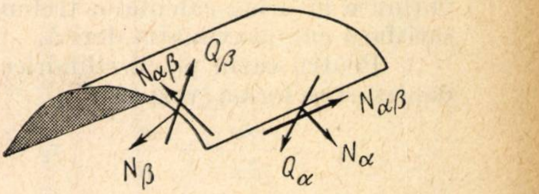


Fig. 2.2.

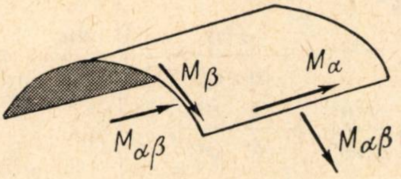


Fig. 2.3.

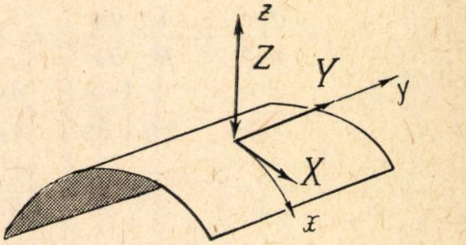


Fig. 2.4

Deformațiile mediului tridimensional sînt reduse la deformațiile suprafeței mediane ε_1, ε_2, ω de alungire și de lunecare, precum și χ_1, χ_2, τ, deformațiile de încovoiere, respectiv de torsiune.

Făcînd echilibrul elementului de placă rezultă următorul sistem de ecuații de echilibru (vezi [2]) :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} - \frac{Q_\alpha}{R} + X = 0,\\
&\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + Y = 0,\\
&\frac{N_\alpha}{R} + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} + Z = 0,\\
&\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + Q_\beta = 0,\\
&\frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \beta} - Q_\alpha = 0,\\
&N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha} = 0,\\
&M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha} = 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ultima ecuație este aproximativă. Forma ei exactă este

$$N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R} = 0, \tag{2.2.}$$

termenul $\frac{M_{\alpha\beta}}{R}$ fiind mic în comparație cu ceilalți termeni. Rezultatele obținute în urma calculului trebuie ca introduse în această formulă să o satisfacă cu aproximația dorită.

Pentru cazul plăcii cilindrice circulare, relațiile dintre deformații și deplasări au forma (vezi [2])

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta},\\
\omega &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{\omega^{(1)}}{2} - \frac{\omega^{(2)}}{2},\\
\chi_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2},\\
\tau^{(1)} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2R}\left[\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right], \quad \tau^{(2)} = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \beta},\\
\tau &= \frac{1}{2}\left[\tau^{(1)} - \tau^{(2)} + \frac{w}{2R}\right] = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \beta},\\
\zeta_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right],\\
\zeta_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right],
\end{aligned} \tag{2.3}$$

unde u este deplasarea în lungul cercurilor v a generatoarelor, iar w în lungul razei cu sensul pozitiv spre interior.

Deformațiile ζ_1 și ζ_2 sînt introduse formal ele neintervenind în legea lui Hooke, dar apar în ecuațiile de continuitatea deformației

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \chi_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial \beta} + \frac{\zeta_2}{R} = 0,\\
&\frac{\partial \tau^{(2)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \chi_2}{\partial \beta} = 0,\\
&\frac{\chi_2}{R} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta} = 0,\\
-&\frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + \zeta_1 = 0,\\
&\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \beta} + \zeta_2 = 0,\\
&\tau^{(2)} + \tau^{(1)} - \frac{\omega^{(2)}}{R} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ultima va fi considerată sub forma aproximativă

$$\tau^{(2)} + \tau^{(1)} = 0. \tag{2.5}$$

Forțele și momentele sînt legate de deformații prin legea lui Hooke

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \frac{2\,Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2),\\ N_\beta &= \frac{2\,Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1),\\ N_{\alpha\beta} &= \frac{Eh}{1+\mu}\,\omega,\\ M_\alpha &= -\frac{2\,Eh^3}{3(1-\mu^2)}(\chi_1 + \mu\chi_2),\\ M_\beta &= -\frac{2\,Eh^3}{3(1-\mu^2)}(\chi_2 + \mu\chi_1),\\ M_{\alpha\beta} &= \frac{2\,Eh^3}{3(1+\mu)}\,\tau. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pentru cele ce urmează este necesar ca primele trei relații (2.6) să fie puse sub forme echivalente

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{2\,Eh}(N_\beta - \mu\,N_\alpha),\\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{2\,Eh}(N_\alpha - \mu\,N_\beta),\\ \frac{\omega}{2} &= \frac{1+\mu}{2\,Eh}\,N_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ecuațiile astfel obținute, pot fi puse sub o formă echivalentă, dar mai simplă, cu ajutorul următorului procedeu:

Amplificînd sistemul de ecuații de continuitatea deformației cu $i\dfrac{2\,Eh^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$, ecuație cu ecuație și termen cu termen adunîndu-l la sistemul de ecuații de echilibru, se obține dacă se notează

$$\begin{aligned} &\widetilde{N}_\alpha = N_\alpha + i\zeta\chi_2, \quad \widetilde{N}_\beta = N_\beta + i\zeta\chi_1, \quad \widetilde{N}_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} - i\zeta\tau,\\ &\widetilde{M}_\alpha = M_\alpha + i\zeta\varepsilon_2, \quad \widetilde{M}_\beta = M_\beta + i\zeta\varepsilon_1, \quad \widetilde{M}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + i\zeta\frac{\omega}{2},\\ &\widetilde{Q}_\alpha = Q_\alpha - i\zeta\zeta_2, \quad \widetilde{Q}_\beta = Q_\beta + i\,\zeta\zeta_1, \quad \zeta = \frac{2\,Eh^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

următorul sistem de ecuații aplicate forțelor și momentelor complexe:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \widetilde{N}_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{N}_{\beta\alpha}}{\partial \beta} - \frac{\widetilde{Q}_\alpha}{R} + X = 0,\\
&\frac{\partial \widetilde{N}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{N}_\beta}{\partial \beta} + \;Y \;= 0,\\
&\frac{\widetilde{N}_\alpha}{R} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\beta}{\partial \beta} + Z = 0,\\
&\frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{M}_\beta}{\partial \beta} + \;\widetilde{Q}_\beta \;= 0,\\
&\frac{\partial \widetilde{M}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{M}_{\beta\alpha}}{\partial \beta} - \;\widetilde{Q}_\alpha \;= 0,\\
&\widetilde{N}_{\alpha\beta} + \widetilde{N}_{\beta\alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Analog, amplificînd relațiile (2.7) cu $i\zeta$ și adunîndu-le la ultimile trei ecuații (2.6.) rezultă *ecuațiile complementare* [3] care condensează relațiile lui Hooke

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_\alpha &= i c_3 \,(\widetilde{N}_\beta - \mu \widetilde{\widetilde{N}}_\alpha),\\
\widetilde{M}_\beta &= i c_3 \,(\widetilde{N}_\alpha - \mu \widetilde{\widetilde{N}}_\beta),\\
\widetilde{M}_{\alpha\beta} &= i c_3 \,(\widetilde{N}_{\alpha\beta} + \mu \widetilde{\widetilde{N}}_{\alpha\beta}),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

unde

$$c_3 = \frac{h}{\sqrt{3\,(1-\mu^2)}}. \tag{2.11}$$

Pe baza acestor relații, prin eliminări succesive se ajunge la o singură ecuație de forma

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 M_*}{\partial \beta^2} + i\,R c_3 \left(\Delta\Delta M_* + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 M_*}{\partial \alpha^2} \right) =\\
&= i c_3 \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} - \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right) - i\,R c_3^2\,(1+\mu) \left[\Delta \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right) + \right.\\
&\left. + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right] - i\,R c_3\,\Delta Z.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Forțele și momentele sînt legate de necunoscuta adoptată M_*, prin relațiile următoare cu precizia proprie teoriei plăcilor curbe subțiri [1]

$$\widetilde{Q}_\alpha = \left(1 - i\frac{c_3}{R}\right)\frac{\partial M_*}{\partial \alpha} - i\frac{c_3}{R}\,\mu\,\frac{\partial \widetilde{M}_*}{\partial \alpha} + (1+\mu)\,c_3\left[i + \frac{c_3}{R}(1-\mu)\right]X,$$

$$\widetilde{Q}_\beta = \frac{\partial M_*}{\partial \beta} + (1+\mu)\,i c_3\,Y, \qquad (2.13)$$

$$\widetilde{M}_\alpha = M_* + i R c_3\,(\Delta M_* + \mu\,\Delta \overline{M}_*) + i(1+\mu)\,R c_3 Z,$$

$$\widetilde{M}_\beta = \mu \overline{M}_* - i R c_3\,(\Delta M_* + \mu\,\Delta \overline{M}_*) - i(1+\mu)\,R c_3 Z.$$

Forța complexă $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$ se poate deduce cu ușurință din ecuația a cincea de echilibru.

Utilizînd relațiile (2.10) și expresiile anterioare rezultă și expresiile forțelor complexe $\widetilde{N}_\alpha$, $\widetilde{N}_\beta$, $\widetilde{N}_{\alpha\beta}$.

3. STUDIUL ECUAȚIEI (2.12)

Soluția generală a ecuației (2.12) este de forma

$$M_* = M^{(a)} + M^{(b)},$$

$M^{(a)}$ fiind integrala generală a ecuației omogene asociate ecuației (2.12)

$$\frac{\partial^2 M^{(a)}}{\partial \beta^2} + i R c_3\left[\Delta\Delta M^{(a)} + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial^2 M^{(a)}}{\partial \alpha^2}\right] = 0, \qquad (3.1)$$

iar $M^{(b)}$ o soluție particulară, a ecuației neomogene (2.12).

Este necesar să se pretindă soluțiilor obținute ca să fie în ceea ce privește variabila α, periodice de perioadă $2\pi R$ pentru a satisface continuitatea soluțiilor în secțiunea circulară închisă a cilindrului.

Vom căuta soluția ecuației (3.1) sub forma seriei

$$M^{(a)} = M_0^{(a)}(\nu_0\beta) + \sum M_{cn}^{(a)}(\nu_n\beta)\cos\nu_n\alpha + \sum M_{sn}^{(a)}(\nu_n\beta)\sin\nu_n\alpha, \qquad (3.2)$$

unde

$$\nu_0 = \frac{1}{R}, \qquad \nu_n = \frac{n}{R}. \qquad (3.3)$$

---

[1]) Se neglijează $\frac{h^2}{R^2}$ față de unitate.

Introducînd relaţia (3.2) în ecuaţia (3.1) şi identificînd, se obţin ecuaţiile

$$M_0^{(a)''} + i\,a\,M_0^{(a)\mathrm{IV}} = 0, \tag{3.4}$$

$$M_1^{(a)''} + i\,a\,(M_1^{(a)\mathrm{IV}} - 2M_1^{(a)''}) = 0, \tag{3.5}$$

$$M_n^{(a)''} + n^2\,i\,a\left[M_n^{(a)\mathrm{IV}} - 2\,M_n^{(a)''} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)M_n^{(a)}\right] = 0, \tag{3.6}$$

. . . .

unde

$$a = \frac{h}{R}\,\frac{1}{\sqrt{3\,(1-\mu^1)}} = \frac{c_3}{R},$$

derivatele fiind luate în raport cu $\nu\beta$.

Ecuaţiile caracteristice asociate sînt

$$r_0^2 + ia\,r_0^4 = 0, \tag{3.7}$$

$$r_1^2 + ia\,(r_1^4 - 2\,r_1^2) = 0, \tag{3.8}$$

. . . .

$$r_n^2 + n^2\,ia\left[r_n^4 - 2\,r_n^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right] = 0. \tag{3.9}$$

. . . .

Integralele generale, corespunzătoare sînt

$$M_0^{(a)} = A_0^1 + A_0^2\,(\nu_0\beta) + B_0^1 \operatorname{ch} r_0\,\nu_0\,\beta + B_0^2 \operatorname{sh} r_0\,\nu_0\,\beta, \tag{3.10}$$

$$M_1^{(a)} = A_1^1 + A_1^2\,(\nu_1\,\beta) + B_1^1 \operatorname{ch} r_1\,\nu_1\,\beta + B_0^2 \operatorname{sh} r_1\,\nu_1\,\beta, \tag{3.11}$$

. . . .

$$\begin{aligned} M_n^{(a)} &= A_n^1 \operatorname{ch} r_{n1}\,\nu_n\,\beta + A_n^2 \operatorname{sh} r_{n1}\,\nu_n\,\beta + \\ &\quad + B_n^1 \operatorname{ch} r_{n2}\,\nu_n\,\beta + B_n^2 \operatorname{sh} r_{n2}\,\nu_n\,\beta, \end{aligned} \tag{3.12}$$

unde

r_0 — este una dintre rădăcinile ecuaţiei

$$r_0^2 - \frac{i}{a} = 0, \tag{3.13}$$

r_1 — este una dintre rădăcinile ecuaţiei

$$r_1^2 - \left(2 + \frac{i}{a}\right) = 0, \tag{3.14}$$

— r_{n1} şi r_{n2} sînt rădăcinile pătrate ale rădăcinilor ecuaţiei

$$\rho_n^2 - \left(2 + \frac{1}{n^2 a}\right)\rho_n + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 0. \tag{3.15}$$

Este de remarcat însă, că ecuaţiile (3.4) şi (3.5) conţin o derivare suplimentară. În adevăr, la obţinerea ecuaţiei (2.12), ultima etapă a fost eliminarea momentelor de torsiune între ultimele două ecuaţii (2.9). În ambele cazuri citate una din ecuaţiile de echilibru nu mai conţine momentul de torsiune, derivarea nemaifiind astfel necesară. De aceea ecuaţiile (3.4), (3.5) trebuie înlocuite cu

$$M_0^{(a)\prime} + ia\, M^{(a)\prime\prime\prime} = 0, \tag{3.16}$$

$$M_1^{(a)\prime} + ia\,(M_1^{(a)\prime\prime\prime} - 2\, M_1^{(a)\prime}) = 0, \tag{3.17}$$

corespunzîndu-le următoarele ecuaţii caracteristice

$$r_0 + ia\, r_0^3 = 0, \tag{3.18}$$

$$r_1 + ia\,(r_1^3 - 2\, r_1) = 0, \tag{3.19}$$

şi deci următoarele soluţii

$$M_0^{(a)} = A_0^1 + B_0^1 \operatorname{ch} r_0\, \nu_0\, \beta + B_0^2 \operatorname{sh} r_0\, \nu_0\, \beta, \tag{3.20}$$

$$M_1^{(a)} = A_1^1 + B_1^1 \operatorname{ch} r_1\, \nu_1\, \beta + B_1^2 \operatorname{sh} r_1\, \nu_1\, \beta, \tag{3.21}$$

deci constantele complexe

$$A_0^2,\ A_1^2$$

trebuie considerate nule.

Rămîne de observat că în lungul celor două secţiuni circulare de capăt, condiţiile de margine pentru $n = 0{,}1$ trebuie astfel formulate încît echilibrul trebuie satisfăcut.

În adevăr, în cazul acestor armonice rezultă eforturi neechilibrate în secţiunile de capăt. Aceste eforturi neechilibrate, pentru $n = 0$ sînt N_β, $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ iar pentru $n = 1$, N_β, $N_{\alpha\beta}$, Q_β, M_β. Fiecare forţă sau moment neechilibrat (în afară de $M_{\alpha\beta}$) în secţiune necesită deci o singură condiţie pentru o margine, în lungul celeilalte rezultînd automat din condiţii de echilibru.

De aceea, pentru $n = 0$ trebuie următoarele condiţii de margine :

— pentru secţiunea $\beta = \beta_1$

$$N_\beta,\ Q_\beta,\ M_\beta,\ N_{\alpha\beta};$$

— iar pentru $\beta = \beta_2$

$$M_\beta,\ Q_\beta.$$

Analog pentru $n = 1$, pentru secţiunea $\beta = \beta_1$ trebuie date

$$N_\beta,\ N_{\alpha\beta},\ R_\beta,\ M_\beta$$

iar pentru $\beta = \beta_2$ nici o condiţie de margine.

Soluţiile particulare rezultă din ecuaţia neomogenă (2.12). Presupunînd sarcina exterioară Z dezvoltată în serie [1]

$$Z = Z_0(\nu_0 \beta) + \sum_{n=1} Z_{cn}(\nu_n \beta) \cos \nu_n \alpha + \sum_{n=1} Z_{sn}(\nu_n \beta) \sin \nu_n \alpha \qquad (3.22)$$

şi introducînd-o în (2.12) şi identificînd, rezultă

$$M_0^{(b)'} + ia\, M_0^{(b)'''} = -\, ia\, R^2\, Z_0', \qquad (3.23)$$

$$M_1^{(b)''} + ia\,(M_1^{(b)\mathrm{IV}} - 2\, M_1^{(b)''}) = -\, ia\, R^2 (Z_1'' - Z_1), \qquad (3.24)$$

. . . .

$$M_n^{(b)''} + n^2\, ia \left[M_n^{(b)\mathrm{IV}} - 2\, M_n^{(b)''} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) M_n^{(b)} \right] = -\, R^2\, ia\,(Z_n'' - Z_n). \qquad (3.25)$$

. . . .

O metodă pentru deducerea unei soluţii particulare, este următoarea : Se presupune pentru fiecare armonică, funcţia necunoscută dezvoltată după puterile parametrului ia. Introduse aceste dezvoltări în ecuaţiile anterioare, rezultă sisteme iterative pe baza cărora soluţia particulară poate fi determinată.

Astfel pentru $n = 0$, luînd

$$M_0^{(b)} = -\, R^2\, ia\ [\varphi_{0.1} + ia\, \varphi_{0.2} + (ia)^2\, \varphi_{0.3} + \dots] \qquad (3.26)$$

se obţine

$$\begin{aligned} &\varphi_{0.1}' = Z_0' \text{ şi deci } \varphi_{0.1} = Z_0, \\ &\varphi_{0.2}' + \varphi_{0.1}''' = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &\varphi_{0.n}' + \varphi_{0.n}''' - 1 = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \qquad (3.27)$$

de unde [2]

$$M_0^{(b)} = -\, R^2\, ia\ [Z_0 - ia\, Z_0'' + (ia)^2\, Z_0^{\mathrm{IV}} + \dots]. \qquad (3.28)$$

---

[1] În Z_c şi Z_s, sînt incluse şi componentele normale ale greutăţii proprii care însă se neglijează împreună cu componentele după α şi β ale greutăţii proprii, întrucît ele sînt cuprinse în soluţia dată de calculul de grindă, considerate ca soluţie a ecuaţiei pentru armonica I.

[2] Derivatele sînt luate în raport cu $\nu_n\beta$.

Analog pentru $n = 1$, luînd

$$M_1^{(b)} = -R^2 ia\, [\varphi_{1,1} + (ia)\,\varphi_{1,2} + (ia)^2\,\varphi_{1,3} + \dots], \tag{3.29}$$

rezultă

$$\begin{aligned} &\varphi''_{1,1} = Z''_1 - Z_1 \text{ şi deci } \varphi_{1,1} = Z_1 - \int d\beta_1 \int Z_1\, d\beta_1, \\ &\varphi''_{1,2} + \varphi^{IV}_{1,1} - 2\,\varphi''_{1,1} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi''_{1,m} + \varphi^{IV}_{1,m-1} - 2\,\varphi''_{1,m-1} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{3.30}$$

de unde

$$\begin{aligned} M_1^{(b)} = -R^2 ia \Big[& Z_1 - \int d\beta_1 \int Z_1\, d\beta_1 + ia\Big(3Z_1 - 2\int d\beta_1 \int Z_1\, d\beta_1 - Z''_1\Big) + \\ & + (ia)^2 \Big(8Z_1 - 4\int d\beta_1 \int Z_1\, d\beta_1 - 5Z''_1 + Z_1^{IV}\Big) + \dots \Big] \end{aligned} \tag{3.31}$$

Pentru cazul armonicii a n-a, luînd

$$M_n^{(b)} = -R^2 ia\, [\varphi_{n,1} + ia\,\varphi_{n,2} + (ia)^2\,\varphi_{n,3} + \dots] \tag{3.32}$$

se obţine sistemul recurent

$$\begin{aligned} &\varphi''_{n,1} = Z''_n - Z_n \quad \text{şi deci} \quad \varphi_{n,s} = Z_n - \int d\beta_n \int Z_n\, d\beta_n, \\ &\varphi''_{n,2} + n^2\Big[\varphi^{IV}_{n,1} - 2\,\varphi''_{n,1} + \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)\varphi_{n,1}\Big] = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi''_{n,m} + n^2\Big[\varphi^{IV}_{n,m-1} + \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)\varphi_{n,m-1}\Big] = 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Expresiile (3.26), (3.29), (3.32) deduse constituie o soluţie numai dacă ele sînt absolut şi uniform convergente în domeniul variabilei β considerat.

În general, atunci cînd încărcarea Z are variaţii foarte mari, seriile considerate nu sînt convergente.

În aceste cazuri trebuie determinată soluţia particulară pe baza integrării directe a ecuaţiilor corespunzătoare fiecărei armonice în parte.

O altă metodă bazată pe descompunere în serie, care însă în general este convergentă în condiţii mult mai largi, este metoda seriilor trigonometrice.

Să presupunem că

$$Z_n(\nu_n\beta) = \sum_m Z_m \cos \lambda_n\beta, \tag{3.34}$$

cu $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{l}$, $2l$ fiind lungimea tubului considerat și că

$$M_n^{(b)} = \sum_m \mathfrak{M}_{n,\,m} \cos \lambda_m \beta . \tag{3.35}$$

Introducînd aceste expresii în (3.28), (3.31), (3.32) și identificînd, rezultă ținînd seama de faptul că în ele derivările au fost făcute în raport cu $\nu_n \beta$

$$\mathfrak{M}_{0,\,m} = 1 - \frac{R^2\, ia\, Z_0}{1 - ia\dfrac{\lambda_m^2}{\nu_0^2}}, \tag{3.36}$$

$$\mathfrak{M}_{n,\,m} = \frac{R^2\, ia\, Z_m\left(1 + \dfrac{\lambda_m^2}{\nu_n^2}\right)}{-\dfrac{\lambda_m^2}{\nu_n^2} + n^2\, ia\left\{\left[1 + \dfrac{\lambda_m^2}{\nu_n^2}\right] - \dfrac{1}{n^2}\right\}}. \tag{3.37}$$

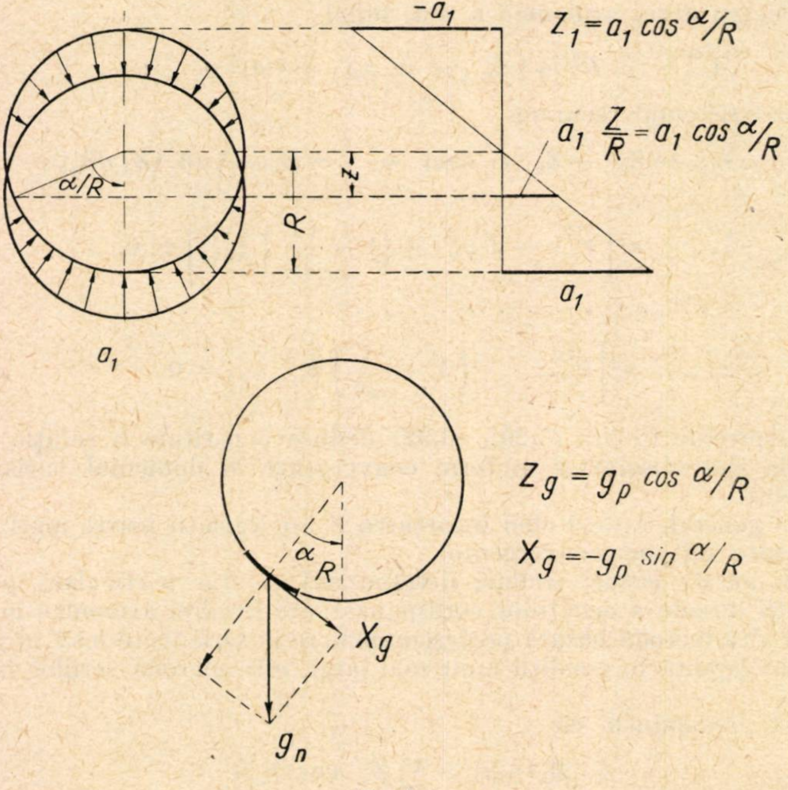

$-a_1$
$Z_1 = a_1 \cos \alpha/R$
$a_1 \frac{Z}{R} = a_1 \cos \alpha/R$
z
α/R
R
a_1
a_1
$Z_g = g_p \cos \alpha/R$
$X_g = -g_p \sin \alpha/R$
α_R
X_g
g_n

Fig. 3.1

Să studiem solicitarea din greutatea proprie a unui tub de grosime constantă.

În acest caz, corespunzător figurii 3.1, rezultă că încărcarea exterioară corespunde primei armonice. Rezultă de asemenea, că în cazul primei armonice diagrama forțelor normale pe secțiunea inelară a cilindrului este liniară, ca în ipoteza de grindă cu secțiune rigidă.

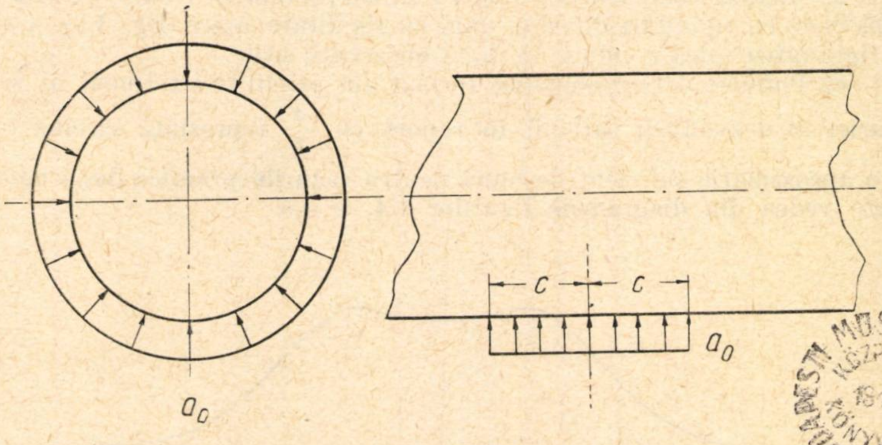
De aceea privește determinarea eforturilor normale corespunzătoare încărcării din greutate proprie, se poate considera ca fiind exact calculul de grindă continuă, mai puțin zonele din imediata vecinătate a reazemelor unde distribuția reală a reacțiunilor este mai complicată, conținînd și alte armonice.

4. SOLICITAREA ȘI DEFORMAREA TUBULUI PRODUSĂ DE REACȚIUNI

În cazul proiectării cuptoarelor rotative de clincher problema esențială este de a se putea calcula deformarea secțiunii circulare a tubului cu scopul evitării unei deformări exagerate a căptușelii din material refractar care să ducă la distrugerea ei rapidă.

În paragraful de față se vor deduce cîteva rezultate utile în acest sens. Astfel se va arăta că:

1. Deformarea secțiunii circulare a tubului nu se datorește părții funcție de — β — și nici primei armonice a dezvoltării și solicitărilor provenite din reacțiune în serie Fourier de α. Partea funcție numai de β (fig. 4.1) a reacțiunii conduce la o deformație neglijabilă comparabilă cu [1])



BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1968

Fig. 4.1

$$w_0 = \frac{R^2 a_0}{A_t \cdot E}, \qquad (4.1)$$

---

[1]) Presupunînd sarcina și tubul infinite și deci deformație identică în fiecare secțiune.

unde

— R este raza tubului în dreptul rezemării,

— a_0 este coeficientul corespunzător părții funcție de β din dezvoltarea în serie Fourier a reacțiunii pe o lungime egală cu unitatea (fig. 4.2),

— A_t — este aria unității de lungime a secțiunii transversale a tubului (fig. 4.2),

— E este modulul de elasticitate.

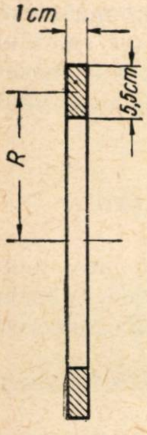


Fig. 4.2

Ca exemplu presupunînd acoperitor

$a_0 = 20$ kg/cm^2),
$A_t = 5{,}5$ cm^2 (h = 2,75 cm),
$R = 180$ cm,
$E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm^2,

rezultă

$$w_0 = 0{,}55 \text{ mm}$$

deformație cu totul neglijabilă, care nu poate explica distrugerea căptușelii refractare.

Absolut analog, pentru prima armonică a dezvoltării Fourier distribuția de forțe normale este liniară pe secțiune, ca și în cazul secțiunii rigide, fapt ce conduce la deformații ale secțiunii foarte mici.

2. Analiza coeficienților Fourier a reacțiunilor provenite pe tub din două inele cu rigidități diferite, unul cu rigiditate mare (fig. 4.3) și altul cu rigiditatea mică conduce la două observații utile.

a) Polinomul trigonometric format din primii trei termeni ai seriei Fourier ai dezvoltării sarcinii în raport cu $\frac{\alpha}{R}$ reprezintă sarcina reală cu o aproximație suficient de bună pentru cazurile practice după cum se poate vedea din diagramele figurilor 4.4. și 4.5.

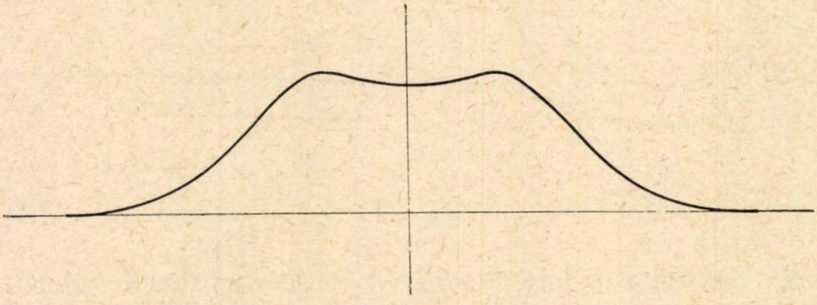


Fig. 4.3

b) Coeficienții celei de-a doua armonice nu diferă esențial în ambele cazuri fapt ce arată că rigiditatea inelului prin intermediul căruia tubul reazemă pe role nu influențează esențial deformarea secțiunii tubului, între anumite limite.

$$Z_2 = (1{,}12 + 1{,}78 \cos\theta + 0{,}92 \cos 2\theta)$$

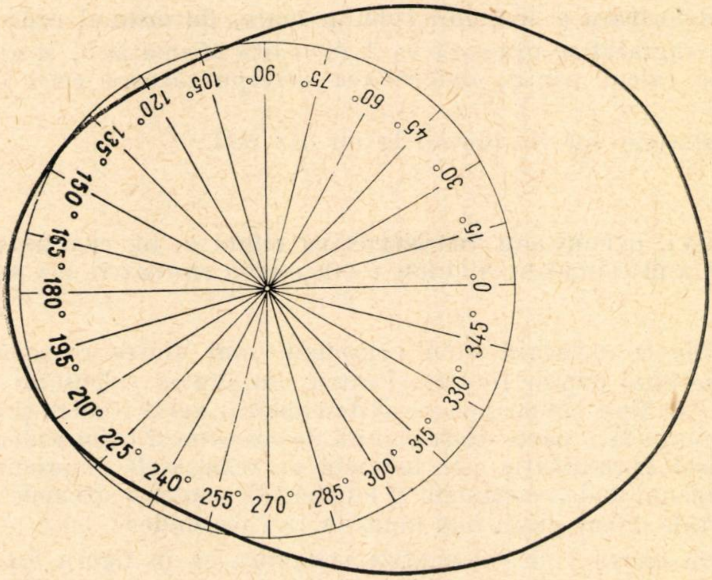


Fig. 4.4

$$Z_1 = (1{,}47 + 2{,}25 \cos\theta + 1{,}04 \cos 2\theta)$$

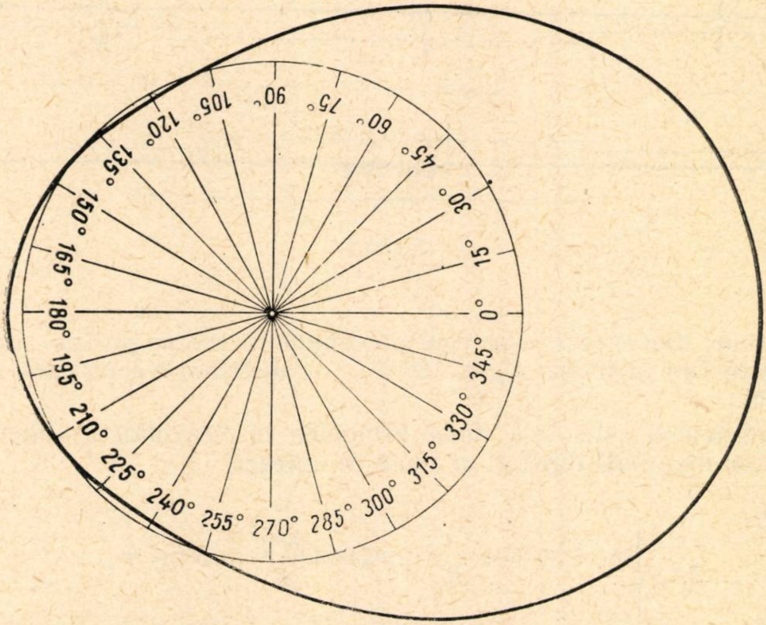


Fig. 4.5

3) Calculele ulterioare vor arăta că celei de-a doua armonice îi corespunde o deformare a secțiunii tubului mare, de ordinul centrimetrilor. În paragraful ce urmează va fi dovedită afirmația 3, și se va da o metodă de calcul pentru deformarea corespunzătoare celei de-a doua armonice.

Rezultatele vor fi aplicate la un caz real.

5. CALCULUL DEFORMĂRII TRANSVERSALE PRODUSE DE CEA DE-A DOUA ARMONICĂ A DEZVOLTĂRII FOURIER A SARCINILOR PROVENITE DIN REACȚIUNI

În cele ce urmează vom considera unul dintre reazemele intermediare ale unui cuptor rotativ. Pentru simplitatea calculului vom presupune că dat fiind numărul mare al deschiderii, acest reazem și porțiunea de tub aferentă face parte dintr-o suită de reazeme și tuburi identice infinită. Această aproximație este indicată de rezultatele cunoscute pentru grinzile continui unde reacțiunile și momentele pentru reazemele și deschiderile centrale diferă puțin mai mult de trei deschideri.

Pentru calcul vom schematiza structura ca în figura 5.1. Cu alte cuvinte observăm că pe o deschidere $2l$ tubul are o grosime $2h$ mai mare decît $2\,h_1$, corespunzătoare restului tubului dintre reazeme.

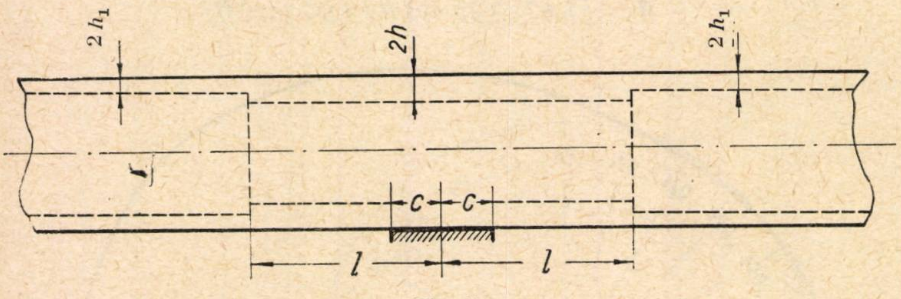


Fig. 5.1

Sarcina dintre reacțiune vom presupune că are pe porțiunea contactului dintre tub și inelul rigid $|\beta| < c$, o distribuție constantă în rest fiind nulă.

Coeficientul celei de-a doua armonice în dezvoltarea după β are deci aceeași diagramă după β, și dacă se notează

$$Z = \begin{cases} a_0 + a_1 \cos \dfrac{\alpha}{R} + a_2 \cos \dfrac{2\alpha}{R} & |\beta| < c \\ 0 & |\beta| > c \end{cases} \qquad (5.1)$$

Cu alte cuvinte termenul liber al ecuației diferențiale corespunzătoare, va avea un punct de discontinuitate de speța întîi pentru $\beta = \pm c$, unde

$$a_1 = \frac{V}{2\pi Rc}, \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1{,}12}{1{,}78} a_1 \div \frac{1{,}47}{2{,}25} a_1 = 0{,}63\, a_1 \div 0{,}653\, a_1, \\ a_2 &= \frac{0{,}92}{1{,}78} a_1 \div \frac{1{,}04}{2{,}25} a_1 = 0{,}518\, a_1 \div 0{,}463\, a_1, \end{aligned} \tag{5.3}$$

V este dat de calculul corespunzător de grindă continuă.

Celei de-a doua armonice îi corespunde următoarea ecuație cu derivate ordinare

$$\begin{aligned} & M_2'' + 4\, ia \left[M_2^{\mathrm{IV}} - 2\, M_2'' + \frac{3}{4} M_2 \right] = \\ & \quad - R^2\, ia\, [\, a_2''\, (\nu_2 \beta) - a_2\, (\nu_2 \beta)\,], \end{aligned} \tag{5.4}$$

derivatele fiind luate în raport cu $\nu_2 \beta$.

Se observă că în afară de punctul de discontinuitate unde derivata lui $a_2(\nu_2\beta)$ nu există

$$a_2'' = 0;$$

astfel că termenul liber este

$$\begin{aligned} & R^2\, ia\, a_2 \quad \text{pentru } |\, \beta \,| < c, \\ & 0 \quad \text{pentru } |\, \beta \,| > c. \end{aligned}$$

Soluțiile acestei ecuații au fost obținute pe baza utilizării transformatei Laplace

$$\overline{M}_2 = \int_0^\infty M_2\, e^{-\alpha x}\, dx. \tag{5.5}$$

În acest scop vom înmulți ambii membri ai ecuației (5.4) cu $e^{-\alpha x}$ și vom integra rezultatul pe semiaxa reală. Calculînd $\int_0^\infty M_2''\, e^{-\alpha x}\, dx$ și $\int_0^\infty M_2^{\mathrm{IV}}\, e^{-\alpha x}\, dx$ pentru care vom utiliza condițiile de simetrie a deformației

$$M_2''' = 0, \quad M_2'' = A_2, \quad M_2' = 0, \quad M_2 = A_0,$$

obținem în cele din urmă ecuația

$$\begin{aligned} & \left[\alpha^4 - \left(2 + \frac{i}{4a} \right) \alpha^2 + \frac{3}{4} \right] \overline{M} = \frac{R^2 a_2\, (1 - e^{-\alpha x_0})}{4\alpha} + \\ & \quad + \frac{A_0 \alpha^3 + (A_2 - A_0)\, \alpha}{\alpha^4 - \left(2 + \dfrac{i}{4a} \right) \alpha^2 + \dfrac{3}{4}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Deci utilizînd formula de inversare a transformatei Laplace avem[1])

$$M_2 = \frac{R^2 a_2}{8\pi i}\left[\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{(1 - e^{-\alpha x_0})\, e^{\alpha x}}{\alpha\left[\alpha^4 - \left(2 + \dfrac{i}{4a}\right)\alpha^2 + \dfrac{3}{4}\right]}\, d\alpha + \right.$$

$$\left. + \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{[A_0 \alpha^3 + (A_2 - A_0)\,\alpha]\, e^{\alpha x}}{\alpha^4 - \left(2 + \dfrac{i}{4a}\right)\alpha^2 + \dfrac{3}{4}}\, d\alpha \right] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{R^2 a_2}{4}\left[\displaystyle\sum_1^5{}_j \frac{e^{x\alpha_j}}{5\alpha_j^4 - 3\left(2 + \dfrac{i}{4a}\right)\alpha^2 + \dfrac{3}{4}} + \sum_1^4{}_j \frac{(A_0\alpha_j^2 + A_2 - A_0)\, e^{x\alpha_j}}{4\alpha_j^2 - 2\left(2 + \dfrac{i}{4a}\right)}\right. & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pentru } 0 < x < x_0 & \\ \dfrac{R^2 a_2}{4}\left[\displaystyle\sum_1^5{}_j \frac{(1 - e^{-\alpha_j x_0})\, e^{\alpha_j x}}{5\alpha_j^4 - 3\left(2 + \dfrac{i}{4a}\right)\alpha^2 + \dfrac{3}{4}} + \sum_1^4{}_j \frac{(A_0\alpha_j^2 + A_2 - A_0)\, e^{\alpha_j x}}{4\alpha_j^2 - 2\left(2 + \dfrac{i}{4a}\right)}\right. & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pentru } x_0 < x & \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pentru } x < 0 & \end{cases} \tag{5.7}$$

unde α_j sînt rădăcinile ecuației

$$\alpha\left[\alpha^4 - 2\left(2 + \frac{i}{4a}\right)\alpha^2 + \frac{3}{4}\right] = 0 \qquad (\alpha_5 = 0) \tag{5.8}$$

Prelungind această soluție prin simetrie, pentru $x < 0$ obținem soluția completă a ecuației

$$M_2 = \begin{cases} \dfrac{R^2 a_2}{3} + A \operatorname{ch} \rho_1 x + B \operatorname{ch} \rho_2 x & |x| < x_0 \\ \dfrac{R^2 a_2}{3(\rho_1^2 - \rho_2^2)}\left[-\rho_2^2 \operatorname{ch} \rho_1 (x - x_0) + \rho_1^2 \operatorname{ch} \rho_2 (x - x_0)\right] + & \\ \qquad\qquad + A \operatorname{ch} \rho_1 x + B \operatorname{ch} \rho_2 x, & x > x_0 \\ \dfrac{R^2 a_2}{3(\rho_1^2 - \rho_2^2)}\left[-\rho_2^2 \operatorname{ch} \rho_1 (x + x_0) + \rho_1^2 \operatorname{ch} \rho_2 (x + x_0)\right] + & \\ \qquad\qquad + A \operatorname{ch} \rho_1 x + B \operatorname{ch} \rho_2 x, & x < -x_0 \end{cases} \tag{5.9}$$

---

[1]) $x_0 = \dfrac{2c}{R}$.

unde ρ_1, ρ_2, sînt rădăcinile cu module diferite ale ecuației (5.8)

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 3{,}79 + i\ 3{,}51, \\ \rho_2 &= 0{,}123 - i\ 0{,}114. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Vom observa că

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= 2 + i\ 26{,}63 \\ \rho_2^2 &= 0{,}0021 - i\ 0{,}028 \end{aligned} \tag{5.11}$$

și deci că se poate neglija ρ_2^2 în raport cu ρ_1^2 cu eroarea de $1^0/_{00}$ în expresia $\rho_1^2 - \rho_2^2$.

Se observă că soluția definită prin (5.6), (5.7), (5.9) este continuă, chiar și în x_0 împreună cu primele ei trei derivate.

Constantele arbitrare[1] A și B se determină prin condițiile de legătură în x_1 între primul tub de grosime $2h$ și rază R și cel de-al doilea de grosime $2h_1 < 2h$ și rază R.

Datorită diferenței de rigiditate între cele două tuburi vom presupune în mod acoperitor pentru reazem că primul este articulat în tubul central de grosime mai mică.

Pentru aceasta vom impune ca pentru $x = x_1$, în tubul gros să avem forța tăietoare generalizată nulă, forța transversală de lunecare de asemenea nulă.

Printr-o renotare convenabilă a constanțelor A, B pentru $x > x_0$ soluția poate fi scrisă și astfel

$$M_2 = \frac{R^2 a_2}{3\,(\rho_1^2 - \rho_2^2)} \left[- \rho_2^2 F_1(x) + \rho_1^2 F_2(x) \right], \tag{5.12}$$

unde

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \mathrm{ch}\, \rho_1(x - x_0) + A_1\, \mathrm{ch}\, \rho_1 x, \\ F_2(x) &= ch\, \rho_2(x - x_0) + B_1\, \mathrm{ch}\, \rho_2\, x, \\ A &= - \frac{R^2 a_2 \rho_2^2}{3(\rho_1^2 - \rho_2^2)} A_1,\quad B = \frac{R^2 a_2 \rho_1^2}{3(\rho_1^2 - \rho_2^2)} B_1. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Se observă că se pot satisface cele două condiții anterioare dacă se ia

$$\begin{aligned} A_1 &= - \frac{\mathrm{sh}\, \rho_1\,(x_1 - x_0)}{\mathrm{sh}\, \rho_1\, x_1}, \\ B_1 &= - \frac{\mathrm{sh}\, \rho_2\,(x_1 - x_0)}{\mathrm{sh}\, \rho_1 x_1}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

---

[1] Evident complexe.

În adevăr, rezultă

$$
\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{\operatorname{sh} \rho_1 x_0}{\operatorname{sh} \rho_1 x_1} \operatorname{ch} \rho_1(x - x_1),\\
F_2(x) &= \frac{\operatorname{sh} \rho_2 x_0}{\operatorname{sh} \rho_2 x_1} \operatorname{ch} \rho_2 (x - x_1).
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Expresii ale căror derivate de ordin impar se anulează în $x = x_1$ fapt ce conduce la anularea forţei tăietoare generalizate şi a forţei de lunecare.

În general, trebuie satisfăcute patru condiţii de margine. Vom remarca însă că din calcul vor rezulta valori foarte mici pentru N_β şi M_β1) în x_1 fapt ce ne va permite să concludem că şi ultimile două condiţii de margine sînt satisfăcute în mod aproximativ.

Cu aceasta soluţia problemei este dată de

$$
\begin{aligned}
M_2 = \frac{R^2 a_2}{3(\rho_1^2 - \rho_2^2)} \Bigg[& \rho_1^2 \frac{\operatorname{sh} \rho_2 x_0}{\operatorname{sh} \rho_2 x_1} \operatorname{ch} \rho_2 (x - x_1) - \\
& - \rho_2^2 \frac{\operatorname{sh} \rho_1 x_0}{\operatorname{sh} \rho_1 x_1} \operatorname{ch} \rho_1 (x - x_1) \Bigg].
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Se observă că pentru $x \geqslant x_0$

$\left| \frac{\operatorname{sh} \rho_1 x_0}{\operatorname{sh} \rho_1 x_1} \operatorname{ch} \rho_1 (x - x_1) \right|$ este dată de ordinul de mărime al unităţii, şi de acelaşi ordin de mărime cu

$$
\left| \frac{\operatorname{sh} \rho_2 x_0}{\operatorname{sh} \rho_2 x_1} \operatorname{ch} \rho_2 (x - x_0) \right|.
$$

Deoarece însă, după cum s-a mai observat ρ_2^2 este neglijabil faţă de ρ_1^2, în formula (5.16) pentru calculele curente se poate considera cu erori de ordinul lui $1^0/_{00}$.

$$
M_2 = \frac{R^2 a_2}{3} \frac{\operatorname{sh} \rho_2 x_0}{\operatorname{sh} \rho_2 x_1} \operatorname{ch} \rho_2 (x - x_1). \tag{5.17}
$$

Pentru calcul se notează

$$
s_r + i\, s_j = \frac{\operatorname{sh} \rho_2 x_0}{\operatorname{sh} \rho_2 x_1}, \tag{5.18}
$$

---

1) Chiar în condiţiile în care M_β nu rezultă suficient de mic, o corecţie dată de efectul de contur simplu va modifica eforturile şi deplasările doar pe o porţiune mică.

$$\begin{aligned} &\text{sh } a_{(2)}x \cos b_{(2)}x = Sc\,(x),\\ &\text{ch } a_{(2)}x \sin b_{(2)}x = Cs\,(x),\\ &\text{sh } a_{(2)}x \sin b_{(2)}x = Ss\,(x),\\ &\text{ch } a_{(2)}x \cos b_{(2)}x = Cc\,(x)\,^{1)}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Rezultă

$$s_r = \frac{Sc(x_0)\,Sc(x_1) + Cs(x_0)\,Cs(x_1)}{[Sc\,(x_1)]^2 + [Cs\,(x_1)]^2} \tag{5.20}$$

$$s_j = \frac{Cs(x_0)Sc(x_1) - Sc(x_0)\,Cs\,(x_1)}{[Sc(x_1)]^2 + [Cs\,(x_1)]^2}. \tag{5.21}$$

Se mai observă că

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh } \rho_2 x_0}{\text{sh } \rho_1 x_1}\,\text{ch } \rho_2\,(x - x_1) = {}&[s_r\,Cc\,(x - x_1) - s_j\,Ss\,(x - x_1)] + \\ &+ i\,[s_r\,Ss\,(x - x_1) + s_j\,Ce\,(x - x_1)], \end{aligned} \tag{5.22}$$

astfel că

$$\begin{aligned} \mathcal{Re}\ M_2 &= \frac{R^2 a_2}{3}\ [s_r\,Cc\,(x - x_1) - s_j\,Ss\,(x - x_1)],\\ \mathcal{Im}\ M_2 &= \frac{R^2 a_2}{3}\ [s_r\,Ss\,(x - x_1) + s_j\,Cc\,(x - x_1)]. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Pentru calculul coeficienților numerici s_r și s_j se poate astfel să se calculeze tabela 1.

Tabela 1

	x_0	x_1
ax		
bx		

unde

$$x_0 = \frac{2}{R}\,\beta_0 = \frac{2c}{R},\ x_1 = \frac{2\beta_1}{R} = \frac{2l}{R}.$$

---

[1]) $a_{(2)} + i\,b_{(2)} = \rho_2$.

Pe baza lui se poate construi tabela valorilor trigonometrice hiperbolice (tabela 2).

Tabela 2

	x_0	x_1
sh a_2 x		
ch a_2 x		
sin b_2 x		
cos b_2 x		
$Cs\ (x)$		
$Sc\ (x)$		

Cu aceasta se poate trece la calculul valorilor coeficienților s_r și s_j pe baza tabelei 3.

Tabela 3

$a = Sc\ (x_0)\ Sc\ (x_1)$	
$b = Cs\ (x_0)\ Cs\ (x_1)$	
$c = [Sc(x_1)]^2$	
$d = [Cs\ (x_1)\ ]^2$	
$e = Cs\ (x_0)\ Sc\ (x_1)$	
$f = Sc\ (x_0)\ Cs\ (x_1)$	
$s_r = \frac{a+b}{c+d}$	
$s_j = \frac{e+f}{c-d}$	

Rezultatele tabelei 3 şi ale tabelei 2 permit calculul lui $\mathcal{R}e\, M_2$ şi $\mathcal{I}m$ dacă se alătură tabela 4.

Tabela 4

	x_0	$x_r \ldots$	x_1
$Cc\,(x - x_1)$			0
$Ss\,(x - x_1)$			0

6. CALCULUL DEPLASĂRII W, CE CARACTERIZEAZĂ DEFORMAŢIA TRANSVERSALĂ A TUBULUI

Pe baza relaţiilor (2.3) şi ţinînd seama că ne aflăm în cazul celei de-a doua armonice $\left(\text{funcţiile variază în funcţiune de } \alpha \text{ ca } \cos\frac{2\alpha}{R} \text{ sau } \sin\frac{2\alpha}{R}\right)$, rezultă[1]

$$\begin{aligned} 2u_{(2)} + w_{(2)} &= -R\varepsilon_{1,(2)}, \\ 2w_{(2)} + u_{(2)} &= -\frac{R_2}{2}\chi_{1,(2)}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

şi deci

$$w_{(2)} = -\frac{R^2}{3}\chi_{1,(2)} + \frac{R}{3}\varepsilon_{1,(2)}. \tag{6.2}$$

Pe baza relaţiilor elasticităţii şi al relaţiilor (2.8) rezultă

$$w_{(2)} = \frac{R}{3(1-\mu^2)}\frac{1}{a\zeta}\{\mathcal{R}e(\widetilde{M}_\alpha - \mu\widetilde{M}_\beta) + a(1-\mu^2)\,\mathcal{I}m\,\widetilde{M}_\beta\}. \tag{6.3}$$

Dezvoltarea în funcţiune de puterile parametrului a, arată că pentru toate cazurile practice se poate lua cu o eroare de ordinul 1%

$$w_{(2)} = \frac{R}{3a\zeta}\mathcal{R}e\, M_2. \tag{6.4}$$

---

[1] Mai departe se va considera:
$w = w_{(1)}\sin\frac{2\alpha}{R} + w_{(2)}\cos\frac{2\alpha}{R}\cdot$ şi analog pentru u şi v.

Rezultă deci

$$w_{(2)} = \frac{R^3 a_2}{9 a \zeta} [s_r C_c(x - x_1) - s_j Ss(x - x_1)]. \qquad (6.5)$$

7. CALCULUL EFORTURILOR

Din formulele de definiţie ale lui $\widetilde{M}_\alpha$, $\widetilde{M}_\beta$ rezultă

$$M_\alpha = \mathcal{R}e\, \widetilde{M}_\alpha, \qquad (7.1)$$

$$M_\beta = \mathcal{R}e\, \widetilde{M}_\beta, \qquad (7.2)$$

$$N_\alpha = \frac{1}{\zeta} \frac{2Eh}{1 - \mu^2} (\mathcal{I}m\, \widetilde{M}_\beta + \mu\, \mathcal{I}m\, \widetilde{M}_\alpha), \qquad (7.3)$$

$$N_\beta = \frac{1}{\zeta} \frac{2Eh}{1 - \mu^2} (\mathcal{I}m\, \widetilde{M}_\alpha + \mu\, \mathcal{I}m\, \widetilde{M}_\beta). \qquad (7.4)$$

Observînd că în expresiile lui $\widetilde{M}_\alpha$ şi $\widetilde{M}_\beta$, funcţiunile $Cc\ (x - x_1)$ şi $Ss\ (x - x_1)$ variază foarte lent $|\rho_2|$ fiind mic, derivatele în raport cu β sînt mici faţă de funcţiunile însăşi. Pe de altă parte în expresiile lui $\widetilde{M}_\alpha$ şi $\widetilde{M}_\beta$ putem renunţa la termenii amplificaţi cu a. Cu aceasta rezultă armonica a doua

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \mathcal{R}e\, M_2 \\ M_\beta &= \mu\, \mathcal{R}e\, M_2 \\ N_\alpha &= \frac{1}{\zeta} 2Eh\ \mathcal{I}m\ M_2 \\ N_\beta &= 0, \end{aligned} \qquad (7.5)$$

deoarece

$$\mathcal{I}m\, M_\alpha \cong \mathcal{I}m\, M_2, \quad \mathcal{I}m\, M_\beta \cong -\mu\, \mathcal{I}m\, M_2.$$

Se observă deci că practic N_β este nul pe porţiunea $x > x_0$. Raţionamentul făcut pentru deducerea (6.5) este evident valabil şi pentru $|x| < x_0$ fapt ce face ca (6.5) să fie valabile şi în această porţiune.

Eforturile normale de calcul în orice punct β vor fi date pentru $\alpha = 0$, de

$$\begin{aligned} \sigma_\beta^{(2)} &= \frac{N_\beta}{2h} \pm \frac{6 M_\beta}{(2h)^2} = \pm \frac{3\mu}{2h^2} \mathcal{R}e\, M_2, \\ \sigma_\alpha^{(2)} &= \frac{N_\alpha}{2h} \pm \frac{6 M_\alpha}{(2h)^2} = \frac{E}{\zeta} \mathcal{I}m\, M_2 \pm \frac{3}{2h^2} \mathcal{R}e\, M_2. \end{aligned} \qquad (7.6)$$

Rezultă deci clar că eforturile normale maxime vor fi pe direcția α, date de $\sigma_\alpha^{(2)}$ pentru cazul cînd ambii membri din expresia lui sînt de același semn.

Mărimile lui σ_α σ_β și a lui w dat de (6.5) sînt cele care trebuie analizate la proiectarea cuptorului. În ceea ce privește $\sigma_\alpha^{(2)}$, $\sigma_\beta^{(2)}$ trebuie completate cu cele aflate din calculul părții constante și a primei armonice.

Pentru partea constantă σ_α, σ_β pot fi aproximați prin

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(0)} &= \frac{a_0 R}{2h}\ \text{kg/cm}^2, \\ \sigma_\beta^{(0)} &= 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

obținuți din calculul tubului presupus solicitat de o sarcină uniformă în lungul lui β.

Pentru prima armonică $\sigma_\alpha^{(1)}$, $\sigma_\beta^{(1)}$ sînt dați de calculul de grindă continuă al tubului considerat cu secțiune rigidă în ipoteza lui Bernoulli a distribuției eforturilor pe secțiune, distribuție care este de tipul primei armonice.

Fie M momentul corespunzător. Rezultă

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(1)} &= 0 \\ \sigma_\beta^{(1)} &= \frac{M}{w_{\text{tub}}} \end{aligned} \tag{7.8}$$

Rezultă deci

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{a_0 R}{2h} + \left[\frac{E}{\zeta}\,\mathcal{I}m\, M_2 \pm \frac{3}{2h^2}\,\mathcal{R}e\, M_2\right]\cos\frac{2\alpha}{R}, \\ \sigma_\beta &= \frac{M}{w_{\text{tub}}}\cos\frac{\alpha}{R} \pm \frac{3\mu}{h^2}\,\mathcal{R}e\, M_2 \cos\frac{2\alpha}{R}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Aceste date sînt suficiente pentru calculul de rezistență al învelișului metalic al cuptorului.

Mai rămîne de observat că pe porțiunea $|x| < x_0$

$$\begin{aligned} M_2 = \frac{R^2 a_2}{3}\Bigg[1 &+ \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2-\rho_2^2}\,\frac{\operatorname{sh}\rho_1(x_1-x_0)}{\operatorname{sh}\rho_1 x_1}\operatorname{ch}\rho_1 x - \\ &- \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2-\rho_2^2}\,\frac{\operatorname{sh}\rho_2(x_1-x_0)}{\operatorname{sh}\rho_2 x_1}\operatorname{ch}\rho_2 x\Bigg]. \end{aligned} \tag{7.10}$$

În mod aproximativ conform unei observații anterioare putem neglija pe ρ_2^2 în raport cu ρ_1^2, astfel că

$$M_2 \cong \frac{R_2 a_2}{3}\left[1 - \frac{\operatorname{sh}\rho_2(x_1-x_0)}{\operatorname{sh}\rho_2 x_1}\operatorname{ch}\rho_2 x\right]. \tag{7.11}$$

Se observă că

$$\frac{\operatorname{sh}\rho_2(x_1-x_0)}{\operatorname{sh}\rho_2 x_1}\operatorname{ch}\rho_2 x$$

este de acelaşi tip cu

$$\frac{\operatorname{sh}\rho_2 x_0}{\operatorname{sh}\rho_2 x_1}\operatorname{ch}\rho_2(x-x_1)$$

pentru care a fost organizat calculul pe bază de tabeluri. Notînd

$$t_r + i\,t_j = \frac{\operatorname{sh}\rho_2(x_1-x_0)}{\operatorname{sh}\rho_2 x_1}, \tag{7.12}$$

rezultă din (5.20), (5.21)

$$t_r = \frac{Sc(x_1-x_0)\,Sc(x_1) + Cs\,(x_1-x_0)\,Cs(x_1)}{[Sc(x_1)]^2 + [Cs(x_1)]^2}, \tag{7.13}$$

$$t_j = \frac{Cs(x_1-x_0)\,Sc(x_1) - Sc(x_1-x_0)\,Cs(x_1)}{[Sc(x_1)]^2 + [Cs(x_1)]^2}, \tag{7.14}$$

şi deci conform cu (7.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\,M_2 &= \frac{R^2 a_2}{3}\,[1 - [t_r\,Cs\,(x) - t_j\,Ss\,(x)]], \\ \mathcal{I}m\,M_2 &= -\frac{R^2 a_2}{3}\,[t_r Ss\,(x) + t_j\,Cc(x)]. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Tabelele 1, 2, 3, 4 se refac în mod corespunzător pe aceeaşi schemă.

8. EXEMPLU DE CALCUL

Exemplul de calcul este construit pe următoarele date:

$R = 1{,}80$ m $2h_1 = 5{,}5$ cm, $2h_2 = 2{,}6$ cm.

$2c = 55$ cm, $2l = 2{,}42$ m,

$E = 2{,}1 \times 10^6$, $\mu = 0{,}33$,

$V = 300$ tone (rezultat din calculul de grindă continuă) Rezultă

$$a = \frac{h_1}{R\sqrt{3(1-\mu^2)}} = 0{,}0094.$$

Ecuaţia caracteristică corespunzătoare celei de-a doua armonică este conform (3.9) pentru $n = 2$

$$\rho^4 - \left(2 + \frac{i}{4a}\right)\rho^2 + \frac{3}{4} = 0 \tag{8.1}$$

şi admite soluţiile

$$\rho_1 = \pm (3{,}79 + i\ 3{,}51),$$
$$\rho_2 = \pm (0{,}123 - i\ 0{,}114),$$

şi deci putem lua

$$\rho_1 = 3{,}79 + i\ 3{,}51,$$
$$\rho_2 = 0{,}123 - i\ 0{,}114.$$

Se observă că

$$x_0 = \frac{2c}{R} = 0{,}306,$$

$$x_1 = \frac{2l}{R} = 1{,}345.$$

Rezultă deci că

$$a_2 = 0{,}123, \qquad b_2 = -\,0{,}114.$$

Cu aceste date se pot calcula tabelele indicate anterior. Se obţine

Tabela 1

	x_0	x_1
$a_2\ x_i$	0,0376	0,166
$b_2\ x_i$	−0,0349	−0,153

Tabela 2

	x_0	x_1
sh $a_2\ x_i$	0,0376	0,165
ch $a_2\ x_i$	1,0007	1,014
sin $b_2\ x_i$	−0,0349	−0,151
cos $b_2\ x_i$	0,999	0,987
Cs (x_i)	−0,0349	−0,153
Sc (x_i)	0,0376	0,163

Tabela 3

$a = Sc\,(x_0)\ Sc\,(x_1)$	0,00614
$b = C\,(x_0)\ Cs\,(x_1)$	0,00534
$c = [Sc\,(x_1)\,]^2$	0,0266
$d = [Cs\,(x_1)\,]^2$	0,0234
$e = Cs\,(x_0)\ Sc\,(x_1)$	−0,00569
$f = Sc\,(x_0)\ Cs\,(x_1)$	−0,00575
$S_r = \frac{a+b}{c+d}$	0,2296
$s_j = \frac{e-f}{c+d}$	0,0012

Tabela 4

	x_0	x_2	x_3	x_1
$Cc\,(x - x_1)$	—	—	—	1
$Ss\,(x - x_1)$	—	—	—	0

Rezultă deci pentru $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\ M_2 &= \frac{R^2 a_2}{3}\,[0{,}2296\ \ Cc(x - x_1) - 0{,}0012\ Ss\,(x - x_1)], \\ \mathcal{I}m\ M_2 &= \frac{R^2 a_2}{3}\,[0{,}012\ \ Cc\,(x - x_1) + 0{,}2296\ \ Ss\,(x - x_1)]. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Conform formulei (5.2) se obține

$$a_1 = \frac{V}{2\pi R_c} = 9{,}65\ \text{kg/cm}^2,$$

$$a_2 = 0{,}518\ a_1 \ldots 0{,}463\ a_1 = (5{,}00 - 4{,}50)\ \text{kg/cm}^2,$$

și deci din (6.5)

$$w_{(2)} = \frac{R^3 a_2}{9a\,\zeta}\,[0{,}2296\ \ Cc\,(x - x_1) - 0{,}0012\ Ss\,(x - x_1)].$$

Întrucît

$$\zeta = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} = 1{,}99 \times 10^7\ \text{kg},$$

$$R^3 = 5{,}83 \times 10^6\ \text{cm}^3,$$

$$a = 0{,}0094,$$

Rezultă

$$W_{(2)} = (15,3...13,8)\,[0,2296\; Cc(x-x_1) - 0,0012\; Ss(x-x_1) \qquad (8.3)$$

Cînd $x = x_1$ rezultă

$$w_{(2)} = (3,5...3,15)\ \text{cm}. \qquad (8.4)$$

Întrucît funcțiunea $Cc(x - x_1)$ variază lent pe toată porțiunea considerată, valoarea lui $w_{(2)}$ se modifică foarte puțin.

Se observă că deplasarea obținută are o valoare incomparabil mai mare Pe de altă parte conform cu (5.23)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e\, M_2 &= (5,4...4,9).10^4\,[0,2296\; Cc(x-x_1) - 0,0012\; Ss(x-x_1)],\\ \mathcal{I}m\, M_2 &= (5,4...4,9.10^4\,[0,0012\; Cc(x-x_1) + 0,2296\; Ss(x-x_1)].\end{aligned} \qquad (8.5)$$

În punctul $x = x_1$

$$\mathcal{R}e\, M_2 = (1,25-1,13)\,10^4\ \text{kg cm/cm)}$$

$$\mathcal{I}m\, M_2 = (6,5-5,9) \times 10\ \text{kg cm/cm}.$$

Cu aceasta în $x = x_1$ pe baza (7.6)

$$\sigma_\beta^{(2)} = \pm\,(825...745)\ \text{kg/cm}^2,$$

$$\sigma_\alpha^{(2)} = \pm\,(2500...2240)\ \text{kg/cm}^2,$$

$$\sigma_\alpha^{(2)} = \pm\,(2500...2240)\ \text{kg/cm}^2.$$

Eforturile datorite părții constante încărcării

$$\sigma_\alpha^{(0)} = (6,08...6,30)\,\frac{180}{2.2.75} = (199...206)\ \text{kg/cm}^2.$$

Întrucît

$$a_0(0,63...0,653)\,a_1 = (6,08...6,30)\ \text{kg/cm}^2.$$

În ceea ce privește calculul eforturilor provenite din prima armonică, după cum s-a arătat anterior, ele sînt date de calculul de grindă continuă. În acest caz momentul maxim pe reazem este

$$M_{inc} = 650\ \text{tm}.$$

Observînd că

$$w^{\text{tub}} = \frac{\pi(R_t+h)^2}{4}\left[1 - \left(\frac{R_t-h}{R_t+h}\right)^4\right] \cong 2\pi R_t^2\, h = 5,6\times 10^5\ \text{cm}^2,$$

conform cu formulele paragrafului (7) rezultă

$$\sigma_{\alpha}^{(1)} = 0$$

$$\sigma_{\beta}^{(1)} = \frac{\text{Mînc}}{W_{\text{tub}}} = \frac{6{,}5\times10^{7}}{5{,}6\times10^{5}} = 116 \text{ kg/cm}^2$$

Conform cu (7.9) se obţin eforturile

$$\sigma_{\alpha} = \left(206 + 2500 \cos\frac{2\alpha}{R}\right) \text{kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{\beta} = \left(116 \cos\frac{\alpha}{r} + 825 \cos\frac{2\alpha}{R}\right) \text{kg/cm}^2,$$

şi deci eforturile maxime

$$\sigma_{\alpha}^{M} = 2706 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{\beta}^{M} = 941 \text{ kg/cm}^2.$$

În felul acesta au fost determinate deplasarea $w_{(2)}$ şi eforturile maxime. Este de remarcat că ele variază puţin în lungul tubului gros, astfel că nu credem a fi necesar calculul valoric şi în celelalte puncte.

Primită la redacţie la 26 iulie 1961

ВРАЩАЮЩАЯСЯ ПЕЧЬ ДЛЯ] ПРОИЗВОДСТВА КЛИНКЕРА

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе на основании теории упругих тонких кривых пластинок разрабатывается метод расчета усилий и деформаций поперечных сечений, происходящих от реакций промежуточных опор на стальном кожухе вращающейся печи для производства цемента.

Знание усилий и деформаций различных сечений позволяет избегать быстрого разрушения огнеупорной футеровки из-за явления усталости.

CALCUL DES FOURS À CLINKER ROTATIFS

RÉSUMÉ

Dans ce travail, les auteurs, en vertu de la théorie des voiles minces, construisent une méthode pour le calcul des contraintes et des déformations des sections transversales, dues aux réactions des appuis intermédiaires sur l'enveloppe d'acier d'un four à ciment, rotatif.

La connaissance des contraintes et des déformations dans les diverses sections permet d'éviter la destruction rapide du revêtement réfractaire par suite du phénomène de fatigue.

BIBLIOGRAFIE

1. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория тонких оболочек*, Москва-Ленинград, Судпромгиз, 1951,
2. А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР, *Теория упругих тонких оболочек*. Москва, Гостехиздат, 1953.
3. В. ВИСАРИОН, К. СТЭНЕСКУ, *Исследование квазиинвариантов статико-геометрической аналогии для тонких упругих оболочек*. Прикладная Математика и Механика, **XXI**, *I* (1961).

PROBLEMA DINAMICĂ A ÎNVELITORILOR SUBȚIRI, VISCOELASTICE, DE MICĂ CURBURĂ

DE

L. LIBRESCU

1. INTRODUCERE

În lucrarea [1] E. I. Grigoliuc abordează problema vibrațiilor transversale a învelitorilor de mică curbură, viscoelastice.

În cele ce urmează, considerînd același tip de material (material de tip Maxwell), vom aborda problema dinamică generală a învelitorilor de mică curbură, adică :

a) Vom ține seama pe lîngă forța de inerție transversală și de forțele de inerție tangențiale.

b) Vom ține seama și de termenii neliniari proveniți din considerarea deformațiilor mari [1]).

2. IPOTEZE ȘI CONSIDERAȚII GEOMETRICE

a) Vom considera valabilă ipoteza Love-Kirckoff.

b) Ecuațiile fizice le vom deduce considerînd un material omogen, izotrop, viscoelastic de tip Maxwell.

c) Învelitoarea o vom considera de grosime constantă h iar suprafața sa mediană o vom raporta la un sistem curbiliniu ortogonal α, β, sistem ce coincide cu liniile de curbură ale suprafeței mediane nedeformate, iar razele de curbură principale $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ corespunzînd suprafeței mediane nereformate, le vom considera constante.

---

[1]) Neliniaritatea considerată este deci geometrică și nu fizică.

3. ECUAȚII GENERALE

Vom trece în revistă ecuațiile ce ne sînt necesare în cele ce vor urma.

a. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+X=0\,;\quad \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_\beta}{\partial\beta}+Y=0,\\ \frac{T_\alpha}{R_1}+\frac{T_\beta}{R_2}+\frac{\partial Q_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial Q_\beta}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(T_\alpha\frac{\partial w}{\partial\alpha}+T_{\alpha\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)+\\ +\frac{\partial}{\partial\beta}\left(T_\beta\frac{\partial w}{\partial\beta}+T_{\alpha\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+Z=0,\\ Q_\alpha=\frac{\partial M_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\,;\quad Q_\beta=\frac{\partial M_\beta}{\partial\beta}+\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}.\end{gathered}\tag{1}$$

În cazul problemei dinamice

$$\begin{gathered}X=-m\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\,;\ Y=-m\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\,;\ Z=-m\frac{\partial^2w}{\partial t^2}+T^0_\alpha\frac{\partial^2w}{\partial\alpha^2}+T^0_\beta\frac{\partial^2w}{\partial\beta^2}+\\ +T^0_{\alpha\beta}\frac{\partial^2w}{\partial\alpha\partial\beta}+p_e-p_i\end{gathered}\tag{2}$$

unde m este masa învelitoarei corespunzînd ariei unitare a suprafeței mediane, T^0_α, T^0_β, $T^0_{\alpha\beta}$ eforturile inițiale p_i, p_e presiunea interioară, respectiv exterioară ce acționează asupra suprafeței mediane a învelitoarei.

b. RELAȚIILE GEOMETRICE DEFORMAȚII—DEPLASĂRI

$$\begin{gathered}\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{w}{R_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2;\ \varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{w}{R_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2,\\ \omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\,;\end{gathered}\tag{3a}$$

$$\varkappa_1=\frac{\partial^2w}{\partial\alpha^2}\,;\quad \varkappa_2=\frac{\partial^2w}{\partial\beta^2}\,;\quad \tau=\frac{\partial^2w}{\partial\alpha\partial\beta}.\tag{3b}$$

c. ECUAȚIILE DE COMPATIBILITATE

Prin eliminarea lui u și v din relațiile (3a) se obține ecuația de continuitate a deformațiilor ce ne va fi necesară în cele ce vor urma.

$$\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial\alpha^2}-2\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta}=\left(\frac{\partial^2w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2-\frac{\partial^2w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2w}{\partial\beta^2}-\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2w}{\partial\beta^2}-\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2w}{\partial\alpha^2}.\tag{4}$$ ¹)

---

¹) Atît în relațiile anterioare cît și în cele ce vor urma, notațiile utilizate fără o mențiune specială au un sens aproape clasic.

d. ECUAȚIILE FIZICE

Pornind de la relațiile tridimensionale tensiuni-deformații și considerîndu-se valabilă ipoteza Love-Kirchoff, C. Torre [2], [3] a dedus pentru materialul viscoelastic de tip Maxwell fizic liniar, următoarele relații fizice :

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1(z) &= \frac{1}{3}\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\sigma_1(z)-\frac{1}{3}\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\sigma_2(z),\\
\dot{\varepsilon}_2(z) &= \frac{1}{3}\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\sigma_2(z)-\frac{1}{3}\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\sigma_1(z), \qquad (5)\\
\dot{\gamma}_{12}(z) &= \frac{D_0}{\mu}\tau_{\alpha\beta}(z),
\end{aligned}$$

pe baza cărora au fost deduse relațiile fizice eforturi-viteze de deformații [1]

$$\begin{aligned}
\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2}{3}\frac{D_1}{K_\nu}\right)D_0\,T_\alpha &= 2\mu h\left[\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\dot{\varepsilon}_1+\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\dot{\varepsilon}_2\right],\\
\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2}{3}\frac{D_1}{K_\nu}\right)D_0\,T_\beta &= 2\mu h\left[\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\dot{\varepsilon}_2+\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\dot{\varepsilon}_1\right], \qquad (6a)\\
D_0\,T_{\alpha\beta} &= \mu\, h\,\dot{\omega},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2}{3}\frac{D_1}{K_\nu}\right)D_0\,M_\alpha &= -\frac{\mu h^3}{6}\left[\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\dot{\varkappa}_1+\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\dot{\varkappa}_2\right]\\
\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2}{3}\frac{D_1}{K_\nu}\right)D_0\,M_\beta &= -\frac{\mu h^3}{6}\left[\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\dot{\varkappa}_2+\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\dot{\varkappa}_1\right] \qquad (6b)
\end{aligned}$$

și reciproc

$$D_0\,M_{\alpha\beta} = -\frac{\mu h^3}{6}\dot{\tau}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{3h}\left[\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)T_\alpha-\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)T_\beta\right] \qquad (7a)\\
\dot{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{3h}\left[\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)T_\beta-\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)T_\alpha\right].
\end{aligned}$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\mu h}D_0\,T_{\alpha\beta}\,; \quad \dot{\tau} = -\frac{6}{\mu h^3}D_0\,M_{\alpha\beta}. \qquad (7b)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varkappa}_1 &= -\frac{4}{h^3}\left[\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)M_\alpha-\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)M_\beta\right];\\
\dot{\varkappa}_2 &= -\frac{4}{h^3}\left[\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)M_\beta-\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)M_\alpha\right].
\end{aligned}$$

În aceste ecuații au fost introduse notațiile: D_0, D_1 operatori definiți de

$$D_0 = 1 + \frac{\mu}{G}\frac{\partial}{\partial t}; \quad D_1 = 1 + \frac{K_\nu}{K_e}\frac{\partial}{\partial t},$$

$K_\nu = \frac{2}{3}\mu + \lambda$, $K_e = \frac{2}{3}\frac{1+\nu}{1-2\nu}G$, μ și λ, coeficienții de viscozitate, G, modulul de forfecare, ν coeficientul Poisson. Punctul denotă diferențierea în raport cu timpul t.

4. DEDUCEREA ECUAȚIILOR REZOLVENTE

În scopul reducerii ecuațiilor de la punctul 3, la un sistem de ecuații în deplasarea normală w și o funcție de efort c, vom utiliza procedeul datorit lui P.M. Naghdi [4] și utilizat într-o serie de lucrări de elastodinamică [5], [6].

În acest scop vom diferenția prima ecuație a sistemului (1) în raport cu α și a doua ecuație a aceluiași sistem în raport cu β și vom ține seama de relațiile (3a).

Se obțin în acest fel ecuațiile

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\varepsilon_1 + \frac{w}{R_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2\right], \\ &\frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2 T_\beta}{\partial\beta^2} = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\varepsilon_2 + \frac{w}{R_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Scăzînd cele două ecuații și exprimînd pe $\dot{\varepsilon}_1$ și $\dot{\varepsilon}_2$ prin eforturi conform relațiilor (7a), obținem ecuația

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{m}{h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{2\mu}\right]T_\alpha - \left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{m}{h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{2\mu}\right]T_\beta = \\ &= m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{w}{R_1} - \frac{w}{R_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{9}$$

care se vede că este identic satisfăcută exprimînd eforturile T_α și T_β prin relațiile

$$T_\alpha = \left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}\right]c + F_1; \quad T_\beta = \left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}\right]c + F_2, \tag{10}$$

c fiind o funcție potențială iar F_1 și F_2 soluții particulare ale ecuației

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{m}{h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{2\mu}\right]F_1 - \left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{m}{h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{2\mu}\right]F_2 = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{w}{R_1} - \frac{w}{R_2} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Adunînd ecuațiile (8) și ținînd seama de (7a) și (10) se obține exprimarea lui $\frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta}$ prin funcția potențială c

$$\frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta}=-\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{m}{h}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial t}\left(\frac{D_0}{3\mu}+\frac{D_1}{9K_\nu}\right)c+\frac{m}{h}\frac{\partial^3}{\partial\beta^2\partial t}\left(\frac{D_0}{3\mu}+\frac{D_1}{9K_\nu}\right)c- \tag{12}$$
$$-\frac{m^2}{3h^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{D_1}{3K_\nu}+\frac{D_0}{4\mu}\right)c,$$

în timp ce F_1 și F_2 satisfac și la ecuația

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{m}{3h}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2D_1}{3K_\nu}\right)\right]F_1+\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{m}{3h}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2D_1}{3K_\nu}\right)\right]F_2=$$
$$=m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{R_1}w+\frac{1}{R_2}w-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2\right]. \tag{13}$$

Rămîne acum a construi sistemul de ecuații la care trebuie să satisfacă funcțiile c și w. În acest scop vom considera ultimile trei ecuații de echilibru din sistemul (1). Eliminînd eforturile transversale, se obține ecuația

$$\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 M_\beta}{\partial\beta^2}+2\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta}+T_\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right)+T_\beta\left(\frac{1}{R_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)+$$
$$+\frac{\partial w}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial w}{\partial\beta}\left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial T_\beta}{\partial\beta}\right)+2\,T_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+Z=0. \tag{14}$$

În același scop vom considera și ecuația de continuitate a deformațiilor (4), pe care o vom diferenția în raport cu timpul și care în acest fel devine ecuația de continuitate a vitezelor de deformație.

$$\frac{\partial^2\dot\varepsilon_1}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2\dot\varepsilon_2}{\partial\alpha^2}-2\frac{\partial^2\dot\omega}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right]-\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2\dot w}{\partial\beta^2}-\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2\dot w}{\partial\alpha^2}. \tag{15}$$

Exprimînd în continuare în ecuația (14) eforturile și momentele conform relațiilor (10) respectiv (6b) și (3b), iar în ecuația (15) ținîndu-se seama de relația (7a) și (10) se obțin ecuațiile rezolvente în funcțiile c și w

$$\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\nabla^4\dot w-\frac{6}{h^3}\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2}{3}\frac{D_1}{K_\nu}\right)\frac{D_0}{\mu}\left\{\left[\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}-\frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}c+F_1\right]\left[\frac{1}{R_1}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right]+\left[\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-\frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}c+F_2\right]\left[\frac{1}{R_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right]+2\,T_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial w}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+\right. \tag{16}$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}\right)c+\frac{\partial F_1}{\partial\alpha}\right]+\frac{\partial w}{\partial\beta}\left[\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}\right)c+\frac{\partial F_2}{\partial\beta}\right]+Z\right\}=0,$$

$$\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\nabla^4 c-\frac{m}{2h}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{5D_0}{2\mu}+\frac{4D_1}{3K_\nu}\right)\frac{\partial^3 c}{\partial\beta^2\partial t}-\frac{m}{2h}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{5D_0}{2\mu}+\frac{4D_1}{3K_\nu}\right)\frac{\partial^3 c}{\partial\alpha^2\partial t}+$$
$$+\frac{m^2}{h^2}\frac{D_0}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{D_1}{3K_\nu}+\frac{D_0}{4\mu}\right)c+\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial\alpha^2}\right)-\tag{17}$$
$$-\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial\alpha^2}\right)=3h\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right].$$

În acest fel problema dinamică generală a învelitorilor de mică curbură viscoelastice, cu material de tip Maxwell a fost redusă la rezolvarea sistemului de ecuații (16), (17) și (12) în c, w și $T_{\alpha\beta}$1), F_1 și F_2 fiind integrale particulare ale ecuațiilor (11) și (13).

5. SIMPLIFICAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII OBȚINUT

Rezolvarea sistemului de ecuații sub forma generală obținută, este foarte laborioasă și de aceea vom purcede la simplificarea lui. În acest scop vom observa 2) că efectul forțelor de inerție tangențiale, forțe ce sînt prezente în sistemul de ecuații dedus anterior, se datorește în parte deplasării normale w și în parte eforturilor tangențiale. Din sistemul inițial de ecuații se pot obține alte două sisteme simplificate; unul care se obține prin neglijarea contribuției lui w în forțele de inerție tangențiale și altul care se obține din cel anterior prin neglijarea contribuției eforturilor tangențiale în expresia forțelor de inerție tangențială. Această ultimă neglijare conduce la neglijarea în întregime a forțelor de inerție tangențiale și deci sistemul corespunzător conduce la studiul vibrațiilor transversale.

În cele ce urmează vom identifica contribuția lui w și a eforturilor tangențiale în efectul forțelor de inerție tangențiale, întovărășind termenii respectivi cu factorul δ_2 respectiv δ_1 3). Cu această mențiune sistemul de ecuații se scrie astfel

$$\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\nabla^4\dot{w}-\frac{6}{h^3}\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2}{3}\frac{D_1}{K_\nu}\right)\frac{D_0}{\mu}\left\{\left[\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}-\delta_1\frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}c\right]\left[\frac{1}{R_1}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right]+\right.$$
$$+\left[\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-\delta_1\frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}c\right]\left[\frac{1}{R_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right]+2T_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial w}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\delta_1\frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}\right)c+\delta_2\frac{\partial F_1}{\partial\alpha}\right]+\frac{\partial w}{\partial\beta}\left[\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\delta_1\frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}\right)c+\delta_2\frac{\partial F_2}{\partial\beta}\right]+$$
$$\left.+\delta_2 F_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right)+\delta_2 F_2\left(\frac{1}{R_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)+Z\right\}=0,\tag{18}$$

---

1) În ecuaţia (16) se observă existenţa lui $T_{\alpha\beta}$ a cărui eliminare nu este posibilă decît prin ridicarea ordinului ecuaţiei.

2) Această observaţie datorită lui P. M. Naghdi [4] a fost utilizată pe larg în problema elastodinamică a structurilor subţiri, neomogene [5], [6].

3) Evident aceşti factori pot lua valoarea 1 sau 0, după cum se ţine sau nu se ţine seama de influenţa lui w sau a eforturilor tangenţiale în efectul forţelor de inerţie tangenţiale.

$$\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\nabla^4 c-\delta_1\frac{m}{2h}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{5D_0}{2\mu}+\frac{4D_1}{3K_\nu}\right)\frac{\partial^3 c}{\partial\beta^2\partial t}-\delta_1\frac{m}{2h}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{5D_0}{2\mu}+\frac{4D_1}{3K_\nu}\right)\frac{\partial^3 c}{\partial\alpha^2\partial t}+$$

$$+\delta_1\frac{m^2}{h^2}\frac{D_0}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{D_1}{3K_\nu}+\frac{D_0}{4\mu}\right)c+\delta_2\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial\alpha^2}\right)-$$

$$-\delta_2\left(\frac{D_0}{2\mu}-\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial\alpha^2}\right)=3h\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right],$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{m}{h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{2\mu}\right]F_1-\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{m}{h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{2\mu}\right]F_2=\delta_2 m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{R_1}w-\frac{1}{R_2}w-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2\right], \tag{19}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{m}{3h}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2D_1}{3K_\nu}\right)\right]F_1+\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{m}{3h}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2D_1}{3K_\nu}\right)\right]F_2=\delta_2 m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{R_1}w+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R_2}w-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)^2\right].$$

Neglijarea contribuției deplasării w în efectul forțelor de inerție tangențiale, atrage după sine $\delta_2 = 0$ în ecuațiile (18) și (19).

Neglijarea contribuției eforturilor tangențiale în efectul forțelor de inerție tangențiale atrage după sine $\delta_1 = 0$, în sistemul de ecuații considerat. Neglijarea în întregime a forțelor de inerție tangențiale atrage după sine $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (cazul vibrațiilor transversale).

Sistemul de ecuații devine în acest caz:

$$\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\nabla^4\dot{w}-\frac{6}{h^3}\left(\frac{D_0}{2\mu}+\frac{2}{3}\frac{D_1}{K_\nu}\right)\frac{D_0}{\mu}\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right)+\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+Z\right\}=0, \tag{20}$$

$$\left(\frac{D_0}{\mu}+\frac{D_1}{3K_\nu}\right)\nabla^4 c=3h\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right].$$

Acest sistem de ecuații liniarizat coincide cu cel dedus de E.I. Grigoliuc [1]. La rîndul său acest ultim sistem (liniarizat), pentru $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_2}=0$ se defalcă în două, obținînd o ecuație de mișcare pentru vibrațiile mici a plăcii viscoelastice (în teorie de încovoiere)¹) și o ecuație ce descrie starea de tensiune plană a plăcii viscoelastice.

---

¹) Ecuația ce se obține coincide cu cea dedusă de G. C. Yeh și I. Martinek [7].

6. VIBRAȚIILE ÎNVELITORILOR VISCOELASTICE DE SECȚIUNE CILINDRICĂ CIRCULARĂ PLASATE ÎNTR-UN CURENT FLUID SUPERSONIC

În continuare vom relua problema abordată de E. Grigoliuc [1] și anume problema vibrațiilor unei învelitori cilindrice circulare, plasate într-un curent fluid supersonic de viteză a curentului neperturbat U. Se consideră vectorul viteză paralel la generatoarele cilindrului. Vom presupune că învelitoarea este supusă și la o presiune interioară constantă p_i. În acest caz în sistemul general de ecuații (18) și (19) liniarizate vom avea :

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = R, \quad \beta = R\theta,$$

liniile α și $\beta = R\theta$ reprezentînd respectiv lungimea arcurilor generatoarei și a cercului director.

Presiunea p_0 va fi preluată de eforturile de membrană constante

$$T_\alpha^0 = \frac{1}{2} p_0 R \quad \text{și} \quad T_\beta^0 = p_0 R.$$

Expresia liniarizată a presiunii (presiune ce rezultă din scurgerea curentului fluid) dedusă în ipoteza ,,staționarității'' este dată de

$$p_e = -\frac{\rho U}{\sqrt{M^2-1}}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) = -q_1\frac{\partial w}{\partial t} - q_2\frac{\partial w}{\partial \alpha}, \tag{21}$$ [1])

unde ρ — densitatea fluidului, $M = \dfrac{U}{a}$, a fiind viteza sunetului corespunzînd curentului neperturbat.

Vom porni în continuare de la ecuațiile (18), (19) liniarizate, pe care le vom utiliza sub o formă mai puțin generală, neglijînd contribuția adusă de deplasarea normală w în efectul forțelor de inerție tangențiale. Această neglijare conform convenției adoptate atrage după sine $\delta_2 = 0$ și de aci rezultă că punînd $F_1 = F_2 = 0$ ecuațiile (19) sînt identic satisfăcute. Ecuațiile problemei devin în acest caz

$$\left(\frac{D_0}{\mu} + \frac{D_1}{3K_\nu}\right)\nabla^4\dot{w} - \frac{6}{h^3}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{D_0}{2\mu} + \frac{2}{3}\frac{D_1}{K_\nu}\right)\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} - \delta_1\frac{m}{2h}\frac{\partial}{\partial t}\frac{D_0}{\mu}c\right) + Z\right\} = 0,$$

$$\left(\frac{D_0}{\mu} + \frac{D_1}{3K_\nu}\right)\nabla^4 c - \delta_1\frac{m}{2h}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{5D_0}{2\mu} + \frac{4D_1}{3K_\nu}\right)\frac{\partial^3 c}{\partial\beta^2\partial t} - \delta_1\frac{m}{2h}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{5D_0}{2\mu} + \frac{4D_1}{3K_\nu}\right)\frac{\partial^3 c}{\partial\alpha^2\partial t} +$$

$$+ \delta_1\frac{m^2}{h^2}\frac{D_0}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{D_0}{\mu}\left(\frac{D_1}{3K_\nu} + \frac{D_0}{4\mu}\right)c = -\frac{3h}{R}\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial\alpha^2}. \tag{22}$$

---

[1]) Deși domeniul de aplicabilitate al acestei formule nu este determinat în mod precis, se poate arăta ușor [8] că această formulă, pentru $M \gg 1$ coincide cu formula liniarizată $p_e = -\dfrac{\varkappa p_\infty}{a}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + U\dfrac{\partial w}{\partial \alpha}\right)$ dedusă pe baza analogiei pistonului de A. A. Iliușin [9] și de H. Ashley și G. Zartarian [10].

În ipoteza cilindrului de lungime infinită, vom considera drept soluții ale acestui sistem

$$c = c_* \, e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n \frac{\beta}{R} \, ; \quad w = w_* \, e^{i(\omega t - k\alpha)} \cos n \frac{\beta}{R} , \tag{23}$$

unde $i = (-1)^{1/2}$, c_*, w_* constante, ω frecvența, $k = \frac{\pi}{\lambda}$, unde λ este lungimea semi undei în direcția generatoarei.

Introducerea soluțiilor (23) în sistemul (22) ne conduce la următoarea ecuație de frecvențe:

$$\begin{aligned} & i\delta_1 a_9 \omega^9 + \delta_1 a_8 \omega^8 - \delta_1 \, (a_{71} + i a_{72}) \omega^7 + \delta_1 (-a_{61} + i a_{62}) \, \omega^6 + [i a_5 + \\ & + \delta_1 (a'_{51} + i a'_{52})] \omega^5 + [i a_4 + \delta_1 (a_{41} - i a_{42})] \omega^4 - [a_{31} + i a_{32} + \delta_1 (a'_{31} + i a'_{32})] \, \omega^3 + \\ & + [-a_{21} + i a_{22} + \delta_1 (-a'_{21} + i a'_{22})] \omega^2 + [a_{11} + i a_{12} + \delta_1 (a'_{11} + i a'_{12})] \, \omega + \\ & + a_{01} - i a_{02} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

În coeficienții acestei ecuații (a căror expresie este dată în tabela 1) se observă că au fost puși în evidență termenii ce rezultă în urma luării în considerație a forțelor de inerție tangențiale (mai precis a luării în considerație a efectului introdus de eforturile tangențiale în forțele de inerție tangențiale). Acești termeni înmulțesc pe δ_1. Neglijînd această contribuție (punînd deci $\delta_1 = 0$) se reobține ecuația dedusă de E. I. Grigoliuc [1].

Pentru cazul frecvențelor joase (primul ton), prin analiza termenilor ecuației (24) se observă că aceasta se poate simplifica sensibil. De asemenea ecuația (24) poate sta la baza determinării vitezei de fluturare a învelitorilor cilindrice circulare, viscoelastice, plasate într-un curent fluid exterior supersonic.

Tabela 1

Expresia coeficienților ecuației (24).

$$a_9 = \frac{m^3}{h^2} C_2 D_4 \, ; \quad a_8 = \frac{m^3}{h^2} (B_2 D_4 + C_2 C_4) + \frac{m^2}{h^2} D_4 C_2 q_1 \, ;$$

$$\begin{aligned} a_{71} = \frac{m^2}{h^2} k \, q_2 C_2 D_4 \, ; \; a_{72} = \frac{m^2}{h^2} \Big[& (B_2 D_4 + C_2 C_4) q_1 + (D_4 A_2 + B_2 C_4 + C_2 B_4) \, m + \frac{h^3}{6} B_1 D_4 (\sigma^2 + \\ & + k^2)^2 + \frac{h}{2} C_2 C_3 \, (k^2 + \sigma^2) + C_2 D_4 (k^2 T_\alpha^0 + \sigma^2 T_\beta^0) \Big] \, ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{61} = & \frac{m^2}{h^2} \left[q_1 \left(A_2 D_4 + B_2 C_4 + C_2 B_4 + \frac{h}{2m} C_2 C_3 (k^2 + \sigma^2) \right) + (k^2 T_\alpha^0 + \sigma^2 T_\beta^0) \, (C_2 C_4 + B_2 D_4) \right] + \\ & + \frac{m^2 h}{6} (k^2 + \sigma^2)^2 \, (A_1 D_4 + B_1 C_4) + \frac{m^3}{h^2} (A_2 C_4 + B_2 B_4 + C_2 A_4) + \frac{m^2}{2h} (k^2 + \sigma^2) \, (B_2 C_3 + C_2 B_3) \, ; \end{aligned}$$

$$a_{62} = \frac{m^2}{h^2} kq_2 (B_2 D_4 + C_2 C_4) ;$$

$$a'_{51} = \frac{m^2}{h^2} kq_2 \left[A_2 D_4 + B_2 C_4 + C_2 B_4 + \frac{h}{2m} C_2 C_3 (k^2 + \sigma^2) \right] ;$$

$$a'_{52} = \frac{m^2}{h^2} [q_1 (C_4 A_2 + B_4 B_2 + A_4 C_2) + (k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)(A_2 D_4 + B_2 C_4 + C_2 B_4)] + \frac{m}{2h} [(k^2 +$$

$$+ \sigma^2) q_1 (B_2 C_3 + C_2 B_3) + (k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)(k^2 + \sigma^2) C_3 C_2] + \frac{m^2}{2h} (k^2 + \sigma^2)(A_2 C_3 + B_2 B_3 +$$

$$+ A_3 C_2) + \frac{m^2 h}{6} (k^2 + \sigma^2)^2 [A_1 C_4 + B_1 B_4) + \frac{m}{2h} \frac{h^3}{6} (k^2 + \sigma^2)^3 B_1 C_3 + \frac{m^3}{h^2} (B_2 A_4 + A_2 B_4) +$$

$$+ \frac{3}{2R^2} \frac{m}{G} k^2 C_2, \quad a_5 = C_2 B_1 m (k^2 + \sigma^2)^2.$$

$$a_{41} = \frac{m^2}{h^2} [q_1 (A_2 B_4 + A_4 B_2) + (k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)(C_4 A_2 + B_2 B_4 + A_4 C_2)] + \frac{m}{2h} (k^2 + \sigma^2) [q_1 (A_2 C_3 +$$

$$+ B_2 B_3 + C_2 A_3) + (k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)(C_2 B_3 + C_3 B_2)] + \frac{m^2}{h^2} \frac{h^3}{6} (k^2 + \sigma^2)^2 (A_1 B_4 + A_4 B_1) +$$

$$+ \frac{m}{2h} \frac{h^3}{6} (k^2 + \sigma^2)^3 (A_1 C_3 + B_1 B_3) + \frac{m^3}{h^2} A_4 A_2 + \frac{m^2}{2h} (k^2 + \sigma^2)(A_2 B_3 + A_3 B_2) +$$

$$+ \frac{3m}{2R^2} k^2 \left(\frac{B_2}{G} + \frac{C_2}{\mu} \right),$$

$$a_{42} = \frac{m^2}{h^2} kq_2 (A_2 C_4 + B_2 B_4 + C_2 A_4) + \frac{m}{2h} (k^2 + \sigma^2) kq_2 (B_2 C_3 + C_2 B_3),$$

$$a_4 = (k^2 + \sigma^2)^2 [(B_1 B_2 + A_1 C_2) m + B_1 C_2 q_1],$$

$$a'_{31} = \frac{m^2}{h^2} kq_2 B_2 A_4 + \frac{m}{2h} (k^2 + \sigma^2) kq_2 (B_2 B_3 + A_3 C_2),$$

$$v'_{32} = \frac{m^2}{h^2} [q_1 A_2 A_4 + (k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)(A_2 B_4 + B_2 A_4)] + \frac{m}{2h} (k^2 + \sigma^2) \Big[q_1 (A_2 B_3 + B_2 A_3) + (k^2 T^0_\alpha +$$

$$+ \sigma^2 T^0_\beta)(C_3 A_2 + B_2 B_3 + A_3 C_2) \Big] + \frac{m}{2h} \frac{h^3}{6} (k^2 + \sigma^2)^3 (A_1 B_3 + B_1 A_3) + \frac{m^2}{2h} (k^2 + \sigma^2) A_2 A_3 +$$

$$+ \frac{3}{2} \frac{m}{R^2} k^2 \left(\frac{A_2}{G} + \frac{B_2}{\mu} \right),$$

$$a_{31} = \frac{m^2}{h^2} kq_2 A_2 B_4 + \frac{m}{2h} kq_2 (k^2 + \sigma^2) A_2 C_3 + (k^2 + \sigma^2) kq_2 C_2 B_1 ,$$

$$a_{32} = (k^2 + \sigma^2)^2 [(B_1 B_2 + A_1 C_2) q_1 + (k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta) C_2 B_1] + m (k^2 + \sigma^2)^2 (B_1 A_2 + A_1 B_2) +$$

$$+ B_1^2 \frac{h^3}{6} (k^2 + \sigma^2)^4 + \frac{3h}{R^2} C_2 k^4,$$

$$a'_{21} = \frac{m}{2h}(k^2+\sigma^2)\,[q_1 A_2 A_3 + (k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)\,(A_2 B_3 + B_2 A_3)] + \frac{m^2}{h^2}(k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)\,A_2 A_4 +$$

$$+ \frac{mh^2}{12}(k^2+\sigma^2)^3 A_1 A_3 + \frac{3m}{2R^2\mu} k^2 A_2,$$

$$a'_{22} = \frac{m^2}{h^2} A_2 A_4\, kq_2 + \frac{m}{2h}(k^2+\sigma^2)\, kq_2\,(A_2 B_3 + A_3 B_2),$$

$$a_{21} = (k^2+\sigma^2)^2\,[q_1(A_2 B_1 + A_1 B_2) + (k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)\,(B_1 B_2 + A_1 C_2) + A_1 A_2 m] +$$

$$+ \frac{h^3}{3}(k^2+\sigma^2)^4 A_1 B_1 + \frac{3h}{R^2} k^4 B_2,$$

$$a_{22} = (k^2+\sigma^2)^2\, kq_2\,(B_1 B_2 + A_1 C_2),$$

$$a'_{11} = \frac{m}{2h}(k^2+\sigma^2)\, kq_2\, A_2 A_3,$$

$$a'_{12} = \frac{m}{2h}(k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)\,(k^2+\sigma^2) A_2 A_3,$$

$$a_{11} = (k^2+\sigma^2)^2 .\, kq_2(B_1 A_2 + A_1 B_2),$$

$$a_{12} = (k^2+\sigma^2)^2 [A_1 A_2 q_1 + (k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)\,(A_2 B_1 + A_1 B_2)] + A_1^2 \frac{h^3}{6}(k^2+\sigma^2)^4 + \frac{3h}{R^2} k^4 A_2,$$

$$a_{01} = (k^2+\sigma^2)^2\,(k^2 T^0_\alpha + \sigma^2 T^0_\beta)\, A_1 A_2,$$

$$a_{02} = (k^2+\sigma^2)^2\, kq_2 A_1 A_2.$$

În aceste relaţii au fost introduse notaţiile următoare :

$$\sigma = \frac{n}{R},\ A_1 = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{3K_\nu},\ B_1 = \frac{1}{G} + \frac{1}{3K'_e},\ A_2 = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{2}{3K_\nu \mu},$$

$$B_2 = \frac{1}{\mu G} + \frac{2}{3\mu K_e} + \frac{2}{3K_\nu G},\ C_2 = \frac{1}{G}\left(\frac{1}{2G} + \frac{2}{3K_e}\right)$$

$$A_3 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{5}{2\mu} + \frac{4}{3K_\nu}\right),\ B_3 = \frac{5}{\mu G} + \frac{4}{3G\,K_\nu} + \frac{4}{3\mu K_e},$$

$$C_3 = \frac{1}{G}\left(\frac{5}{2G} + \frac{4}{3K_e}\right),\ A_4 = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{4\mu} + \frac{1}{3K_\nu}\right),\ B_4 = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{4G} + \frac{1}{3K_e}\right) +$$

$$+ \frac{2}{\mu G}\left(\frac{1}{4\mu} + \frac{1}{3K_\nu}\right),\ C_4 = \frac{2}{\mu G}\left(\frac{1}{4G} + \frac{1}{3K_e}\right) + \frac{1}{G^2}\left(\frac{1}{4\mu} + \frac{1}{3K_\nu}\right),\ D_4 = \frac{1}{G^2}\left(\frac{1}{4G} + \frac{1}{3K_e}\right).$$

Primită la redacţie la 14 octombrie 1961

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОЛОГИХ ВЯЗКО-УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

РЕЗЮМЕ

Исследуется динамическая задача пологих тонких оболочек, рассматривая вязко-упругий материал типа Максвелля. При постановке этой задачи учитываются, кроме поперечной инерционной силы также и касательные инерционные силы. Также учитываются и нелинейные члены, происходящие от присутствия больших деформаций.

Такая постановка динамической задачи сводится к решению системы уравнений (16), (17), (12) в потенциальной функции c, нормальном перемещении w, усилии $T_{\alpha\beta}$, причем F_1 и F_2 являются частными интегралами уравнений (11) и (13).

Показывается, что эту систему можно упростить, имея в виду то, что эффект касательных инерционных сил вызван частично перемещением w и частично касательными усилиями T_α *и* T_β.

В уравнениях (18) и (19) идентифицирован вклад w и касательных усилий в эффект касательных инерционных сил, приписывая соответствующим членам множитель δ_2, соответственно δ_1. Пренебрежение вклада w в эффект касательных инерционных сил влечет за собой $\delta_2=0$, а пренебрежение вклада касательных усилий в эффект касательных инерционных сил, $\delta_1=0$. Полное пренебрежение касательных инерционных сил влечет за собой $\delta_1=\delta_2=0$ (случай поперечных колебаний) уравнение (20).

Далее на основании упрощенной системы линеаризованных уравнений (ур. (18) и (19), где $\delta_2=0$) приходим к задаче, поставленной И. Григолюком [1], а именно к задаче колебаний круглой вязко-упругой цилиндрической оболочки, расположенной в сверхзвуковом потоке жидкости.

DYNAMIC PROBLEM OF SHALLOW VISCOELASTIC SHELLS

ABSTRACT

The dynamic problem of shallow shells is approached by considering a viscoelastic material of Maxwell type. In treating this problem, beside the transverse inertia forces, the tangential inertia forces are considered. The non-linear terms due to the consideration of large deformations are also considered.

The dynamic problem thus considered reduces to the solving of the system of equations (16), (17), (12) in the potential function c, the normal displacement w, the stress resultant $T_{\alpha\beta}$, F_1 and F_2 being particular integrals of equations (11) and (13).

It is shown that this system is susceptible to be simplified, taking into consideration that the effect of tangential inertia forces is due partly to the displacement w and partly to the tangential stresses resultant.

In equations (18) and (19) the contribution of w and of the tangential stresses resultant in the effect of the tangential inertia forces is identified by multiplying the respective terms by the factors δ_1 and δ_2 respectively. The neglecting of the contribution of w in the effect of the tangential inertia forces implies $\delta_2 = 0$ and the neglecting of the contribution of tagential stresses resultant in the effect of tangential inertia forces implies $\delta_1 = 0$, the complete neglecting if the tangential inertia forces implies $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (case of the transverse vibrations (20)).

Further, by using a simplified and linearized system of equations (18), (19), in which $\delta_2 = 0$, the problem treated by E. I. Grigoliuc [1], i.e., the problem of the vibrations of a viscoelastic circular cylindrical shell in a supersonic fluid flow is examined.

BIBLIOGRAFIE

1. Э. И. Григолюк, *Динамика упруго-вязких оболочек и пластин.* Доклады Академии Наук СССР, **138**, *6* (1961).
2. C. Torre, *Kritik und Ergänzung des Maxwellschen Ansatzes für elastischzähe Stoffe (Verdrehung von Stäben als Beispiel).* Österreichisches Ingenieur - Archiv, **VIII**, *1*, (1954).
3. C. Torre, *Ergänzungen zum Maxwellschen Ansatz für elastischzähe Stoffe (Verdrehung mit instationärer Spannungänderung als Beispiel).* Kaolloid - Zeitschrift, **138**, *1* (1954).
4. P. M. Naghdi, *On the General problem of elasto-kinetics in the theory of shallow shells.* Proceedings of the Symposium on the Theory of thin ellastic shells, Delft 24—28 August 1959.
5. L. Librescu, *Asupra problemei elasto-dinamice a structurilor subțiri, neomogene.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, XII, 4, (1961).
6. L. Librescu, *Vibrations of non-homogeneous circular cylindrical shells in compressible fluid flow.* Revue de Mécanique Appliquée, 5/1961.
7. Gordon C. Yeh, Johann Martinek., *Forced vibrations of visco-elastic rectangular plate in fluid media.* Actes IX-e Congrès International de Mécanique Appliquée, **V**, 340, 352 (1957).
8. В. В. Болотин, *Некоторые новые задачи динамики оболочек.* Расчеты на прочность. В. 4. Машгиз, Москва, 1959.
9. А. А. Илюшин, *Закон плоских сечений в аеродинамике больших сверхзвуковых скоростей.* Прикладная Матем. и Механика, **20**, *6* (1956).
10. H. Ashley, G. Zartarian, *Piston theory a new aerodynamic tool for the aeroelastician.* Journ. Aeronaut. Sci., **23**, *6* (1956).

STUDII

ELASTICITATE-PLASTICITATE-REZISTENȚA MATERIALELOR

MOMENTE DE PLASTIFICARE ÎN GRINZI CONTINUE DE BETON ARMAT, ÎNCASTRATE LA EXTREMITĂȚI

DE

VALERIU PETCU[1]

Grinzile continue de beton armat, cu deschideri egale, încastrate la una sau la ambele extremități, constituie un caz frecvent întîlnit la proiectarea structurilor de beton armat.

Gradele de încastrare ale extremităților acestor grinzi variază, de la caz la caz, între cel corespunzător simplei rezemări (grad de încastrare nul) și cel corespunzător încastrării perfecte (grad de încastrare egal cu unitatea).

Stabilirea directă a momentelor de plastificare, efectuată pe baza *principiului redistribuției optime a eforturilor* [1], în funcție de gradul de încastrare al extremităților, constituie o operație laborioasă pentru această categorie de elemente de construcție. Din această cauză apare necesitatea adoptării unui procedeu aproximativ de determinare a momentelor de plastificare în grinzile continue de beton armat încastrate la extremități, care să aibă avantajele simplității și al unei exactități suficiente în raport cu principiul susmenționat.

Un astfel de procedeu, folosit curent în Statica construcțiilor în domeniul elastic, constă în determinarea momentelor efective prin interpolarea liniară, în funcție de gradul de încastrare al extremităților, efectuată în raport cu cele două cazuri limită: grinda continuă simplu rezemată la ambele extremități și grinda continuă încastrată perfect la ambele extremități, respectiv încastrată perfect la o extremitate și simplu rezemată la cealaltă.

Extinderea acestui procedeu la proiectarea grinzilor continue de beton armat în domeniul plastic este condiționată de stabilirea valorilor momentelor de plastificare pentru cele două cazuri limită menționate mai sus.

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

Într-un studiu anterior [2] s-au stabilit valorile momentelor de plastificare în grinzile de beton armat, cu deschideri egale, simplu rezemate la extremități.

În cele ce urmează se determină, pe baza principiului redistribuției optime a eforturilor, valorile momentelor de plastificare în grinzile continue de beton armat cu deschideri egale, pentru două cazuri de rezemare a extremităților :

— grinzi continue încastrate perfect la ambele extremități ;

— grinzi continue încastrate perfect la o extremitate și simplu rezemate la cealaltă.

Pentru primul caz, studiul se referă la grinzile continue cu 2, 3, 4 și 5 deschideri, iar pentru cazul al doilea — la grinzile continue cu 2, 3 și 4 deschideri.

Încărcările luate în considerație sînt cele întîlnite curent în practică și anume :

— o sarcină concentrată aplicată la mijlocul deschiderii ;

— două sarcini concentrate aplicate la treimile deschiderii ;

— trei sarcini concentrate aplicate la sferturile deschiderii ;

— sarcină uniform repartizată ;

— sarcină trapezoidală cu baza mică egală cu 0,4 l ;

— sarcină trapezoidală cu baza mică egală cu 0,2 l ;

— sarcină triunghiulară.

La stabilirea valorii momentului de plastificare în secțiunea critică în care apare prima articulație plastică, în momentul formării acesteia, s-au folosit coeficienții din manualul [3].

Studiul are la bază metoda stărilor limită.

În conformitate cu această metodă, sarcina permanentă de calcul (g, G) este o constantă iar sarcina utilă poate varia de la zero la valoarea sa de calcul (p_u, P_u).

NOTAȚII

M_{pij} — momentul de plastificare în secțiunea „j" din deschiderea „i" a grinzii ;

M_{pa}, M_{pb}, M_{pc}, M_{pd}, — momentele de plastificare în secțiunile de pe reazemele A, B, C și D ;

T_a — forța tăietoare corespunzătoare reazemului A ;

T_{b1}, T_{b2} — forțele tăietoare la stînga și la dreapta reazemului B ;

T_{c2}, T_{c3} — forțele tăietoare la stînga și la dreapta reazemului C ;

T_{d3}, T_{d4} — forțele tăietoare la stînga și la dreapta reazemului D ;

T_e — forța tăietoare corespunzătoare reazemului E ;

g — sarcina permanentă de calcul, uniform distribuită pe ml ;

G — sarcina permanentă de calcul, aplicată concentrat ;

p — sarcina utilă, uniform distribuită pe ml $(0 \leqslant p \leqslant p_u)$;

P — sarcina utilă, aplicată concentrat $(0 \leqslant P \leqslant P_u)$;

p_{1i} — sarcina utilă, uniform distribuită pe ml, corespunzătoare apariției primei articulații plastice în deschiderea „i";

$p_{1a}, p_{1b}, p_{1c}\ p_{1d}$ — sarcina utilă, uniform distribuită pe ml, corespunzătoare apariției primei articulații plastice pe reazemul A, B, C, respectiv D;

P_{1i} — sarcina utilă, aplicată concentrat, corespunzătoare apariției primei articulații plastice în deschiderea „i";

$P_{1a}, P_{1b}, P_{1c}, P_{1d}$ — sarcina utilă, aplicată concentrat, corespunzătoare apariției primei articulații plastice pe reazemul A, B, C, respectiv D;

p_u — sarcina utilă de calcul (corespunzătoare apariției ultimei articulații plastice care transformă structura în mecanism), uniform distribuită pe ml;

P_u — sarcina utilă de calcul, aplicată concentrat;

r_i — coeficient de redistribuție maxim, corespunzător apariției primei articulații plastice în deschiderea „i" a grinzii;

r_a, r_b, r_c, r_d — coeficienți de redistribuție maximi, corespunzători apariției primei articulații plastice pe reazemele A, B, C, respectiv D;

r_L^* — coeficientul de redistribuție rezultat din egalarea tuturor coeficienților de redistribuție corespunzători secțiunilor critice ale mecanismului elementar L;

ρ — gradul de încastrare al extremităților grinzii continue $(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$;

l — mărimea deschiderilor grinzii continue;

$$k_{1i} = \frac{p_{1i}}{g};\ K_{1i} = \frac{P_{1i}}{G};\ k_u = \frac{p_u}{g};\ K_u = \frac{P_u}{G};$$

$$r_i = \frac{1 + k_u}{1 + k_{1i}} \text{ respectiv } \frac{1 + K_u}{1 + K_{1i}};$$

$$r_a = \frac{1 + k_u}{1 + k_{1a}} \text{ respectiv } \frac{1 + K_u}{1 + K_{1a}} \text{ etc.}$$

$$m_{pij} = \frac{M_{pij}}{g \cdot l^2} \text{ respectiv } \frac{M_{pij}}{G \cdot l}$$

$$m_{pa} = \frac{M_{pa}}{g \cdot l^2} \text{ respectiv } \frac{M_{pa}}{G \cdot l} \text{ etc.}$$

Observație: Prin secțiune critică se înțelege secțiunea în care apare o articulație plastică.

I. GRINDA CONTINUĂ CU DESCHIDERI EGALE, ÎNCASTRATĂ PERFECT LA AMBELE EXTREMITĂŢI

În cele ce urmează se prezintă modul de determinare a momentelor de plastificare din secţiunile critice ale grinzii continue cu 5 deschideri, solicitată de sarcini concentrate aplicate la mijlocul deschiderilor (fig. 1*a*). Schemele posibile de încărcare sînt prezentate în figura 1.

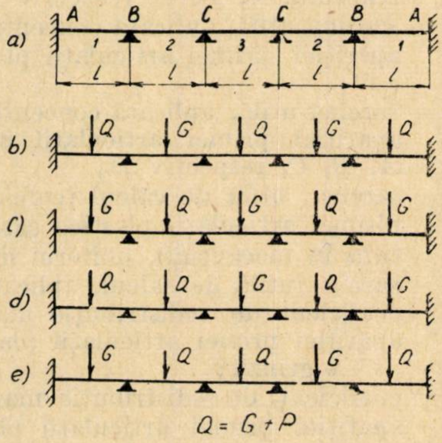


Fig. 1

Momentele de plastificare în secţiunile critice din cîmpurile 1, 2 şi 3 şi de pe reazemele *A*, *B* şi *C*, corespunzătoare schemelor de încărcare care produc prima articulaţie plastică în aceste secţiuni (fig. 1, *b*, *c*, *d*, *e*) sînt date de relaţiile :

$$\left.\begin{aligned} m_{p11} &= 0{,}125 + 0{,}147\ K_{11}, \\ m_{p21} &= 0{,}125 + 0{,}176\ K_{12}, \\ m_{p31} &= 0{,}125 + 0{,}182\ K_{13}, \\ m_{pa} &= 0{,}125 + 0{,}171\ K_{1a}, \\ m_{pb} &= 0{,}125 + 0{,}149\ K_{1b}, \\ m_{pc} &= 0{,}125 + 0{,}162\ K_{1c}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Valorile coeficienţilor de redistribuţie maximi, corespunzători secţiunilor critice ale grinzii, se obţin cu ajutorul relaţiilor (1)

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{1 + K_u}{6{,}80\ m_{p11} + 0{,}150}, & r_a &= \frac{1 + K_u}{5{,}85\ m_{pa} + 0{,}269}, \\ r_2 &= \frac{1 + K_u}{5{,}70\ m_{p21} + 0{,}290}, & r_b &= \frac{1 + K_u}{6{,}70\ m_{pb} + 0{,}161}, \\ r_3 &= \frac{1 + K_u}{5{,}50\ m_{p31} + 0{,}313}, & r_c &= \frac{1 + K_u}{6{,}20\ m_{pc} + 0{,}228}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ecuațiile de echilibru ale grinzii în stadiul de mecanism sînt :

$$\left.\begin{aligned} 2\, m_{p11} + m_{pa} + m_{pb} &= 0{,}500\,(1 + K_u), \\ 2\, m_{p21} + m_{pb} + m_{pc} &= 0{,}500\,(1 + K_u), \\ m_{p31} + m_{pc} &= 0{,}250\,(1 + K_u). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Numărul ecuațiilor de echilibru este $n_e = 3$, iar acela al secțiunilor critice este $n_s = 6$.

În consecință, pentru stabilirea momentelor de plastificare din secțiunile critice sînt necesare $n_s - n_e = 3$ ecuații suplimentare. Acestea se obțin pe baza principiului redistribuției optime a eforturilor [1].

Aplicarea primei teoreme a redistribuției optime a eforturilor [1] în cazul grinzii considerate conduce la următoarele valori ale coeficieților de redistribuție r^*, corespunzători mecanismelor elementare I, II și III ale deschiderilor 1, 2 și 3.

$$r^*_{\mathrm{I}} = \frac{1}{0{,}82 + \dfrac{0{,}18}{1 + K_u}},$$

$$r^*_{\mathrm{II}} = \frac{1}{0{,}76 + \dfrac{0{,}24}{1 + K_u}},$$

$$r^*_{\mathrm{III}} = \frac{1}{0{,}73 + \dfrac{0{,}27}{1 + K_u}}.$$

Rezultă prin urmare

$$r^*_{\mathrm{III}} > r^*_{\mathrm{II}} > r^*_{\mathrm{I}}.$$

În consecință aplicarea principiului redistribuției optime a eforturilor în cazul considerat conduce la următoarele ecuații suplimentare :

$$r_a = r_b = r_c = r_3, \qquad (4)$$

în care coeficienții de redistribuție care intervin sînt dați de relațiile (2).

Sistemul format din ecuațiile (3) și (4) are soluția :

$$\left.\begin{aligned} m_{p11} &= 0{,}125 + 0{,}134\ K_u, \\ m_{p21} &= 0{,}125 + 0{,}137\ K_u, \\ m_{p31} &= 0{,}125 + 0{,}132\ K_u, \\ m_{pa} &= 0{,}125 + 0{,}124\ K_u, \\ m_{pb} &= 0{,}125 + 0{,}109\ K_u, \\ m_{pc} &= 0{,}125 + 0{,}118\ K_u. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Coeficienţii de redistribuţie au valorile:

$$\left.\begin{aligned} r_a = r_b = r_c = r_3 &= \frac{1}{0{,}73 + \dfrac{0{,}27}{1 + K_u}}, \\ r_1 &< \frac{1}{0{,}91 + \dfrac{0{,}09}{1 + K_u}}, \\ r_2 &= \frac{1}{0{,}78 + \dfrac{0{,}22}{1 + K_u}}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

În mod analog s-au tratat grinzile continue cu 2, 3 şi 4 deschideri egale.

Momentele de plastificare obţinute pentru aceste grinzi, în funcţie de schemele de încărcare luate în consideraţie, sînt prezentate în tabelele 1 şi 2.

În aceleaşi tabele se dau de asemenea:

— momentele de plastificare în celelalte secţiuni caracteristice din deschideri, în cazurile schemelor de încărcare cu 2 şi 3 sarcini concentrate;

— forţele tăietoare corespunzătoare stadiului de mecanism;

— valorile coeficienţilor de redistribuţie.

Observaţii: 1. În cazurile schemelor de încărcare cu 2 şi 3 sarcini concentrate, ca secţiune critică în fiecare cîmp s-a considerat secţiunea corespunzătoare momentului elastic maxim dat de sarcinile utile.

2. Pentru aceleaşi scheme de încărcare, ca moment de plastificare în celelalte secţiuni caracteristice din cîmpuri (secţiuni din dreptul sarcinilor concentrate) s-a considerat valoarea cea mai mare dintre momentele rezultate din diagrama de momente corespunzătoare apariţiei primei articulaţii plastice în cîmpul respectiv şi din diagrama de momente corespunzătoare stadiului de mecanism.

II. GRINDA CONTINUĂ CU DESCHIDERI EGALE, ÎNCASTRATĂ PERFECT LA O EXTREMITATE ŞI SIMPLU REZEMATĂ LA CEALALTĂ

Pentru exemplificare, în cele ce urmează se prezintă modul de determinare a momentelor de plastificare din secţiunile critice ale grinzii continue cu 4 deschideri, solicitată de sarcini concentrate aplicate la mijlocul deschiderilor (fig. 2).

Momentele de plastificare în secţiunile critice din cîmpurile 1, 2, 3 şi 4 şi de pe reazemele A, B, C şi D, corespunzătoare schemelor de încărcare

care produc prima articulație plastică în aceste secțiuni (fig. 2*b*, *c*, *d*, *e*, *f*) sînt date de relațiile

$$\left.\begin{aligned} m_{p11} &= 0{,}125 + 0{,}148\ K_{11}, \\ m_{p21} &= 0{,}129 + 0{,}179\ K_{12}, \\ m_{p31} &= 0{,}113 + 0{,}179\ K_{13}, \\ m_{p41} &= 0{,}170 + 0{,}209\ K_{14}, \\ m_{pa} &= 0{,}123 + 0{,}170\ K_{1a}, \\ m_{pb} &= 0{,}128 + 0{,}152\ K_{1b}, \\ m_{pc} &= 0{,}115 + 0{,}159\ K_{1c}, \\ m_{pd} &= 0{,}159 + 0{,}179\ K_{1d}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

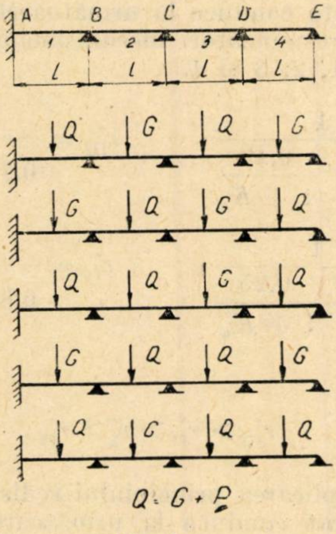


Fig. 2

Valorile coeficienților de redistribuție maximi, corespunzători secțiunilor critice ale grinzii, se obțin cu ajutorul relațiilor (7)

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{1+K_u}{6{,}75\,m_{p11}+0{,}155}, & r_a &= \frac{1+K_u}{5{,}90\,m_{pa}+0{,}276}, \\ r_2 &= \frac{1+K_u}{5{,}60\,m_{p21}+0{,}279}, & r_b &= \frac{1+K_u}{6{,}60\,m_{pb}+0{,}158}, \\ r_3 &= \frac{1+K_u}{5{,}60\,m_{p31}+0{,}369}, & r_c &= \frac{1+K_u}{6{,}30\,m_{pc}+0{,}277}, \\ r_4 &= \frac{1+K_u}{4{,}80\,m_{p41}+0{,}187}, & r_d &= \frac{1+K_u}{5{,}60\,m_{pd}+0{,}112}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ecuațiile de echilibru ale grinzii în stadiul de mecanism sînt:

$$\left.\begin{aligned} 2\,m_{p11} + m_{pa} + m_{pb} &= 0{,}500\,(1 + K_u),\\ 2\,m_{p21} + m_{pb} + m_{pc} &= 0{,}500\,(1 + K_u),\\ 2\,m_{p31} + m_{pc} + m_{pd} &= 0{,}500\,(1 + K_u),\\ 2\,m_{p41} + m_{pd} &= 0{,}500\,(1 + K_u). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Numărul ecuațiilor de echilibru este $n_e = 4$, iar acela al secțiunilor critice este $n_s = 8$.

În consecință, pentru stabilirea momentelor de plastificare din secțiunile critice sînt necesare $n_s - n_e = 4$ ecuații suplimentare.

Aplicarea primei teoreme a redistribuției optime a eforturilor în cazul grinzii considerate conduce la următoarele valori ale coeficienților de redistribuție r^*, corespunzători mecanismelor elementare I, II, III și IV ale deschiderilor 1, 2, 3 și 4.

$$r^*_{\mathrm{I}} = \frac{1}{0{,}81 + \dfrac{0{,}19}{1 + K_u}}, \qquad r^*_{\mathrm{III}} = \frac{1}{0{,}72 + \dfrac{0{,}28}{1 + K_u}},$$

$$r^*_{\mathrm{II}} = \frac{1}{0{,}75 + \dfrac{0{,}25}{1 + K_u}}, \qquad r^*_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{0{,}84 + \dfrac{0{,}16}{1 + K_u}}.$$

Rezultă prin urmare:

$$r^*_{\mathrm{III}} > r^*_{\mathrm{II}} > r^*_{\mathrm{I}} > r^*_{\mathrm{IV}}.$$

În consecință, aplicarea principiului redistribuției optime a eforturilor în cazul considerat conduce la următoarele ecuații suplimentare:

$$r_a = r_b = r_c = r_d = r_3, \tag{10}$$

în care coeficienții de redistribuție care intervin sînt dați de relațiile (8).

Sistemul format de ecuațiile (9) și (10) are soluția

$$\left.\begin{aligned} m_{p11} &= 0{,}125 + 0{,}134\,K_u,\\ m_{p21} &= 0{,}129 + 0{,}138\,K_u,\\ m_{p31} &= 0{,}113 + 0{,}129\,K_u,\\ m_{p41} &= 0{,}170 + 0{,}186\,K_u,\\ m_{pa} &= 0{,}123 + 0{,}122\,K_u,\\ m_{pb} &= 0{,}128 + 0{,}110\,K_u,\\ m_{pc} &= 0{,}115 + 0{,}115\,K_u,\\ m_{pd} &= 0{,}159 + 0{,}129\,K_u. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Coeficienții de redistribuție au valorile :

$$\left.\begin{aligned} r_a = r_b = r_c = r_d = r_3 &= \frac{1}{0{,}72 + \dfrac{0{,}28}{1 + K_u}}, \\ r_1 &< \frac{1}{0{,}90 + \dfrac{0{,}10}{1 + K_u}}, \\ r_2 &= \frac{1}{0{,}77 + \dfrac{0{,}23}{1 + K_u}}, \\ r_4 &< \frac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + K_u}}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

În mod analog s-au tratat grinzile continue cu 2 și 3 deschideri. Momentele de plastificare obținute pentru aceste grinzi, în funcție de schemele de încărcare luate în considerație, sînt prezentate în tabelele 3 și 4.

Ca și în cazul precedent, în aceste tabele se dau de asemenea momentele de plastificare în celelalte secțiuni caracteristice din deschideri, forțele tăietoare corespunzătoare stadiului de mecanism, precum și valorile coeficienților de redistribuție.

III. MOMENTE DE PLASTIFICARE ÎN GRINZILE CONTINUE CU DESCHIDERI EGALE, ÎNCASTRATE PARȚIAL LA EXTREMITĂȚI

Procedeul aproximativ de determinare a momentelor de plastificare în grinzile de beton armat cu deschideri egale, încastrate parțial la extremități, menționat anterior, constă în interpolarea liniară efectuată între momentele de plastificare corespunzătoare celor două cazuri limită (grinda continuă simplu rezemată la ambele extremități și grinda continuă încastrată perfect la ambele extremități, respectiv încastrată perfect la o extremitate și simplu rezemată la cealaltă), în funcție de gradul de încastrare al extremităților. Practic, calculul comportă următoarele operații :

— amplificarea momentelor de plastificare (M_p^s) ale grinzii simplu rezemate la extremități cu diferența $(1 - \rho)$;

— amplificarea momentelor de plastificare (M_p^i) ale grinzii încastrate perfect la ambele extremități (sau numai la o extremitate) cu gradul de încastrare ρ;

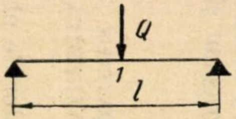
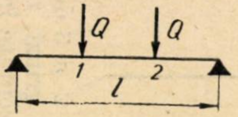
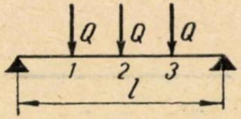
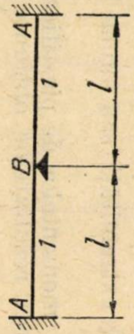
— determinarea momentelor de plastificare (M_p) în grinda considerată prin suprapunerea rezultatelor obținute din operațiile precedente

$$M_p = (1 - \rho)\cdot M_p^s + \rho \cdot M_p^i. \qquad (13)$$

Tabela 1

Grinda continuă încastrată la ambele extremități

Sarcini concentrate

Schema grinzii	Mărimi statice	 $Q = G + P\,;\ K_u = \frac{P_u}{G}$	 $Q = G + P\,;\ K_u = \frac{P_u}{G}$	 $Q = G + P\,;\ K_u = \frac{P_u}{G}$
	M_{p11}	$(0{,}125 + 0{,}125\ K_u)Gl$	$(0{,}111 + 0{,}122\ K_u)Gl$	$(0{,}062 + 0{,}055\ K_u)Gl$
	M_{p12}	—	$(0{,}111 + 0{,}138\ K_u)Gl$	$(0{,}188 + 0{,}196\ K_u)Gl$
	M_{p13}	—	—	$(0{,}062 + 0{,}138\ K_u)Gl$
	M_{pa}	$-(0{,}125 + 0{,}140\ K_u)Gl$	$-(0{,}222 + 0{,}226\ K_u)Gl$	$-(0{,}312 + 0{,}337\ K_u)Gl$
	M_{pb}	$-(0{,}125 + 0{,}112\ K_u)Gl$	$-(0{,}222 + 0{,}181\ K_u)Gl$	$-(0{,}312 + 0{,}271\ K_u)Gl$
	T_a	$(0{,}500 + 0{,}528\ K_u)G$	$(1 + 1{,}045\ K_u)G$	$(1{,}500 + 1{,}566\ K_u)G$
	T_{b_1}	$-(0{,}500 + 0{,}472\ K_u)G$	$-(1 + 0{,}955\ K_u)G$	$-(1{,}500 + 1{,}434\ K_u)G$
	$r_1 = r_a = r_b$	$\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}81 + \dfrac{0{,}19}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}86 + \dfrac{0{,}14}{1 + K_u}}$
	M_{p11}	$(0{,}125 + 0{,}125\ K_u)Gl$	$(0{,}111 + 0{,}124\ K_u)Gl$	$(0{,}062 + 0{,}063\ K_u)Gl$
	M_{p12}	—	$(0{,}111 + 0{,}135\ K_u)Gl$	$(0{,}188 + 0{,}202\ K_u)Gl$
	M_{p13}	—	—	$(0{,}062 + 0{,}140\ K_u)Gl$
	M_{p21}	$(0{,}125 + 0{,}135\ K_u)Gl$	$(0{,}111 + 0{,}145\ K_u)Gl$	$(0{,}062 + 0{,}127\ K_u)Gl$
	M_{p22}	—	$(0{,}111 + 0{,}145\ K_u)Gl$	$(0{,}188 + 0{,}225\ K_u)Gl$
	M_{p23}	—	—	$(0{,}062 + 0{,}127\ K_u)Gl$
	M_{pa}	$-(0{,}125 + 0{,}135\ K_u)Gl$	$-(0{,}222 + 0{,}219\ K_u)Gl$	$-(0{,}312 + 0{,}322\ K_u)Gl$

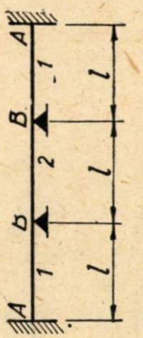
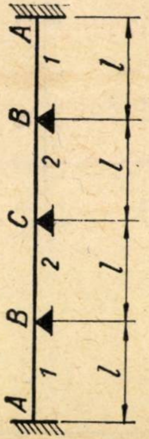
	M_{pb}	$-(0,125 + 0,115\ K_u)Gl$	$-(0,222 + 0,188\ K_u)Gl$	$-(0,312 + 0,275\ K_u)Gl$
	T_a	$(0,500 + 0,520\ K_u)G$	$(1 + 1,031\ K_u)G$	$(1,500 + 1,547\ K_u)G$
	T_{b1}	$-(0,500 + 0,480\ K_u)G$	$-(1 + 0,969\ K_u)G$	$-(1,500 + 1,453\ K_u)G$
	T_{b2}	$0,500\ (1 + K_u)G$	$(1 + K_u)G$	$1,5\ (1 + K_u)G$
	r_1*) $<$	$\dfrac{1}{0,85+\dfrac{0,15}{1+K_u}}$	$\dfrac{1}{0,78+\dfrac{0,22}{1+K_u}}$	$\dfrac{1}{0,84+\dfrac{0,16}{1+K_u}}$
La grinda cu 2 sarcini concentrate se vor schimba coeficienţii r_1 şi r_2 între ei.	r_2*) $= r_b = r_c$	$\dfrac{1}{0,81+\dfrac{0,19}{1+K_u}}$	$\dfrac{1}{0,74+\dfrac{0,26}{1+K_u}}$	$\dfrac{1}{0,77+\dfrac{0,23}{1+K_u}}$
 A 1 l B 2 l C 2 l B 1 l A	M_{p11}	$(0,125 + 0,129\ K_u)Gl$	$(0,111 + 0,132\ K_u)Gl$	$(0,062 + 0,078\ K_u)Gl$
	M_{p12}	—	$(0,111 + 0,142\ K_u)Gl$	$(0,188 + 0,213\ K_u)Gl$
	M_{p13}	—	—	$(0,062 + 0,178\ K_u)Gl$
	M_{p21}	$(0,125 + 0,133\ K_u)Gl$	$(0,111 + 0,148\ K_u)Gl$	$(0,062 + 0,125\ K_u)Gl$
	M_{p22}	—	$(0,111 + 0,143\ K_u)Gl$	$(0,188 + 0,227\ K_u)Gl$
	M_{p23}	—	—	$(0,062 + 0,149\ K_u)Gl$
	M_{pa}	$-(0,125 + 0,130\ K_u)Gl$	$-(0,222 + 0,210\ K_u)Gl$	$-(0,312 + 0,309\ K_u)Gl$
	M_{pb}	$-(0,125 + 0,112\ K_u)Gl$	$-(0,222 + 0,182\ K_u)Gl$	$-(0,312 + 0,265\ K_u)Gl$
	M_{pc}	$-(0,125 + 0,120\ K_u)Gl$	$-(0,222 + 0,193\ K_u)Gl$	$-(0,312 + 0,284\ K_u)Gl$
	T_a	$(0,500 + 0,518\ K_u)G$	$(1 + 1,028\ K_u)G$	$(1,500 + 1,544\ K_u)G$
	T_{b1}	$-(0,500 + 0,482\ K_u)G$	$-(1 + 0,972\ K_u)G$	$-(1,500 + 1,456\ K_u)G$
	T_{b2}	$(0,500 + 0,492\ K_u)G$	$(1 + 0,989\ K_u)G$	$(1,500 + 1,481\ K_u)G$
	T_{c2}	$-(0,500 + 0,508\ K_u)G$	$-(1 + 1,011\ K_u)G$	$-(1,500 + 1,519\ K_u)G$
	$r_1 <$	$\dfrac{1}{0,87+\dfrac{0,13}{1+K_u}}$	$\dfrac{1}{0,73+\dfrac{0,27}{1+K_u}}$	$\dfrac{1}{0,87+\dfrac{0,13}{1+K_u}}$
	$r_2 = r_a = r_b = r_c$	$\dfrac{1}{0,76+\dfrac{0,24}{1+K_u}}$	$\dfrac{1}{0,71+\dfrac{0,29}{1+K_u}}$	$\dfrac{1}{0,73+\dfrac{0,27}{1+K_u}}$

Tabela 1 (urmare)

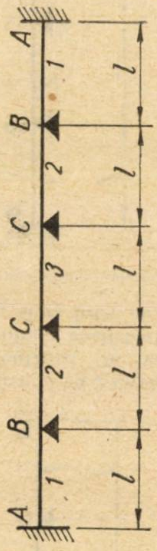
 A 1 l B 2 l C 3 l C 2 l B 1 l A	M_{p11}	$(0,125 + 0,134\ K_u)Gl$	$(0,111 + 0,141\ K_u)Gl$	$(0,062 + 0,093\ K_u)Gl$
	M_{p12}	—	$(0,111 + 0,149\ K_u)Gl$	$(0,188 + 0,228\ K_u)Gl$
	M_{p13}	—	—	$(0,063 + 0,191\ K_u)Gl$
	M_{p21}	$(0,125 + 0,137\ K_u)Gl$	$(0,111 + 0,153\ K_u)Gl$	$(0,062 + 0,128\ K_u)Gl$
	M_{p22}	—	$(0,111 + 0,147\ K_u)Gl$	$(0,188 + 0,236\ K_u)Gl$
	M_{p23}	—	—	$(0,062 + 0,160\ K_u)Gl$
	M_{p31}	$(0,125 + 0,132\ K_u)Gl$	$(0,111 + 0,140\ K_u)Gl$	$(0,062 + 0,139\ K_u)Gl$
	M_{p32}	—	$(0,111 + 0,140\ K_u)Gl$	$(0,188 + 0,224\ K_u)Gl$
	M_{p33}	—	—	$(0,062 + 0,139\ K_u)Gl$
	M_{pa}	$-(0,125 + 0,124\ K_u)Gl$	$-(0,222 + 0,202\ K_u)Gl$	$-(0,312 + 0,291\ K_u)Gl$
	M_{pb}	$-(0,125 + 0,109\ K_u)Gl$	$-(0,222 + 0,175\ K_u)Gl$	$-(0,312 + 0,253\ K_u)Gl$
	M_{pc}	$-(0,125 + 0,118\ K_u)Gl$	$-(0,222 + 0,192\ K_u)Gl$	$-(0,312 + 0,275\ K_u)Gl$
	T_a	$(0,500 + 0,515\ K_u)G$	$(1 + 1,027\ K_u)G$	$(1,500 + 1,538\ K_u)G$
	T_{b_1}	$-(0,500 + 0,485\ K_u)G$	$-(1 + 0,973\ K_u)G$	$-(1,500 + 1,462\ K_u)G$
	T_{b_2}	$(0,500 + 0,491\ K_u)G$	$(1 + 0,983\ K_u)G$	$(1,500 + 1,478\ K_u)G$
	T_{c_2}	$-(0,500 + 0,509\ K_u)G$	$-(1 + 1,017\ K_u)G$	$-(1,500 + 1,528\ K_u)G$
	T_{c_3}	$0,500\ (1 + K_u)G$	$(1 + K_u)G$	$1,500(1 + K_u)G$
	$r_1 <$	$\dfrac{1}{0,91 + \dfrac{0,09}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0,77 + \dfrac{0,23}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0,94 + \dfrac{0,06}{1 + K_u}}$
	r_2	$\dfrac{1}{0,78 + \dfrac{0,22}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0,73 + \dfrac{0,27}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0,75 + \dfrac{0,25}{1 + K_u}}$
	$r_3 = r_a = r_b = r_c$	$\dfrac{1}{0,73 + \dfrac{0.27}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0,66 + \dfrac{0.34}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0,68 + \dfrac{0,32}{1 + K_u}}$

Tabela 2

Grinda continuă, incastrată perfect la ambele capete
Sarcini repartizate

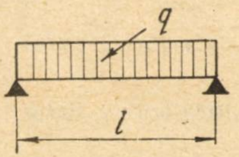
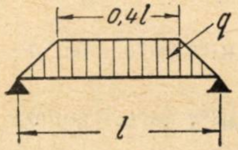
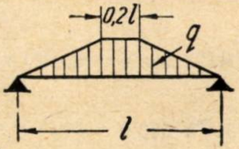
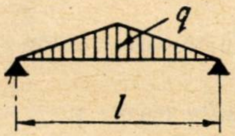
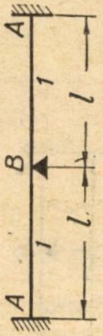
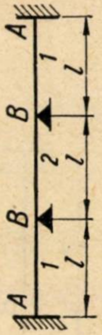
Schema grinzii	Mărimi statice	 $q = g + p$; $k_u = \frac{p_u}{g}$	 $q = g + p$ $k_u = \frac{p_u}{g}$; $W = 0{,}7\ gl$	 $q = g + p$ $k_u = \frac{p_u}{g}$; $W = 0{,}6\ gl$	 $q = g + p$ $k_u = \frac{p_u}{g}$; $W = 0{,}5\ gl$
	M_{p1}	$(0{,}042 + 0{,}045\ k_u)gl^2$	$(0{,}057 + 0{,}060\ k_u)Wl$	$(0{,}061 + 0{,}063\ k_u)Wl$	$(0{,}063 + 0{,}066\ k_u)Wl$
	M_{pa}	$-(0{,}083 + 0{,}090\ k_u)gl^2$	$-(0{,}100 + 0{,}109\ k_u)Wl$	$-(0{,}102 + 0{,}111\ k_u)Wl$	$-(0{,}104 + 0{,}112\ k_u)Wl$
	M_{pb}	$-(0{,}083 + 0{,}072\ k_u)gl^2$	$-(0{,}100 + 0{,}087\ k_u)Wl$	$-(0{,}102 + 0{,}088\ k_u)Wl$	$-(0{,}104 + 0{,}091\ k_u)Wl$
	T_a	$(0{,}500 + 0{,}518\ k_u)gl$	$(0{,}500 + 0{,}522\ k_u)W$	$(0{,}500 + 0{,}523\ k_u)W$	$(0{,}500 + 0{,}521\ k_u)W$
	T_{b1}	$-(0{,}500 + 0{,}482\ k_u)gl$	$-(0{,}500 + 0{,}478\ k_u)W$	$-(0{,}500 + 0{,}477\ k_u)W$	$-(0{,}500 + 0{,}479\ k_u)W$
	$r_1 = r_a = r_b$	$\frac{1}{0{,}87 + \frac{0{,}13}{1 + k_u}}$	$\frac{1}{0{,}87 + \frac{0{,}13}{1 + k_u}}$	$\frac{1}{0{,}86 + \frac{0{,}14}{1 + k_u}}$	$\frac{1}{0{,}86 + \frac{0{,}14}{1 + k_u}}$
	M_{p1}	$(0{,}042 + 0{,}044\ k_u)gl^2$	$(0{,}057 + 0{,}062\ k_u)Wl$	$(0{,}061 + 0{,}066\ k_u)Wl$	$(0{,}063 + 0{,}068\ k_u)Wl$
	M_{p2}	$(0{,}042 + 0{,}053\ k_u)gl^2$	$(0{,}057 + 0{,}069\ k_u)Wl$	$(0{,}061 + 0{,}073\ k_u)Wl$	$(0{,}063 + 0{,}076\ k_u)Wl$
	M_{pa}	$-(0{,}083 + 0{,}088\ k_u)gl^2$	$-(0{,}100 + 0{,}103\ k_u)Wl$	$-(0{,}102 + 0{,}105\ k_u)Wl$	$-(0{,}104 + 0{,}108\ k_u)Wl$
	M_{pb}	$-(0{,}083 + 0{,}075\ k_u)gl^2$	$-(0{,}100 + 0{,}088\ k_u)Wl$	$-(0{,}102 + 0{,}090\ k_u)Wl$	$-(0{,}104 + 0{,}091\ k_u)Wl$

Tabela 2 (urmare)

	T_a	$(0{,}500 + 0{,}513\ k_u)gl$	$(0{,}500 + 0{,}515\ k_v)W$	$(0{,}500 + 0{,}515\ k_u)W$	$(0{,}500 + 0{,}517\ k_u)W$
	T_{b_1}	$-(0{,}500 + 0{,}487\ k_u)gl$	$-(0{,}500 + 0{,}485\ k_u)W$	$-(0{,}500 + 0{,}485\ k_u)W$	$-(0{,}500 + 0{,}483\ k_u)W$
	T_{b_2}	$0{,}500(1 + k_u)gl$	$0{,}500\ (1 + k_u)W$	$0{,}500\ (1 + k_u)W$	$0{,}500\ (1 + k_u)W$
	$r_1 <$	$\dfrac{1}{0{,}79 + \dfrac{0{,}21}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}85 + \dfrac{0{,}15}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}84 + \dfrac{0{,}16}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}85 + \dfrac{0{,}15}{1 + k_u}}$
	$r_2 = r_b = r_c$	$\dfrac{1}{0{,}76 + \dfrac{0{,}24}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}76 + \dfrac{0{,}24}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}76 + \dfrac{0{,}24}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}76 + \dfrac{0{,}24}{1 + k_u}}$
	M_{p_1}	$(0{,}042 + 0{,}050\ k_u)gl^2$	$(0{,}057 + 0{,}062\ k_u)Wl$	$(0{,}061 + 0{,}067\ k_u)Wl$	$(0{,}063 + 0{,}069\ k_u)Wl$
	M_{p_2}	$(0{,}042 + 0{,}053\ k_u)gl^2$	$(0{,}057 + 0{,}067\ k_u)Wl$	$(0{,}061 + 0{,}071\ k_u)Wl$	$(0{,}063 + 0{,}073\ k_u)Wl$
	M_{pa}	$-(0{,}083 + 0{,}081\ k_u)gl^2$	$-(0{,}100 + 0{,}102\ k_u)Wl$	$-(0{,}102 + 0{,}103\ k_u)Wl$	$-(0{,}104 + 0{,}105\ k_u)Wl$
	M_{pb}	$-(0{,}083 + 0{,}070\ k_u)gl^2$	$-(0{,}100 + 0{,}088\ k_u)Wl$	$-(0{,}102 + 0{,}090\ k_u)Wl$	$-(0{,}104 + 0{,}091\ k_u)Wl$
	M_{pc}	$-(0{,}083 + 0{,}075\ k_u)gl^2$	$-(0{,}100 + 0{,}094\ k_u)Wl$	$-(0{,}102 + 0{,}096\ k_u)Wl$	$-(0{,}104 + 0{,}097\ k_u)Wl$
	T_a	$(0{,}500 + 0{,}511\ k_u)gl$	$(0{,}500 + 0{,}514\ k_u)W$	$(0{,}500 + 0{,}513\ k_u)W$	$(0{,}500 + 0{,}514\ k_u)W$
	T_{b_1}	$-(0{,}500 + 0{,}489\ k_u)gl$	$-(0{,}500 + 0{,}486\ k_u)W$	$-(0{,}500 + 0{,}487\ k_u)W$	$-(0{,}500 + 0{,}486\ k_u)W$

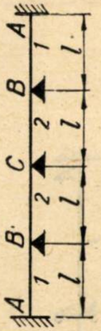
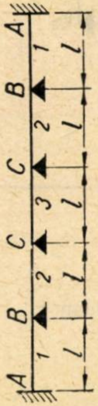
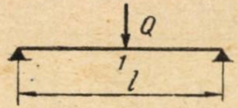
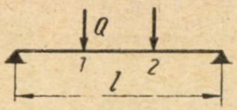
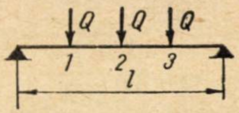
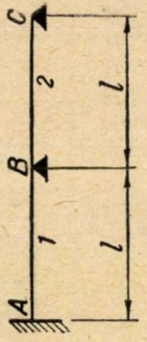
	T_{b_2}	$(0,500 + 0,495\ k_u)gl$	$(0,500 + 0,494\ k_u)W$	$(0,500 + 0,494\ k_u)W$	$(0,500 + 0,494\ k_u)W$
	T_{c_2}	$-(0,500 + 0,505\ k_u)gl$	$-(0,500 + 0,506\ k_u)W$	$-(0,500 + 0,506\ k_u)W$	$-(0,500 + 0,506\ k_u)W$
	$r_1 <$	$\frac{1}{0,87+\frac{0,13}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,84+\frac{0,16}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,85+\frac{0,15}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,85+\frac{0,15}{1+k_u}}$
	$r_2 = r_a = r_b = r_c$	$\frac{1}{0,71+\frac{0,29}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,74+\frac{0,26}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,74+\frac{0,26}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,74+\frac{0,26}{1+k_u}}$
	M_{p_1}	$(0,042 + 0,054\ k_u)gl^2$	$(0,057 + 0,070\ k_u)Wl$	$(0,061 + 0,074\ k_u)Wl$	$(0,063 + 0,076\ k_u)Wl$
	M_{p_2}	$(0,042 + 0,056\ k_u)gl^2$	$(0,057 + 0,073\ k_u)Wl$	$(0,061 + 0,076\ k_u)Wl$	$(0,063 + 0,073\ k_u)Wl$
	M_{p_3}	$(0,042 + 0,053\ k_u)gl^2$	$(0,057 + 0,069\ k_u)Wl$	$(0,061 + 0,073\ k_u)Wl$	$(0,063 + 0,075\ k_u)Wl$
	M_{pa}	$-(0,083 + 0,076\ k_u)gl^2$	$-(0,100 + 0,093\ k_u)Wl$	$-(0,102 + 0,095\ k_u)Wl$	$-(0,104 + 0,098\ k_u)Wl$
	M_{pb}	$-(0,083 + 0,066\ k_u)gl^2$	$-(0,100 + 0,081\ k_u)Wl$	$-(0,102 + 0,083\ k_u)Wl$	$-(0,104 + 0,085\ k_u)Wl$
	M_{pc}	$-(0,083 + 0,072\ k_u)gl^2$	$-(0,100 + 0,088\ k_u)Wl$	$-(0,102 + 0,091\ k_u)Wl$	$-(0,104 + 0,092\ k_u)Wl$
	T_a	$(0,500 + 0,510\ k_u)gl$	$(0,500 + 0,512\ k_u)W$	$(0,500 + 0,512\ k_u)W$	$(0,500 + 0,513\ k_u)W$
	T_{b_1}	$-(0,500 + 0,490\ k_u)gl$	$-(0,500 + 0,488\ k_u)W$	$-(0,500 + 0,488\ k_u)W$	$-(0,500 + 0,487\ k_u)W$
	T_{b_2}	$(0,500 + 0,496\ k_u)gl$	$(0,500 + 0,493\ k_u)W$	$(0,500 + 0,492\ k_u)W$	$(0,500 + 0,493\ k_u)W$
	T_{c_2}	$-(0,500 + 0,506\ k_u)gl$	$-(0,500 + 0,507\ k_u)W$	$-(0,500 + 0,508\ k_u)W$	$-(0,500 + 0,507\ k_u)W$
	T_{c_3}	$(0,500(1 + k_u)gl$	$0,500(1 + k_u)W$	$0,500(1 + k_u)W$	$0,500(1 + k_u)W$
	$r_1 <$	$\frac{1}{0,95+\frac{0,05}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,94+\frac{0,06}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,95+\frac{0,05}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,93+\frac{0,07}{1+k_u}}$
	r_2	$\frac{1}{0,73+\frac{0,27}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,75+\frac{0,25}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,74+\frac{0,26}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,75+\frac{0,25}{1+k_u}}$
	$r_3 = r_a = r_b = r_c$	$\frac{1}{0,66+\frac{0,34}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,67+\frac{0,33}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,68+\frac{0,32}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,68+\frac{0,32}{1+k_u}}$

Tabela 3

Grinda continuă incastrată perfect la una din extremități și simplu rezemată la cealaltă
Sarcini concentrate

Schema grinzii	Mărimi statice	 $Q = G + P$; $K_u = \frac{P_u}{G}$	 $Q = G + P$; $K_u = \frac{P_u}{G}$	 $Q = G + P$; $K_u = \frac{P_u}{G}$
	M_{p11}	$(0{,}116 + 0{,}117\ K_u)Gl$	$(0{,}110 + 0{,}082\ K_u)Gl$	$(0{,}074 + 0{,}058\ K_u)Gl$
	M_{p12}	—	$(0{,}080 + 0{,}126\ K_u)Gl$	$(0{,}165 + 0{,}183\ K_u)Gl$
	M_{p13}	—	—	$(0{,}008 + 0{,}139\ K_u)Gl$
	M_{p21}	$(0{,}170 + 0{,}184\ K_u)Gl$	$(0{,}143 + 0{,}203\ K_u)Gl$	$(0{,}075 + 0{,}182\ K_u)Gl$
	M_{p22}	—	$(0{,}238 + 0{,}264\ K_u)Gl$	$(0{,}299 + 0{,}342\ K_u)Gl$
	M_{p23}	—	—	$(0{,}275 + 0{,}296\ K_u)Gl$
	M_{pa}	$-(0{,}108 + 0{,}132\ K_u)Gl$	$-(0{,}192 + 0{,}208\ K_u)Gl$	$-(0{,}270 + 0{,}317\ K_u)Gl$
	M_{pb}	$-(0{,}161 + 0{,}132\ K_u)Gl$	$-(0{,}286 + 0{,}208\ K_u)Gl$	$-(0{,}402 + 0{,}317\ K_u)Gl$
	T_a	$(0{,}447 + 0{,}500\ K_u)G$	$(0{,}906 + K_u)G$	$(1{,}368 + 1{,}500\ K_u)G$
	T_{b1}	$-(0{,}553 + 0{,}500\ K_u)G$	$-(1{,}094 + K_u)G$	$-(1{,}632 + 1{,}500\ K_u)G$
	T_{b2}	$(0{,}661 + 0{,}632\ K_u)G$	$(1{,}286 + 1{,}208\ K_u)G$	$(1{,}902 + 1{,}817\ K_u)G$
	T_{c2}	$-(0{,}339 + 0{,}368\ K_u)G$	$-(0{,}714 + 0{,}792\ K_u)G$	$-(1{,}098 + 1{,}183\ K_u)G$

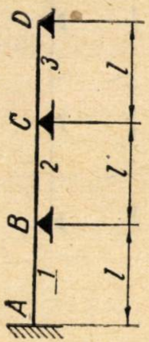
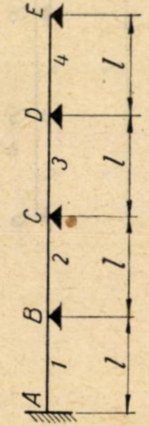
*) La grinda cu 2 sarcini concentrate se vor schimba coeficienţii r_1 şi r_2 între ei	r_1*) $= r_a = r_b$	$\frac{1}{0,82+\frac{0,18}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,73+\frac{0,27}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,79+\frac{0,21}{1+K_u}}$
	r_2*)	$\frac{1}{0,94+\frac{0,06}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,98+\frac{0,02}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,93+\frac{0,07}{1+K_u}}$
	M_{p11}	$(0,127 + 0,130\ K_u)Gl$	$(0,111 + 0,135\ K_u)Gl$	$(0,060 + 0,080\ K_u)Gl$
	M_{p12}	—	$(0,120 + 0,147\ K_u)Gl$	$(0,193 + 0,217\ K_u)Gl$
	M_{p13}	—	—	$(0,078 + 0,187\ K_u)Gl$
	M_{p21}	$(0,113 + 0,130\ K_u)Gl$	$(0,103 + 0,144\ K_u)Gl$	$(0,059 + 0,172\ K_u)Gl$
	M_{p22}	—	$(0,077 + 0,134\ K_u)Gl$	$(0,158 + 0,217\ K_u)Gl$
	M_{p23}	—	—	$(0,003 + 0,132\ K_u)Gl$
	M_{p31}	$(0,171 + 0,184\ K_u)Gl$	$(0,145 + 0,213\ K_u)Gl$	$(0,075 + 0,187\ K_u)Gl$
	M_{p32}	—	$(0,239 + 0,260\ K_u)Gl$	$(0,302 + 0,346\ K_u)Gl$
	M_{p33}	—	—	$(0,275 + 0,298\ K_u)Gl$
	M_{pa}	$-(0,131 + 0,132\ K_u)Gl$	$-(0,232 + 0,211\ K_u)Gl$	$-(0,326 + 0,308\ K_u)Gl$
	M_{pb}	$-(0,116 + 0,109\ K_u)Gl$	$-(0,205 + 0,774\ K_u)Gl$	$-(0,289 + 0,258\ K_u)Gl$
	M_{pc}	$-(0,159 + 0,132\ K_u)Gl$	$-(0,283 + 0,219\ K_u)Gl$	$-(0,398 + 0,308\ K_u)Gl$
	T_a	$(0,515 + 0,523\ K_u)G$	$(1,027 + 1,037\ K_u)G$	$(1,537 + 1,550\ K_u)G$
	T_{b1}	$-(0,485 + 0,477\ K_u)G$	$-(0,973 + 0,963\ K_u)G$	$-(1,463 + 1,450\ K_u)G$
	T_{b2}	$(0,457 + 0,477\ K_u)G$	$(0,922 + 0,955\ K_u)G$	$(1,391 + 1,450\ K_u)G$
	T_{c2}	$-(0,543 + 0,523\ K_u)G$	$-(1,078 + 1,045\ K_u)G$	$-(1,609 + 1,550\ K_u)G$
	T_{c3}	$(0,659 + 0,632\ K_u)G$	$(1,283 + 1,219\ K_u)G$	$(1,898 + 1,808\ K_u)G$
	T_{d3}	$-(0,341 + 0,368\ K_u)G$	$-(0,717 + 0,781\ K_u)G$	$-(1,102 + 1,192\ K_u)G$
	$r_1 <$	$\frac{1}{0,87+\frac{0,13}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,75+\frac{0,25}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,88+\frac{0,12}{1+K_u}}$
	$r_2 = r_a =$ $= r_b = r_c$	$\frac{1}{0,76+\frac{0,24}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,68+\frac{0,32}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,72+\frac{0,28}{1+K_u}}$
	r_3	$\frac{1}{0,89+\frac{0,11}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,92+\frac{0,08}{1+K_u}}$	$\frac{1}{0,88+\frac{0,12}{1+K_u}}$

Tabela 3 (urmare)



M_{p11}	$(0{,}125 + 0{,}134\ K_u)Gl$	$(0{,}111 + 0{,}139\ K_u)Gl$	$(0{,}064 + 0{,}098\ K_u)Gl$
M_{p12}	—	$(0{,}108 + 0{,}147\ K_u)Gl$	$(0{,}186 + 0{,}229\ K_u)Gl$
M_{p13}	—	—	$(0{,}058 + 0{,}182\ K_u)Gl$
M_{p21}	$(0{,}129 + 0{,}138\ K_u)Gl$	$(0{,}113 + 0{,}150\ K_u)Gl$	$(0{,}061 + 0{,}127\ K_u)Gl$
M_{p22}	—	$(0{,}120 + 0{,}148\ K_u)Gl$	$(0{,}195 + 0{,}239\ K_u)Gl$
M_{p23}	—	—	$(0{,}073 + 0{,}167\ K_u)Gl$
M_{p31}	$(0{,}113 + 0{,}129\ K_u)Gl$	$(0{,}111 + 0{,}139\ K_u)Gl$	$(0{,}054 + 0{,}136\ K_u)Gl$
M_{p32}	—	$(0{,}103 + 0{,}134\ K_u)Gl$	$(0{,}157 + 0{,}217\ K_u)Gl$
M_{p33}	—	—	$(0{,}004 + 0{,}126\ K_u)Gl$
M_{p41}	$(0{,}170 + 0{,}186\ K_u)Gl$	$(0{,}145 + 0{,}219\ K_u)Gl$	$(0{,}078 + 0{,}197\ K_u)Gl$
M_{p42}	—	$(0{,}239 + 0{,}263\ K_u)Gl$	$(0{,}302 + 0{,}350\ K_u)Gl$
M_{p43}	—	—	$(0{,}276 + 0{,}300\ K_u)Gl$
M_{pa}	$-(0{,}123 + 0{,}122\ K_u)Gl$	$-(0{,}219 + 0{,}200\ K_u)Gl$	$-(0{,}307 + 0{,}286\ K_u)Gl$
M_{pb}	$-(0{,}128 + 0{,}110\ K_u)Gl$	$-(0{,}227 + 0{,}179\ K_u)Gl$	$-(0{,}319 + 0{,}256\ K_u)Gl$
M_{pc}	$-(0{,}115 + 0{,}115\ K_u)Gl$	$-(0{,}205 + 0{,}188\ K_u)Gl$	$-(0{,}298 + 0{,}267\ K_u)Gl$
M_{pd}	$-(0{,}159 + 0{,}129\ K_u)Gl$	$-(0{,}283 + 0{,}211\ K_u)Gl$	$-(0{,}397 + 0{,}301\ K_u)Gl$
T_a	$(0{,}495 + 0{,}512\ K_u)G$	$(0{,}992 + 1{,}021\ K_u)G$	$(1{,}488 + 1{,}530\ K_u)G$
T_{b1}	$-(0{,}505 + 0{,}488\ K_u)G$	$-(1{,}008 + 0{,}979\ K_u)G$	$-(1{,}512 + 1{,}470\ K_u)G$
T_{b2}	$(0{,}513 + 0{,}495\ K_u)G$	$(1{,}022 + 0{,}991\ K_u)G$	$(1{,}521 + 1{,}489\ K_u)G$
T_{c2}	$-(0{,}487 + 0{,}505\ K_u)G$	$-(0{,}978 + 1{,}009\ K_u)G$	$-(1{,}479 + 1{,}511\ K_u)G$
T_{c3}	$(0{,}456 + 0{,}486\ K_u)G$	$(0{,}922 + 0{,}977\ K_u)G$	$(1{,}401 + 1{,}461\ K_u)G$
T_{d3}	$-(0{,}544 + 0{,}514\ K_u)G$	$-(1{,}078 + 1{,}023\ K_u)G$	$-(1{,}599 + 1{,}539\ K_u)G$
T_{d4}	$(0{,}659 + 0{,}629\ K_u)G$	$(1{,}283 + 1{,}211\ K_u)G$	$(1{,}897 + 1{,}801\ K_u)G$
T_e	$-(0{,}341 + 0{,}371\ K_u)G$	$-(0{,}717 + 0{,}789\ K_u)G$	$-(1{,}103 + 1{,}199\ K_u)G$
$r_1 <$	$\dfrac{1}{0{,}90 + \dfrac{0{,}10}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}77 + \dfrac{0{,}23}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + K_u}}$
r_2	$\dfrac{1}{0{,}77 + \dfrac{0{,}23}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}68 + \dfrac{0{,}32}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}74 + \dfrac{0{,}26}{1 + K_u}}$
$r_3 = r_a = r_b = = r_c = r_d$	$\dfrac{1}{0{,}72 + \dfrac{0{,}28}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}66 + \dfrac{0{,}34}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}67 + \dfrac{0{,}33}{1 + K_u}}$
$r_4 <$	$\dfrac{1}{0{,}89 + \dfrac{0{,}11}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}92 + \dfrac{0{,}08}{1 + K_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}88 + \dfrac{0{,}12}{1 + K_u}}$

Tabela 4

Grinda continuă încastrată perfect la o extremitate și simplu rezemată la cealaltă. Sarcini repartizate

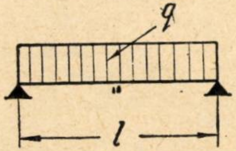
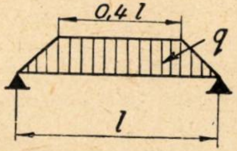
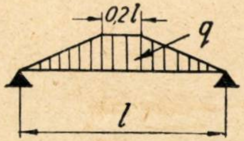
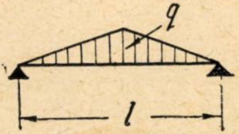
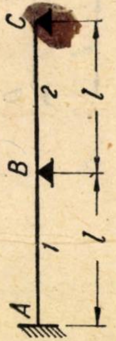
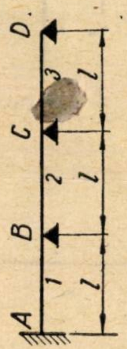
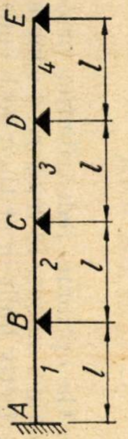
Schema grinzii	Mărimi statice	 $q = g + p;\ k_u = \frac{p_u}{g}$	 $q = g + p$ $k_u = \frac{p_u}{g};\ W = 0,7\ gl$	 $q = g + p$ $k_u = \frac{p_u}{g};\ W = 0,6\ gl$	 $q = g + p$ $k_u = \frac{p_u}{g};\ W = 0,5\ gl$
	M_{p1}	$(0,035 + 0,042\ k_u)gl^2$	$(0,049 + 0,055\ k_u)Wl$	$(0,053 + 0,059\ k_u)Wl$	$(0,055 + 0,062\ k_u)Wl$
	M_{p2}	$(0,072 + 0,084\ k_u)gl^2$	$(0,092 + 0,106\ k_u)Wl$	$(0,097 + 0,111\ k_u)Wl$	$(0,100 + 0,114\ k_u)Wl$
	M_{pa}	$-(0,072 + 0,083\ k_u)gl^2$	$-(0,087 + 0,103\ k_u)Wl$	$-(0,089 + 0,104\ k_u)Wl$	$-(0,090 + 0,106\ k_u)Wl$
	M_{pb}	$-(0,107 + 0,083\ k_u)gl^2$	$-(0,130 + 0,103\ k_u)Wl$	$-(0,132 + 0,104\ k_u)Wl$	$-(0,134 + 0,106\ k_u)Wl$
	T_a	$(0,465 + 0,500\ k_u)gl$	$(0,457 + 0,500\ k_u)W$	$(0,457 + 0,500\ k_u)W$	$(0,456 + 0,500\ k_u)W$
	T_{b1}	$-(0,535 + 0,500\ k_u)gl$	$-(0,543 + 0,500\ k_v)W$	$-(0,543 + 0,500\ k_u)W$	$-(0,544 + 0,500\ k_u)W$
	T_{b2}	$(0,607 + 0,583\ k_u)gl$	$(0,630 + 0,603\ k_u)W$	$(0,632 + 0,604\ k_u)W$	$(0,634 + 0,606\ k_u)W$
	T_{c2}	$-(0,393 + 0,417\ k_u)gl$	$-(0,370 + 0,397\ k_u)W$	$-(0,368 + 0,396\ k_u)W$	$-(0,366 + 0,394\ k_u)W$
	$r_1 = r_a = r_b$	$\frac{1}{0,77+\frac{0,23}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,80+\frac{0,20}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,78+\frac{0,22}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,79+\frac{0,21}{1+k_u}}$
	r_2	$\frac{1}{0,94+\frac{0,06}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,93+\frac{0,07}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,93+\frac{0,07}{1+k_u}}$	$\frac{1}{0,94+\frac{0,06}{1+k_u}}$

Tabela 4 (urmare)



M_{p_1}	$(0{,}043 + 0{,}050\ k_u)gl^2$	$(0{,}058 + 0{,}067\ k_u)Wl$	$(0{,}062 + 0{,}070\ k_u)Wl$	$(0{,}065 + 0{,}073\ k_u)Wl$
M_{p_2}	$(0{,}034 + 0{,}051\ k_u)gl^2$	$(0{,}046 + 0{,}066\ k_u)Wl$	$(0{,}051 + 0{,}070\ k_u)Wl$	$(0{,}053 + 0{,}072\ k_u)Wl$
M_{p_3}	$(0{,}072 + 0{,}084\ k_u)gl^2$	$(0{,}093 + 0{,}108\ k_u)Wl$	$(0{,}098 + 0{,}112\ k_u)Wl$	$(0{,}101 + 0{,}116\ k_u)Wl$
M_{pa}	$-(0{,}087 + 0{,}082\ k_u)gl^2$	$-(0{,}105 + 0{,}098\ k_u)Wl$	$-(0{,}107 + 0{,}102\ k_u)Wl$	$-(0{,}109 + 0{,}103\ k_u)Wl$
M_{pb}	$-(0{,}077 + 0{,}068\ k_u)gl^2$	$-(0{,}093 + 0{,}083\ k_u)Wl$	$-(0{,}095 + 0{,}084\ k_u)Wl$	$-(0{,}096 + 0{,}086\ k_u)Wl$
M_{pc}	$-(0{,}106 + 0{,}082\ k_u)gl^2$	$-(0{,}128 + 0{,}098\ k_u)Wl$	$-(0{,}131 + 0{,}102\ k_u)Wl$	$-(0{,}133 + 0{,}103\ k_u)Wl$
T_a	$(0{,}510 + 0{,}514\ k_u)gl$	$(0{,}512 + 0{,}515\ k_u)W$	$(0{,}512 + 0{,}518\ k_u)W$	$(0{,}513 + 0{,}517\ k_u)W$
T_{b_1}	$-(0{,}490 + 0{,}486\ k_u)gl$	$-(0{,}488 + 0{,}485\ k_u)W$	$-(0{,}488 + 0{,}482\ k_u)W$	$-(0{,}487 + 0{,}483\ k_u)W$
T_{b_2}	$(0{,}471 + 0{,}486\ k_u)gl$	$(0{,}465 + 0{,}485\ k_u)W$	$(0{,}464 + 0{,}482\ k_u)W$	$(0{,}463 + 0{,}483\ k_u)W$
T_{c_2}	$-(0{,}529 + 0{,}514\ k_u)gl$	$-(0{,}535 + 0{,}515\ k_u)W$	$-(0{,}536 + 0{,}518\ k_u)W$	$-(0{,}537 + 0{,}517\ k_u)W$
T_{c_3}	$(0{,}606 + 0{,}582\ k_u)gl$	$(0{,}628 + 0{,}598\ k_u)W$	$(0{,}631 + 0{,}602\ k_u)W$	$(0{,}633 + 0{,}603\ k_u)W$
T_{d_3}	$-(0{,}394 + 0{,}418\ k_u)gl$	$-(0{,}372 + 0{,}402\ k_u)W$	$-(0{,}369 + 0{,}398\ k_u)W$	$-(0{,}367 + 0{,}397\ k_u)W$
$r_1 <$	$\dfrac{1}{0{,}86 + \dfrac{0{,}14}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}88 + \dfrac{0{,}12}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}87 + \dfrac{0{,}13}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}88 + \dfrac{0{,}12}{1 + k_u}}$
$r_2 = r_a = = r_b = r_c$	$\dfrac{1}{0{,}71 + \dfrac{0{,}29}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}71 + \dfrac{0{,}29}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}71 + \dfrac{0{,}29}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}71 + \dfrac{0{,}29}{1 + k_u}}$
$r_3 <$	$\dfrac{1}{0{,}87 + \dfrac{0{,}13}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}97 + \dfrac{0{,}03}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}87 + \dfrac{0{,}13}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0{,}88 + \dfrac{0{,}12}{1 + k_u}}$



M_{p1}	$(0,041 + 0,054\ k_u)gl^2$	$(0,056 + 0,071\ k_u)Wl$	$(0,060 + 0,075\ k_u)Wl$	$(0,063 + 0,077\ k_u)Wl$
M_{p2}	$(0,044 + 0,057\ k_u)gl^2$	$(0,059 + 0,074\ k_u)Wl$	$(0,063 + 0,078\ k_u)Wl$	$(0,066 + 0,080\ k_u)Wl$
M_{p3}	$(0,034 + 0,051\ k_u)gl^2$	$(0,046 + 0,066\ k_u)Wl$	$(0,050 + 0,070\ k_u)Wl$	$(0,053 + 0,073\ k_u)Wl$
M_{p4}	$(0,072 + 0,086\ k_u)gl^2$	$(0,093 + 0,109\ k_u)Wl$	$(0,098 + 0,114\ k_u)Wl$	$(0,101 + 0,117\ k_u)Wl$
M_{pa}	$-(0,082 + 0,075\ k_u)gl^2$	$-(0,099 + 0,092\ k_u)Wl$	$-(0,101 + 0,093\ k_u)Wl$	$-(0,103 + 0,095\ k_u)Wl$
M_{pb}	$-(0,085 + 0,067\ k_u)gl^2$	$-(0,103 + 0,081\ k_u)Wl$	$-(0,105 + 0,083\ k_u)Wl$	$-(0,106 + 0,085\ k_u)Wl$
M_{pc}	$-(0,077 + 0,070\ k_u)gl^2$	$-(0,093 + 0,086\ k_u)Wl$	$-(0,095 + 0,088\ k_u)Wl$	$-(0,096 + 0,090\ k_u)Wl$
M_{pd}	$-(0,106 + 0,079\ k_u)gl^2$	$(0,128 + 0,096\ k_u)Wl$	$-(0,131 + 0,099\ k_u)Wl$	$-(0,133 + 0,101\ k_u)Wl$
T_a	$(0,497 + 0,508\ k_u)gl$	$(0,496 + 0,511\ k_u)W$	$(0,496 + 0,510\ k_u)W$	$(0,497 + 0,510\ k_u)W$
T_{b1}	$-(0,503 + 0,492\ k_u)gl$	$-(0,504 + 0,489\ k_u)W$	$-(0,504 + 0,490\ k_u)W$	$-(0,503 + 0,490\ k_u)W$
T_{b2}	$(0,508 + 0,497\ k_u)gl$	$(0,510 + 0,495\ k_u)W$	$(0,510 + 0,495\ k_u)W$	$(0,510 + 0,495\ k_u)W$
T_{c2}	$-(0,492 + 0,503\ k_u)gl$	$-(0,490 + 0,505\ k_u)W$	$-(0,490 + 0,505\ k_u)W$	$-(0,490 + 0,505\ k_u)W$
T_{c3}	$(0,471 + 0,491\ k_u)gl$	$(0,465 + 0,490\ k_u)W$	$(0,464 + 0,490\ k_u)W$	$(0,463 + 0,489\ k_u)W$
T_{d3}	$-(0,529 + 0,509\ k_u)gl$	$-(0,535 + 0,510\ k_u)W$	$-(0,536 + 0,510\ k_u)W$	$-(0,537 + 0,511\ k_u)W$
T_{d4}	$(0,606 + 0,579\ k_u)gl$	$(0,628 + 0,596\ k_u)W$	$(0,631 + 0,599\ k_u)W$	$(0,633 + 0,601\ k_u)W$
T_e	$-(0,394 + 0,421\ k_u)gl$	$-(0,372 + 0,404\ k_u)W$	$-(0,369 + 0,401\ k_u)W$	$-(0,367 + 0,399\ k_u)W$
$r_1 <$	$\dfrac{1}{0,94 + \dfrac{0,06}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,96 + \dfrac{0,04}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,95 + \dfrac{0,05}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,94 + \dfrac{0,06}{1 + k_u}}$
r_2	$\dfrac{1}{0,74 + \dfrac{0,26}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,75 + \dfrac{0,25}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,76 + \dfrac{0,24}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,74 + \dfrac{0,26}{1 + k_u}}$
$r_3 = r_a = r_b = r_c = r_d$	$\dfrac{1}{0,66 + \dfrac{0,34}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,67 + \dfrac{0,33}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,67 + \dfrac{0,33}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,67 + \dfrac{0,33}{1 + k_u}}$
$r_4 <$	$\dfrac{1}{0,88 + \dfrac{0,12}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,88 + \dfrac{0,12}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,88 + \dfrac{0,12}{1 + k_u}}$	$\dfrac{1}{0,89 + \dfrac{0,11}{1 + k_u}}$

CONCLUZII

1. În lucrare se stabilesc, pe baza principiului redistribuției optime a eforturilor, valorile momentelor de plastificare în grinzile continue de beton armat cu deschideri egale, încastrate perfect la ambele extremități, respectiv încastrate perfect la una din extremități și simplu rezemate la cealaltă, pentru diferite tipuri de scheme de încărcare.

2. Pe baza rezultatelor obținute în această lucrare, precum și într-un studiu anterior [2] referitor la valorile momentelor de plastificare în grinzile continue de beton armat cu deschideri egale, simplu rezemate la extremități, se prezintă un procedeu aproximativ de determinare a valorilor momentelor de plastificare în grinzile continue de beton armat încastrate parțial la extremități.

3. Procedeul aproximativ propus are avantajul stabilirii imediate a momentelor de plastificare pentru grinzi continue cu diferite grade de încastrare a extremităților, prin folosirea exclusivă a celor două cazuri limită de rezemare a extremităților, ale căror soluții sînt date în tabele.

Primită la redacție la 7 septembrie 1961.

ПЛАСТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛКАХ, ЗАДЕЛАННЫХ ПО КОНЦАМ

РЕЗЮМЕ

В работе устанавливаются, на основании принципа оптимального перераспределения усилий, значения пластических моментов в железобетонных неразрезных балках с равными пролетами с полной заделкой обоих концов, а также с полной заделкой на одном конце и свободно опирающихся на другом, при различных типах схем нагружения.

Также дается приближенный способ определения пластических моментов в железобетонных неразрезных балках с равными пролетами, упруго заделанных по концам.

PLASTIC MOMENTS IN REINFORCED CONCRETE CONTINUOUS BEAMS BUILT-IN AT THEIR ENDS

ABSTRACT

This paper uses the optimum redistribution principle for establishing the values of the plastic moments in reinforced concrete continuous beams with equal spans, perfectly built-in at their both ends or perfectly built-in

at one end and simply supported at the other end, for various types of loading schemes.

An approximate procedure for determining the plastic moments in reinforced concrete continuous beams with equal spans partially built-in at their ends is also presented.

BIBLIOGRAFIE

1. V. PETCU, *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic,* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XII,** *5* (1961).
2. — *Calculul grinzilor continue de beton armat în domeniul plastic,* Studii şi cercetări de mecanică aplicată **XII**, *6* (1961).
3. * * * *Справочник проектировщика* (*Расчетного — теоретический*). Гос. изд. лит. по строит. арх. и строит. материалам, Москва, 1960.

UNELE CONSIDERAȚII ASUPRA CALCULULUI LAGĂRELOR CU AER ALIMENTATE SUB PRESIUNE PRINTR-UN NUMĂR MARE DE ORIFICII SAU PRIN SUPRAFEȚE POROASE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Lagărele alimentate sub presiune (hidrostatice) au, în ultima vreme, un cîmp din ce în ce mai mare de aplicații în tehnică. Interesul pe care îl prezintă acest tip de lagăre se datorește faptului că permite asigurarea unui regim de lubrificație cu frecări foarte reduse și uzuri practic neglijabile, chiar la viteze foarte mici, înlăturînd prin aceasta una din principalele servituți ale lubrificației hidrodinamice. Pentru motive ușor de imaginat, din categoria lagărelor funcționînd după acest principiu, cele lubrificate cu aer sau alte gaze prezintă un deosebit interes.

Necesitatea asigurării unei capacități portante cît mai mari a creat, pentru unele situații, tendința de a amenaja în lagăr, în vecinătatea orificiilor de alimentare, un gen de buzunare care au drept efect modificarea distribuției presiunilor în sensul măririi rezultantei presiunilor. Pentru lagărele cu aer însă, această soluție constructivă este adesea însoțită de unele fenomene de vibrații și instabilitate. De aceea, în scopul cercetării acestor fenomene cît și pentru reducerea la minimum a debitului de alimentare se preferă suprimarea buzunarelor de alimentare și, mai mult, reducerea la minimum a diametrului orificiilor de alimentare (de exemplu pentru lagărele circulare). Aceste efecte sînt însă însoțite de o reducere a capacității portante, respectiv de micșorarea grosimii h a stratului de lubrifiant dintre cele două suprafețe în contact. Pentru a compensa efectele negative menționate, este atunci necesară mărirea numărului orificiilor de alimentare. S-a propus astfel construirea unor lagăre a căror suprafață este pur și simplu ciuruită prin existența unui foarte mare număr de orificii de alimentare (fig. 1 [1]).

Mergînd mai departe pe această linie, apare desigur ca logică și naturală ideea de a înlocui orificiile de alimentare (a căror realizare pune probleme tehnice delicate) cu un material poros, care în fond constituie o suprafață ce conține un foarte mare număr de orificii de dimensiuni foarte reduse. Asemenea lagăre au fost folosite cu succes în construirea unor aparate și mașini, de către F. Sterry, A. G. Montgomery, C. H. Robinson [2] [3] [4], S. A. Scheinberg și V. G. Schuster [5] etc.

Utilizarea materialelor poroase este destul de răspîndită astăzi pentru construirea lagărelor lubrificate cu uleiuri. Pentru acestea au fost elaborate unele metode de calcul [6], [7] o parte din rezultatele obținute fiind valabile și pentru cazul lubrificației cu gaze. Astfel existența unei suprafețe poroase are drept efect apariția unor viteze normale pe suprafața respectivă, viteze datorite debitului de gaz care se scurge prin aceasta. Avînd în vedere dimensiunile extrem de reduse ale interstițiilor prin care se scurge gazul prin mediul poros, numerele Reynolds și Mach locale sînt reduse astfel încît în interiorul mediului poros se poate admite că mișcarea gazului are un caracter laminar și incompresibil. În consecință, este valabilă legea lui d'Arcy

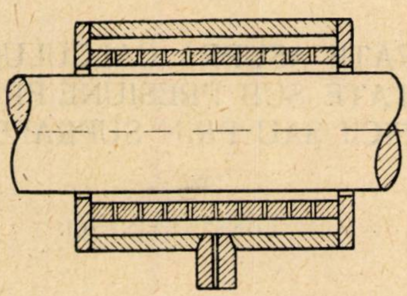


Fig. 1

$$v_\delta = \frac{dQ}{dS} = -\frac{k_p}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y_\delta}, \tag{1}$$

unde cu v_δ s-a notat viteza pe direcția y_δ, cu μ viscozitatea, cu p presiunea și cu k_p coeficientul de permeabilitate; de asemenea dQ reprezintă debitul care se scurge prin elementul de suprafață dS, normal pe y_δ. Pentru valori de porozități cuprinse între 20 și 45%, coeficientul de permeabilitate k_p are valori cuprinse între $k_p \sim 0{,}5.10^{-4} - 10^{-12}$ m^2. Mai general, considerînd mediul poros raportat la un sistem de coordonate x_δ, y_δ, z_δ avem succesiv

$$\begin{aligned} \overline{V}_\delta &= -\frac{k_p}{\mu}\,\text{grad}\,p, \\ dQ &= -\frac{k_p}{\mu}\,\overline{n}\,\text{grad}\,p\cdot dS, \\ d\mathscr{M} &= -\frac{k_p}{\mu}\,\rho\overline{n}\,\text{grad}\,p\cdot dS = -\frac{\varkappa_p}{\varkappa_p+1}\,\frac{k_p\,\rho_a}{\overline{\mu}\,p_a^{\frac{1}{\varkappa_p}}}\,\overline{n}\cdot\text{grad}\,\eta_p\cdot dS, \end{aligned} \tag{2}$$

unde

$$\eta_p = p^{\frac{1}{\varkappa_p}+1}, \tag{3}$$

iar $\overline{n}$ este versorul normal pe elementul dS, $\mathcal{M}$ este debitul masic, iar $\varkappa_p$ exponentul politropic al evoluției gazului prin mediul poros, a cărui valoare este evident foarte apropiată de unitate, evoluția fiind cvasiizotermă. În sfîrșit, din ecuația de continuitate se deduce

$$\Delta \eta_p = \frac{\partial^2 \eta_p}{\partial x_\delta^2} + \frac{\partial^2 \eta_p}{\partial y_\delta^2} + \frac{\partial^2 \eta_p}{\partial z_\delta^2} = 0, \tag{4}$$

deci funcția $\eta_p \cong p^2$ este armonică.

În același mod pot fi tratate și lagărele de tipul celui schițat în figura 1, la care alimentarea se efectuează printr-un număr mai mare de orificii.

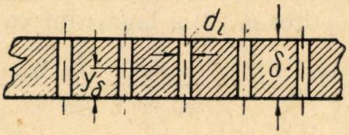


Fig. 2

Astfel să asimilăm mai întîi fiecare orificiu cu un canal echivalent de secțiune circulară cu diametrul constant d_i (fig. 2). În interiorul acestuia mișcarea este laminară astfel încît pierderea de presiune pe distanța dy_δ se deduce din formula Poiseuille :

$$dp = -\frac{32\,\mu\, v_\delta}{d_i^2}\, dy_\delta, \tag{5}$$

sau ținînd seama că $\frac{\pi}{4}\, d_i^2\, v_\delta = Q_i$,

$$Q_i = -\frac{\pi d_i^4}{128\,\mu}\, \frac{dp}{dy_\delta}. \tag{6}$$

Apoi, notînd cu N_i numărul orificiilor pe unitatea de suprafață S se deduce din (6) relația

$$dQ = N_i\, Q_i\, dS = -\frac{N_i\, \pi d_i^4}{128\,\mu}\, \frac{dp}{dy_\delta}\, dS. \tag{7}$$

Comparînd această formulă cu relația (1) se constată că acestea două devin identice dacă se pune

$$k_p = \frac{\pi d_i^4\, N_i}{128} \tag{8}$$

În consecință, o suprafață care conține un număr mare de orificii poate fi asimilată cu o suprafață poroasă avînd un coeficient de permeabilitate dat de formula (8). Deosebirea constă în faptul că analogia nu se menține decît pe direcția normală pe suprafață. Această condiție este însă suficientă într-o primă aproximație deoarece și în cazul suprafețelor poroase scurgerea după alte direcții față de cea normală este neglijabilă, dacă grosimea suprafeței este suficient de redusă.

Într-adevăr, considerînd ca predominantă mișcarea pe direcția y_δ, din (4) se deduce o variație liniară pentru η_p în funcție de y_δ,

$$\eta_p = \eta_{pa} + (\eta_{pa} - \eta_{pp}) \frac{y_\delta}{\delta}, \tag{9}$$

unde δ este grosimea suprafeței, η_{pa} mărimea η_p corespunzătoare presiunii de alimentare p_a, iar η_{pp} este acum mărimea corespunzătoare presiunii din stratul de lubrifiant. Axa y_δ a fost aici orientată în sens invers scurgerii prin suprafața poroasă ($y_\delta < 0$). În aceste condiții viteza normală V_{2v} care apare pe suprafața poroasă (2) a lagărului va fi egală cu

$$v_\delta = V_{2v} = -\frac{\varkappa_p}{\varkappa_p + 1} \frac{k_p}{\mu\delta} \frac{\eta_{pa} - \eta_p}{p^{\frac{1}{\varkappa_p}}} \tag{10}$$

unde s-a pus pentru simplificare η_p în loc de η_{pp}.

În cazul lagărelor circulare la care suprafața permeabilă prezintă o curbură, formula de mai sus este în continuare valabilă dacă grosimea δ este suficient de redusă. Mai corect, trebuie să se scrie ecuația (4) în coordonate cilindrice (fig. 3), sau cu aproximațiile menționate, sub forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \eta_p}{\partial r}\right) = 0, \tag{11}$$

de unde se deduce în locul relației (9)

$$\eta_p = \eta_{pa} + (\eta_{pa} - \eta_{pp}) \frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_\delta}{r_2}} \tag{12}$$

iar în locul relației (10)

$$v_\delta = V_{2v} = \frac{\varkappa_p}{\varkappa_p + 1} \frac{k_p}{\mu p^{\frac{1}{\varkappa_p}}} \left(\frac{\partial \eta_p}{\partial r}\right)_{r=r_2} = -\frac{\varkappa_p}{\varkappa_p + 1} \frac{k_p}{\mu} \frac{\eta_{pa} - \eta_p}{r_2 \ln \frac{r_\delta}{r_2}}. \tag{13}$$

Pentru valori δ suficient de reduse, formulele (10) și (13) devin identice. Într-adevăr

$$r_2 \ln \frac{r_\delta}{r_2} = r_2 \ln\left(1 + \frac{\delta}{r_2}\right) \cong \delta. \tag{14}$$

În consecință, se poate considera că relația (10) are o valabilitate generală, cu observația că pentru suprafețele cu o curbură pronunțată (de exemplu lagărele circulare), este mai corect să se introducă expresia (14) în locul grosimii δ.

Este interesant de remarcat că rezolvarea mai precisă a ecuației $\Delta\eta_p = 0$ în coordonatele cilindrice, prin dezvoltarea soluției în serii de produse de funcții cilindrice și exponențiale conduce, în ipoteza că grosimea δ este redusă, la aceeași expresie pentru gradientul $\frac{\partial\eta_r}{\partial r}$ la $r = r_2$, deși expresia funcției η_p are o formă diferită și mult mai complexă decît (12) [7].

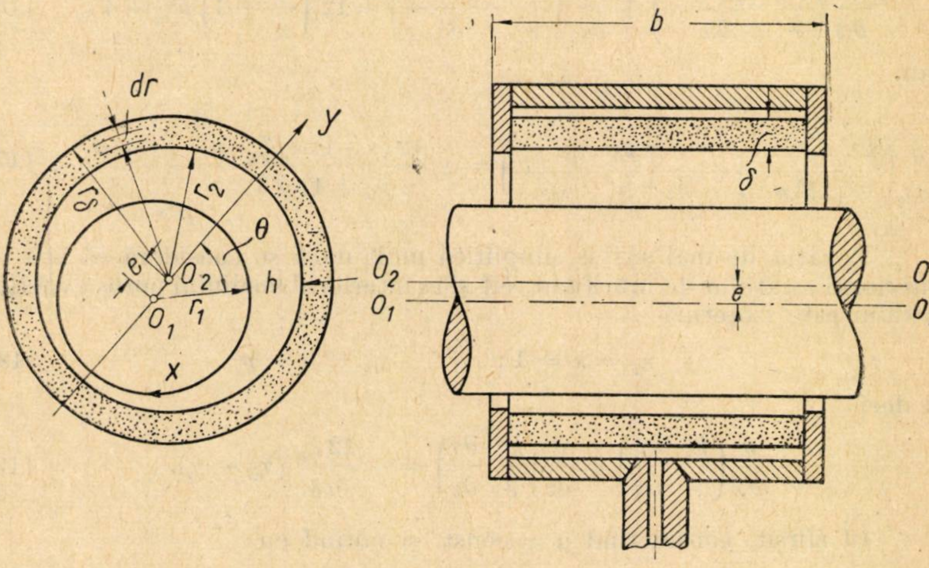


Fig. 3

Rezultatele de mai sus permit direct scrierea ecuației diferențiale a presiunii pentru cazul lubrificației cu gaze în prezența unei suprafețe poroase. Astfel plecînd de la ecuația generală a presiunilor pentru cazul lubrificației cu gaze

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial z}\right)=6\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)\Bigg\{2p^{\frac{1}{\varkappa}}\,(V_{2y}-V_{1y})+$$

$$+2h\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\partial t}-p^{\frac{1}{\varkappa}}\left[(V_{2x}-V_{1x})\,\frac{\partial h}{\partial x}+(V_{2z}-V_{1z})\,\frac{\partial h}{\partial z}\right]+ \qquad (15)$$

$$+h\left[\frac{\partial\,[p^{\frac{1}{\varkappa}}\,(V_{2x}+V_{1x})]}{\partial x}+\frac{\partial\,[p^{\frac{1}{\varkappa}}\,(V_{2z}+V_{1z})]}{\partial z}\right]\Bigg\},$$

unde $\varkappa$ este exponentul evoluției gazului în stratul de lubrifiant, iar axele x, z sînt în întregime cuprinse pe una din suprafețe (suprafața 1), se constată că $V_{1x} = V_{1y} = V_{1z} = V_{2x} = V_{2z} = 0$ iar V_{2y} este dat de expresia (10). Prin urmare ecuația presiunilor are forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial z}\right)=12\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)p^{\frac{1}{\varkappa}}-V_{2y}\,, \qquad (16)$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\,\frac{\partial p^{\frac{1}{\varkappa}+1}}{\partial z}\right)=-\frac{12\,(\varkappa+1)\,\varkappa_p\,k_p}{\varkappa\,(\varkappa_p+1)\,\mu\,\delta}\;\frac{p_a^{\frac{1}{\varkappa_p}+1}-p^{\frac{1}{\varkappa_p}+1}}{p^{\frac{1}{\varkappa_p}-\frac{1}{\varkappa}}}. \qquad (17)$$

Ecuația de mai sus se simplifică mult dacă se consideră că atît în interiorul stratului de lubrifiant, cît și în interiorul mediului poros evoluția gazului este izotermă

$$\varkappa_p = \varkappa = 1\,; \qquad \eta_p = \eta = p^2 \qquad (18)$$

și deci

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\,\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)=-\frac{12\,k_p}{\mu\,\delta}\,(\eta_a-\eta). \qquad (19)$$

În sfîrșit, considerînd $\mu = \text{const.}$ și notînd cu

$$\eta_r = \eta_a - \eta; \qquad (20)$$

ecuația diferențială (19) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\,\frac{\partial \eta_r}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\,\frac{\partial \eta_r}{\partial z}\right)=K'^2\,\eta_r\,, \qquad (21)$$

sau sub formă vectorială

$$\operatorname{div}\,(h^3 \operatorname{grad} \eta_r) = K'^2\,\eta_r\,, \qquad (22)$$

care are avantajul că este independentă de sistemul de coordonate ales și se poate aplica direct în cazul lagărelor conice, sferice etc.

În aceste ecuații s-a notat cu

$$K'^2 = \frac{12\,k_p}{\delta}. \qquad (23)$$

Cazul cel mai simplu este cel studiat de S. A. Scheinberg și V. G. Schuster [5] al unui lagăr axial compus din două discuri paralele. Pentru această situație ecuația (21) poate fi integrată fără dificultăți, ea reducîndu-se la o ecuație diferențială ordinară de tip Bessel. De o manieră asemănătoare se pot studia și lagărele conice. De altfel pentru cazul $h = \text{const.}$ ecuația diferențială și soluțiile devin identice, dacă se alege un sistem de coordonate sferice cu raza orientată în lungul generatoarelor unuia din conuri [8].

Mai dificilă este abordarea problemei pentru cazul lagărelor circulare, pentru care grosimea h a stratului de lubrifiant nu este constantă, ci variază conform relației

$$h = c + e \cos \theta = c\,(1 + \varepsilon \cos \theta), \tag{24}$$

unde c este jocul radial, e excentricitatea, $\varepsilon = \dfrac{e}{c}$ – excentricitatea relativă iar $\theta = \dfrac{x}{r}$ unghiul polar măsurat de la linia centrelor.

Din aceste motive ecuația (21) este greu de soluționat în mod riguros. Se poate de exemplu dezvolta soluția în serie de produse de funcțiuni de x și z, așa cum se procedează într-o serie de cazuri relative la lubrificația cu lichide [7] însă calculele sînt laborioase și sîntem nevoiți să introducem succesiv o serie de aproximații care pot altera precizia rezultatelor.

Este de remarcat că pentru această problemă ca în general pentru lagărele circulare alimentate sub presiune, considerarea cazului mișcării bidimensionale (alungire infinită) nu este operantă deoarece scurgerea principală are loc numai în direcția z. De aceea în jumătatea inferioară a lagărului $\left(\text{zona } \dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2}\right)$ unde grosimea stratului de lubrifiant este mai redusă debitul scade iar η(10) crește, ceea ce conduce la apariția efectului de portanță. Avînd însă în vedere că variația de presiune în lungul circumferinței lagărului este redusă în valoare absolută chiar pentru excentricități mari și considerabil mai redusă față de variația în raport cu z, apare posibilitatea simplificării problemei prin utilizarea neglijărilor operate în cazul așa numitei ipoteze a lagărelor scurte [6], după care derivatele în raport cu x din ecuația presiunilor sînt neglijabile față de cele în raport cu z. Ținînd seama în plus că h nu depinde de z, ecuația (21) se scrie atunci simplu

$$\frac{\partial^2 \eta_r}{\partial z^2} = K^2 \eta_r, \qquad K^2 = \frac{K'^2}{h^3} = \frac{12\,k_p}{h^3\,\delta}. \tag{25}$$

Spre deosebire de cazul citat al lubrificației cu lichide [6] simplificările utilizate pentru obținerea ecuației (25) conduc la erori mult mai reduse, chiar și pentru alungiri mari (cel puțin pentru valori mici ale excentricității) astfel încît rezultatele vor avea o valabilitate destul de generală.

Soluția generală a ecuației (25) are forma aparent simplă

$$\eta_r = C_1\, e^{Kz} + C_2\, e^{-Kz} \tag{26}$$

unde constantele C_1 și C_2 trebuie determinate prin condiții la limită corespunzătoare.

Urmînd un raționament oarecum asemănător, C.H. Robinson și T. F. Sterry [3] ajung la o soluție de același tip cu (26) pentru care însă consideră soluții la limită simplificate corespunzînd unui lagăr semiinfinit

$$(\eta = \eta_0 \ \text{la} \ z = 0 \ \text{și} \ \eta = \eta_a \ \text{la} \ z = \infty).$$

Deși conduce la rezultate relativ simple metoda introduce unele erori deoarece pe de o parte consideră lățimea b redusă $\left(\text{neglijarea termenului } \frac{\partial \eta_r}{\partial \theta}\right)$ iar pe de alta consideră lățimea $b = \infty$. De aceea rezultatele sînt valabile numai pentru valori K mari, așa după cum de altfel arată și verificările experimentale efectuate [3] de aceiași autori.

Avînd în vedere cele de mai sus, în scopul de a obține date mai corecte pentru calculul lagărelor circulare, vom considera în cele ce urmează condițiile la limită corecte ale problemei, și anume

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0 \quad (\eta_r - \eta_{r0}) \quad \text{la} \quad z = \pm \frac{b}{2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial \eta_r}{\partial z} = 0, \quad \text{la} \quad z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Din ultima condiție se deduce imediat

$$C_1 = C_2 = \frac{C}{2}. \tag{28}$$

În sfîrșit, din prima condiție se deduce apoi

$$C = \frac{\eta_{r0}}{\operatorname{ch} \frac{Kb}{2}} \tag{29}$$

astfel încît în final soluția (26) ia forma

$$\eta_r = \eta_{r0} \frac{\operatorname{ch} Kz}{\operatorname{ch} \frac{Kb}{2}}. \tag{30}$$

Revenind acum la presiuni se deduce din relația de mai sus

$$p = p_a \left\{ 1 - \left(1 - \frac{p_0^2}{p_a^2}\right) \frac{\operatorname{ch}\left[\dfrac{K^\star \frac{2z}{b}}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^{3/2}}\right]}{\operatorname{ch}\left[\dfrac{K^\star}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^{3/2}}\right]} \right\}^{1/2}, \tag{31}$$

unde $K^\star$ este dat de relația

$$K^{\star 2} = (1 + \varepsilon \cos \theta)^3 \frac{b^2}{4} K^2 = \frac{3\, k_p\, b^2}{c^3\, r_2 \ln \frac{r\delta}{r_2}} \cong \frac{3\, k_p\, b^2}{c^3\, \delta} = \text{const.} \tag{32}$$

Pentru valori $K^\star$ mari, schimbînd pe $\frac{2z}{b}$ în $1-\frac{2z'}{b}$ se poate scrie

$$\frac{\mathrm{ch}\left[\dfrac{K^\star \frac{2z}{b}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3/2}}\right]}{\mathrm{ch}\left[\dfrac{K^\star}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3/2}}\right]} \cong \frac{\exp\left[\dfrac{K^\star \frac{2z}{b}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3/2}}\right]}{\exp\left[\dfrac{K^\star}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3/2}}\right]} = \exp\left[-\frac{K^\star \frac{2z'}{b}}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3/2}}\right], \quad (33)$$

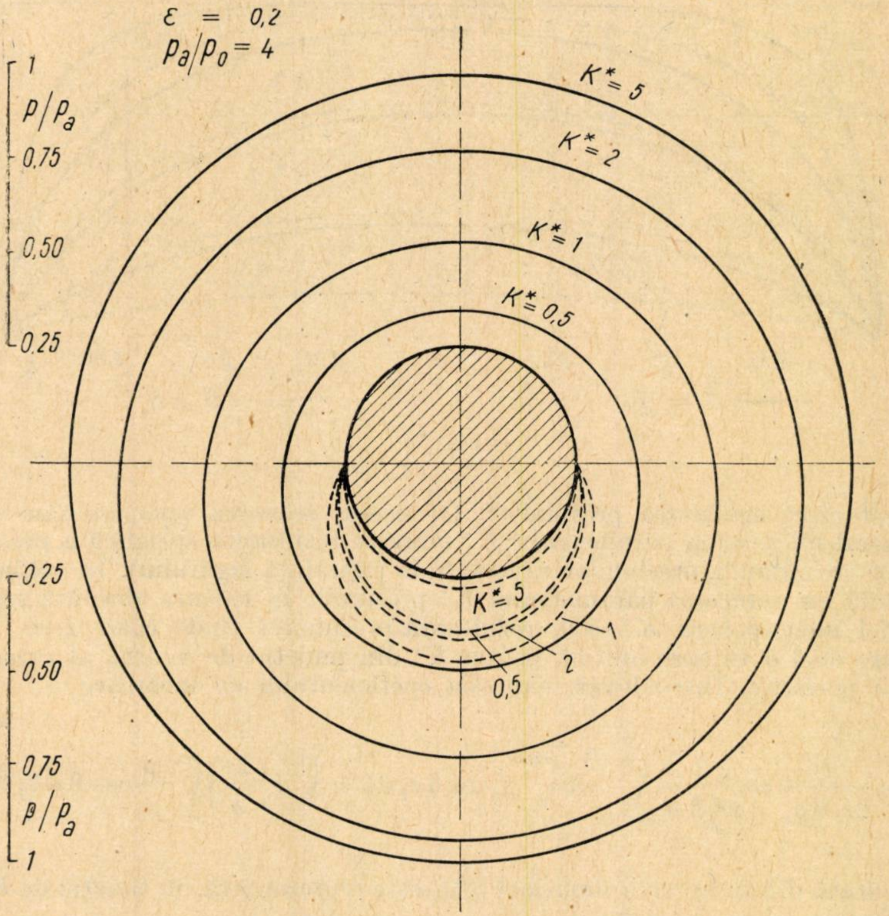


Fig. 4

iar formula (31) devine identică cu aceea aproximativă dedusă de Robinson și Sterry [3].

Mecanismul de creare a capacității portante rezultă clar din figurile 4 și 5. Astfel în figura 4 s-a reprezentat distribuția presiunilor pe circumferința lagărului pentru $\frac{p_a}{p_0} = 4$ și $\varepsilon = 0{,}2$ și pentru diferite valori K^*. În figura 5 s-a reprezentat pentru același exemplu variația presiunii în funcție de z, pentru $\theta = 0$ și $\theta = \pi$, diferențele de presiune $\Delta p = p\,(\theta + \pi) - p\,(\theta)$ fiind marcate de zona hașurată. Din aceste figuri se constată că pentru valori mari K^*, de exemplu pentru alungiri mari, zona centrală contribuie într-o măsură redusă la crearea capacității portante. Aceasta deoarece se produce o scurgere a lubrifiantului după direcția θ, care are drept efect egalizarea presiunilor. De aceea, scăderea alungirii sau mai general micșorarea parametrului K^* mărește rezultanta specifică a presiunilor (rezultanta presiunilor raportată la suprafața lagărului). În schimb, o dată cu reducerea parametrului K^* presiunile în valoare absolută scad, astfel încît, pentru $K^* \rightarrow 0$, rezultanta presiunilor tinde către zero. Va apare deci o valoare optimă pentru K^* din punctul de vedere al capacității portante. Într-adevăr, expresia coeficientului de încărcare

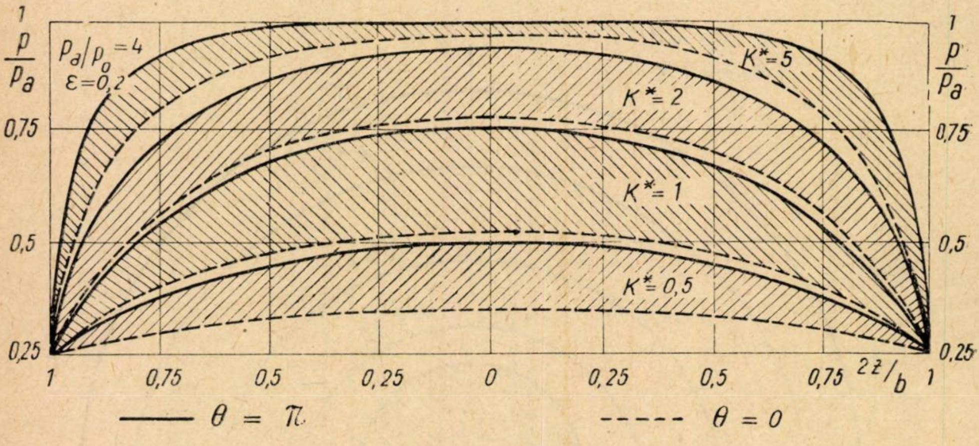


Fig. 5

$$\zeta_a = \frac{P}{2 r_1 b\, p_a} = \frac{1}{2 r_1 b\, p_a} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_0^{2\pi} p \cos\theta\, r_1\, \mathrm{d}\theta = \int_0^1 d\left(\frac{2z}{b}\right) \int_0^{2\pi} \frac{p}{p_a} \cos\theta\, d\,\theta, \quad (34)$$

rezultată din integrarea expresiei (31), este reprezentată, în funcție de K^*, pentru diferite valori $\frac{p_a}{p_0}$ și ε, în diagrama din figura 6.

Regimul optim menționat corespunde maximului curbelor ζ_a, care au loc aproximativ pentru

$$K^*_{\text{opt}} \cong 1{,}25, \quad (35)$$

valoare care în primă aproximaţie, este puţin influenţată de excentricitatea şi de presiunea de alimentare (ultima are o uşoară tendinţă de a reduce valoarea parametrului $K^\star_{\text{opt}}$).

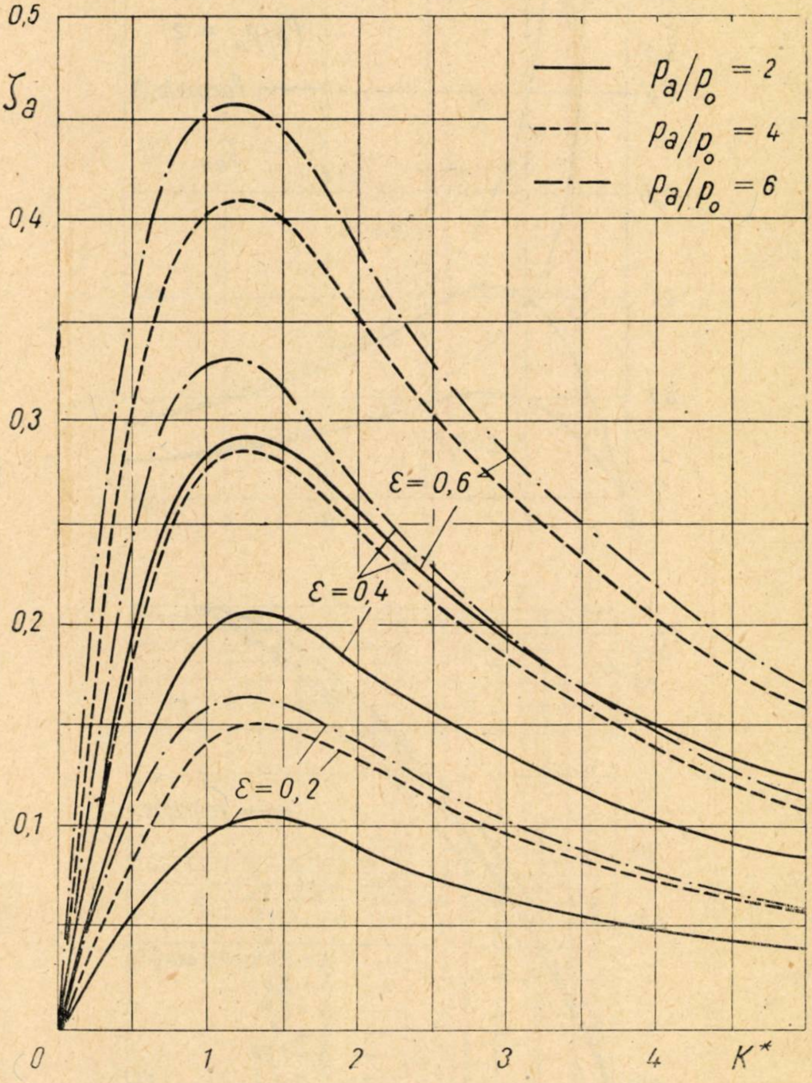


Fig. 6

Faţă de soluţia aproximativă dată în lucrarea [3] din figura 7 se constată că, după cum era de aşteptat, rezultatele concordă pentru valori $K^\star$ mari ($K^\star > 2$), dar că pentru valori $K^\star$ reduse, rezultate aproximative [3] nu mai sînt aplicabile.

Formulele deduse în lucrarea de față sînt de altfel verificate de cercetările experimentale ale autorilor citați, după cum se constată din figura 8 în care s-au prezentat comparativ valorile experimentale pentru coeficientul de corecție $\zeta_{a\infty}/\zeta_a$ ($\zeta_{a\infty}$ – coeficientul ζ_a în ipoteza lagărelor semifinite [3]) și cele calculate pe baza rezultatelor prezentate.

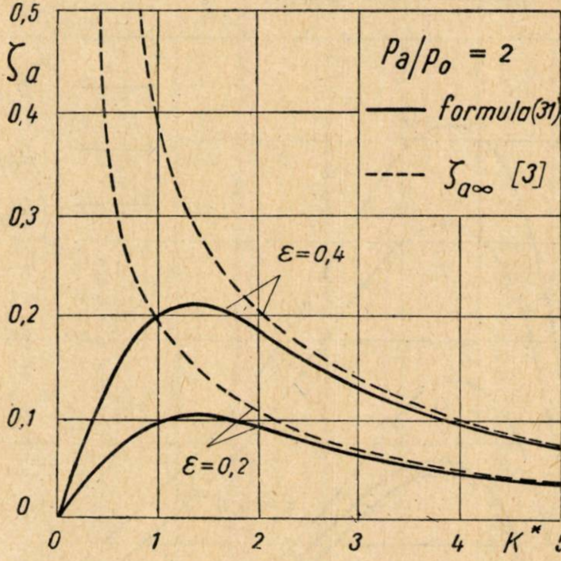


Fig. 7

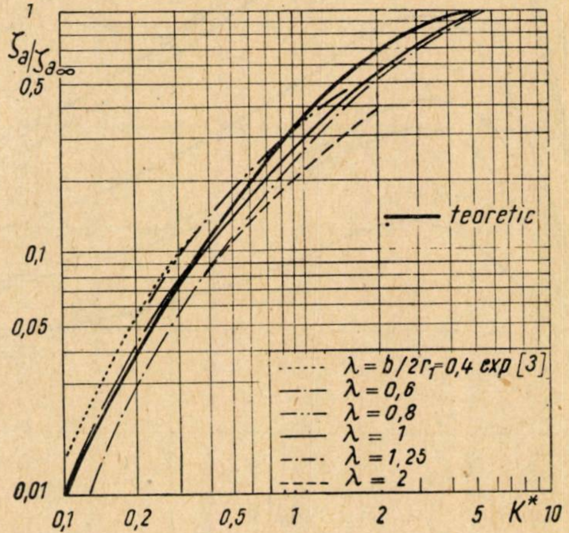


Fig. 8

Dependența rezultantei presiunilor de excentricitatea relativă ε este liniară într-o primă aproximație. Astfel în figura 9 s-a reprezentat ζ_a în funcție de ε pentru $K^\star = K^\star_{\text{opt}} \cong 1{,}25$.

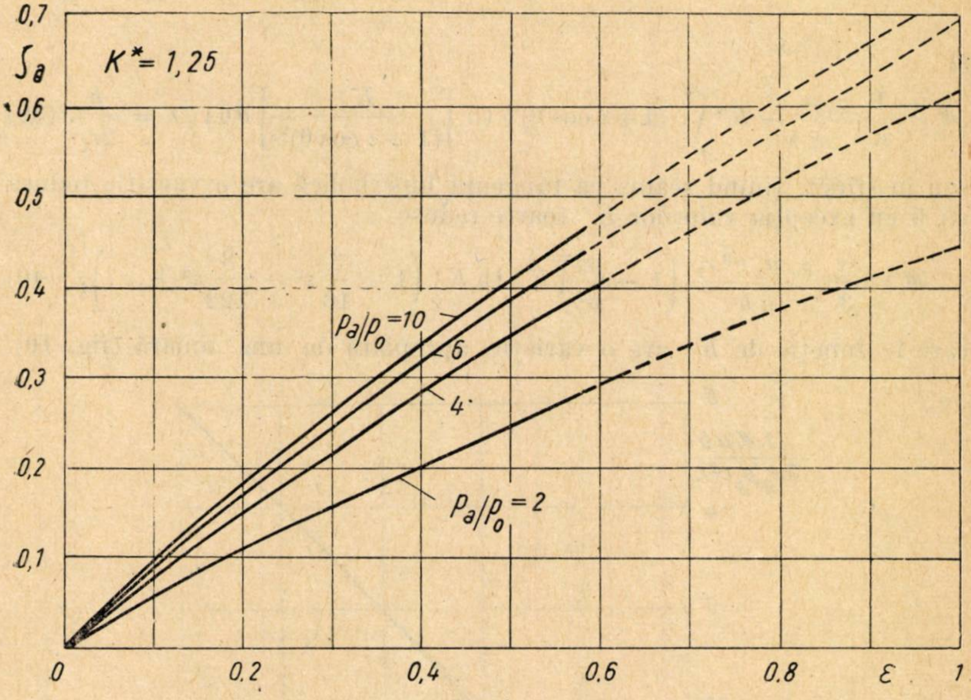


Fig. 9

În schimb, influența presiunii de alimentare scade destul de repede, astfel încît pentru regimul optim menționat coeficientul ζ_a poate fi exprimat cu o precizie suficientă prin relația analitică simplă

$$\zeta_{a_{\text{opt}}} \cong \frac{\pi}{4}\left[1 - \left(\frac{p_0}{p_a}\right)^{1,3}\right]\varepsilon. \tag{36}$$

Coeficientul ζ_a are drept margine superioară cazul extrem în care $p = p_a$ pe jumătatea inferioară a lagărului și $p = p_0$ pe jumătatea superioară $\left(\zeta_a = 1 - \frac{p_0}{p_a}\right)$, iar ca limită inferioară $\zeta_a = 0$, pentru $K^* \to \infty$, $K^\star \to 0$.

Debitul de lubrifiant poate fi dedus ținînd seama că în interiorul peliculei de gaz distribuția vitezelor este parabolică

$$\mathcal{M} = -2\int_0^{2\pi} \frac{\rho h^3}{12\,\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=\frac{b}{2}} r_1\, d\theta = \frac{1}{6}\,\frac{\rho_a\, c^3\, r_1}{\mu\, p_a}\int_0^{\pi}(1+\varepsilon\cos\theta)^3\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial z}\right)_{z=\frac{b}{2}} d\theta, \tag{37}$$

sau ținînd seama de formula (31)

$$\left(\frac{\partial \eta_r}{\partial r}\right)_{z=\frac{b}{2}} = \frac{2\,(p_a^2 - p_0^2)}{b}\;\frac{K^\star}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3/2}}\;\mathrm{th}\left[\frac{K^\star}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3/2}}\right], \qquad (38)$$

și

$$\mathscr{M} = \frac{1}{6}\,\frac{\rho_a\, p_a\, c^3}{\mu\,\lambda}\,K^\star \int_0^\pi (1+\varepsilon\cos\theta)^{3/2}\,\mathrm{th}\left[\frac{K^\star}{(1+\varepsilon\cos\theta)^{3/2}}\right] d\theta\,; \quad \lambda = \frac{b}{2r_1}, \qquad (39)$$

sau în sfîrșit, ținînd seama că tangenta hiperbolică are o variație redusă cu θ cu excepția valorilor $K^\star$ foarte reduse

$$\mathscr{M} = \frac{\pi}{3}\,\frac{\rho_a\, p_a\, c^3\, r_1}{\mu\, b}\left(1 - \frac{p_0^2}{p_a^2}\right) K^\star\,\mathrm{th}\,K^\star \left(1 + \frac{3}{16}\,\varepsilon^2 - \frac{3}{122}\,\varepsilon^4 + \ldots\right), \qquad (40)$$

care în funcție de $K^\star$ are o variație apropiată de una liniară (fig. 10).

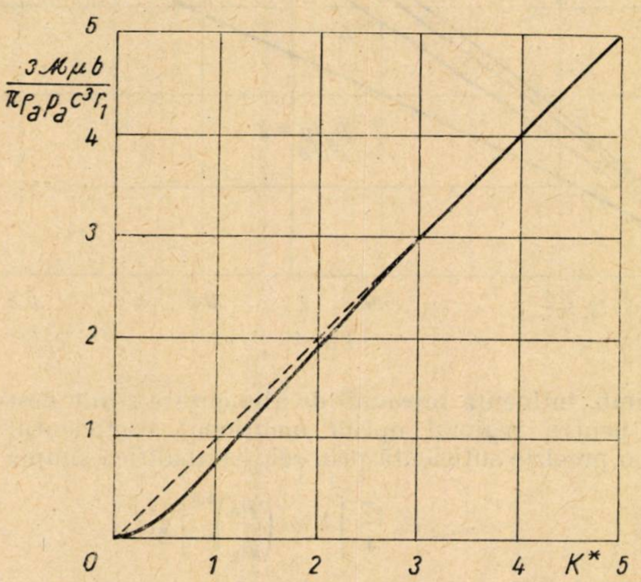


Fig. 10

În același timp se constată că influența excentricității ε asupra debitului este redusă, ceea ce are consecințe pozitive importante asupra stabilității în funcționare a acestui tip de lagăre.

Formulele și diagramele de mai sus permit calculul și proiectarea lagărelor circulare alimentate prin suprafețe poroase sau printr-un mare număr de orificii. Mai mult, se pot stabili și condițiile optime de funcționare. Astfel în afara condiției (35) relativă la capacitatea portantă maximă se pot impune condiții mai complexe, ca de exemplu capacitatea portantă maximă asociată cu un debit cît mai redus. Notînd cu $G = g\mathcal{M}$ debitul în greutate, va trebui să căutăm minimul coeficientului

$$k_G = \frac{G}{P}. \tag{41}$$

Punînd coeficientul ζ_a sub forma

$$\zeta_a = \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{1,3}\right] f'_K(K^\star)\,\varepsilon\left(1 - \frac{1}{32}\varepsilon^2 + \ldots\right) \tag{42}$$

se deduce

$$\left.\begin{aligned}
&k_G = \frac{\pi g p_0}{6\mu RT}\,\frac{c^3}{b^2}\,f_p\left(\frac{p_0}{p_a}\right) f_K(K^\star)\, f_\varepsilon(\varepsilon),\\
&f_p\left(\frac{p_0}{p_a}\right) = \frac{p_a}{p_0}\,\frac{1 - \dfrac{p_0^2}{p_a^2}}{1 - \left(\dfrac{p_0}{p_a}\right)^{1,3}};\quad f_K(K^\star) = \frac{K^\star \operatorname{th} K^\star}{f'_K(K^\star)},\\
&f_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1 + \dfrac{3}{16}\varepsilon^2 + \ldots}{1 - \dfrac{1}{3}\varepsilon^2 + \ldots},
\end{aligned}\right| \tag{43}$$

unde R este constanta gazului iar T temperatura absolută.

Din cele de mai sus rezultă că în funcție de $K^\star$ coeficientul k_G variază proporțional cu

$$(k_G) \sim \left(\frac{c^3}{b^2} f_K(K^\star)\right). \tag{44}$$

Existența factorului $\dfrac{c^3}{b^2}$ impune ca să se ia în considerare diferite situații, după parametrii care sînt menținuți constanți. Semnalăm mai jos două cazuri mai interesante :

a) Mărimile k_p și $r_2 \ln \dfrac{r\delta}{r_2} \cong \delta$ sînt menținute constante. Atunci raportul $\dfrac{c^3}{b^2}$ este proporțional cu $\dfrac{1}{K^{\star 2}}$ și deci

$$(k_G)_{\min} \sim \left(\frac{1}{K^{\star 2}} f_K(K^\star)\right)_{\min} \sim \left(\frac{\operatorname{th} K^\star}{K^\star f'_K(K^\star)}\right)_{\min}. \tag{45}$$

Utilizînd datele din diagrama din figura 6 rezultă

$$K^\star_{\text{opt}} \cong 2 - 3. \tag{46}$$

b) Mărimile b şi c sînt menţinute constante. Atunci

$$(k_G)_{\min} \sim (f_K\,(K^\star))_{\min} \sim \left(\frac{K^\star \operatorname{th} K^\star}{f'_K\,(K^\star)}\right)_{\min} \tag{47}$$

care corespunde la

$$K^\star_{\mathrm{opt}} \cong 0{,}1 - 0{,}3. \tag{48}$$

Rezultă deci valori pentru $K^\star$ (35) (46) (48) destul de diferite, corespunzînd unor regimuri relevate şi experimental [3]. În proiectare este bine să se aleagă $K^\star < 2$ pentru a nu avea debite prea mari.

Primită la redacţie la 2 august 1961

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О РАСЧЕТЕ ВОЗДУШНЫХ ПОДШИПНИКОВ, ПИТАЕМЫХ ПОД ДАВЛЕНИЕМ ЧЕРЕЗ БОЛЬШОЕ ЧИСЛО ОТВЕРСТИЙ ИЛИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТЫЕ КЛАПАНЫ

РЕЗЮМЕ

Пишутся уравнения газовой смазки в присутствии пористых поверхностей, уподобляя также случай поверхностей большому числу питающих отверстий с проницаемыми поверхностями, имеющими эквивалетный коэффициент пористости. Далее интегрируется дифференциальное уравнение давлений и определяются функциональные характеристики для цилиндрических подшипников, питаемых под давлением через пористую поверхность.

SOME CONSIDERATIONS ON THE CALCULATION OF HYDROSTATIC GAS BEARINGS SUPPLIED THROUGH A LARGE NUMBER OF HOLES OR THROUGH POROUS SURFACES

ABSTRACT

The equations of gas lubrication in the presence of a porous surface are written and the case of the surfaces with a large number of supply holes is assimilated with the permeable surfaces having an equivalent porosity coefficient. Further, the pressure differential equation is integrated and the operating characteristics of journal bearings supplied under pressure through a porous surface are determined.

BIBLIOGRAFIE

1. W. HAGEN, *Bau und Berechnung Luftgelagerter Wallen*. Dissertation, Techn. Hochsch., Aachen, 1951.
2. A. G. MONTGOMERY, T. F. STERRY, *A simple Air-Bearing Rotor for very High Rotational Speeds*. ED/R 1671. Atomic Energy Research Estab., Harwell, Berkshire, 1955.
3. C. H. ROBINSON, T. F. STERRY, *The Static Strength of Pressure Fed Gas Journal Bearings, Porous Bearings*. ED/R 1672, Atomic Energy Research Estab., Harwell, Berkshire, 1958.
4. W. A. GROSS, *Film Lubrication* – part IX–*Externally Pressurized Bearings*. I B M Research Paper, 1960.
5. С. А. ШЕЙМБЕРГ, В. Г., ШУСТЕР, *Пористый упорный подшипник устойчивый при вибрациях*. Станки и Инструмент, **31**, 11 (*нов*), 23—27 (1960).
6. V. T. MORGAN, A. CAMERON, *Mechanism of Lubrification in Porous Metal Bearings*. IME Conference on Lubrication and Wear, London, oct. 1957, paper *89*.
7. Н. ТИПЕЙ, *Смазка пористых тел*. Труды III Всесоюзной Конференции по трению и износу в машинах. Изд. Акад. Наук СССР, **III**, 121—127 (1960).
8. В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, *К вопросу о трехмерной задаче газавой смазки*. Журнал Прикладной Механики, Изд. Акад. РНР, **I**, *2*, 121–137 (1956).
9. V. N. CONSTANTINESCU, *Determinarea distribuției presiunilor în lagărele alimentate sub presiune, prin utilizarea unei analogii hidrodinamice*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *6* (1961).

STUDIUL UNEI METODE RADIOACTIVE PENTRU APRECIEREA CALITĂȚILOR LUBRIFIANTE ALE ULEIURILOR ADITIVATE, PRIN PRISMA UZURII SUPRAFEȚELOR. II

DE

D. PAVELESCU, I. ILIUC și S. BARBUL

Cercetările făcute anterior [1], [2] au lămurit condițiile pe care trebuia să le îndeplinească o instalație pentru determinarea calităților de ungere a uleiurilor, și a rezistenței la uzură a materialelor, pentru ca să fie asigurată o împrăștiere cît mai mică a rezultatelor și deci o reproductibilitate cît mai bună.

În acest fel se încearcă să se exprime calitatea de ungere a lubrifiantului (sau rezistența la uzură a materialelor), în condiții bine determinate, prin viteza de uzură a cuplului de frecare exprimată în miligrame pe oră.

Astfel pe baza concluziilor obținute în lucrările anterioare s-a realizat o nouă instalație, arătată în figura 1, și detalii în figurile 2 și 3.

Frecarea se produce în cuplul de frecare (*1* din fig. 1 și 3), compus din :

a) Bucșa cilindrică cu interior conic, confecționată din materialul cu duritate mai mică, ce se studiază, rectificată la exterior și radioactivată după introducerea elementului care va deveni trasor radioactiv.

b) Piesa cu suprafață plană de duritate mai mare (oțel tratat) neactivată ; rectificată pe suprafața de lucru.

Sarcina se aplică prin intermediul unei pîrghii (*5*) și a piesei plane, printr-o articulație.

Cuva de ulei (*2*), construită cu fund și pereți frontali dubli, pentru a permite recircularea lichidului utilizat la termostatare, poate glisa pe o tijă verticală astfel ca măsurarea să se execute în interiorul unui sistem traductor (*3*) plasat la un plan inferior în cadrul aceleiași instalații. Sistemul traductor a fost realizat din 6 contori G.M. de tip cilindric (CTC-6) legați în paralel și plasați simetric, cîte 3 contori lateral.

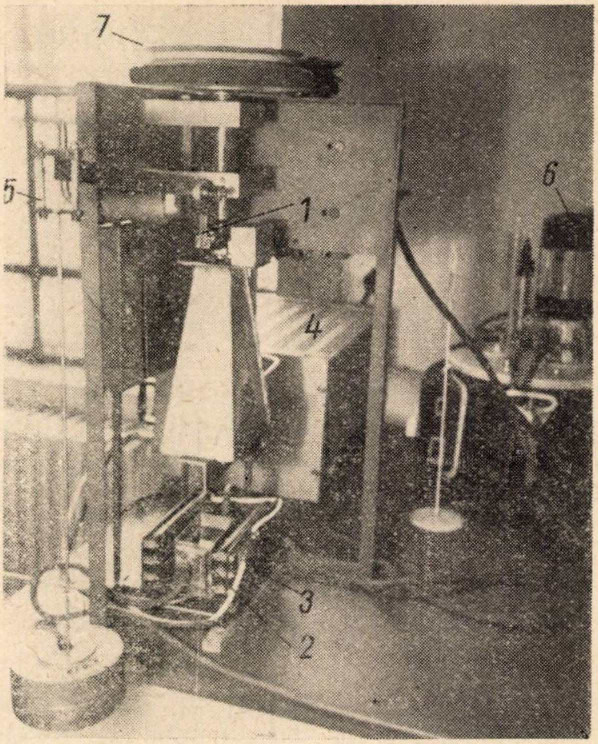


Fig. 1. — Vedere de ansamblu a instalaţiei.

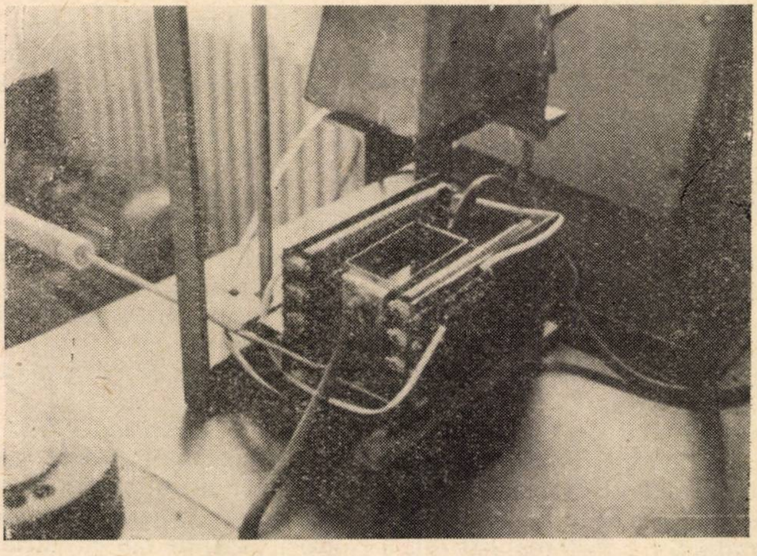


Fig. 2. — Detaliu; cuva cu ulei, în interiorul sistemului traductor.

În momentul măsurătorii (grupul de contoare fiind cuplat la un numărător de impulsuri), se reduce fondul parazit provenit de la piesa radioactivă prin intermediul blocului de plumb (*8*), care se intercalează între sistemul traductor (*3*) și cuplul de frecare (*1*) ; prin construcție se asigură acestei piese o mișcare laterală pentru a permite coborîrea și ridicarea cuvei cu ulei (*2*).

Pentru a reduce fondul într-o măsură cît mai mare a fost necesară și ecranarea contoarelor în vederea înlăturării influenței fondului provenit din radiația indirectă difuzată.

O placă frontală de plumb (de 25 mm) protejează operatorul în momentul în care acesta intervine.

Motorul electric este plasat la partea superioară a instalației, transmisia făcîndu-se cu curea, cu mai multe trepte de viteză (*7*).

Ridicarea pîrghiei pentru suspendarea frecării, se face cu ajutorul manetei cu camă care se poate manevra de la placa frontală.

Instalația astfel concepută permite deci următoarele manevre din apropierea sa : încărcarea și descărcarea pîrghiei, coborîrea, ridicarea și eventual schimbarea cuvei cu ulei, precum și schimbarea cuplului de frecare. De la distanță se poate acționa : cuplarea și decuplarea motorului electric, cuplarea și decuplarea termostatului și a numărătorului. Precizăm că, conectarea grupului de contori G.M. la numărător, trebuie făcută prin intermediul unui sistem de rezistențe și condensatori, necesitatea acestuia fiind impusă de eficacitatea redusă a grupului de contoare la o viteză mare de numărare.

Pentru verificarea constanței condițiilor de funcționare impuse, s-a măsurat timp de 50 ore viteza de uzură pentru un anumit ulei (STAS 305) și cuplul de frecare oțel pe bronz cu 9% staniu. Rezultatele obținute sînt indicate în figura 4. După cum s-a arătat în lucrarea [2], s-a utilizat ca trasor In^{114}, obținut prin iradierea bucșei, în materialul căreia s-a introdus la turnare, și 1% indiu.

Instalația astfel realizată conduce la următoarele avantaje :

a) Permite reproductibilitatea rezultatelor cu o abatere maximă de ± 25%, concluziile putîndu-se trage prin măsurarea activității unui volum mic de ulei (circa 0,25 l), după un timp cuprins între 2 și 12 ore (funcție de activitatea bucșei și sarcină). Durata indicată include timpul de frecare și timpul de măsură.

b) Permite măsurarea uzurii prin determinarea activității uleiului cu o precizie și o sensibilitate mai mare decît la metodele gravimetrice, eliminînd influența repartiției neomogene, și a depunerilor produselor radioactivate în ulei. (Sensibilitatea de măsură este de ordinul 10^{-7} g, metal/cm^3, ulei, funcție de activitatea bucșei).

c) Transmiterea efortului asupra piesei plane se efectuează printr-o articulație, soluție care asigură o distribuție automată a acestuia pe întreaga fîșie de contact, în prezența jocurilor și vibrațiilor inerente.

La rîndul său, contactul pe generatoare între o suprafață cilindrică și o suprafață plană, conduce la încărcări specifice mari, eliminînd totodată în mare măsură efectul regimului hidrodinamic (care poate masca

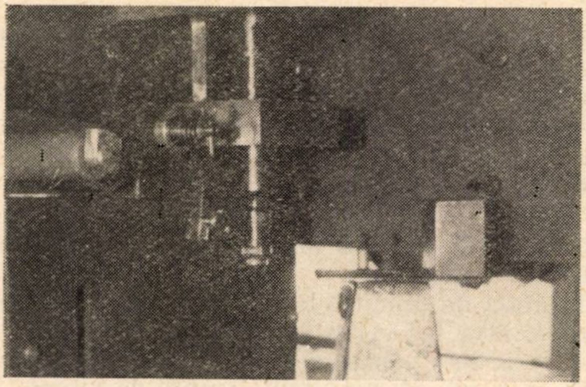


Fig. 3. — Detaliu ; axul de antrenare cu bucşa radioactivă, şi pîrghia de transmitere a efortului, cu placa de oţel.

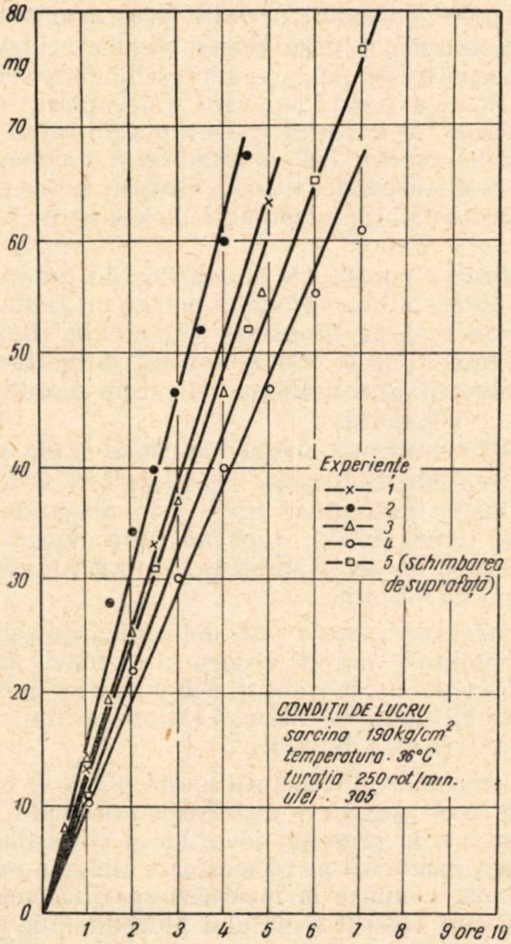


Fig. 4

regimul de uzură), ungerea hidrodinamică fiind înlocuită în regiunea de contact printr-o ungere semifluidă [5].

Se menţionează faptul că suprafaţa plană de duritate mare se uzează foarte puţin ceea ce conduce practic la menţinerea acestei suprafeţe la un număr mai mare de experienţe. De asemenea, uzura bucşei avansînd radial, conduce la modificări neînsemnate ale vitezei periferice, ea fiind şi uniformă pe întreaga circumferinţă.

d) Posibilitatea de măsurare a întregului volum de ulei şi deci a întregii cantităţi de produse de uzură, permite eliminarea recirculării uleiului, a pompelor (cu dezavantajele cunoscute) şi realizarea unei instalaţii simple, cu manevră pe verticală care păstrează geometria de măsură (factor esenţial), fără o expunere excesivă a operatorului.

În figura 5, prezentăm sintetic schemele grupului de frecare, la diferite aparate de încercat uleiuri şi materiale, întîlnite în literatura de specialitate.

În primele trei cazuri (5.1 utilizat în instalaţia TIMKEN; 5.2, 5.3 utilizat la instalaţia FALEX) contactul suprafeţelor metalice se face după una, două şi respectiv patru ,,fîşii''; de asemenea în sistemul 5.4 SAE, contactul se realizează tot după o singură ,,fîşie'', existînd însă în plus posibilitatea de schimbare a sensului de rotaţie a celor doi cilindri. La maşina cu patru bile, frecarea se produce în trei ,,puncte''[1]).

Sistemele următoare (fig. 5, poziţia 6 şi 7), utilizînd ca piese fixe sectoare de cuzinet, realizează un contact pe suprafeţele respective; sînt întîlnite în diferite instalaţii cu radioizotopi [6]. De asemenea în figura 5 poziţia 8, ALMEN, este reprezentat un cuplu de frecare asemănător celui precedent, dar cu suprafeţe de contact mai mari.

În sistemul 9 din figura 5 se realizează o frecare de pivotare între două suprafeţe inelare, sau între trei sectoare de inel[2]) şi suprafaţa inelară a bucşei inferioare. Un astfel de sistem este întîlnit de asemenea în instalaţii cu radioizotopi [6].

În sfîrşit, ultimul sistem, 10 din figura 5, gen glisieră, asigură o frecare între două suprafeţe plane, suprafaţa superioară (ce poate fi radioactivată [4]), avînd o mişcare de alunecare longitudinală, ,,du-te vino''.

Analizînd aceste sisteme, din care numai cele menţionate au fost utilizate în instalaţii cu izotopi radioactivi, rezultă cîteva caracteristici esenţiale :

a) La sistemele, la care frecarea se realizează pe o suprafaţă mai mare de contact (6...10 din figura 5), apare într-o măsură mai mare şi în general independent de voinţa experimentatorului, posibilitatea de trecere de la ungerea semifluidă la ungerea hidrodinamică, situaţie care maschează deci evoluţia normală a uzurii.

De asemenea nu se pot realiza comod nici presiuni specifice mari, existînd totodată condiţii pentru o influenţă apreciabilă a factorului ,,starea suprafeţei''.

---

[1]) Urma de contact fiind circulară; se urmăreşte calitatea uleiului, funcţie de timpul pînă la gripare, sau funcţie de variaţia diametrului urmei de contact, sau funcţie de pierderea de greutate a bilei superioare.

[2]) Sau ştifturi radioactive.

b) Sistemele cu contact pe ,,fîșie'' sau ,,punctiform'' 1...5 din figura 5, elimină într-o măsură mai mare posibilitatea apariției ungerii hidrodinamice, asigurînd deci menținerea unui regim constant de ungere, ungerea semifluidă, cu posibilități superioare de urmărire a formelor de uzură, în special la sistemele 1 și 4, și deci de determinare a calității de antiuzură. La sistemul cu două role, prin schimbarea sensului de rotație se poate realiza o ,,rupere'' a ,,filmului'' de ulei și deci a elimina complet ungerea hidrodinamică [1]).

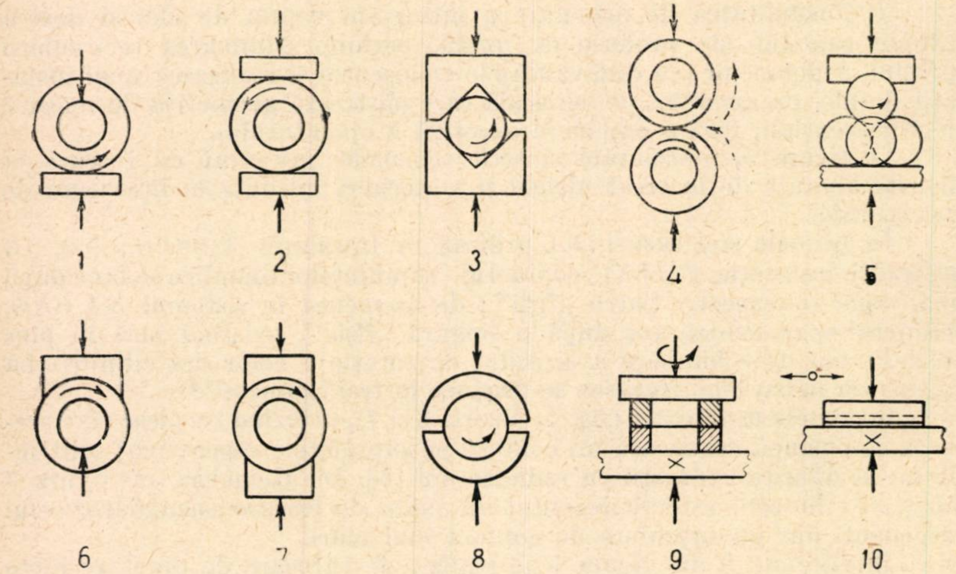


Fig. 5

c) Cele mai mari presiuni specifice le asigură în special sistemele cu contacte ,,punctiforme'', sau pe o singură ,,fîșie'', cu mențiunea că la cel dintîi, regimul vibratoriu ce nu poate fi ușor eliminat, face ca urmele de contact să degenereze din urme circulare, în forme geometrice neregulate, micșorînd astfel reproductibilitatea rezultatelor. De altfel, acest sistem a fost continuu perfecționat [9] ; în mod practic el nu permite decît încercări de uleiuri.

Pentru toate aparatele (afară de TIMKEN și mașina cu patru bile), este dificil de determinat sarcina specifică pe suprafața de contact atît datorită geometriei cuplului cît și sistemului de încărcare.

d) De o foarte mare importanță este menținerea constantă a formei suprafeței de contact și deci posibilitatea de așezare ,,automată'' a suprafețelor în frecare una față de cealaltă. Deasemenea orice variație neprevăzută a vitezei relative de frecare mărește cauzele de erori.

---

[1]) Prin plasarea cilindrilor, cu axele formînd un unghi de 90°, se poate realiza contact ,,punctiform'' (circular). cu avantaje față de sistemul 4 și 5. O mișcare helicoidală, permite în plus schimbarea continuă a suprafeței de contact.

e) În afară de faptul că unele din aceste sisteme determină calitatea lubrifiantului în funcție de sarcina maximă la care nu se produce griparea, la o parte din ele aliajul cuplului de frecare este mereu același. Astfel la aparatul cu patru bile (larg răspîndit) sînt utilizate bile de rulmenți, ce în general trebuie schimbate după fiecare experiență.

f) Din punctul de vedere al reproductibilității rezultatelor experimentale, considerăm că cele mai bune rezultate le va da sistemul cel mai simplu, atît constructiv, cît și ca posibilitate de menținere constantă a suprafeței de contact și deci a presiunii specifice.

În instalația realizată la I.M.A., apreciindu-se cel mai satisfăcător sistemul *1* din figura 5, acesta a fost îmbunătățit prin urmărirea vitezei de uzură pe cale radiometrică, și eliminarea recirculării uleiului, plasarea automată a piesei fixe și înglobarea într-o aparatură generală mai simplă. Ea permite atît studii de uleiuri, cît și de materiale.

Din cele de mai sus rezultă că instalația realizată prezintă unele avantaje în comparație cu instalațiile de laborator devenite clasice [10]: mașina cu patru bile, aparatul ALMEN, TIMKEN, FALEX, SAE etc.

În ceea ce privesc instalațiile cu radioizotopi, experimentate [3], [4] sau descrise [6] de alți autori, acestea fie că mențin condițiile pentru ungerea hidrodinamică, fie că utilizează sisteme de recirculație care pot da naștere după cum s-a văzut [1] și [2] la erori în aprecierea cantității de material uzat.

Atît în privința metodelor clasice cît și a celor cu radioizotopi în general nu se dau indicații asupra gradului de reproductibilitate a rezultatelor.

Rezultate obținute. În cele ce urmează se prezintă o serie de rezultate obținute cu instalația I.M.A., determinările fiind făcute cu uleiurile și aditivii indicați de Institutul Petrochim-Ploiești. Au fost efectuate determinări cu uleiurile 10004 V, 10003 T și cu aditivii parafină clorurată, ditiofosfat de zinc, naftenat de plumb, ulei sulfurizat, sulfură de molibden, în diferite proporții și combinații.

Cuplul de frecare utilizat a fost: bronz cu 9% Sn și 1% In, pe oțel cu duritatea HRC 30. Pentru o mai mare siguranță în cazul uleiurilor aditivate, rezultatele erau comparate cu rezultatele obținute pentru uleiul neaditivat. Deoarece chiar în cazul soluției constructive adoptate, credem că mai ales la sarcini mici nu s-a putut elimina complet ungerea hidrodinamică (influența ei asupra repartizării sarcinii, fiind totuși redusă), determinările au fost efectuate la viscozitate constantă și deci pentru diferite uleiuri, la diferite temperaturi. Viscozitatea aleasă a fost de 100 cP ceeace a condus la un interval de temperatură de circa 25°C (de la 49°C pentru uleiul STAS 410, la 75°C pentru uleiul Brighstock).

În cursul experimentărilor sarcina a fost de 45,9 kgf pe pastila de oțel (valoarea calculată după formula lui Hertz fiind 3 000 kgf/cm^2; față de suprafața ,,aparentă'' a fîșiei de contact, rezultă circa 650 kgf/cm^2).

La anumite intervale de timp, în vederea verificării condițiilor de funcționare, s-a determinat viteza de uzură pentru uleiul STAS 410. În acest mod s-a putut constata influența pe care o are aditivul asupra suprafeței metalice de bronz. A fost necesar ca după fiecare încercare, instalația să funcționeze și cu un ulei puțin vîscos pentru îndepărtarea unui strat de metal de cîțiva microni, format în urma determinării anterioare.

Tabelă

Formula de lubrifiere utilizată	Viteza de uzură *Vu* mg/oră
1. *Ulei STAS 10004 V*	2,6
2. Ulei STAS 10004 V + 6 % CRCL[1]	0,63
3. ,, ,, ,, + 1 % naftenat de plumb	0,8
4. ,, ,, ,, + 5 % ulei sulfurizat	0,27
5. ,, ,, ,, + 10 % D.T.F. Zn[1]	0,5
6. ,, ,, ,, + 6 % CRCL + 10 % D.T.F. Zn	0,4
7. ,, ,, ,, + 6 % CRCL + 1 % naftenat de plumb	0,07
8. ,, ,, ,, + 10 % D.T.F. Zn + 1 % naftenat de plumb	0,2
9. ,, ,, ,, + 5 % ulei sulfurizat + 1 % naftenat de plumb	0,3
10. ,, ,, ,, + 10 % D.T.F. Zn + 5 % ulei sulfurizat	0,2
11. ,, ,, ,, + 6 % CRCL + 5 % ulei sulfurizat	0,2
12. Ulei STAS 10003 T	0,4
13. ,, ,, ,, + 1 % naftenat de plumb	0,1
14. ,, ,, ,, + 10 % D.T.F. Zn	0,25
15. ,, ,, ,, + 6 % CRCL + 10 % D.T.F. Zn	0,2
16. ,, ,, ,, + 6 % CRCL + 1 % naftenat de plumb	0,2
17. Ulei Brighstock	6
18. Ulei STAS 410	30

[1] Prescurtări: CRCL — parafină clorurată; D.T.F. Zn — ditiofosfat de zinc.

S-a putut constata datorită colorării neuniforme a inelului, în cazul utilizării aditivilor, că la viteze mari de uzură (în general la sarcini mari), cînd suprafața bucșei de bronz capătă un aspect pronunțat rugos, sarcina nu se repartizează pe întreaga „fîșie de contact” ci pe anumite părți din aceasta. Acest fenomen ar putea explica viteza de uzură mare observată în unele cazuri (ulei STAS 410).

În tabelă, sînt arătate valorile vitezei de uzură obținute pentru uleiurile de mai sus.

Se constată în cazul uleiului STAS 410, că viteza de uzură este $Vu = 30$ mg/oră; pentru uleiul Brighstock neaditivat, $Vu = 6$ mg/oră, fapt explicabil prin conținutul său în produse grele (neeliminate la rafinare), care joacă rol de aditivi de extremă presiune.

Același lucru se poate spune și despre uleiurile 10004 V și 10003 T (2,6 mg/oră și respectiv 0,4 mg/oră).

Formula cea mai eficace în cazul combinațiilor de mai sus, s-a dovedit a fi aditivul CRCL, împreună cu naftenatul de Pb (0,07 mg/oră).

Remarcăm ca o combinație simplă și totodată eficace, uleiul 10004 V cu 5% ulei sulfurizat ($Vu = 0{,}27$ mg/oră).

În concluzie, metoda și instalația realizată, față de sensibilitatea și precizia arătată, permite selectarea lubrifianților lichizi după criteriul uzurii suprafețelor metalice respective. Prin schimbarea materialului cuplului în frecare, și menținerea aceluiași lubrifiant, instalația permite și determinarea calității de antiuzură a materialelor. Astfel, studiindu-se rezistența la uzură a două materiale de antifricțiune: Bz cu 9% Sn și 1% In, față de Pb cu 20% Sn și 1% In, din curbe de uzură similare celor din fig. 4, s-au dedus vitezele la uzură ale celor două compoziții: 18 mg/h, și respectiv 30 mg/h. (ulei STAS 410; sarcina 30 kgf pe pastilă; temperatura uleiului 49°C).

De asemenea, aparatura poate fi folosită și la studiul fenomenelor de uzură în condiții variabile de temperatură, viteză de alunecare etc.

Cercetările efectuate în legătură cu realizarea acestei instalații [1], [2], au condus la concluzia că studiile asupra materialelor și lubrifianților, în diferite condiții, sînt mult mai comode și concludente dacă sînt efectuate în prealabil pe modele adecvate, decît dacă ele sînt efectuate direct pe mașini sau motoare, verificare necesară abia în etapa următoare. Aceasta deoarece, în agregate, parametrii care condiționează fenomenul sînt greu de menținut constanți. Chiar dacă se reușește menținerea constantă a unor parametri ,,externi'' (temperatură, turație, sarcină etc.) totuși ,,condițiile locale'' ale cuplului de uzură, care determină direct gradul de uzură al acestuia, se modifică în timp, influențînd rezultatul măsurătorii. Imposibilitatea de a urmări pe instalații complexe modul de variație a condițiilor locale, poate conduce la concluzii greșite, privind influența diferitor parametri asupra uzurii.

Încercările pe mașini și motoare, în condiții normale deci, sînt necesare ca o verificare a concluziilor de pe modele, totuși acestea trebuind să fie efectuate într-un număr mai mare de încercări.

Constatăm că la aceleași concluzii au ajuns și autorii lucrărilor [3], [4], [8] care își exprimă păreri asemănătoare, cu privire la necesitatea încercării pe modele și aspectele fenomenului de uzură.

Primită la redacție la 19 octombrie 1961

ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИОАКТИВНОГО МЕТОДА ДЛЯ ОЦЕНКИ СМАЗОЧНЫХ КАЧЕСТВ МАСЕЛ С ПРИСАДКАМИ ПО ИЗНОСУ ПОВЕРХНОСТЕЙ II

РЕЗЮМЕ

В продолжении работ [1,] [2], описывается метод и установка полученная в результате этих исследований. Метод и установка позволяют устранить несколько источников погрешностей, причем полу-

чается приемлемое воспроизведение (максимальное относительное отклонение равно ±25%); при этом отказались полностью от рециркуляции масла, а трущаяся пара состоит из стальной детали с плоской поверхностью и втулки из изучаемого материала. Так как контакт осуществляется по „полосе”, то этим ограничивается эффект гидродинамической смазки, уменьшающий износ.

Перемещение ванны с маслом осуществляется по вертикали, а в нижней части установки находится система датчиков, состоящая из 6 счетчиков Г—М. Паразитный фон, произведенный радиоактивной втулкой, устраняется путем экранирования свинцом.

Приводится ряд результатов, полученных при различных присадках чрезвычайного давления, причем количественное определение изношенного металла осуществляется эталонированием.

STUDY OF A RADIOACTIVE METHOD FOR ESTIMATING THE LUBRICATING QUALITIES OF COMPOUND OILS BY USING THE WEAR OF SURFACES. II.

ABSTRACT

This paper is a continuation of the investigations presented in papers [1], [2] and describes the equipment constructed for this purpose. This equipment and the method employed lead to the elimination of several error-producing factors permitting an acceptable reproducibility of results (the maximum relative deviation is ± 25%); the re-circulation of oil has been eliminated and the lubricated system employed consists of a flat steel plate and a bush made of the investigated material, the contact being made on a strip which limits the effect of hydrodynamic lubrication. The oil vessel is displaced vertically and a system of six G.M. counters is mounted at the lower part of the equipment; for eliminating the direct effect of radiations from the bush, a lead screen has been intercalated between the bush and the counter system.

A series of results obtained with various extreme pressure additives are presented, the determination of the quantity of wear particles being made by calibration (accuracy is of the order: 10^{-7} g/cm^3).

BIBLIOGRAFIE

1. D. PAVELESCU, I. ILIUC, S. BARBUL, *Metodă pentru studiul uzurii lagărelor cu izotopi radioactivi*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *6* (1960).
2. D. PAVELESCU, I. ILIUC, S. BARBUL, *Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităţilor lubrifiante a uleiurilor aditivate prin prizma uzurii suprafeţelor*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *2* (1961).

3. V. S. SADÎKEAN, A. N. TOTROPCINOV, *Metode pentru stabilirea proprietăților de rezistență la uzură a uleiurilor de motoare Diesel cu ajutorul izotopilor radioactivi*. Trad. din l. rusă. Vestn. vses., in-ta, j-d. transp. U.R.S.S., **19**, *6*, 13–17 (1960).
4. LENGYEL TÁMAŚ, *Cercetarea proprietății de ungere prin tehnica trasorilor radioactivi*. Magyar Kémikusock Lapja, *9*, Budapest, sept., 381–389 (1960).
5. N. TIPEI, *Hidroaerodinamica lubrificației*. Ed. Acad. R.P.R. București, 1957, 11 – 87 și 528 – 538.
6. E. P. DIACENKO, *Primenenie radioactivnîh izotopov v tehnike*. Mașghiz, Moskva, 1958.
7. H. H. ZUDEIMA, *Caracteristicile tehnice ale uleiurilor lubrifiante* (trad. l. cehă) IDT, București, 1954.
8. H. TANSCHER, M. FLEISCHER, *Comportarea la uzură a fontelor în funcție de structură și starea suprafeței*. Metalloberfläche München, sept. 1961.
9. I. G. TURCAN, G. V. VINOGRADOV, *O nouă mașină cu patru bile pentru aprecierea proprietăților de antiuzură ale uleiurilor lubrifiante* (trad. IDT din l. rusă) din Zavodskaia laboratoria, **25**, *11*, 1394–1396 (1959).
10. H. G. WENDEROTH, Untersuchungen über den Verschleiss von Grauguss mit einer Prüfmaschine für hin – und hergehende Bewegung, Dissertation, Tehn. Univers. Berlin 1960 – D 83.

INFLUENȚA FAȚETEI ȘI A RAZEI DE RACORDARE ASUPRA UZURII SCULEI AȘCHIETOARE

DE

M. POPOV, I. MITRICĂ și E. DECIU

Ascuțirea părții active a plăcuței cuțitului la geometria optimă [4] duce la mărirea durabilității sculei așchietoare. După stabilirea geometriei optime, corespunzătoare celei mai lente evoluții în timp a uzurii pentru fiecare material prelucrat, trebuie căutate alte metode de creștere a durabilității și deci de micșorare a consumului de scule.

În această lucrare se vor prezenta rezultatele cercetărilor întreprinse la Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R. privind mărirea durabilității cuțitului de strung cînd acestuia i se execută o fațetă de-alungul muchiei principale precum și o racordare a vîrfului cuțitului.

INFLUENȚA FAȚETEI ASUPRA DURABILITĂȚII CUȚITULUI

S-a arătat că orice modificare a unghiului de degajare γ atrage după sine o variație a durabilității. Cu alte cuvinte, o dată găsită valoarea optimă a acestui unghi, orice modificare a lui atrage după sine o scădere a durabilității [1], [2], [4].

Pentru a înțelege modul în care fațeta executată de-a lungul muchiei așchietoare sub un unghi diferit de γ duce la creșterea durabilității sculei (fig. 1) este necesar să se examineze fenomenele ce iau naștere în zona așchierii.

Este cunoscut că în timpul desprinderii așchiei aceasta este supusă la solicitări, care duc la deformații elastice și plastice ale ei. Din felul în care evoluează uzura pe fața de degajare și din examenul la microscop a unei secțiuni longitudinale prin așchie, s-a constatat că deformațiile cele mai accentuate sînt în partea unde așchia vine în contact cu suprafața sculei. S-a dovedit experimental [5] că în zona muchiei așchietoare, stratul

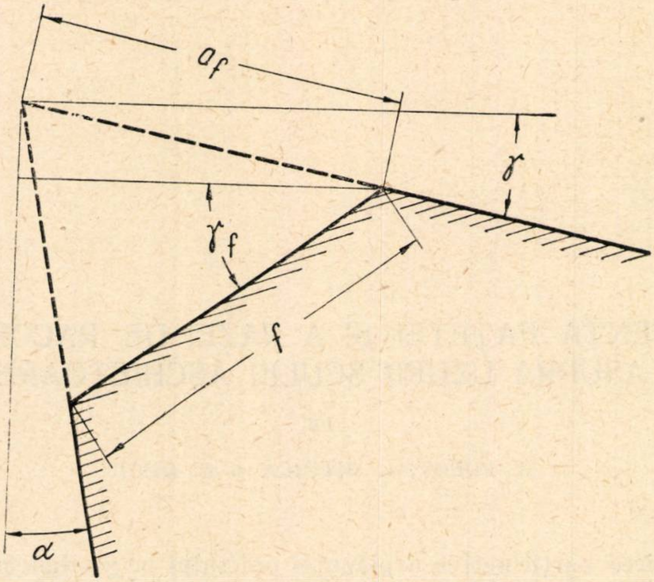

a_f
γ
γ_f
f
α

Fig. 1. – Elementele geometrice ale cuţitului de strung cînd acestuia i se execută faţetă.

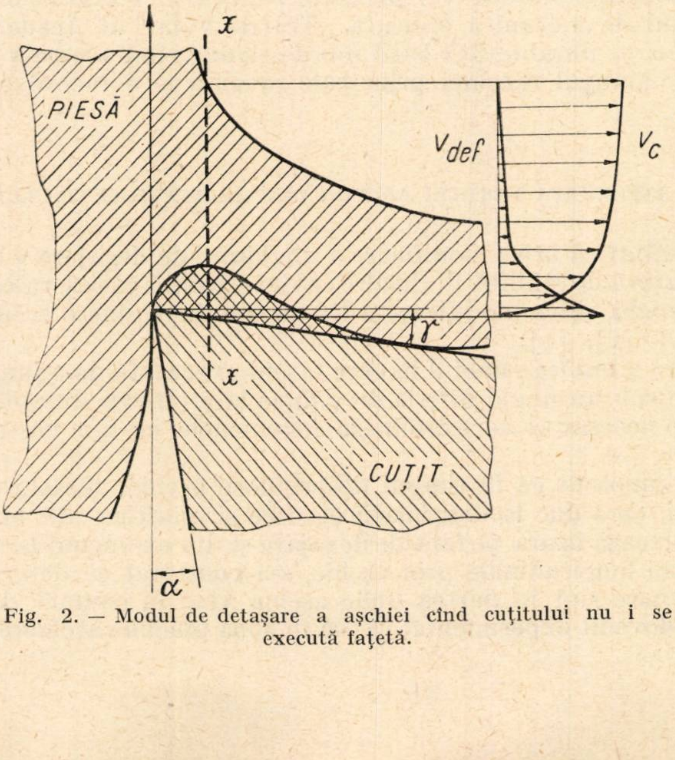

x
PIESĂ
v_{def}
v_c
γ
x
CUŢIT
α

Fig. 2. – Modul de detaşare a aşchiei cînd cuţitului nu i se execută faţetă.

inferior al așchiei ce vine în contact cu suprafața de degajare are viteza de deplasare zero și viteza de deformație maximă. În urma experiențelor efectuate în legătură cu această problemă s-a putut identifica o zonă din așchie unde vitezele de deplasare și de deformație sînt variabile. Această zonă este limitată de curba de la care mai departe în secțiunea transversală viteza de deformare este practic zero iar cea de deplasare constantă, figura 2.

Pornind de la aceste constatări cunoscute se poate spune că unghiul de degajare optim, are importanță în afara zonei de deformații sus amintită

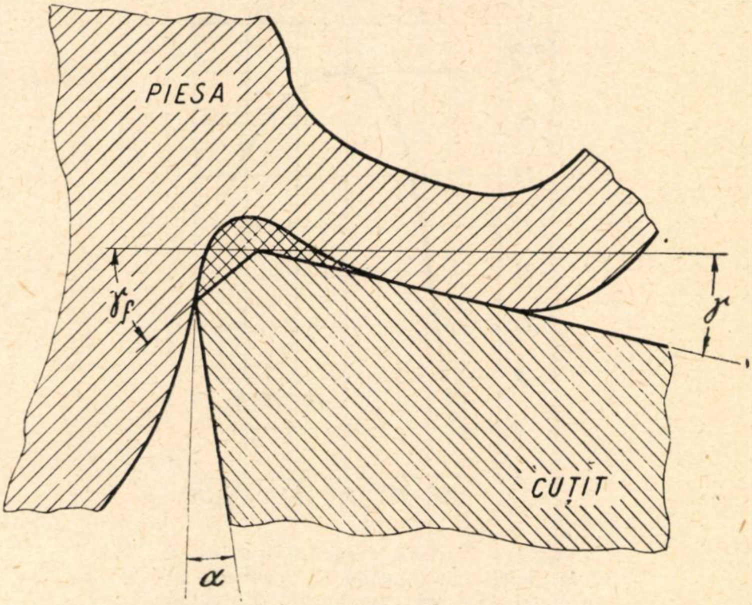


Fig. 3. — Modul de detașare a așchiei, cînd cuțitului i se execută fațetă de-a lungul muchiei principale așchietoare.

și unde de altfel începe să se formeze uzura pe suprafața de degajare. Executarea fațetei în așa fel încît să nu se depășească zona de deformații maxime din așchie trebuie să ducă la îmbunătățirea durabilității sculei. Aceasta deoarece drumul pe care îl are de parcurs uzura de pe fața de degajare, pentru a ajunge la muchia așchietoare principală și astfel să distrugă forma ei geometrică și prin aceasta să scadă proprietățile așchietoare ale sculei, este mai lung și deci va crește timpul efectiv de lucru al cuțitului de strung (fig. 3).

Verificarea experimentală a ipotezei de mai sus a dus la confirmarea ei. Astfel au ieșit în evidență două probleme importante și anume :

a) Unghiul de inclinație al fațetei γ_f de care depinde forma și mărimea zonei de deformație maximă din așchie.

b) Lățimea fațetei f, care așa cum s-a arătat este strîns legată de lungimea zonei de deformații maxime din așchie.

În cercetarea primului aspect s-a pornit de la ipoteza că dimensiunea a_f măsurată pe suprafața de degajare reprezintă lungimea din zona de deformaţie maximă, care poate fi utilizată pentru faţetă fără ca aceasta să influenţeze negativ asupra durabilităţii. Din figura 1 se poate deduce cu uşurinţă expresia

$$f = \frac{\cos(\alpha + \gamma)}{\cos(\alpha - \gamma_f)}\, a_f. \tag{1}$$

Din relaţia (1) se observă că lungimea faţetei este funcţie de unghiurile γ, α şi γ_f. Dintre aceste unghiuri, cel de degajare şi cel de aşezare au valori bine determinate în cazul unui anumit material de prelucrat şi anume ele au mărimile optime bine determinate [4]. În concluzie, pentru un anumit material ele sînt constante şi deci în acest caz lăţimea f a faţetei depinde numai de valoarea unghiului γ_f.

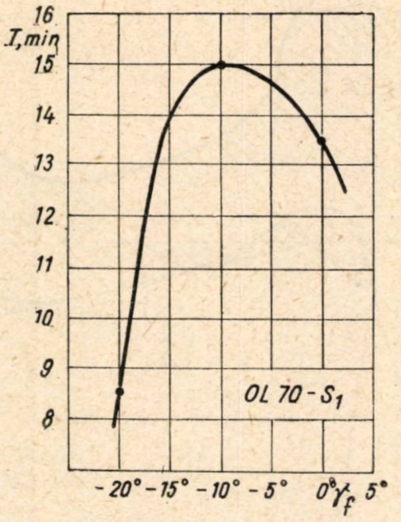


Fig. 4. — Variaţia durabilităţii cuţitului în funcţie de unghiul de înclinaţie al faţetei, în cazul experimentării oţelului OL 70.

Pentru a afla valorile extreme ale lui f, se anulează derivata expresiei (1).

$$\frac{df}{d\gamma_f} = -\frac{\sin(\alpha - \gamma_f)\cos(\alpha + \gamma)}{\cos^2(\alpha - \gamma_f)}\, a_f, \tag{2}$$

obţinîndu-se rădăcinile

$$\alpha - \gamma_f = 2k\pi; \qquad \alpha - \gamma_f = (2k + 1)\,\pi.$$

Dintre aceste valori, interesantă pentru cazul real al aşchierii este

$$\gamma_f = \alpha,$$

cînd unghiul γ_f se măsoară ca în figura 1. Ținînd însă seama de convenția de semne din teoria așchierii metalelor, rezultă că soluția de mai sus se scrie

$$-\gamma_f = \alpha, \tag{3}$$

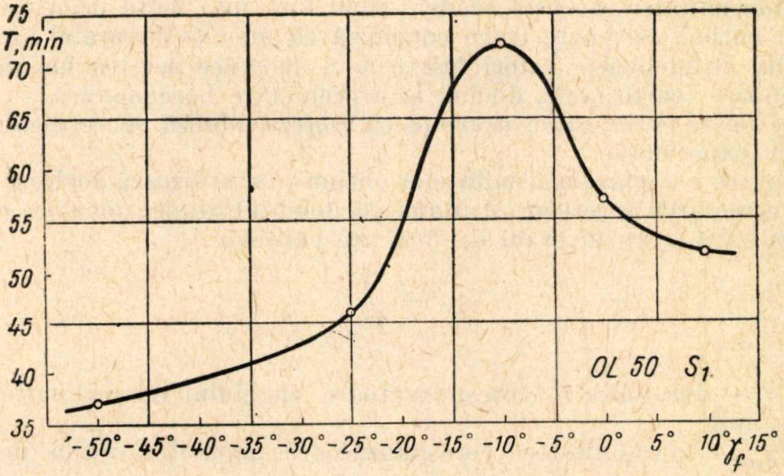


Fig. 5. — Variația durabilității cuțitului în funcție de unghiul de înclinație al fațetei în cazul experimentării oțelului OL 50.

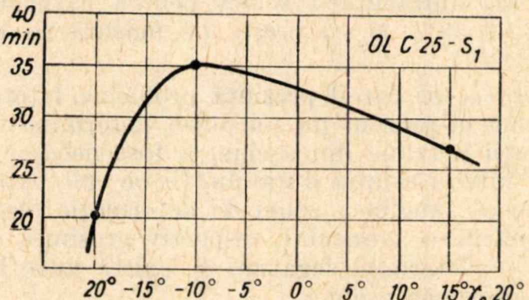


Fig. 6. — Variația durabilității cuțitului în funcție de unghiul de înclinație al fațetei în cazul experimentării oțelului OLC 25.

care conduce la valoarea minimă a lungimii f a fațetei. Aceste cîteva aprecieri teoretice asupra valorii optime a unghiului γ_f au fost confirmate de către experiențe care au fost efectuate pe oțel carbon obișnuit și pe oțel carbon de calitate.

Unghiului γ_f i s-au dat valori mai mici decît unghiului de degajare optim deoarece pentru valori mai mari ca acesta muchia așchietoare principală pierde din robustețe și se distruge ușor.

Rezultatele obținute sînt prezentate în diagramele din figurile 4, 5 și 6.

În aceste diagrame este reprezentată influenţa pe care o are valoarea unghiului de înclinaţie al faţetei asupra durabilităţii. Se constată că în cazurile studiate, cu creşterea valorii unghiului de înclinaţie al faţetei, creşte foarte repede durabilitatea sculei, aceasta pînă la valoarea optimă a lui γ_f. După această valoare o dată cu creşterea valorii unghiului γ_f scade durabilitatea, această scădere fiind însă mai lentă decît pe prima parte a curbei. Se poate trage concluzia că nu este favorabil să se dea unghiului de înclinaţie valori foarte mici deoarece acestea fac să scadă durabilitatea foarte mult, ducînd la o prelucrare neeconomică.

Se poate constata cu uşurinţă că ipoteza admisă se verifică perfect de către experienţă.

Pentru comparaţia rezultatelor obţinute se utilizează aceleaşi criterii ca şi în cercetările anterioare şi anume coeficientul adimensional de corecţie a durabilităţii, care în cazul de faţă are expresia

$$\tau_{\gamma f} = \frac{T\gamma_f}{T\gamma_{\text{opt}}}, \tag{4}$$

unde

$T\gamma_f$ — durabilitatea corespunzătoare unghiului de inclinaţie al faţetei γ_f, min.

$T\gamma_{\text{opt}}$ — durabilitatea corespunzătoare unghiului optim de degajare γ_{opt}, min.

Se constată că prin utilizarea faţetei înclinată cu un unghi $-\gamma_f = = \alpha = 10°$ creşterea durabilităţii sculei pentru cazurile examinate este cuprinsă între $12 \div 38\%$ şi ea creşte pe măsură ce unghiul γ_{opt} este mai mare.

Al doilea aspect pe care-l prezintă problema faţetei este lăţimea f a ei. Deoarece pînă în prezent nu s-a putut determina teoretic lungimea zonei de deformaţii maxime din aşchie, a fost necesar să se determine influenţa lăţimii faţetei asupra durabilităţii pe cale experimentală.

Se cunoaşte că lungimea zonei de deformaţie maximă din aşchie este funcţie de mărimea avansului, respectiv grosimea aşchiei, de aceea s-a căutat ca să se determine legătura ce există între lăţimea faţetei şi avans, respectiv grosimea aşchiei.

Experienţele au fost efectuate pe OL 50 cu cuţite armate cu plăcuţe din carburi metalice de tipul S_1, ascuţite la geometria optimă respectivă : $\gamma_{\text{opt}} = 10°$; $\gamma_f = -10°$; $\alpha = 11°$; $\alpha_1 = 15°$; $\varkappa = 45°$; $\varkappa_1 = 10°$; $\lambda \approx 0°$.

Rezultatele obţinute în cadrul acestor experienţe sînt prezentate în diagramele din figurile 7, 8 şi 9.

În figura 7 este prezentată influenţa pe care o are lăţimea faţetei asupra durabilităţii. Se constată ca şi în cazul precedent că această curbă prezintă un maxim care dă valoarea optimă a lăţimii faţetei. Tot din această diagramă se poate constata influenţa pe care o are avansul asupra mărimii optime a lăţimii faţetei şi anume se constată că o dată cu creşterea avansului creşte şi lăţimea faţetei. Pentru a vedea legea după care se conduce această variaţie s-a făcut diagrama din figura 8, unde cu uşurinţă se poate constata că maximele de durabilitate ale celor trei curbe sînt situate pe valoarea 2,8—2,9 a raportului f/a. Reprezentarea sub această formă a condus în cele din urmă la formula :

$$f = (2,8 \div 2,9)\, a = (2,8 \div 2,9)\, s \cdot \sin \varkappa \qquad (5)$$

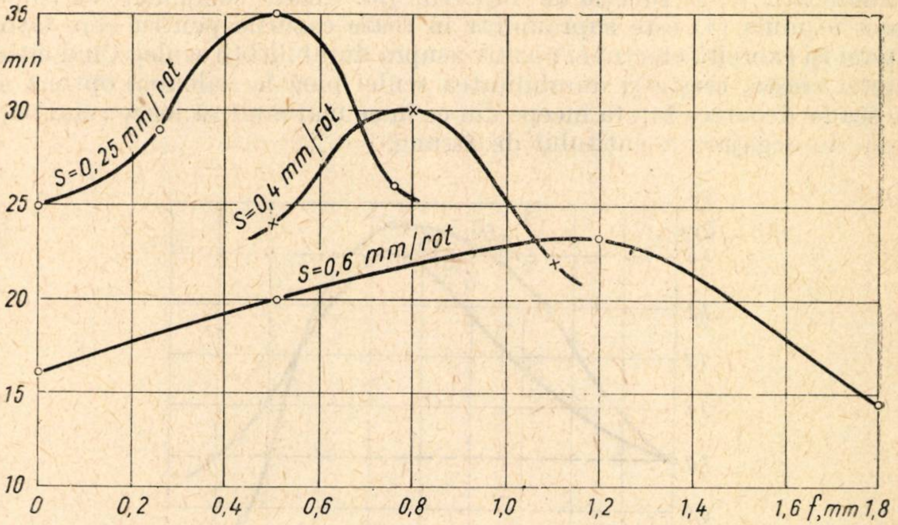


Fig. 7. — Variația durabilității cuțitului în funcție de lățimea fațetei cînd se menține avansul constant, în cazul prelucrării oțelului OL 50.

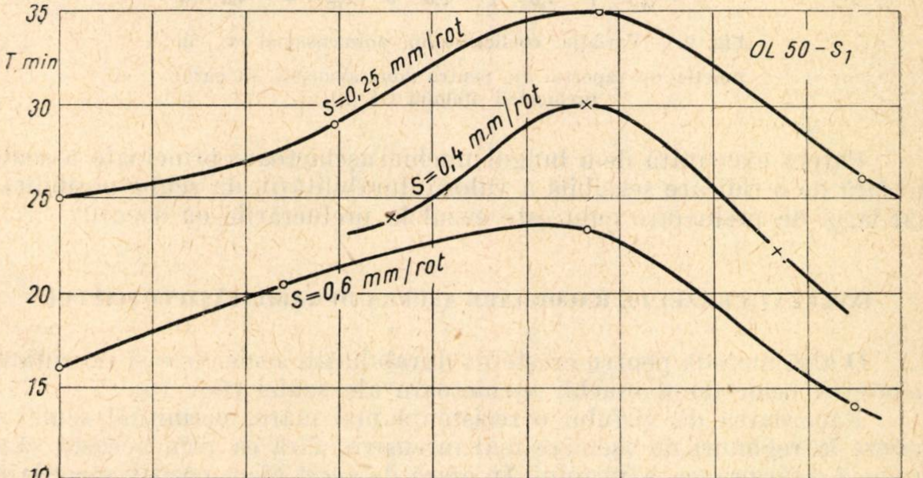


Fig. 8. — Variația durabilității cuțitului în funcție de raportul f/a cînd se menține avansul constant, în cazul prelucrării oțelului OL 50.

unde : a = grosimea așchiei în mm,
s = avansul în mm/rot,
$\varkappa$ = unghiul de atac principal.

Pentru această valoare a lățimii fațetei se obține un maxim de durabilitate pentru scula așchietoare.

În figura 9 se poate aprecia valoarea coeficientului de corecție al durabilității $\tau_{\gamma f}$ în funcție de raportul f/a. Acest coeficient $\tau_{\gamma f}$ calculat după formula (4) este supraunitar în toate cazurile pentru care lățimea fațetei își exercită efectul ei pozitiv asupra durabilității sculei. Cînd lățimea fațetei crește, crește și durabilitatea sculei pînă la valoarea optimă apoi ea scade deoarece fațeta începe din ce în ce mai mult să joace rolul suprafeței de degajare a cuțitului de strung.

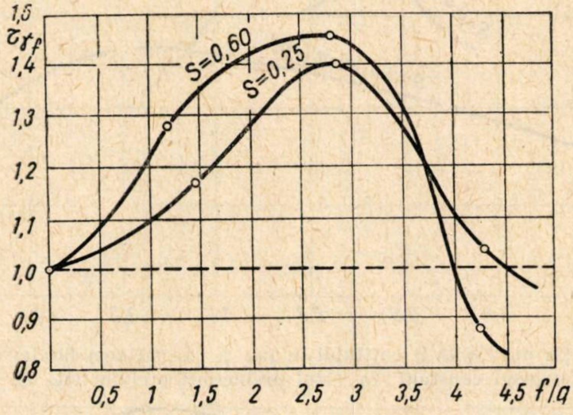


Fig. 9. — Variația coeficientului adimensional τ_{γ_f} în funcție de raportul f/a pentru două avansuri, în cazul prelucrării oțelului OL 50.

Fațeta executată de-a lungul muchiei așchietoare principale a sculei în afară de o ridicare sensibilă a valorii durabilității, dă sculei posibilități mai largi de prelucrare cum este cazul la prelucrările cu șocuri.

INFLUENȚA RAZEI DE RACORDARE ASUPRA DURABILITĂȚII CUȚITULUI

O altă metodă pentru creșterea durabilității sculei este și executarea racordării celor două muchii așchietoare ale sculei (fig. 10).

Racordarea dă vîrfului o rezistență mai mare, permițînd sculei să lucreze la regimuri de așchiere mai intensive, fără ca prin aceasta să se producă o fărîmițare a vîrfului. În afară de acest efect pozitiv racordarea vîrfului influențează și asupra geometriei sculei și anume asupra valorii unghiurilor $\varkappa$ și $\varkappa_1$. Este cunoscut din [4] că scăderea valorii unghiului de atac principal atrage după sine o creștere a durabilității sculei. Dacă se analizează felul cum evoluează valoarea unghiului $\varkappa$ de-a lungul muchiei așchietoare principale la un cuțit de strung cu vîrful racordat, se poate remarca cu ușurință că ia valori de la 0° pînă la $\varkappa$. Privind aceasta prin prisma durabilității se poate spune că în zona vîrfului cuțitului, acolo unde el este solicitat mai mult, prin racordare se creează condiţii superioare de funcţionare. Prin racordare se creează o muchie aşchietoare mai lungă care atrage după sine o micşorare a temperaturii de aşchiere uşurînd

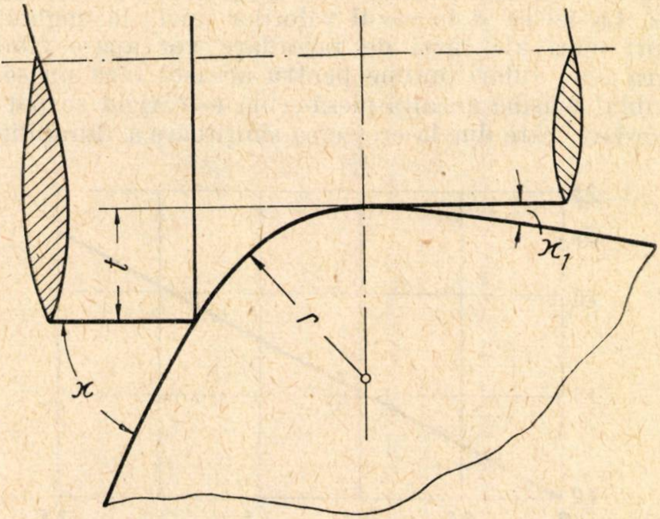


Fig. 10. — Elementele geometrice în cazul racordării vîrfului cuţitului.

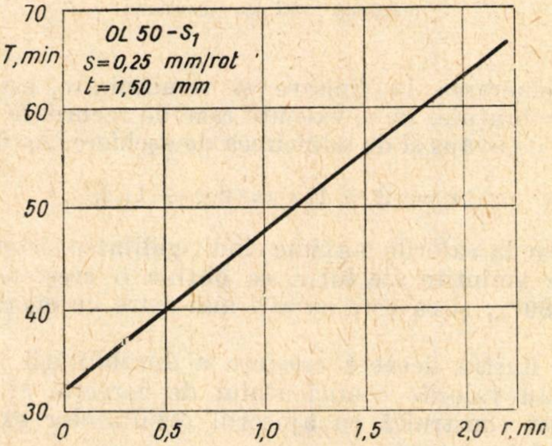


Fig. 11. — Variaţia durabilităţii cuţitului în funcţie de mărimea razei de racordare, în cazul prelucrării oţelului OL 50 la regimul $s=0{,}25$ mm/rot, $t=1{,}5$ mm.

totodată şi îndepărtarea aşchiei. Acest element va duce la creşterea durabilităţii cu atît mai mult cu cît raza de racordare va fi mai mare. Această afirmaţie este foarte bine ilustrată de experienţele din figura 11, care au fost făcute pe OL 50 cu cuțite armate cu plăcuțe din carburi metalice.

Explicația fenomenelor care iau naștere prin modificarea unghiului de atac principal au fost arătate mai înainte [4] și ele sînt valabile și în acest caz. La fel ca și în cazul valorilor mici ale unghiului $\varkappa$ și aici pentru valori mari ale razei de racordare vor apare vibrații și deci, recomandarea unei valori optime pentru această rază nu se poate face. Dacă ansamblul mașină-unealtă-piesă-sculă este rigid se pot utiliza raze mari de racordare, care duc la creșterea simțitoare a durabilității. Pentru cazurile de prelucrarea la finisare și semifinisare, este recomandabil, pentru a evita vibrațiile, să se execute raze de racordare ale căror valori să fie în funcție de avans și de adîncimea de așchiere. Astfel se recomandă

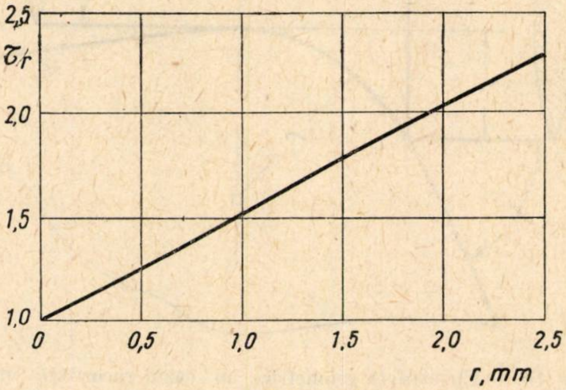


Fig. 12. — Variația coeficientului τ_r în funcție de mărimea razei de racordare.

$$r = (2 \div 4)\, s = (0{,}2 \div 1)\; t. \tag{6}$$

Se va merge la valorile maxime cînd rigiditatea sistemului este mare. Pentru valorile amintite ale lui r, se obține o creștere a durabilității sculei de 30 ÷ 80%, și ea este cu atît mai mare cu cît raza de racordare este mai mare.

Pentru a ilustra această creștere a durabilității în diagrama din figura 12 se dau valorile coeficientului de corecție al durabilității τ_r. Diagrama a fost construită cu ajutorul rezultatelor experimentale din figura 11, ținînd seama că

$$\tau_r = \frac{T_r}{T_{r=0}}, \tag{7}$$

unde s-a notat cu

T_r = durabilitatea cuțitului de strung pentru diferite valori ale razei de racordare;

$T_{r=0}$ = durabilitatea cuțitului de strung în cazul cînd $r = 0$ deci fără racordarea vîrfului.

Coeficientul de corecție al durabilității τ_r are întotdeauna valori mai mari ca unitatea și crește o dată cu creșterea valorii razei de racordare.

În afară de aceasta nu trebuie omisă influența pe care o are raza de racordare asupra calității suprafeței prelucrate. Astfel pentru un avans constant, cu cît raza de racordare va fi mai mare, cu atît se va obține o calitate de suprafață mai bună. Aceasta deoarece, o dată cu creșterea razei de racordare, scade suprafața de așchie rămasă pe piesă.

În cadrul elementelor geometrice ale cuțitului de strung, adică unghiurile de degajare, de așezare, de atac și de înclinație a muchiilor așchietoare, uzura fețelor active mai este influențată de fațetă și de raza de racordare.

Studiul de față a dovedit că una din importantele căi de creștere a durabilității și deci de micșorare a consumului de scule este practicarea de-a lungul muchiei principale a cuțitului de strung a unei fațete. Executarea acestei fațete nu trebuie făcută oricum, deoarece ea numai în anumite condiții își poate atinge scopul. Se disting două elemente mai importante ale fațetei și anume lățimea fațetei f și unghiul de înclinație al ei γ_f. Examinîndu-se echilibrul deformațiilor plastice în zona așchierii, s-a constatat că numai o anumită valoare a unghiului γ_f poate duce la cea mai mare creștere a durabilității. Teoretic cît și experimental, s-a dovedit că există o strînsă legătură între unghiul de înclinație al fațetei și unghiul de așezare principal. Pentru ca să se obțină maximum de durabilitate pentru sculă, aceste două unghiuri trebuie să fie egale în valoare, sau altfel exprimat :

$$-\gamma_f = \alpha.$$

Creșterea durabilității prin utilizarea fațetei va fi cu atît mai mare cu cît între unghiul optim de înclinare al fațetei γ_f și unghiul optim de degajare γ_{opt} va fi o diferență mai mare.

Celălalt element al fațetei, adică lățimea, are o importanță deosebită deoarece alegerea greșită a ei poate duce la micșorarea durabilității sculei și nicidecum la creșterea ei. Pentru ca fațeta să-și îndeplinească rolul este absolut necesar ca lățimea ei să fie mai mică decît cea a deformațiilor plastice ce apar pe așchie în zona ei de contact cu suprafața de degajare. Lățimea fațetei este funcție de grosimea așchiei și se recomandă :

$$f = (2{,}8 \div 2{,}9)\,a$$

ca valoare optimă. Zona deformațiilor plastice din așchie crește o dată cu creșterea grosimii așchiei și deci se va permite executarea unei fațete cu lățimea mai mare.

În afară de faptul că fațeta executată de-a lungul muchiei așchietoare duce la creșterea durabilității, ea dă în același timp sculei o rezistență mai mare la şocuri. Prelucrarea cu şocuri a pieselor se poate executa în bune condiții, numai dacă se execută fațeta de-a lungul muchiei aşchietoare principale, deoarece aceasta va creea condiții favorabile unei rezistențe mai mari la fărîmițarea muchiilor.

O altă cale prin care se poate ajunge la creşterea durabilității s-a dovedit a fi raza de racordare de la vîrful cuțitului. Acest element al geometriei sculei influențează asupra durabilității în mod similar cu unghiul de atac principal. Cauza constă în faptul că o dată cu creşterea razei de racordare creşte şi lungimea muchiei aşchietoare a cuțitului de strung, care vine în contact cu materialul piesei. Din acest motiv va creşte şi suprafața de contact de pe fața de aşezare principală a cuțitului şi deci se va obține o scădere a presiunilor specifice de pe această suprafață de contact, care duce în mod evident la o creştere a durabilității sculei. Rezultă că, cu cît vom face mai mare raza de racordare cu atît mai mult va creşte durabilitatea. Ca şi în cazul unghiului de atac principal şi aici vor apare vibrații pentru raze mari de racordare. Alegerea mărimii razei de racordare trebuie făcută şi în funcție de rigiditatea sistemului piesă-sculă-maşină-unealtă. Pentru a uşura alegerea ei se recomandă ca valoarea razei de racordare să nu depăşească limitele

$$r = (2 \div 4)\, s = (0{,}2 \div 1)\, t.$$

Raza de racordare executată în mod corect duce la o creştere a durabilității de $30 \div 80\%$ ceea ce desigur are o mare importanță pentru consumul de scule. Creşterea aceasta de durabilitate nu se datoreşte numai îmbunătățirilor pe care ea le aduce condițiilor de evoluție a uzurii pe suprafața de contact ci şi faptul că duce la o creştere a robusteței vîrfului cuțitului.

Primită la redacție la 29 iulie 1961

ВЛИЯНИЕ ГРАНИ И РАДИУСА СОПРЯЖЕНИЯ НА ИЗНОС РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается влияние, оказанное гранью и радиусом сопряжения вершины резца на износ рабочих граней пластинки, то есть на стойкость последней.

Проведенные опыты позволили дать рекомендации об оптимальных значениях для угла наклона грани, ширины грани и радиуса сопряжения.

Полученные результаты даются на приведенных в работе диаграммах и в виде расчетных формул.

INFLUENCE D'UNE FACE DE COUPE SECONDAIRE ET DU RAYON D'ARRONDISSEMENT DU COIN SUR L'USURE DES OUTILS DE COUPE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, les auteurs étudient l'influence que peut exercer une face de coupe secondaire et le rayon d'arrondissement du coin de l'outil sur l'usure des faces actives de la plaquette, c'est-à-dire sur la durabilité de cette dernière.

Les expériences effectuées permettent de faire des recommandations en ce qui concerne les valeurs optima de l'angle de pente de la face de coupe secondaire, de sa largeur et du rayon d'arrondissement du coin.

Les résultats obtenus sont rendus aussi bien dans les diagrammes accompagnant le travail, que sous forme de formules de calcul.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Eléments géométriques de l'outil de tour lorsqu'on exécute une face de coupe secondaire.

Fig. 2. — Mode d'enlèvement du copeau lorsque l'outil n'est pas pourvu d'une face de coupe secondaire.

Fig. 3. — Mode d'enlèvement du copeau lorsque l'outil est pourvu d'une face de coupe secondaire le long de l'arête principale.

Fig. 4. — Variation de la durabilité de l'outil en fonction de l'angle de pente de la face de coupe secondaire lors de l'expérimentation de l'acier OL 70.

Fig. 5. — Variation de la durabilité de l'outil en fonction de l'angle de pente de la face de coupe secondaire lors de l'expérimentation de l'acier OL 50.

Fig. 6. — Variation de la durabilité de l'outil en fonction de l'angle de pente de la face de coupe secondaire lors de l'expérimentation de l'acier OLC 25.

Fig. 7. — Variation de la durabilité de l'outil en fonction de la largeur de la face de coupe secondaire, l'avance étant maintenue constante, dans le cas du tournage de l'acier OL 50.

Fig. 8. — Variation de la durabilité de l'outil en fonction du rapport f/a, l'avance étant maintenue constante, dans le cas du tournage de l'acier OL 50.

Fig. 9. — Variation du coefficient sans dimensions τ_{γ_f} en fonction du rapport f/a, pour deux avances, dans le cas du tournage de l'acier OL 50.

Fig. 10. — Eléments géométriques concernant l'arrondissement du coin de l'outil.

Fig. 11. — Variation de la durabilité de l'outil en fonction de la valeur du rayon d'arrondissement du coin dans le cas du tournage de l'acier OL 50, au régime de $s=0,25$ mm/rot et $t = 1,5$ mm.

Fig. 12. — Variation du coefficient τ_r en fonction de la valeur du rayon d'arrondissement du coin.

BIBLIOGRAFIE

1. POPOV M., PAVELESCU D, MITRICĂ I., DECIU E., CALCIU M., PASCU N., *Cu privire la parametrii geometrici ai cuțitului armat cu plăcuță de carburi metalice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *2* (1957).
2. POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., *Rezistența la uzură a sculei în funcție de parametrii geometrici ai acesteia.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *4* (1960).
3. POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., *Geometria optimă a cuțitului de strung armat cu plăcuțe din carburi metalice pentru așchierea oțelurilor OLC 45, OL 70 și OL 60.* Metalurgia și construcția de mașini, **XI** *6*, (1960).
4. POPOV M., MITRICĂ I., DECIU E., *Geometria sculei așchietoare pentu prelucrarea oțelurilor carbon.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *6* (1961).
5. ЗОРЕВ Н. Н., *Вопросы механики процесса резания металлов.* Машгиз, Москва, 1956.

ASUPRA PRECIZIEI DE PRELUCRARE A PIESELOR CONICE

DE

I. LĂZĂRESCU, G. ABRUDAN și G. ARGHIR¹)

Îmbunătățirea preciziei de prelucrare a cuțitelor profilate reclamă o cercetare analitică a influenței parametrilor geometrici ai sculei asupra deformării profilului prelucrat.

Este cunoscut faptul că mărimea parametrilor geometrici principali ai sculei, respectiv unghiul de degajare γ și unghiul de așezare α, depinde de condițiile în care se desfășoară procesul de așchiere. Este necesar însă ca, la adaptarea valorilor acestor parametri, să se urmărească influența lor asupra erorilor teoretice introduse [1].

În legătură cu această problemă, se va analiza un caz particular — prelucrarea unei piese tronconice, caz des întîlnit, mai ales avînd în vedere faptul că oricare profil poate fi considerat ca format din elemente rectilinii.

Fie, de exemplu, de prelucrat piesa din figura 1, cu ajutorul unui cuțit profilat disc.

Cuțitul, fiind prevăzut cu unghi de degajare $\gamma \neq 0$, și considerat ca avînd muchia tăișului rectilinie, va genera un hiperboloid de rotație cu o singură pînză — în loc de un con de rotație. Într-adevăr, într-un sistem de referință tridimensional cartezian (fig. 2), muchia tăișului cuțitului de ecuație

$$\begin{aligned} y &= \pm\, mx, \\ z &= H_p, \end{aligned} \tag{1}$$

rotindu-se pe cercul de ecuație

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= \lambda, \\ x &= \mu, \end{aligned} \tag{2}$$

---

¹) Institutul politehnic, Cluj.

va genera hiperboloidul

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{H_p}{m}\right)^2}+\frac{y^2}{H_p^2}+\frac{z^2}{H_p^2}=1, \qquad (3)$$

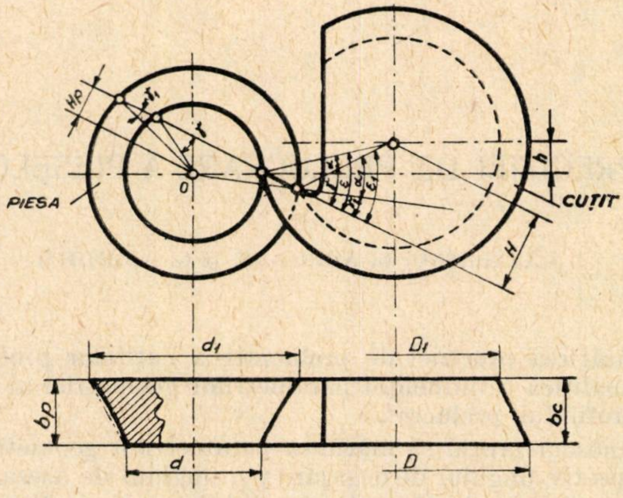

Hp
γ1
γ
O
PIESA
α
ε
α1
ε1
h
CUŢIT
H
d1
D1
bp
bc
d
D

Fig. 1. — Strunjirea exterioară a unei piese tronconice.

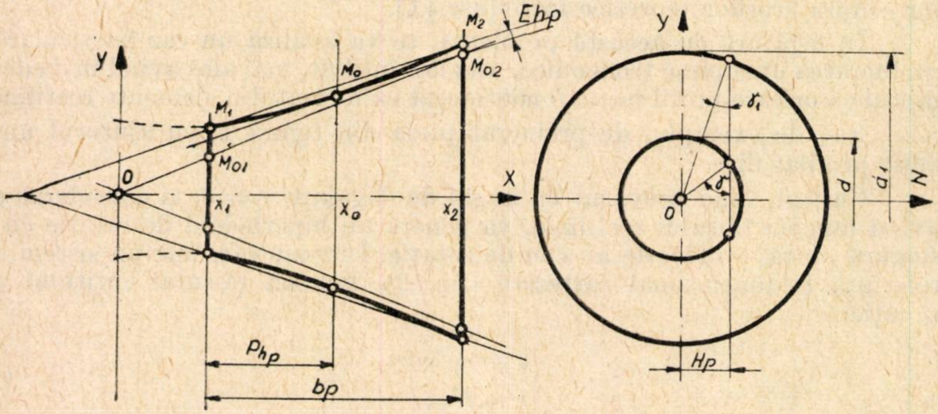

Y
M2
Ehp
Mo
Mo2
M1
Mo1
O
X
x1
xo
x2
Php
bp
Y
γ1
γ
O
d
d1
Z
Hp

Fig. 2. — Apariţia formei hiperboloide la prelucrarea exterioară a unei piese „tronconice'', cu o sculă cu muchia tăişului rectilinie.

în care Hp este distanţa de la axa piesei la planul ce trece prin faţa de degajare a cuţitului (fig. 1).

Se poate determina mărimea erorii care apare la prelucrarea exterioară a piesei conice — ca abatere de la forma prescrisă, pe care o vom numi eroare *hiperbolică* [1]. Intersectîndu-se hiperboloidul cu planul $z = 0$, se obține o hiperbolă de ecuație

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{H_p}{m}\right)^2} + \frac{y^2}{H_p^2} = 1. \tag{4}$$

Planele

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ x &= x_2 \end{aligned} \tag{5}$$

vor limita lățimea piesei prelucrate. Așadar

$$x_2 - x_1 = b_p \tag{6}$$

în care b_p este lățimea piesei (fig. 1 și 2).

Intersecția hiperbolei cu cele două plane determină punctele M_1 (x_1, y_1) și M_2 (x_2, y_2) — și punctele simetrice ale acestora.

Dreapta dusă prin punctele M_1 și M_2 are ecuația

$$y = m_0 (x - x_1) + y_1 \tag{7}$$

în care

$$m_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{8}$$

Luîndu-se o dreaptă paralelă cu dreapta ce trece prin punctele M_1 și M_2, de ecuație

$$y = m_0 x + n \tag{9}$$

și punîndu-se condiția ca aceasta să fie tangentă la hiperbola de ecuație (4), se obține

$$n = H_p \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2}. \tag{10}$$

Punctul de tangență M_0 va avea coordonatele

$$x_0 = \frac{m_0 n}{m^2 - m_0^2}, \tag{11}$$

$$y_0 = m_0 x_0 + n.$$

Distanța de la punctul de tangență M_0 pînă la dreapta ce trece prin punctele M_1 și M_2 reprezintă mărimea maximă a erorii hiperbolice și are valoarea

$$E_{hp} = \left| \frac{(y_0 - y_1) - m_0 (x_0 - x_1)}{\sqrt{1 + m_0^2}} \right|. \tag{12}$$

Expresia (12) poate fi transformată. Din figura 1, se găseşte

$$\cos\gamma_1 = \sqrt{1-\left(\frac{d}{d_1}\sin\gamma\right)^2}. \tag{13}$$

Din figura 2, se determină

$$y_1 = \frac{d}{2},\ y_2 = \frac{d_1}{2}, \tag{14}$$

$$H_p = \frac{d}{2}\sin\gamma, \tag{15}$$

$$y_{01} = \frac{d}{2}\cos\gamma,\ y_{02} = \frac{d_1}{2}\cos\gamma_1 \tag{16}$$

$$m = \frac{y_{02}-y_{01}}{b_p}, \tag{17}$$

în care d este diametrul mic al piesei tronconice,
d_1 — diametrul mare al piesei tronconice,
γ — unghiul de degajare corespunzător diametrului d,
γ_1 — unghiul de degajare corespunzător diametrului d_1,
y_{01} şi y_{02} — ordonatele asimptotei la hiperbola de ecuaţie (4), corespunzătoare lui $x = x_1$ şi $x = x_2$.

Din ecuaţia (4), se deduce

$$x_1 = \frac{1}{m}\sqrt{y_1^2 - H_p^2}. \tag{18}$$

Luîndu-se în considerare expresiile (6), (8), (10), (11), (13) ... (18), relaţia (12) devine

$$E_{hp} = \frac{1}{\sqrt{4+\left(\frac{1-k_p}{t_p}\right)^2}}\left\{1-\left[\sin\gamma\sqrt{1-\left(\frac{1-k_p}{s_p}\right)^2}+\frac{1-k_p}{s_p}\cos\gamma\right]\right\}d, \tag{19}$$

în care

$$k_p = \frac{d}{d_1},$$

$$t_p = \frac{b_p}{d_1},$$

$$\cos\gamma_1 = \sqrt{1-(k_p\sin\gamma)^2},$$

$$s_p = \cos\gamma_1 - K_p\cos\gamma.$$

Expresia (19), pentru condiţii date, se reduce la forma

$$E_{hp} = C_{Ehp}\, d, \tag{20}$$

în care

$$C_{Ehp} = f(k_p,\ t_p;\ \gamma). \qquad (21)$$

Poziția erorii hiperbolice maxime este dată de expresia (fig. 2)

$$P_{hp} = x_0 - x_1. \qquad (22)$$

Relația (22) se poate transforma, ținîndu-se seama de valoarea lui x_0 și x_1, găsindu-se

$$P_{hp} = \frac{t_p}{s_p}\left[\frac{\sin\gamma}{\sqrt{\left(\frac{s_p}{1-k_p}\right)^2 - 1}} - \cos\gamma\right] d. \qquad (23)$$

Pentru condiții date, expresia (23) devine

$$P_{hp} = C_{Php}\, d \qquad (24)$$

în care

$$C_{Php} = \varphi(k_p,\ t_p,\ \gamma). \qquad (25)$$

Se pot construi diagrame pentru valorile C_{Ehp} și C_{Php}, cu ajutorul cărora se stabilesc imediat, într-un caz concret, valoarea și poziția erorii hiperbolice maxime.

În cazul prelucrării interioare a pieselor conice (fig. 3), utilizîndu-se un cuțit profilat cu muchia tăișului rectilinie, se generează, și în acest caz, un hiperboloid de rotație — în loc de un con de rotație, de ecuație (3). Eroarea hiperbolică, care apare, are valoarea dată de relația (12). În acest caz (vezi figura 3 și 4)

$$\cos\gamma_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{d_1}\sin\gamma\right)^2} \qquad (26)$$

$$y_1 = \frac{d_1}{2}, \qquad y_2 = \frac{d}{2}, \qquad (27)$$

$$H_p = \frac{d_1}{2}\sin\gamma_1, \qquad (28)$$

$$y_{01} = \frac{d_1}{2}\cos\gamma_1,\ y_{02} = \frac{d}{2}\cos\gamma, \qquad (29)$$

$$m = \frac{y_{02} - y_{01}}{b_p}, \qquad (30)$$

$$x_1 = \frac{1}{m}\sqrt{y_1^2 - H_p^2}, \qquad (31)$$

în care d este diametrul mare al alezajului conic,
d_1 — diametrul mic al alezajului conic,
γ — unghiul de degajare corespunzător diametrului d,
γ_1 — unghiul de degajare corespunzător diametrului d_1.

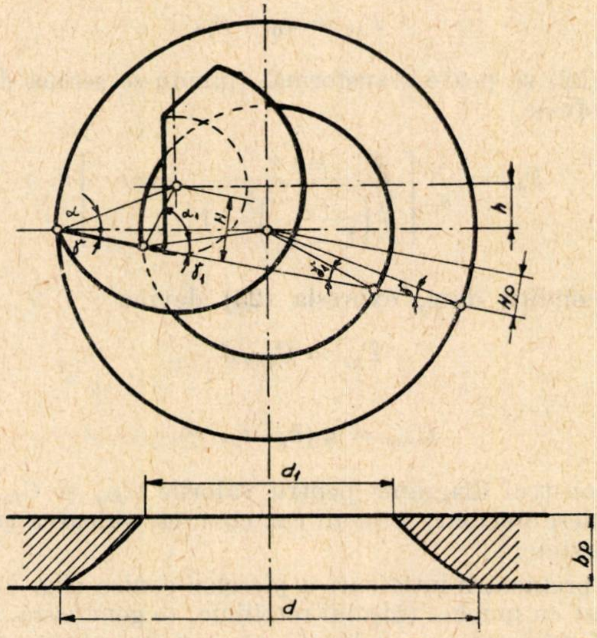

α
γ
d₁
H
h
γ₁
γ'
Hp
d₁
bp
d

Fig. 3. — Strunjirea interioară a unei piese tronconice (*alezaj conic*).

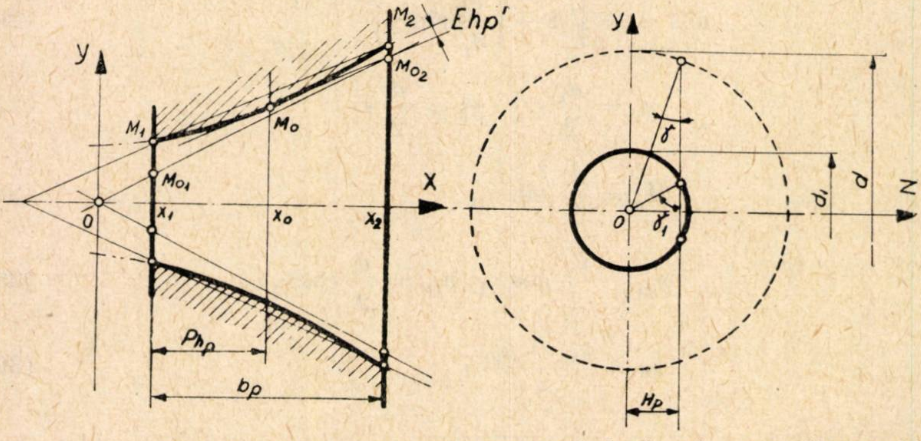

y
M₂
Ehp'
Mo₂
M₁
Mo
Mo₁
X
0
x₁
xo
x₂
Php
bp
y
γ
d₁
d
N
0
γ₁
Hp

Fig. 4. — Apariţia formei hiperbolice la prelucrarea unui alezaj conic, cu o sculă cu muchia tăişului rectilinie.

Pe baza relațiilor (6), (8), (10), (11), (26) ... (31), relația (12) devine:

$$E'_{hp} = \frac{1}{\sqrt{4+\left(\frac{1-k'_p}{t'_p}\right)^2}}\left\{1-\left[\sin\gamma_1\sqrt{1-\left(\frac{1-k'_p}{s'_p}\right)^2}+\frac{1-k'_p}{s'_p}\cos\gamma_1\right]\right\}d_1, \qquad (32)$$

în care

$$k'_p = \frac{d_1}{d},$$

$$t'_p = \frac{b_p}{d},$$

$$s'_p = \cos\gamma - k'_p\cos\gamma_1,$$

$$\sin\gamma_1 = \frac{1}{k'_p}\sin\gamma,$$

$$\cos\gamma_1 = \sqrt{1-\left(\frac{1}{k'_p}\sin\gamma\right)^2}.$$

Și în acest caz, expresia (32), pentru condiții date, se reduce la forma

$$E'_{hp} = C'_{Ehp}\, d_1, \qquad (33)$$

în care

$$C'_{Ehp} = f'(k'_p,\ t'_p,\ \gamma). \qquad (34)$$

Poziția erorii hiperbolice maxime, în cazul strunjirii conice interioare, se găsește

$$P'_{hp} = \frac{t'_p}{s'_p}\left[\frac{\sin\gamma_1}{\sqrt{\left(\frac{s'_p}{1-k'_p}\right)^2-1}} - \cos\gamma_1\right]d_1, \qquad (35)$$

adică

$$P'_{hp} = C'_{Php}\, d_1, \qquad (36)$$

în care

$$C'_{Php} = \varphi'(k'_p,\ t'_p,\ \gamma). \qquad (37)$$

Și în acest caz se pot construi diagrame pentru valorile C'_{Ehp} și C'_{Php}, cu ajutorul cărora se stabilesc imediat, într-un caz concret, valoarea și poziția erorii hiperbolice maxime.

Desfășurarea calculelor anterioare s-a făcut considerîndu-se o muchie a tăișului rectilinie. În practică, acest lucru nu este respectat, din motive tehnologice. Într-adevăr, din intersecția cuțitului disc tronconic — corespunzător conului de ecuație

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=0, \qquad (38)$$

cu planul ce trece prin fața de degajare, de ecuație

$$z = H, \tag{39}$$

în care H este distanța de la fața de degajare pînă la centrul cuțitului (fig. 1), se găsește hiperbola (fig. 5).

$$\frac{x^2}{\left(H\frac{a}{b}\right)^2} - \frac{y^2}{H^2} = 1, \tag{40}$$

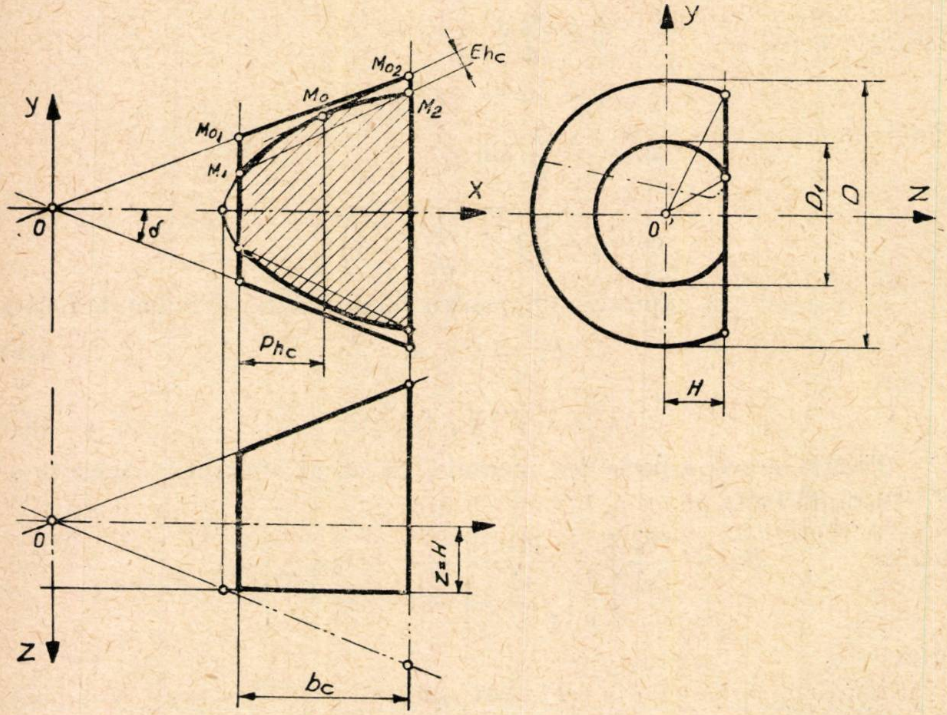


Fig. 5. — Apariția formei hiperbolice a muchiei tăișului unui cuțit disc tronconic.

cu asimptolele

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{41}$$

Limitîndu-se cuțitul cu planele

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ x &= x_2, \end{aligned} \tag{42}$$

se găsesc punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ și $M_{01}(x_{01}, y_{01})$, $M_{02}(x_{02}, y_{02})$.

Porțiunea M_1M_2 din hiperbolă reprezintă muchia tăişului sculei. Se poate determina eroarea *hiperbolică* a muchiei tăişului cuțitului.

Dreapta care trece prin punctele M_1 şi M_2 are ecuația

$$y = m(x - x_1) + y_1 \tag{43}$$

în care

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{44}$$

Luîndu-se o dreaptă paralelă cu dreapta ce trece prin punctele M_1 şi M_2, de ecuație

$$y = mx + n \tag{45}$$

şi punîndu-se condiția ca aceasta să fie tangentă la hiperbolă, se găseşte

$$n = -H\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 m^2 - 1}. \tag{46}$$

Punctul de tangență va avea coordonatele

$$x_0 = \frac{mn}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - m^2}, \tag{47}$$

$$y_0 = mx_0 + n.$$

Distanța de la punctul M_0 pînă la dreapta ce trece prin punctele M_1 şi M_2 va reprezenta mărimea erorii hiperbolice a cuțitului şi va avea valoarea

$$E_{h_0} = \left|\frac{(y_0 - y_1) - m(x_0 - x_1)}{\sqrt{1 + m^2}}\right|. \tag{48}$$

Eroarea hiperbolică din secțiunea radială a piesei va avea valoarea, suficient de exactă

$$E_{h_c} = E_{h_0}\cos\gamma.$$

Sau, ținîndu-se seama de expresia (48), se găseşte

$$E_{h_c} = \cos\gamma\,\frac{(y_0 - y_1) - m(x_0 - x_1)}{\sqrt{1 + m^2}}. \tag{49}$$

Expresia (49) poate fi transformată.

Din figura 1 se găseşte

$$\cos\varepsilon_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{D}{D_1}\sin\varepsilon\right)^2}, \tag{50}$$

în care

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \alpha + \gamma,\\ \varepsilon_0 &= \alpha_0 + \gamma_0,\end{aligned} \tag{51}$$

α este unghiul de aşezare corespunzător diametrului D,
α_0 — unghiul de aşezare corespunzător diametrului D_1,
D — diametrul mare al cuţitului,
D_1 — diametrul mic al cuţitului.

Din figura 5 se determină

$$y_1 = \frac{D_1}{2}\cos\varepsilon_0,\ y_2 = \frac{D}{2}\cos\varepsilon, \tag{52}$$

$$H = \frac{D}{2}\sin\varepsilon, \tag{53}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{D - D_1}{2b_c}, \tag{54}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{b_c}, \tag{55}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{2}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\delta},\ x_2 = \frac{D}{2}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\delta}, \tag{56}$$

$$x_2 - x_1 = b_c, \tag{57}$$

în care b_c este lăţimea cuţitului (egală cu lăţimea piesei, b_p).

Luîndu-se în considerare expresiile (46), (47), (50) ... (57), relaţia (49) devine

$$E_{h_c} = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{4 + \left(\frac{s_c}{t_c}\right)^2}}\left[k_c\left(\frac{s_c}{1 - k_c} - \cos\varepsilon_0\right) - \sin\varepsilon\sqrt{\left(\frac{s_c}{1 - k_c}\right)^2 - 1}\right]D, \tag{58}$$

în care

$$k_c = \frac{D_1}{D},$$

$$t_c = \frac{b_c}{D},$$

$$\cos\varepsilon_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\varepsilon}{k_c}\right)^2},$$

$$s_c = \cos\varepsilon - k_c\cos\varepsilon_0 .$$

Expresia (58), pentru condiţii date, se reduce la forma

$$E_{hc} = C_{E_{hc}}\,D, \tag{59}$$

în care

$$C_{E_{hc}} = \psi(k_c, t_c, \varepsilon, \gamma). \tag{60}$$

Poziția erorii hiperbolice maxime este dată de expresia (figura 5)

$$P_{hc} = x_0 - x_1. \tag{61}$$

Expresia (61) se poate transforma, ținîndu-se seama de valorile lui x_0 și x_1, găsindu-se

$$P_{hc} = \frac{t_c}{1 - k_c}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - k_c}{s_c}\right)^2}} \sin\varepsilon - k_c\right] D. \tag{62}$$

Pentru condiții date, (62) devine

$$P_{hc} = C_{P_{hc}} D, \tag{63}$$

în care

$$C_{P_{hc}} = \zeta(k_c, t_c, \varepsilon). \tag{64}$$

Se pot construi diagrame pentru valorile $C_{E_{hc}}$ și $C_{P_{hc}}$, cu ajutorul cărora se poate stabili, pentru cazuri concrete, valoarea și poziția erorii hiperbolice maxime a cuțitului.

Din cele parcurse, rezultă că, în afară de eroarea hiperbolică proprie piesei, poate interveni și eroarea hiperbolică datorită cuțitului.

După cum s-a anticipat, din motive tehnologice, cuțitul se execută tronconic, cu profil rectiliniu într-o secțiune axială — și cu profil hiperbolic în planul ce trece prin fața de degajare, față ce generează piesa.

Se poate să se construiască cuțitul de forma unui hiperboloid de rotație cu o pînză, astfel încît muchia tăișului să rezulte rectilinie — dar aceasta nu-i necesar decît acolo unde se cere o precizie ridicată. Diagramele ridicate cu formulele (60) și (64) ajută tocmai pentru stabilirea tehnologiei cuțitului (dacă este cazul sau nu a se abate profilul cuțitului de la forma simplă tronconică).

Ținîndu-se seama de erorile hiperbolice proprii ale piesei și ale cuțitului, și luîndu-se în considerare că decalajul între poziția acestora nu depășește 10—15% din lățimea piesei prelucrate, respectiv a cuțitului, se poate considera, ca suficient de exactă pentru cazurile practice, eroarea hiperbolică totală dată de expresiile :

— pentru strunjirea exterioară

$$E_{hpc} = -(E_{hp} + E_{hc}); \tag{65}$$

— pentru strunjirea interioară

$$E'_{hpc} = -(E_{hc} - E_{hp}). \tag{66}$$

Erorile hiperbolice propri piesei s-au stabilit perpendicular pe generatoarea piesei. Se poate uşor găsi valoarea erorilor hiperbolice în direcţie radială (fig. 6)

$$(E_{hp})_{\text{rad}} = \frac{E_{hp}}{\cos \varphi}, \tag{67}$$

în care φ are valoarea, la strunjirea conică exterioară

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{d_1 - d}{2b_p}, \tag{68}$$

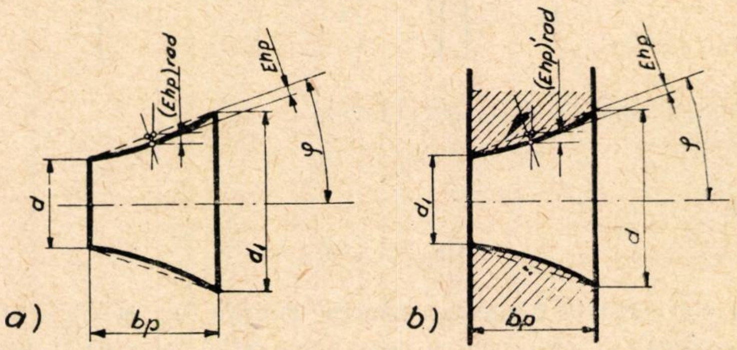


Fig. 6. — Stabilirea legăturii între erorile hiperbolice ale piesei, în diferite direcţii : *a* — strunjire conică exterioară ; *b* — strunjire conică interioară.

iar pentru strunjirea conică interioară

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{d - d_1}{2b_p} \cdot \tag{69}$$

Observaţie. Aproximaţiile introduse în calculele făcute corespund necesităţilor practice. Mărirea preciziei formulelor nu ar fi avut decît o valoare teoretică.

CONCLUZII

Dacă se construiesc diagramele de variaţie a coeficienţilor erorilor hiperbolice, cu ajutorul formulelor (21), (25), (34), (37), (60) şi (64), se va observa că :

— o dată cu creşterea unghiului de degajare γ, coeficienţii C_{Ehp} şi C'_{Ehp} cresc, respectiv erorile hiperbolice propri piesei se măresc ;

— la creşterea unghiurilor γ şi ε, eroarea hiperbolică a cuţitului disc profilat creşte ;

— în cazul cînd diametrul piesei prelucrate d respectiv d_1 şi diametrul cuţitului profilat disc D sînt egale, eroarea hiperbolică a cuţitului este mult mai mare decît eroarea hiperbolică proprie piesei (în cazul prelucrării cu o muchie a tăişului rectilinie);

— o dată cu creşterea raportului $t_p = \frac{b_p}{d_1}$ respectiv $t'_p = \frac{b_p}{d}$, cresc şi coeficienţii C_{Ehp} respectiv C'_{Ehp}, pînă la o anumită valoare, după care, practic, rapoartele $t_p = \frac{b_p}{d}$ şi $t'_p = \frac{b_p}{d}$ nu mai influenţează asupra lui C_{Ehp} respectiv C'_{Ehp};

— la creşterea raportului $t_c = \frac{b_c}{D}$, creşte eroarea hiperbolică a cuţitului, pînă la o anumită valoare, după care, practic, raportul $t_c = \frac{b_c}{D}$ nu mai influenţează asupra erorii hiperbolice a acesteia;

— rapoartele $K_p = \frac{d}{d_1}$ respectiv $K'_p = \frac{d_1}{d}$ influenţează în mod diferit, şi anume, pînă la $K_p = K'_p \approx 0{,}35$, erorile hiperbolice propri piesei cresc, iar, peste această valoare, erorile hiperbolice propri piesei scad o dată cu creşterea lui K_p respectiv K'_p;

— raportul $K_c = \frac{D_1}{D}$ influenţează diferit, şi anume, pînă la valoarea $K_c \approx 0{,}35$, eroarea hiperbolică a cuţitului disc profilat creşte, după care, urmează o scădere a acesteia.

În cazul prelucrării pieselor de precizie, este necesar să se stabilească mărimea erorilor hiperbolice ce apar, cu ajutorul diagramelor ridicate pe baza formulelor stabilite şi — în cazul cînd acestea depăşesc limitele permise de condiţiile tehnice — luîndu-se în considerare cota parte ce revine cuţitului, este necesar să se îmbunătăţească precizia operaţiei prin măsuri adecvate:

1. Executarea cuţitului profilat disc de formă hiperbolică, astfel încît, în planul corespunzător feţei de degajare, să rezulte o muchie a tăişului rectilinie. Prin aceasta, se elimină eroarea hiperbolică a cuţitului.

Executarea cuţitului profilat disc de o formă hiperbolică este posibilă — prin rectificarea specială a cuţitului, în faza finală de execuţia acestuia.

2. Considerarea unei feţe de degajare, a cuţitului profilat disc, înclinată la unghiurile γ şi λ — astfel încît muchia tăişului să corespundă unei generatoare a piesei tronconice. Prin aceasta se anulează eroarea hiperbolică proprie piesei (fig. 7 *a*).

Acelaşi lucru se obţine dacă se consideră un cuţit profilat disc fără unghi de degajare ($\gamma = 0$) (fig. 7 *b*).

De asemenea, eroarea hiperbolică proprie piesei se anulează dacă cuţitul disc profilat se aşază înclinat faţă de axa piesei (fig. 7 *c*).

3. Considerarea unui cuţit profilat prismatic. Prin aceasta, se anulează eroarea hiperbolică a cuţitului (fig. 7 *d*).

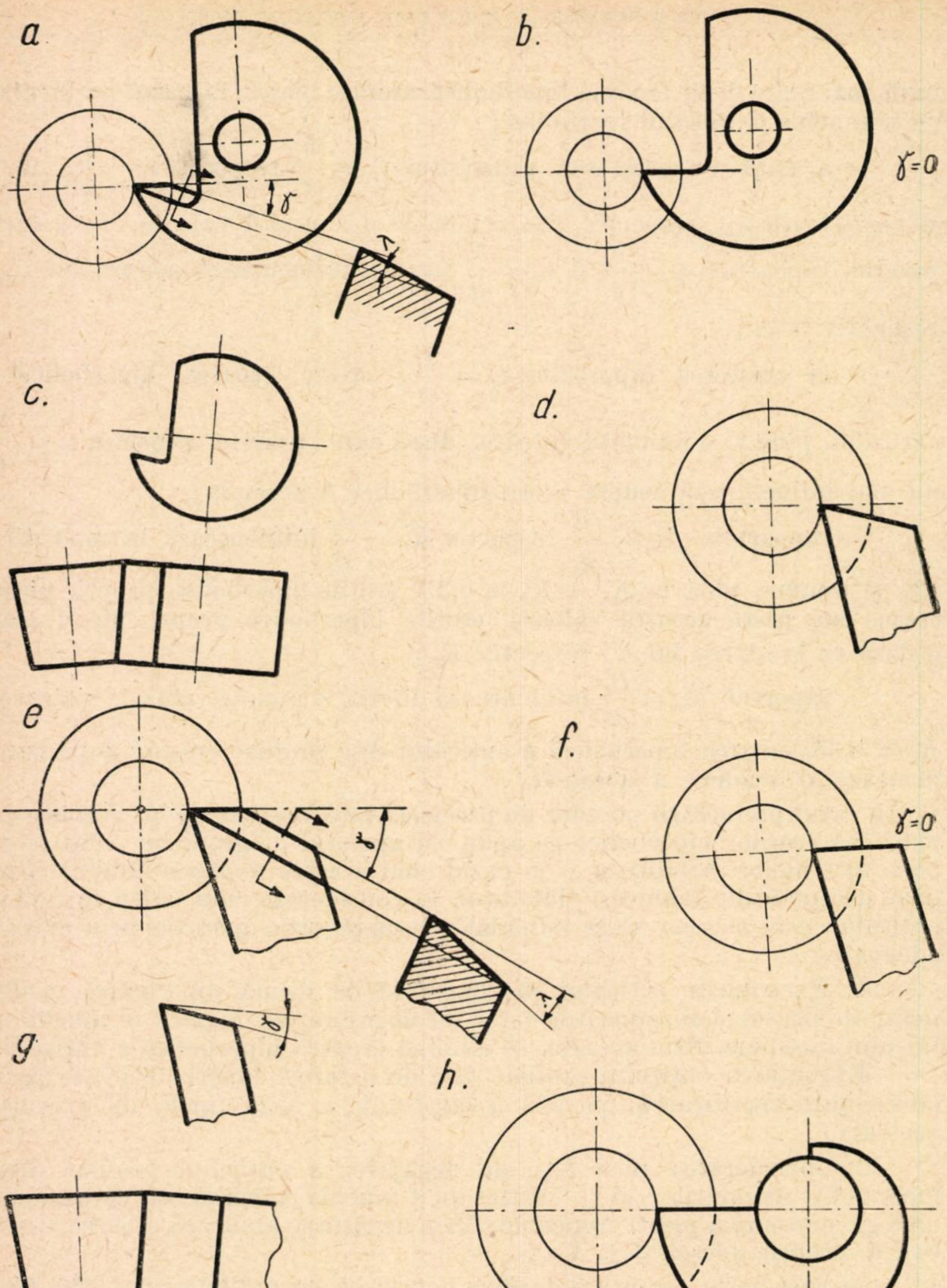


Fig. 7. — Diferite posibilităţi de anularea erorilor hiperbolice: *a*, *b*, şi *c* — anularea erorii hiperbolice propri piesei; *d* şi *h* — anularea erorii hiperbolice a cuţitului; *e*, *f*, *g* şi *i* — anularea erorilor hiperbolice ale cuţitului şi propri piesei.

4. Considerarea unui cuţit profilat prismatic prevăzut cu faţă de degajare înclinată la unghiurile γ şi λ – astfel încît muchia tăişului să corespundă unei generatoare a piesei tronconice. Se anulează astfel eroarea hiperbolică proprie piesei şi eroarea hiperbolică a cuţitului (fig. 7*e*).

Acelaşi lucru se obţine dacă se consideră un cuţit profilat prismatic fără unghi de degajare ($\gamma = 0$) (fig. 7 *f*).

De asemenea, eroarea hiperbolică proprie piesei şi eroarea hiperbolică a cuţitului se anulează dacă se consideră un cuţit profilat prismatic, aşezat înclinat faţă de axa piesei (fig. 7 *g*).

5. Luîndu-se un cuţit profilat spiral, fără unghi de degajare ($\gamma = 0$). eroarea hiperbolică proprie piesei şi eroarea hiperbolică a cuţitului se anulează (fig. 7 *h*).

Observaţie : În afara influenţei parametrilor geometrici, în ceea ce priveşte apariţia şi mărimea erorilor hiperbolice, este necesar să se ia în considerare şi influenţa acestora asupra toleranţelor cuţitelor profilate (diametrul cuţitului profilat disc, ascuţirea cuţitului profilat disc respectiv dimensiunea H, aşezarea cuţitului profilat disc peste centrul piesei respectiv dimensiunea *h*).

Primită la redacţie la 12 septembrie 1961 ¹)

О ТОЧНОСТИ ОБРАБОТКИ КОНИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ

РЕЗЮМЕ

При проектировании фасонных резцов имеются еще внутренние резервы с точки зрения возможности увеличения точности этих резцов.

В статье устанавливаются погрешности, появляющиеся при обработке деталей в виде отсеченного конуса, называемые „гиперболическими" и формулы, позволяющие построить диаграммы для быстрого определения последних.

Также указываются возможности устранения некоторых из этих погрешностей.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Обточка детали в виде отсеченного конуса.

Рис. 2. — Появление гиперболоидальной формы при внешней обработке детали в виде отсеченного конуса при помощи инструмента с прямолинейной режущей кромкой.

Рис. 3. — Коническая расточка детали.

---

¹) Unele rezultate au fost comunicate la Conferinţa a V-a pe ţară a cercurilor studenţeşti – Braşov, aprilie 1960 şi la Sesiunea stiinţifică a cadrelor didactice de la Institutul politehnic Cluj, noiembrie 1960.

Рис. 4. — Появление гиперболической формы при конической расточке инструментом с прямолинейной режущей кромкой.

Рис. 5. — Появление гиперболической формы режущей кромки дискового резца в виде отсеченного конуса.

Рис. 6. — Установление связи между гиперболическими погрешностями детали в разных направлениях: *a* — коническая обточка; *b* — коническая расточка.

Рис. 7. — Различные возможности устранения гиперболических погрешностей: *a*, *b* и *c* — устранение гиперболической погрешности, присущей детали; *d* и *h* — устранение гиперболической погрешности резца; *e*, *f*, *g* и *i* — устранение гиперболических погрешностей резца и присущих детали.

ÜBER DIE BEARBEITUNGSGENAUIGKEIT KEGELFÖRMIGER WERKSTÜCKE

ZUSAMMENFASSUNG

Beim Entwurf der Profilmesser bestehen bisher noch unerschöpfte Möglichkeiten zur Erzielung einer höheren Genauigkeit.

Vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Festlegung sogenannter *hyperbolischer* Abweichungen, die bei der Bearbeitung kegelstumpfförmiger Werkstücke auftreten und mit der Aufstellung von Formeln, welche die Konstruktion von Diagrammen zu deren schneller Bestimmung gestatten. Ferner werden die Möglichkeiten der Beseitigung einiger dieser Abweichungen erörtert.

ERKLÄRUNG DER BILDER

Bild 1. — Außendrehen eines Kegelstumpf-Werkstückes.

Bild 2. — Auftreten der Hyperboloidform beim Außendrehen eines Kegelstumpf-Werkstückes mit einem Werkzeug mit geradliniger Schneide.

Bild 3. — Innendrehen eines Kegelstumpf-Werkstückes (kegelförmige Bohrung).

Bild 4. — Auftreten der hyperbolischen Form bei der Ausführung einer kegelförmigen Bohrung mit einem Werkzeug mit geradliniger Schneide.

Bild 5. — Auftreten der hyperbolischen Form der Schneide eines kegelstumpfförmigen Scheibenmessers.

Bild 6. — Festlegung der Verbindung der hyperbolischen Abweichungen des Werkstückes in verschiedenen Richtungen.

a) kegelförmiges Außendrehen

b) kegelförmiges Innendrehen.

Bild 7. — Verschiedene Möglichkeiten zur Beseitigung der hyperbolischen Abweichungen.

a, *b*, und *c*) Beseitigung der hyperbolischen Abweichung des Werkstückes;

d und *h*) Beseitigung der hyperbolischen Abweichung des Messers;

e, *f*, *g* und *i*) Beseitigung der hyperbolischen Abweichungen des Messers und des Werkstückes.

BIBLIOGRAFIE

1. I. LĂZĂRESCU, *Influența parametrilor geometrici asupra profilului sculelor așchietoare*. Metalurgia și construcția de mașini, *4* (1958).

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

A III-A CONFERINȚĂ GENERALĂ POLONEZĂ ASUPRA TEORIEI MECANISMELOR ȘI MAȘINILOR

ROGÓW-WARSZAWA, 8–10 IUNIE 1961

DE

D. MANGERON

Numeroase conferințe, simpozioane sau colocvii naționale cu largă participare internațională consacrate problemelor fundamentale de teoria mecanismelor și mașinilor sînt promovate cu frecvența mereu crescîndă în anii din urmă, în diferite țări în frunte cu U.R.S.S., unde această ramură a științei, atît de importantă în rezolvarea problemelor de bază de automatizare a proceselor de producție, a ajuns la un nivel de dezvoltare deosebit de înalt. De altfel și multe din recentele congrese sau conferințe de mecanică teoretică și aplicată au acordat și acordă astăzi, în cadrul desfășurării programelor lor de lucru, un loc de seamă și lucrărilor secțiilor de teoria mecanismelor și mașinilor. Multă atenție s-a acordat și la noi lucrărilor secției de teoria mecanismelor și mașinilor cu ocazia desfășurării lucrărilor sesiunii științifice jubiliare a Institutului de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R. (iulie 1960).

Scopul celei de-a III-a Conferințe generale de teoria mecanismelor și mașinilor din R. P. Polonia a constat — după cum spune prof. dr. Jan Oderfeld, de la Institutul politehnic din Varșovia, președintele Comitetului de organizare al conferinței, în volumul de documente preliminare a acesteia [1]) : 1 — Într-o trecere în revistă critică și constructivă a ansamblului de lucrări științifice elaborate în perioada 1959—1961 la cele 11 catedre de teoria mecanismelor și mașinilor existente astăzi în institutele tehnice de învățămînt superior din R. P. Polonia ; 2 — Într-o examinare comparativă a rezultatelor cercetărilor științifice din R.P. Polonia în domeniul teoriei mecanismelor și mașinilor cu cercetările analoge promovate astăzi în țările prietene și aliate ; 3 — În oferirea unor condiții deosebit de prielnice pentru desfăşurarea unui cît mai larg schimb de păreri în domeniu.

---

[1]) III. gesamtpolnische Konferenz über Theorie von Maschinen und Getrieben. Rogów, 8–10/VI/1961, 29 pagini.

La baza alegerii lucrărilor admise pentru a fi expuse la conferinţă a stat unul din următoarele criterii : *a*) Elaborarea unei noi metode de cercetare în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor ; *b*) Aplicarea metodelor cunoscute la un nou mecanism, dispozitiv sau maşină ; *c*) Aplicarea metodelor cunoscute la un mecanism, dispozitiv sau maşină de asemenea cunoscută, scoţîndu-se net în evidenţă avantajele economice sau tehnice rezultate din atare aplicare.

Succesul deosebit al conferinţei analizate, organizată la Rogów la circa 100 km de Varşovia, în condiţii ce nu au lăsat nimic de dorit şi într-un cadru natural admirabil, se datoreşte prezenţei permanente, active şi plină de deosebită atenţie a unui mare număr de cercetători polonezi în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor, atît din cele 11 centre politehnice cît şi din institutele de cercetări ale Academiei de ştiinţe a R.P.P. sau din industrie. La lucrările Conferinţei au luat parte ca invitaţi ai comitetului de organizare a Conferinţei un număr de specialişti din U.R.S.S., R.P. Ungaria, R.D. Germană şi R.P. Romînă (autorul acestor rînduri).

La şedinţa plenară de deschidere s-au ţinut patru conferinţe : acad. I.I. Artobolevski (U.R.S.S.) : *Din problemele actuale ale dinamicii maşinilor* ; acad. W. Lichtenheldt (R.D. Germană) : *Teoria mecanismelor şi maşinilor — baza ştiinţifică a construcţiei de maşini* ; prof. dr. R. Szewalski (R.P.P.) : *Unele probleme de dinamică a marilor turbine* şi prof. dr. J. Oderfeld : *Sinteza maşinilor ca problemă de programare*. Lucrările conferinţei s-au desfăşurat în cadrul a două secţii. În secţia întîi s-au expus comunicări originale din domeniul analizei şi sintezei mecanismelor şi maşinilor, iar în cea de-a doua, din domeniul dinamicii maşinilor şi a metodelor de măsurare a mărimilor mecanice.

Ansamblul lucrărilor expuse la Conferinţă s-a centrat în jurul problemelor actuale fundamentale de teoria mecanismelor şi maşinilor, ca, de exemplu, problema de analiză şi sinteză a mecanismelor spaţiale, problema de studiu a mecanismelor cu organe flexibile, problema de examinare a proceselor energetice în mecanisme şi maşini. În legătură strînsă cu electrotehnica şi electronica s-a expus o serie de lucrări consacrate releelor şi automatizării sau variaţiei stochastice a parametrilor.

O caracterizare generală ce se desprinde atît din lucrările acestei conferinţe cît şi din studiul atent al tematicii conferinţelor de teoria mecanismelor şi maşinilor din alte ţări constă într-o matematizare crescîndă a acestui domeniu al ştiinţei. Se constată că adîncirea procesului de cunoaştere a mecanicii mecanismelor şi maşinilor reclamă nu numai marea bogăţie a matematicii clasice, ci şi cele mai noi domenii ale matematicii de astăzi, ca de exemplu, teoria programării liniare şi neliniare, programare dinamică etc. Totodată se adînceşte permanent legătura între teoria mecanismelor şi maşinilor şi fizica, îndeosebi fizica corpului solid.

Totalitatea comunicărilor şi a conferinţelor generale a fost urmată de vii şi fructuoase discuţii.

Referentului i s-au părut deosebit de interesante și rezoluțiile plenarei de închidere a conferinței, din care se spicuiesc următoarele :

Paralel cu hotărîrea de a se interveni pe lîngă locurile în drept pentru a se majora sensibil numărul de cadre care să lucreze în domeniul teoriei mecanismelor și mașinilor, s-a recomandat ca tematica din anii imediat următori să fie centrată în jurul problemelor ce urmează :

I. Elaborarea metodelor de sinteză a mașinilor ;

II. Elaborarea metodelor de studiu dinamic al mașinilor cu organe elastice ;

III. Cercetări relative la măsurarea mărimilor mecanice.

Întrucît tematica de mai sus reclamă o colaborare strînsă cu diferiți reprezentanți ai altor domenii fundamentale ale științei și tehnicii, plenara a solicitat lărgirea sensibilă a bazei materiale a catedrelor de teoria mecanismelor și mașinilor, prevăzîndu-se, acolo unde acest lucru nu s-a făcut încă, înzestrări corespunzătoare ale laboratoarelor catedrelor menționate cu aparate și instalații de înaltă tehnicitate.

Plenara exprimîndu-și convingerea, că lucrările conferinței au demonstrat din plin înrîuririle deosebit de binefăcătoare rezultate din schimbul de păreri și de experiență cu reprezentanți-specialiști din alte țări, a hotărît să se solicite lărgirea și adîncirea substanțială în viitor a unor atare contacte, cristalizată nu numai în intensificarea schimbului de publicații și periodice, ci și prin organizarea de detașări temporare a cercetătorilor dintr-o țară într-alta din cadrul țărilor noastre socialiste precum și de redactări în comun a lucrărilor de specialitate. S-a solicitat totodată și un maxim de înlesniri pentru organizarea de colaborări, detașări etc. între cadre de specialiști din învățămînt, din industrie și din institutele de cercetări științifice ale Academiilor sau departamentelor.

Constatînd cu satisfacție că rezultatele unor cercetări în domeniu au o înrîurire binefăcătoare și asupra procesului de învățămînt al disciplinei de teoria mecanismelor și mașinilor a cărei programă urmează să fie mereu modernizată, plenara a hotărît elaborarea, cu sprijinul Institutului polonez de documentare tehnică, a unei broșuri care să cuprindă bibliografia totalității lucrărilor poloneze de teoria mecanismelor și mașinilor.

O dată cu hotărîrea asupra datei următoarei conferințe (1963), s-a acceptat propunerea colectivului de catedră de teoria mecanismelor și mașinilor de la Institutul politehnic din Łódź de a se fixa orașul Łódź ca loc de desfășurare a lucrărilor conferinței.

Plenara de închidere a celei de-a III-a conferințe de teoria mecanismelor și mașinilor analizată aici a sugerat totodată următoarele, organizatorilor celei de-a IV-a conferințe : *a*) Programarea lucrărilor pe secții să fie făcută în așa fel ca orice participant la conferință să poată participa cu certitudine, trecînd dela o secție la alta, la desfășurarea lucrărilor comunicărilor pe care și le-a ales. *b*) Durata zilnică a comunicărilor să nu depășească cinci ore, asigurîndu-se tuturor participanților înainte de începerea conferinței o documentare bibliografică completă.

Programînd editarea volumului de comunicări expuse la conferință 1), plenara a solicitat pe lîngă locurile în drept înzestrarea neîntîrziată — acolo unde mai este cazul — a laboratoarelor catedrelor de teoria mecanismelor și mașinilor cu aparate și standuri de probă cu caracter didactic.

Cea de-a treia conferință generală poloneză de teoria mecanismelor și mașinilor, impecabil organizată de colectivul condus de prof. dr. Jan Oderfeld, sprijinit de un comitet sub conducerea prof. Maria Oderfeld, a fost permanent animată de competente intervenții și participări la discuții a acad. I. I. Artobolevski, acad. W. Lichtenheldt, prof. J. Oderfeld, prof. M. Damasiewicz, prof. I. Sályi, prof. Z. Terplan, prof. W. Rössner, ref. ș.a.

Ea a constituit fără îndoială un eveniment științific de seamă, contribuind totodată din plin la întărirea legăturilor de strînsă colaborare și de prietenie între totalitatea participanților.

Ea va da un imbold simțit și introducerii tehnicii noi, menită a ne aduce cu un ceas mai devreme la înflorirea materială și culturală jalonată atît de strălucit și măreț în zilele noastre de către Manifestul Comunist al epocii contemporane.

III ОБЩЕПОЛЬСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ТЕОРИИ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

8—10 июня 1961 г., Рогув у Варшавы

РЕЗЮМЕ

Реф., подчеркивая выше на румынском языке, некоторые данные о работе, проведенной на III Общепольской Конференции по теории машин и механизмов, в которой приняли участие, кроме многочисленных представителей преподавательского состава 11 кафедр по теории машин и механизмов ПНР, работников н.и.и. и промышленности, некоторые ученые дружественных стран нашего социалистического лагеря во главе с виднейшим специалистом Великого Советского Союза акад. АН СССР И. И. Артоболевским, указывает как новые достижения по ТММ в ПНР гармонично сочетаются с ярким и богатым научно-техническим творчеством ПНР, многогранно представляемым миру науки и труда всего мира на страницах многочисленных и высоко ценимых польских периодических изданий, как напр. ROZPRAWY INZYNIERSKIE, ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ, PUB/LIKACYJ, INSTYTUTA PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI, PRZEGLAD TECHNICZNY, PRZEGLAD MECHANICZNY, PUBLIKACYJ PAN etc.

---

1) Această sarcină de onoare și-a asumat-o colectivul catedrei de teoria mecanismelor și mașinilor de la Institutul politehnic din Varșovia, condus de prof. dr. J. Oderfeld, adjunct fiind conf. dr. ing. A. Morecki.

Указывается, что намеченные пункты — цели конференции:

1) Провести итог работам по ТММ, проведенным на 11 кафедрах по теории машин и механизмов Втуз-ов ПНР в особенности за 1959—1961 г;

2) Сопоставить, в целях усиления дружеского сотрудничества, ансамбль работ по теории машин и механизмов, проводимых в дружественных странах нашего социалистического лагеря с работами, проведенными в ПНР;

3) Содействовать максимальному развитию обмена мнениями по специальности, ярко отмеченные в пленарном докладе председателя Орг-комитета проф. Яном Одерфельдом, были полностью достигнуты.

Отмечается также, что тематика работ, проводимых по двум секциям: I. Анализ и Синтез машин и механизмов и II. Динамика машин и измерение механических величин, полностью ответила намеченным критериям допустимости быть доложенными на съезде. Каждая из доложенных работ отвечала по крайней мере одному из нижеуказанных критериев: а. Содержать новый метод исследования; б. Содержать изложение применения уже известного метода к новым техническим установкам; в. Содержать применение известных методов к уже известным техническим установкам при условии, что применение этих методов дает несомненную экономическую пользу или же приводит к техническим преимуществам.

Проведенная III Общепольская Конференция по ТММ в необычайно теплой гостеприимной обстановке, на лоне исключительно красивой природы в Рогуве, в 100 км от Варшавы, при повсемерных заботах коллективов проф. Яна и Марии Одерфельд, проф. М. Дамасиевича, проф. А. Морецкого и др., даст несомненные богатые плоды, как в научном так и в нашей совместной борьбе за мир направлениях.

III. GESAMTPOLNISCHE KONFERENZ ÜBER THEORIE VON MASCHINEN UND GETRIEBEN

Rogów bei Warschau, 8—10.VI.1961

ZUSAMMENFASSUNG

Ref. gibt oben in rumänischer Sprache einige Einzelheiten über die im Titel genannte Konferenz, deren Ziele:

1. eine Übersicht der wissenschaftlichen Arbeit an denjenigen 11 Lehrstühlen polnischer höherer Lehranstalten zu geben, zu deren Arbeitsbereich die Maschinen- und Getriebetheorie gehört. Es handelte sich hierbei insbesondere um die Arbeitsergebnisse für die Jahre 1959—1961;
2. eine Gegenüberstellung in dem Gebiet der TMG polnischer Arbeit mit der Arbeit auf analogem Gebiet in den befreundeten Ländern durchzuführen;
3. einen unbehinderten Meinungsaustausch zu ermöglichen,

vortrefflich erreicht worden waren.

Die zusätzliche Bedingung, dass jedes Referat mindestens eines der folgenden drei Elemente enthalten müsse :

A. eine neue Methode, die nicht unbedingt eingehend ausgearbeitet sein muss ;

B. die Anwendung bekannter Methoden auf eine neuartige technische Einrichtung, die sogar nicht unbedingt bereits ausprobiert sein muss ;

C. die Anwendung bekannter Methoden in bezug auf eine bereits eingeführte technische Einrichtung, jedoch unter der Bedingung, dass eine derartige Anwendung feststellbare technische oder wirtschaftliche Vorteile gewährleistet,

war ebenfalls vollständig befriedigt.

Die während der Plenarsitzung gehaltenen Referate :

I. Artobolewski, Einige Gegenwartsprobleme der Maschinendynamik ; W. Lichtenheldt, Getriebelehre als wissenschaftliche Grundlage für das Konstruieren ;

R. Szewalski, Über Probleme der Dynamik von grossen Kraftwerkturbinen mit Zwischenstufen-Überhitzung ;

J. Oderfeld, Maschinensynthese als Problem aus dem Bereich der Unternehmensforschung, sowie alle andere, die in zwei Sektionen :

I. Sektion : Die Analyse und Synthese von Maschinen und Getriebevorrichtungen ;

II. Sektion : Die Dynamik von Maschinen und Messungen mechanischer Grössen, erfolgten,

wurden mit sehr fruchtbaren Disskussionen fortgesetzt.

Die aktive Anteilnahme an den fruchtbringenden und besonders nützlichen Arbeiten dieser Konferenz, deren Organisation[1]) und unvergesslich schöner Ort (Rogów bei Warschau) tadellos waren, werden unsere wissenschaftliche Mitarbeit noch mehr erweitern und vertiefen.

Das weit umfassende Werk der wissenschaftlichen und technischen Schöpfung im Bereiche der TMG in der Polnischen Volksrepublik fügt sich harmonisch hinzu an die reiche und glanzvolle Reihe wissenschaftlicher Schöpfungen und technischer Bewerkstelligungen, die sich Jahr um Jahr und Monat um Monat in den Seiten der wertvollen und zahlreichen periodischen Fachzeitschriften abspiegeln.

---

[1]) Vorsitzender des Organisationskomitees Prof. Dr. Jan Oderfeld, THW.

PARTICIPĂRI LA MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE

SIMPOZIONUL INTERNAȚIONAL ASUPRA OSCILAȚIILOR NELINIARE

KIEV, 12—18 septembrie 1961

DE

D. MANGERON

Studiul literaturii de specialitate din domeniile mecanicii și matematicii arată o tendință de creștere pronunțată în anii din urmă a numărului de lucrări ce îmbrățișează o gamă din ce în ce mai vastă de fenomene ale realității obiective și se încadrează în ceea ce se numește astăzi *mecanica neliniară a vibrațiilor*. Această afirmație se referă atît la studiul sistemelor mecanice discrete, cît și la acel al sistemelor mecanice continue.

Mecanica vibrațiilor se oglindește, în cadrul fizicii, în afară de cunoscutele domenii clasice, într-o serie de probleme de bază care înglobează teoria informațiilor, procese stochastice variate etc. În cadrul matematicii, această ramură a mecanicii se reflectă în îmbogățirea neîncetată a cunoștințelor noastre despre ecuații diferențiale ordinare (teoria calitativă) și cu derivate parțiale (probleme de contur și teoria distribuțiilor), precum și în extinderea metodelor de investigație, începînd cu metodele calculului operațional, metodele calculului variațiilor, ale calculului simbolic etc. Interdependența mecanicii vibrațiilor cu celelalte domenii ale mecanicii este scoasă permanent în evidență prin înglobarea mereu mai largă în cadrul mecanicii vibrațiilor a variatelor fenomene pînă mai ieri rămase încă neschematizate în expresii și formule matematice, ca, de pildă, rezonanțe neliniare, oscilații de flexiune, de torsiune, longitudinale și transversale, interesînd mecanica solidelor, mecanica corpurilor elastice sau plastice, magnetohidrodinamică, magnetochimia, mecanica fluidelor, mecanica corpurilor pulverulente, reologia, electrotehnica și radiotehnică, mecanici relativiste, variate sisteme de reglare automată, mașini matematice etc.

Mecanica modernă a vibrațiilor, înțeleasă ca mecanica neliniară este un auxiliar indispensabil în teoria și practica construcției de mașini și aparate. Ea contribuie prin urmare din plin la rezolvarea sarcinii noastre de bază ce constă în introducerea tehnicii noi. Astfel, mecanica neliniară a vibrațiilor dezvoltă și aplică fundamentări teoretice ce se referă la o extrem de vastă gamă de mașini și dispozitive, începînd cu cele mai diferite mașini vibratoare, studiate recent de acad. I.I. Artobolevski, A.P. Bessonov ș.a. din cadrul Institutului de teoria mașinilor de pe lîngă Comitetul de Stat al U.R.S.S. de introducere a tehnicii noi și terminînd cu numeroase aparate de bord instalate și folosite cu succes pe sateliții și pe planetele sau navele cosmice artificiale.

Necesitatea unei informări reciproce asupra stadiului de dezvoltare a mecanicii neliniare a vibrațiilor a devenit astăzi cu totul actuală ținînd seama de faptul că numeroși cercetători și uneori și vaste colective își consacră lucrările lor în diferite țări ale lumii teoriei oscilațiilor neliniare.

În urma inițiativei Biroului Uniunii internaționale de mecanică teoretică și aplicată (IUTAM) a avut loc, cu sprijinul neprecupețit al Academiei de Științe a R.S.S. Ukraina, la Kiev, între 12—18 septembrie 1961, un Simpozion internațional asupra oscilațiilor neliniare.

Prin anvergura tematicii dezbătute, prin profunzimea lucrărilor prezentate și prin adîncimea și vastitatea dezbaterilor constructive, cît și prin numărul mare de participanți din mai multe țări, simpozionul internațional de la Kiev de teoria oscilațiilor neliniare întrece cu mult totalitatea simpozioanelor și conferințelor organizate în acest domeniu în ultimii 10—15 ani în Franța, S.U.A. și U.R.S.S.

Alegerea capitalei R.S.S. Ukraină Kiev de către IUTAM ca loc al simpozionului este pe deplin justificată prin faptul că în acest oraș s-a elaborat pentru prima oară una dintre cele mai de seamă direcții de cercetare din domeniul teoriei oscilațiilor neliniare și anume metodele asimptotice ale lui Krîlov-Bogoliubov. De altfel, denumirea actuală de mecanică neliniară își are originea tocmai în aceste metode asimptotice, cristalizate de către creatorii lor într-o lucrare, astăzi clasică, numită *Mecanică neliniară*, tradusă curînd după apariție în mai multe limbi.

La lucrările simpozionului au participat 92 de delegați din 15 țări: Anglia, R.P. Bulgaria, R.S. Cehoslovacia, Franța, R.D. Germană, R.F. Germană, Italia, Japonia, Nigeria, Olanda, R.P. Polonia, R.P. Romînă, Senegal, S.U.A., U.R.S.S.

În afară de aceasta la lucrările simpozionului au participat activ peste o sută de oameni de știință din diferite centre științifice din Uniunea Sovietică.

Sarcina de elaborare a tematicii și a programei simpozionului precum și aceea de fixare a listei participanților a fost dusă la bun sfîrșit de către comitetul științific al simpozionului internațional asupra oscilațiilor neliniare, confirmat de Biroul IUTAM în următoarea componență:

1. Prof. dr. N.N. Bogoliubov (U.R.S.S.), președinte;
2. Prof. dr. S. Lefschetz (S.U.A.);
3. Prof. dr. T. Vogel (Franța);
4. Prof. dr. M. Cartwright (Anglia);
5. Prof. dr. T. Hayashi (Japonia);
6. Prof. dr. Iu. A. Mitropolski (U.R.S.S.) [1].

---

[1] Referentul exprimă și pe această cale Prof. Iu. A. Mitropolski alese mulțumiri pentru un șir de date prețioase, ce i-au fost comunicate în scris asupra Simpozionului.

Prof. Iu. A. Mitropolski, membru al Academiei de ştiinţe a R.S.S. Ucraina şi oaspetele ţării noastre la cel de-al IV-lea Congres al matematicienilor romîni (Bucureşti, 27 mai — 4 iunie 1956), a activat şi ca preşedinte al comitetului naţional de organizare a simpozionului.

Toate direcţiile de cercetare şi lucrările fundamentale ale şcolilor de teoria oscilaţiilor neliniare, aflată într-o dezvoltare impetuoasă în multe ţări ale lumii, au fost reprezentate la acest simpozion internaţional, desfăşurat sub egida Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi a Academiei de Ştiinţe a R.S.S. Ucraina.

Tematica simpozionului, cristalizată în bună parte în programa tipărită (24 pagini) în Editura Institutului de matematică al Academiei de Ştiinţe a R.S.S. Ucraina, a fost subdivizată în lucrările desfăşurate în trei secţii, şi anume :

I. Secţia de metode analitice în teoria oscilaţiilor neliniare (preşedinte : profesor Iu. A. Mitropolski) ;

II. Secţia de metode calitative şi stabilitate (preşedinte : prof. V. V. Nemîţki) ;

III. Secţia de aplicaţii ale metodelor de teoria oscilaţiilor în fizică şi tehnică (preşedinte : profesor A.I. Lurie).

Programa simpozionului include un şir de comunicări consacrate metodelor analitice de teoria oscilaţiilor neliniare, elaborate de oamenii de ştiinţă din U.R.S.S., Anglia, S.U.A., Japonia, R.S. Cehoslovacia, R.P. Bulgaria şi R.P. Romînă (comunicarea autorului acestor rînduri). Se subliniază îndeosebi comunicările consacrate metodelor fundamentale de teoria oscilaţiilor neliniare în cadrul cărora au lucrat şi lucrează numeroşi cercetători. Aceste metode sînt : metoda micului parametru a lui Krîlov-Bogoliubov, metoda mediei integrale, metoda varietăţilor integrale a lui Bogoliubov-Mitropolski.

Un număr de comunicări era consacrat studiului soluţiilor periodice şi aproape periodice ale ecuaţiilor diferenţiale neliniare ordinare sau cu derivate parţiale, precum şi studiilor sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi periodici.

În programul tipărit de activitate a secţiei a doua 29 de comunicări inserate (faţă de 33 inserate pentru a fi susţinute la secţia întîi şi 32 de la secţia a treia) au fost consacrate diferitelor probleme de teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale neliniare ce se întîlnesc în teoria oscilaţiilor. Ele au fost susţinute de oameni de ştiinţă din U.R.S.S., S.U.A., Anglia, Nigeria, R.S. Cehoslovacia, R.P. Romînă (comunicările tov. A. Halanay şi C.Corduneanu) şi Senegal. Se subliniază îndeosebi lucrările relative la studiul regimurilor oscilatorii a sistemelor dinamice polidimensionale, unele aplicaţii ale teoriei bifurcării sistemelor dinamice de ordinul al doilea în variate probleme de mecanică neliniară a vibraţiilor, precum şi lucrările ce se referă la studiul sistemelor învolburate, ereditare şi dinamice. Un număr de comunicări s-a referit la metoda topologică calitativă şi la unele aplicaţii ale acesteia, altele la metoda reprezentărilor punctuale în teoria oscilaţiilor neliniare precum şi la studiul ecuaţiilor diferenţiale neliniare cu argumente deviate.

În cadrul celei de-a treia secții au participat cu numeroase comunicări relative la aplicații ale teoriei oscilațiilor neliniare în fizică și tehnică oameni de știință din R.P. Polonia, U.R.S.S., S.U.A., Franța și Japonia.

Este natural, dat fiind lărgimea diapazonului aplicațiilor moderne ale teoriei oscilațiilor neliniare la fizică și tehnică, ca ansamblul de probleme expuse aici să fie deosebit de variat. Aici s-au expus șiruri de comunicări relative la problema vibrațiilor în transporturi feroviare sau maritime pe mare agitată, la problema consumului de energie în diferite materiale supuse la vibrație, la problema rezonanței. S-au purtat discuții și în jurul comunicărilor referitoare la oscilații neliniare în construcții supuse la forțe perturbatoare provocate de cutremure. Era de asemenea firesc ca un număr mare de comunicări să fie consacrat problemelor fundamentale ale tehnicii noi și anume problemelor de reglare automată, bazate în întregime pe teoria oscilațiilor neliniare.

După cum subliniază acad. prof. dr. Iu. A. Mitropolski, discuții deosebit de vii au fost purtate în jurul tuturor direcțiilor de cercetare expuse la simpozion. Ele vor contribui fără îndoială la dezvoltarea ulterioară fructuoasă a teoriei oscilațiilor neliniare.

Succesul deosebit al simpozionului, recunoscut în mod unanim de totalitatea participanților, se datorește în primul rînd unei organizări exemplare. Toate comunicările trimise comitetului de organizare au fost traduse, tipărite sub formă de extrase în limbile rusă și engleză și puse la dispoziția celor interesați chiar din momentul sosirii.

Rodnicia discuțiilor purtate nu a avut decît de cîștigat datorită prezenței active și simultane a oamenilor de știință matematicieni, mecanicieni și fizicieni precum și a numeroșilor tehnicieni de vază. La aceasta se adaugă atmosfera permanentă de seninătate, de cordialitate totală, de stimă și de simpatie reciprocă, ce constituie chezășia întăririi ulterioare a colaborării între oamenii de știință din diferite țări ale lumii, chezășia succesului deplin al eforturilor pe care le îndreptăm înspre țelul suprem al conservării și întăririi păcii în lume.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ КОЛЕБАНИЯМ

Киев, сентябрь, 12—18, 1961

РЕЗЮМЕ

Реферат приводит выше, на румынском языке, некоторые подробности о важном для науки и техники симпозиуме по нелинейным колебаниям, организованном международным союзом по теоретической и прикладной механике, IUTAM, проведенном в г. Киеве, как родине одного из чрезвычайно важных направлений теории нелинейных колебаний — асимтотические методы Крылова — Боголю-

бова — получивших широкое распространение в мировой научной литературе, Академии Наук СССР и Академии Наук УССР.

Приведенные данные, касающиеся тематики многосторонней работы симпозиума, в котором приняли участие 92 делегата из 15 стран мира и присутствовали в качестве гостей более ста ученых из различных научных центров Советского Союза, основываются на Программе съезда, на его материалах, отпечатанных своевременно в рамках его хорошей организованности на русском и английском языках, в также и на некоторых письменных данных любезно предоставленных академиком Ю. А. Митропольским, председателем Национального Оргкомитета Симпозиума.

Обсуждение тематики симпозиума, проводилось по трем параллельно работающим секциям: I. Аналитические методы теории нелинейных колебаний (председатель, проф. Ю. А. Митропольский); II. Качественные методы и устойчивость (председатель В. В. Немыцкий) и III. Приложение методов теории колебаний к задачам физики и техники (председатель, проф. А. И. Лурье). Обсуждение проходило в исключительно теплой и дружественной обстановке взаимного уважения и симпатии между учеными различных стран. Это послужит дальнейшему сплочению ученых в их усилиях, направленных на сохранение и упрочение мира, дальнейшему повсемерному углублению проблем, образующих и настоящее время новую отрасль науки, названную в честь акад. Крылова и Боголюбова НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКОЙ.

INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON NON-LINEAR OSCILLATIONS

On the initiative of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics and with the direct support of the Academy of Sciences of the Ukrainean Soviet Socialist Republic, an international symposium has been held from September 12—18, 1961, in Kiev.

Owing to the large number of problems, the interesting papers presented and the comprehensive discussions, as well as to the large number of delegates from several countries, the international symposium held in Kiev on the theory of non-linear oscillations exceeds by far the symposia and conferences organized in this field within the last 10—15 years in France, U.S.A. and U.S.S.R.

The choice of the capital of the Ukrainean Soviet Socialist Republic as the place for holding the symposium is quite justified by the fact that one of the most important investigation trends in the field of the theory of non-linear oscillations has been elaborated in this town, i.e. *Kryloff-Bogoliuboff's asymptotic methods*.

Ninety-two delegates have attended the symposium, representing the following fifteen countries: the Bulgarian People's Republic, the

Socialist Republic of Czechoslovakia, France, the German Democratic Republic, the German Federal Republic, Great Britain, Holland, Italy, Japan, Nigeria, the Polish People's Republic, the Rumanian People's Republic, Senegal, U.S.A. and U.S.S.R.

In addition, over a hundred scientists from various scientific centers of the U.S.S.R. have actively participated in the symposium.

The subjects discussed at the symposium, presented in the programme printed by the Publishing House of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainean Soviet Socialist Republic, have been divided in the following three sections:

Section I.	Analytical methods in the theory of non-linear oscillations (President: Professor Yu. A. Mitropolski);
Section II.	Qualitative and stability methods (President: professor V. V. Nemytzki);
Section III.	Applications of the methods of the theory of oscillations to physics and technique (President: professor A. S. Lurzhe).

The particular success of the symposium, unanimously recognized by all delegates, is due mainly to an excellent organization under the auspices of U.S.S.R. Academy of Sciences and the Academy of Sciences of the Ukrainean Soviet Socialist Republic. All papers sent to the organizing committee (presided by Prof. Mitropolski) were translated and printed in Russian and English and were available for those interested.

The fruitful discussions are the pledge of the complete success of the new scientific and technical progress and of the efforts directed towards the supreme goal: the preservation and strengthening of world peace.

RECENZII

ION LĂZĂRESCU, *Calculul și construcția sculelor așchietoare*. Ed. tehnică, București, 1961.

Această lucrare este destinată inginerilor şi tehnicienilor care lucrează în proiectarea sculelor, în atelierele mecanice şi în sculărie. De asemenea, ea se adresează şi studenţilor din facultăţile de mecanică și tehnologia construcţiilor de mașini.

La redactarea acestei lucrări s-a folosit o bibliografie foarte bogată, formată din 197 de titluri. Această bibliografie, ca şi experienţa bogată acumulată de autor în proiectarea și cercetarea diferitelor scule aşchietoare, fac ca lucrarea să fie interesantă şi utilă specialiştilor.

Materialul este sistematizat în 25 de capitole, care cuprind problemele cele mai importante ale calculului şi construcţiei sculelor aşchietoare. În primul capitol sînt prezentate materialele pentru scule utilizate în mod curent la noi în ţară, scoţîndu-se în evidenţă caracteristicele care stau la baza alegerii materialului pentru un anumit tip de sculă. Capitolele 2—4 tratează despre calculul și construcţia cuţitelor. Toate tipurile de broșe sînt prezentate în capitolul 5. În capitolul 6 se examinează problemele ce privesc pilele. Nu sînt uitate nici pînzele de fierăstrău care sînt cuprinse în capitolul 7. În capitolul 8, bogat ilustrat, sînt studiate frezele. Instrumentele pentru prelucrarea găurilor, burghie, adîncitoare și alezoare formează obiectul capitolelor 9—11. De o prezentare atentă se bucură şi sculele pentru filetat, care sînt cuprinse în capitolele 12 și 13. Sculele pentru prelucrat roţi dinţate de toate tipurile sînt prezentate cu mult simţ ingineresc în capitolele 14—24, dîndu-se metode de calcul ușor de abordat, de mare utilitate pentru constructorii de scule din uzine.

Ultimul capitol tratează despre sculele pentru profile neevolventice, care se prelucrează prin metoda rostogolirii.

În această lucrare autorul reușește să rezolve unele probleme complexe, pe care le ridică anumite scule, pe căi simple, făcînd astfel ca utilitatea ei practică să crească. Prezentarea este clară şi sistematică, scoţînd, în evidenţă o muncă susţinută în redactare.

Lucrarea *Calculul și construcția sculelor așchietoare*, prin nivelul ei tehnico-ştiinţific și prin materialul bogat pe care îl prezintă, vine să completeze în mod fericit un gol care exista în literatura noastră de specialitate.

M. P. Popov

* * * *Подземная гидродичамика* (Hidrodinamica subterană), Гостоптехиздат, Москва, 1961.

Acest volum de lucrări al Institutului industriei petrochimice şi a gazelor ,,I. M. Gubkin'' din Moscova conţine rezultatele cercetărilor întreprinse de membrii corpului didactic și aspiranţii catedrei de mecanică teoretică, hidraulică generală și subterană.

Primul grup de patru studii din volum are ca autor pe V. N. Şcelkacev şi se referă la unele aspecte ale scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase. Se dă astfel o formă ameliorată a formulei pentru scăderea presiunii la o sondă exploatată cu debit constant şi se fac unele consideraţii asupra modului în care neomogenitatea mediului poros influenţează curbele de variaţie a presiunii la sondă. În continuare, se dă soluţia aproximativă pentru o problemă fundamentală a regimului elastic, privind exploatarea unei sonde la debit constant şi la presiune constantă şi se indică unele exemple de aplicaţie a metodei indirecte la calculul unor integrale improprii ale funcţiilor Bessel.

Urmează apoi un alt grup de cinci studii elaborate de M. A. Gusein-Zade, care tratează diferite probleme în legătură cu neomogenitatea mediilor poroase. Prima problemă considerată este aceea a scurgerii unui fluid incompresibil printr-un mediu poros cu macroneomogenităţi (zone cu permeabilităţi diferite). Mai departe, în unele dintre aceste cazuri, se determină şi debitul unor sonde, aşezate în diverse poziţii. În aceeaşi ordine de idei, se consideră şi influenţa neomogenităţii asupra interacţiunii sondelor, în mai multe cazuri, precum şi asupra efectelor fisurării hidraulice. În sfîrşit, ultimul articol este consacrat unor probleme de deplasare a conturului de contact dintre apă şi ţiţei într-un mediu poros de acelaşi tip cu cele considerate mai înainte.

Studiul următor are ca autori pe R. G. Şaghiev şi V. I. Portnov şi conţine o serie de aplicaţii a metodei propuse de A. Houpeurt pentru determinarea parametrilor unui strat cu ajutorul curbelor de restabilire a presiunii.

I. A. Ciarnîi se ocupă în articolul său de filtrarea într-un strat separat în două porţiuni de permeabilităţi diferite printr-o fîşie puţin permeabilă. Se dă soluţia pentru filtrarea unui lichid compresibil.

Problemei determinării parametrilor unui strat cu ajutorul curbelor de restabilire a presiunii, îi este consacrat studiul lui A. P. Telkov în care se consideră diferite forme ale conturului stratului.

Un studiu foarte amplu, datorit lui M. A. Gusein-Zade are ca obiect luarea în considerare a permeabilităţii acoperişului şi tălpii unui strat în cazul filtrării unui lichid incompresibil. Soluţiile sînt date pentru mai multe situaţii, atît la mişcări plane cît şi axial simetrice. Se prezintă de asemenea şi o metodă aproximativă.

Tot M. A. Gusein-Zade se ocupă în alt articol de scurgerea radială nestaţionară a unui gaz într-un strat format din zone de permeabilităţi diferite. În articolul următor, acelaşi autor expune o metodă aproximativă pentru soluţionarea problemelor de scurgere nestaţionară a unui gaz într-un mediu poros.

M. T. Zoloev, V. F. Usenko, V. A. Kobeleva, Iu. P. Kisliakov, K. I. Isangulov şi Z. S. Gazizov prezintă în studiul lor rezultatele obţinute în cercetarea unor sonde exploatate la o presiune inferioară aceleia de saturaţie.

I. G. Gorohova este autoarea a două studii dintre care primul are ca obiect studiul presiunii medii într-un strat în care curge un lichid compresibil, în diferite situaţii, aplicîndu-se mai multe metode. Al doilea studiu prezintă unele observaţii privitoare la calculul debitului cumulativ pentru sondele care lucrează cu contrapresiune constantă la talpă.

O metodă pentru determinarea coeficientului de piezoconductibilitate a unui strat este prezentată în articolul lui Li Iun-Şan.

Lan Cijan-Sin dă în studiul său o metodă aproximativă de rezolvare a problemelor de scurgere nestaţionară a unui gaz într-un strat circular. Se consideră de asemenea şi cazul în care stratul are grosime variabilă.

Unele probleme ale filtrării unui fluid bifazic sînt studiate de Cen Cijun-Sian. Autorul se ocupă de mai multe probleme al căror interes practic este de netăgăduit.

O metodă pentru rezolvarea aproximativă a problemelor de scurgere nestaționară unidimensională a unui gaz, analogă cu aceea utilizată în cazul scurgerii radiale, este prezentată tot de Lan Cijan-Sin într-un alt articol.

Cijou Cen-Siun dă în lucrarea sa rezultatele unei cercetări experimentale asupra amestecului într-un mediu poros a două lichide reciproc solubile.

Volumul se încheie cu studiul efectuat de M. A. Gusein-Zade și Huan Kou-Jen asupra scurgerii nestaționare a unui lichid compresibil într-un strat neomogen, atît în cazul cînd fenomenul este plan cît și în acela cînd este radial.

Succinta trecere în revistă a studiilor publicate în acest volum arată varietatea preocupărilor colectivului de cercetare ale catedrei menționate la început, care a atacat și rezolvat cu succes numeroase probleme de actualitate științifică și practică. Rezultatele obținute prezintă un interes deosebit pentru toți cei ce se ocupă de problemele științifice ale exploatării zăcămintelor de petrol și gaze.

T. Oroveanu

В. С. ВЕДРОВ, Г. Л. РОМАНОВ, В. А. СУРИНА, *Самолет, как объект регулирования* (Avionul ca obiect de control). Труды МАИ, вып. 74, Оборонгиз, Москва, 1957.

Problema stabilității aparatelor de zburat s-a dezvoltat inițial ca o parte a calculului aerodinamic al avionului. Acest lucru era de înțeles, deoarece, o dată ce teoria generală a stabilității a fost schițată și metoda principală — aceea a perturbațiilor mici — găsită, nu mai rămîneau de rezolvat, în esență, decît unele chestiuni de aerodinamică legate de determinarea derivatelor de stabilitate. Cu alte cuvinte, accentul se muta de la problemele de principiu ale dinamicii zborului la cele de detaliu — găsirea, evaluarea coeficienților ecuațiilor ce descriau fenomenul. Această împrejurare a influențat procedeul de cercetare, limbajul utilizat, dar, într-o oarecare măsură, și punctul de vedere din care se privea problema stabilității. Astfel, de exemplu, a căpătat o importanță de sine stătătoare, nu întru totul justificată, problema stabilității statice.

Pentru tehnica aeronautică și astronautică contemporană însă, un asemenea cadru a devenit, în mod inevitabil, neîncăpător. Două elemente, deosebit de importante, implicate de această tehnică, au impus nu numai lărgirea cadrului studierii stabilității avionului ci și, într-o măsură destul de importantă, schimbarea direcției de cercetare.

Unul din aceste elemente constă în aceea că forțele aerodinamice au încetat a fi singurii factori esențiali în asigurarea zborului (sustentației și comenzii) pentru categorii însemnate de aparate de zburat, aflate la extremitățile gamei de viteze de zbor uzuale (elicoptere, avioane cu decolare și aterizare verticală sau scurtă, la o extremitate ; rachete, nave cosmice etc. la cealaltă) ; cel de-al doilea element, promovat de tehnica modernă de zbor la un loc de importanță hotărîtoare este necesitatea la bord a instalațiilor automate de comandă, reglaj, programare.

Precum se știe, teoria comenzii și reglajului automat, apărută ca o ramură de sine stătătoare, și-a elaborat metode și procedee de lucru care depășesc ca aplicabilitate domeniul pentru care au fost create. Deci, pe de o parte în urma utilizării la bord a instalațiilor automate, care face ca aparatul de zbor să devină un element al unui sistem de reglaj, iar pe de alta în urma apariției unor metode moderne de lucru aplicabile și în domeniul dinamicii zborului, teoria stabilității și maniabilității aerodinelor și-a împrospătat în ultimul timp atît arsenalul metodelor teoretice de cercetare, cît și tehnica de calcul, împrumutîndu-le din teoria comenzii și reglajului automat.

Astfel, pentru cercetarea mişcării perturbate a avionului, avînd sau nu la bord instalaţie automată, pentru verificarea stabilităţii etc. se recurge din ce în ce mai frecvent la tehnica operaţională şi se aplică metodele de uz curent în teoria comenzii şi reglajului automat. Teoria funcţiilor de transfer, metode spectrale, procedeul reprezentării mişcării perturbate a avionului sub formă de scheme-bloc etc. încep să fie utilizate tot mai mult pentru rezolvarea problemelor de dinamica zborului, chiar şi pentru cazul aparatelor neprevăzute cu instalaţii automate. Lucrarea recenzată reprezintă o ilustraţie remarcabilă a acestei noi tendinţe.

Lucrarea lui V. S. Vedrov, G. L. Romanov şi V. A. Surina este în mai multe privinţe o lucrare de pionierat. În primul rînd, după cunoştinţele recenzentului, ea este una din primele care preconizează folosirea reprezentării ecuaţiilor mişcării perturbate a avionului cu ajutorul unor scheme-bloc cu o singură buclă, în vederea unei mai uşoare adaptări a metodelor teoriei comenzilor şi reglajului automat la problemele de stabilitatea zborului. Cu alte cuvinte, lucrarea pune la dispoziţia cercetătorilor în domeniul respectiv, dar şi a inginerilor proiectanţi, un nou procedeu modern de lucru.

Dar în acelaşi timp lucrarea reprezintă un model de aplicare creatoare a noii metode propuse, a cărei valoare apare evidentă atît prin uşurinţa cu care sînt regăsite rezultate deja cunoscute, cît şi prin abundenţa aspectelor şi rezultatelor noi ce sînt relevate prin aplicarea ei. Fenomene cunoscute doar prin procedee parţial sau total empirice (din practica de pilotaj) sînt prezentate analitic. Nu este vorba de punerea în ecuaţie a unor fenomene care pînă acum nu ar fi putut fi modelate matematic. Ecuaţiile de la care se porneşte sînt doar tot cele cunoscute. Este vorba de avantajele oferite de un procedeu care permite a se trage din ecuaţii concluzii într-un fel mult mai comod decît prin metodele analitice obişnuite. Asemenea analize s-au făcut şi înainte, dar în cele mai multe cazuri ele n-au putut fi duse suficient de departe, dovedindu-se mult prea greoaie.

În lucrarea recenzată autorii reuşesc să reprezinte sistemele de ecuaţii ale mişcării perturbate ale avionului pilotat (dar fără instalaţii automate în funcţiune la bord), sub forma unor scheme structurale simple, cu cîte o singură buclă, avînd elemente cel mult de ordinul doi, ale căror semnale de intrare şi ieşire au un sens fizic bine determinat.

Cazul considerat de către autori este acela al mişcării de bază avînd loc în planul longitudinal al aparatului. Sînt acceptate, în general, ipotezele clasice în care se studiază stabilitatea avionului. Astfel, se presupune că nu există termeni de cuplare importanţi, aşa că stabilitatea longitudinală şi cea laterală pot fi tratate independent. De asemenea, se consideră avioane convenţionale, prezentînd un grad suficient de stabilitate statică longitudinală pentru ca mişcarea perturbată din planul de simetrie să prezinte două moduri cu frecvenţe diferite, împrejurare ce duce, precum se ştie, la o nouă simplificare aproximativă a ecuaţiilor. Pentru analiza caracteristicilor de stabilitate laterală se consideră numai avioane prezentînd stabilitate (statică) de direcţie.

Cercetarea mişcării perturbate se face analizîndu-se caracteristicile elementelor schemei-bloc. O asemenea analiză conduce la posibilitatea considerării independente a unui număr de sisteme de ecuaţii aproximative simple, în locul sistemelor complete, atît pentru mişcarea longitudinală, cît şi pentru cea laterală.

Pentru mişcarea perturbată din planul de simetrie al avionului, diferenţa mare dintre frecvenţele naturale a două dintre elementele ,,buclei de stabilizare" [1]) conduce imediat la considerarea separată a modurilor rapid şi lent. Considerînd cînd unul cînd celălalt element, cel neconsiderat acţionează ca un filtru de joasă respectiv, înaltă frecvenţă.

---

[1]) Denumirile date buclelor şi elementelor schemelor-bloc respective aparţin autorilor lucrării recenzate.

Autorii analizează influenţa caracteristicilor elementelor numai asupra vitezei de zbor, densităţii aerului şi pantei traiectoriei, considerînd ceilalţi parametri cinematici, precum şi toţi parametrii constructivi, invariabili. Dar şi o asemenea cercetare simplificată le permite stabilirea unor concluzii interesante. Astfel, se dau relaţii analitice sau indicaţii cantitative privind diminuarea şi pierderea stabilităţii, prin creşterea unghiului de pantă şi a vitezei de zbor. În continuare, prin intermediul analizei elementelor ,,buclei de stabilizare'' şi a ,,elementelor de comandă'' [1]), se cercetează variaţia în regim tranzitoriu a parametrilor cinematici longitudinali cu bracajul profundorului.

În cazul mişcării laterale, analiza caracteristicilor diferitelor elemente[2]) conduce de asemenea la posibilitatea separării sistemului complet de ecuaţii, într-un număr de sisteme mai simple, corespunzătoare componentelor mişcării perturbate: unei mişcări spirale lente, şi unor mişcări rapide oscilatorii (ca o consecinţă a acţionării cîrmei de direcţie) şi de ruliu (în urma bracării eleroanelor).

Lucrarea recenzată, cu toate rezultatele interesante pe care le conţine, trebuie considerată doar ca un început. Cît de necesar a fost pasul făcut de autori şi cît de adecvată metoda găsită, se vede şi din faptul că utilizarea pentru studiul stabilităţii avionului a schemelor-bloc a format obiectul şi altor căutări. Astfel, de exemplu, nu mult după apariţia lucrării recenzate şi, desigur, independent de aceasta a apărut lucrarea lui F. A. Summerlin şi N. Sullivan: *The Application of a Block Diagram to Aircraft Stability Analysis* (Aplicarea reprezentării sub formă de schemă-bloc la analiza stabilităţii avionului), The Aeronautical Quarterly, IX/1/February 1958, care extinde procedeul şi la cazul avionului prevăzut cu autopilot.

Lucrarea recenzată nu pretinde, şi autorii ei subliniază acest lucru, să epuizeze posibilităţile aplicării metodei preconizate. Ca atare, multe probleme de mare actualitate rămîn neatacate. Acest fapt însă nu micşorează cu nimic meritul autorilor, ce se numără printre deschizătorii unor noi căi de cercetare deosebit de promiţătoare.

T. Hacker

И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, И. В. СТРАЖЕВА, *О формировании контура управления самолетом* (Despre întocmirea schemei de comandă a avionului). Труды МАИ, вып. 124, Оборонгиз, Москва, 1960.

Practic, nu există aparate de zbor avînd stabilitate inerentă totală, stabilitatea zborului asigurîndu-se în parte prin comenzi (exercitate fie de către pilot, fie de către o instalaţie de reglaj automat — de tip autopilot sau stabilizor). Din acest punct de vedere teoria stabilităţii dinamice a avionului utilizată în trecut în mod curent prezenta o anumită inconsecvenţă. Într-adevăr, ca o consecinţă a procedeelor teoretice folosite (criteriul Routh-Hurwitz aplicat sistemului liniarizat obţinut prin metoda micilor perturbaţii) se ajunsese la un oarecare exces de rigiditate în ceea ce priveşte cerinţa unei stabilităţi inerente (proprii) totale a avionului. Inconsecvenţa amintită se ocolea prin considerarea unor ecuaţii simplificate pe baza unor ipoteze de ordin mai mult empiric, reuşindu-se astfel să se elimine din soluţie componentele instabile.

Tehnica aeronautică şi astronautică actuală, necesitînd o rigurozitate mai mare a calculelor, reclamă cercetarea mişcării perturbate reale, cu includerea, într-un fel sau altul, a efectului stabilizator al comenzilor.

---

[1]) Vezi trimiterea de la p. 248.

[2]) Şi în acest caz există o buclă închisă ,,de stabilizare'', la care se adaugă un număr de elemente ,,de comandă''.

În acest sens, cerinţa unei stabilităţi totale se impune, de astă dată, nu avionului nepilotat, care este doar o componentă a sistemului dinamic considerat (şi încă, precum s-a arătat, una, în general, instabilă) ci întregului ansamblu avion + comenzi + factori de comandă. În acest fel problema dinamicii zborului, în general, şi aceea a stabilităţii, în particular, se completează cu noi elemente fundamentale : elementul comandă şi elementul instalaţia de reglaj automat sau de programare.

Lucrarea recenzată reprezintă o interesantă contribuţie la elaborarea unei teorii moderne a stabilităţii şi maniabilităţii avioanelor în sensul arătat. Ea rezolvă o problemă mai generală decît lucrarea ce formează obiectul recenziei precedente, şi anume : formarea ,,schemei de stabilizare" a avionului (adică alegerea unor caracteristici permiţînd stabilizarea optimă a aparatului), în condiţiile funcţionării la bord a unor instalaţii automate şi ţinînd seama de compresibilitatea aerului.

Această lucrare se impune a fi considerată sub un triplu aspect.

În primul rînd, prin noutatea subiectului tratat, ea reprezintă o lucrare de cercetare ştiinţifică, pe noua linie a apropierii teoriei stabilităţii dinamice a avionului de aceea a comenzii şi reglajului automat.

Pornind de la constatarea că ,,avionul contemporan nu poate fi conceput fără automatică", precum şi de la aceea că ,,mijloacele furnizate de aerodinamică şi de automatică sînt cele două părţi inseparabile ale procesului unic de formare a schemei de comandă a avionului", (lucrarea recenzată, pag. 9), autorii indică tipurile de instalaţii automate necesare avioanelor în funcţie de categoria acestora din urmă. Astfel se arată că pentru avioane evoluînd la înălţimi relativ mici şi cu viteze de zbor nu prea ridicate, este suficientă utilizarea amortizorilor şi autopiloţilor stabilizînd atitudinea avionului (poziţia lui unghiulară în raport cu un sistem de referinţă legat de pămînt). Mărirea altitudinii de zbor aduce cu sine necesitatea şi a altor mijloace de stabilizare, de exemplu, a unui stabilizor reacţionînd la modificarea gradului de stabilitate statică de ,,suprasarcină" [1]).

Se consideră separat mişcarea perturbată din planul de simetrie şi cea laterală, atît a avionului necomandat (,,mişcarea perturbată proprie"), cît şi a avionului comandat (,,mişcarea comandată sau controlată").

Ca şi în lucrarea recenzată mai sus, se utilizează transformatele Laplace ale ecuaţiilor mişcării perturbate şi se construiesc schemele-bloc respective. Folosind ipoteze curente în cercetarea stabilităţii dinamice, autorii reuşesc să simplifice aceste scheme în aşa fel încît atît pentru mişcarea longitudinală cît şi pentru cea laterală, problema, practic, se reduce la considerarea unor ecuaţii de ordinul doi. Pentru găsirea celei mai potrivite scheme de stabilizare, autorii aleg drept parametri poziţia centrului de greutate al avionului şi caracteristicile piloţilor automaţi. Problema este formulată în termeni precişi, stabilindu-se cerinţele tehnice ce trebuie să fie impuse aparatului pentru cazul mişcării longitudinale şi al celei laterale. Se preconizează o rezolvare grafică, necesitînd doar calcule destul de simple.

Un alt aspect sub care trebuie privită lucrarea recenzată este cel ingineresc. Într-adevăr, de la un capăt la altul al lucrării nu este pierdut din vedere nici un moment scopul practic aplicativ căruia îi este subordonată tratarea. Lucrarea pune la îndemîna inginerului proiectant o nouă metodă, nu numai ca principiu, lăsîndu-i sarcina s-o elaboreze pînă la faza de aplicare, ci, în general, cu toate amănuntele, datele şi indicaţiile necesare utilizării ei practice. Exemplul de calcul dat în lucrare, spre pildă, este suficient de amănunţit tratat, ca să furnizeze un model pentru aplicaţiile inginereşti.

---

[1]) Specificaţia ,,de suprasarcină" se adaugă deoarece în literatura sovietică de specialitate în afară de aceasta se mai consideră şi stabilitatea statică în raport cu viteza, adică derivata totală a coeficientului de moment în raport cu unghiul de incidenţă (sau coeficientul de portanţă), coeficientul de moment considerîndu-se funcţie de acest argument atît explicit, cît şi prin intermediul vitezei de zbor (sau numărului M).

În sfîrşit, cel de-al treilea aspect ce trebuie relevat este cel didactic. Expunerea este cît se poate de clară cu suficiente amănunte ca să poată fi urmărită cu uşurinţă de un cerc cît mai larg de specialişti. Astfel, de exemplu, înainte de a trece la prezentarea ecuaţiilor, sub forma lor operaţională, se dau bine cunoscutele ecuaţii adimensionale linearizate ale mişcării perturbate (obţinute prin metoda micilor perturbaţii) a căror transformare, pe baza metodei preconizate, se urmăreşte apoi pas cu pas. Pe aceaşi linie, autorii insistă asupra descrierii metodelor împrumutate din teoria comenzii şi reglajului automat, pornind de la faptul că ,,în practica de proiectare a avionului, metodele teoriei reglajului nu se utilizează încă întotdeauna în suficientă măsură" (pag. 3).

În concluzie, afirmaţia făcută de către autori în prefaţă că ,,lucrarea poate fi folosită atît pentru scopuri didactice, cît şi pentru calcule inginereşti de proiectare a avioanelor" este justificată cu prisosinţă.

T. Hacker

В. Н. МАТВЕЕВ, *Расчет возмущенного движения самолета* (Calculul mişcării perturbate a avionului). Государственное научно-техническое издательство — Оборонгиз, Москва, 1960.

Cercetarea mişcării perturbate a avionului prezintă un interes deosebit, care nu se reduce doar la constatarea existenţei sau lipsei stabilităţii mişcării acestuia.

Dacă s-a renunţat la cerinţa teoretică a unei stabilităţi inerente totale a avionului, nu s-a putut renunţa, în general, la necesitatea existenţei unor componente stabile în condiţiile controlului parţial [1]). Deci cerinţa referitoare la stabilitatea inerentă se precizează în sensul indicării acelor componente ale perturbaţiei ce se cer a fi amortizate fără intervenţia comenzilor, a indicării vitezei necesare de amortizare etc. La acestea se simte nevoia de a se adăuga unele evaluări cantitative privind componentele instabile (frecvenţa de oscilaţie, viteza de creştere), adică o evaluare a gradului de instabilitate. O asemenea evaluare este necesară pentru o verificare prealabilă a posibilităţii de stabilizare, fără considerarea ansamblului dinamic real, avion + sistem de comandă şi stabilizare (pilot, autopilot, stabilizor automat).

,,Rezultatele cercetării proprietăţilor dinamice şi a caracteristicii proceselor tranzitorii ale avionului în condiţiile mişcării perturbate joacă în prezent un rol important şi în elaborarea mijloacelor stabilizării automate, a comenzii şi navigaţiei." [2])

Cartea lui V. N. Matveev reprezintă o expunere sistematică a teoriei mişcărilor perturbate ale avionului în tratare operaţională. Prin metodele expuse, ea se situează pe linia principală de dezvoltare a teoriei dinamicii zborului.

Drept mişcare perturbată, autorul consideră regimul tranzitoriu indus fie de către perturbaţii exterioare fortuite (funcţionare neregulată a motoarelor etc.), fie de către comenzi sau alte acţiuni perturbatoare deliberat aplicate de către personalul navigant (frînări cu voleţi, lansări de obiecte grele, catapultarea membrilor echipajului etc.). Totuşi, dintre funcţiile perturbatoare, în carte se consideră doar cîteva mai importante, ca bracajul suplimentar al suprafețelor de comandă, precum și unele perturbații atmosferice (cîmp neomogen de temperaturi și presiuni, rafale etc.). În general, forțele perturbatoare se consideră funcții liniare cunoscute de parametrii cinematici ai aparatului, de parametrii caracterizînd situația atmosferică și, uneori, de timp în mod explicit.

---

[1]) La unele aparate de zburat (elicoptere, avioane DAV) şi pentru unele regimuri de zbor, se impune totuşi renunţarea totală la cerinţa stabilităţii inerente, fie şi parţiale.

[2]) Vezi lucrarea recenzată, p. 3.

Scopul didactic evident al lucrării cere expunerea materialului într-o formă cît mai completă și închegată și de aceea ea conține unele părți îndeobște cunoscute (ca de exemplu, prezentarea ecuațiilor de mișcare, ale mișcării perturbate, aducerea la o formă adimensională, stabilirea unor ecuații aproximative simplificate pe baza ipotezelor obișnuite etc.). Dar și în aceste paragrafe se întîlnesc unele puncte de vedere noi și personale, adaptate necesităților considerării comenzilor, utilizării tehnicii operaționale etc.

Urmînd aceeași linie de didacticitate, primele capitole sînt destinate expunerii unor noțiuni de calcul operațional, insistîndu-se asupra metodelor practice, adecvate obiectului lucrării, iar în completări se dau indicații suplimentare privind tehnica de calcul, se lămuresc cîteva noțiuni utilizate curent în teoria reglajului automat pentru caracterizarea proceselor tranzitorii și, în sfîrșit, se dă un tabel cu transformatele Laplace ale unor funcții uzuale.

Conținutul oarecum special și noutatea metodei, care au împiedicat într-o măsură mai mare sau mai mică prezentarea unui material definitiv sistematizat și complet, fac ca lucrarea recenzată, cu tot caracterul ei didactic, să nu poată fi considerată drept manual. Dar lucrările recenzate mai sus și o serie întreagă de alte lucrări apărute în ultimii ani, atît în U.R.S.S. cît și în alte țări, furnizează un material suficient de bogat ca să se poată trece la pasul următor, la redactarea unui tratat sau manual cît mai complet de dinamica zborului, care să țină seama de noua orientare ce s-a dat cercetărilor în domeniul stabilității și maniabilității avioanelor.

T. Hacker

Н. В. ГРИГОРЬЕВ, *Нелинейные колебания элементов машин и сооружений* (Vibrațiile neliniare ale elementelor de mașini și construcții). Mașghiz M-L, 1961, 256 p.

În lucrare se studiază principalele probleme de vibrații neliniare care se întîlnesc la elementele de mașini. Astfel în capitolul I se tratează problemele vibrațiilor grinzilor de masă continuă cu condiții la limită neliniare. Se tratează aici vibrațiile libere, prezentîndu-se principalele metode de calcul precum și exemple practice specifice.

Vibrațiile forțate ale barelor de masă continuă cu asemenea condiții la limită, atît fără cît și cu considerarea frecării, fac obiectul în continuare al acestui capitol.

Posibilitățile de utilizare a reazemelor elastice liniare și a celor neliniare în vederea eliminării unor regimuri critice, precum și în vederea descărcării lagărelor rotorilor, sînt pe larg tratate în capitolul următor. Este dat aici studiul efectului de amortizare ale acestor reazeme, atît fără cît și cu masă adițională, arătîndu-se și interesante cercetări experimentale.

Luarea în considerare în această problemă a masei distribuită în lungul arborilor și studiul regimurilor critice pentru reazemele de rostogolire formează obiectul capitolului III.

Cazul arborilor pe mai multe reazeme și metodele tipice de calcul ale turațiilor critice sînt tratate în capitolul următor.

Studiul elementelor neliniare introduse în sistemul rotor-stator este de asemenea prezentat într-un capitol separat.

În capitolul VI se prezintă construcția și funcționarea unui reazem autostabilizat al rotorului cu frecare uscată și cu limitatori ai deformației.

Luarea în consideraţie a elementelor neliniare la calculul sistemului rotor-corp al turbomaşinilor, precum şi alegerea parametrilor prin care să se aprecieze starea dinamică şi utilizarea de aparatură prin care să se poată determina starea tehnică a turbomaşinilor, formează obiectul următoarelor două capitole.

Vibraţiile de răsucire ţinînd seama de cuplaje neliniare, precum şi studiul efectelor de amortizare, sînt amplu tratate în ultimul capitol.

Modul de redactare a lucrării este clar şi precis, fiind ilustrat cu numeroase aplicaţii practice. Tabelele cu rezultate şi diagramele prezentate uşurează mult calculul în acest domeniu, în general dificil.

Realele calităţi ale lucrării lui N. V. Grigoriev, fac ca aceasta să se situeze printre lucrările de bază în studiul vibraţiilor neliniare ale elementelor de maşini.

Augustin Petre

M. C. ТОРЯНИК, *Косое внецентренное сжатие и косой изгиб в железобетоне* (Compresiunea excentrică oblică şi încovoierea oblică în betonul armat). Госстройиздат, УССР, Киев, 1961, 112 p., 48 fig. + anexe.

În prezent cercetătorii de pretutindeni acordă o atenţie deosebită studiilor teoretice şi experimentale privind comportarea elementelor de beton armat atît la solicitări compuse cît şi la solicitări simple al căror plan de acţiune nu coincide cu unul din planele principale ale elementelor.

Această orientare a studiilor decurge din necesitatea actuală a elaborării unei teorii complete a betonului armat bazată pe proprietăţile reale ale acestui material de construcţii în diferitele stadii de solicitare.

Pe această linie modernă se înscrie şi cartea lui M.C. Торяник, care reprezintă un studiu experimental şi teoretic aprofundat al compresiunii excentrice oblice şi al încovoierii oblice în betonul armat.

Apariţia acestei cărţi este o consecinţă logică a studiilor întreprinse de autor în decursul a peste 20 ani în domeniul tratat, ale căror rezultate sînt bine cunoscute în ţara noastră.

Expunerea are la bază metoda de calcul la stările limită, oficializată în U.R.S.S prin ,,Norme şi condiţii tehnice pentru proiectarea construcţiilor de beton şi beton armat (N i T U 123—55)".

În prima parte a lucrării (cap. I şi II) se prezintă calculul elementelor de beton armat cu secţiunea dreptunghiulară, armate simetric, pentru cele trei cazuri posibile privind poziţia axei neutre.

În partea a doua a cărţii (cap. III) se expune metoda de calcul la încovoiere oblică a elementelor cu secţiunea dreptunghiulară şi în formă de T sau Г, simplu sau dublu armate, pentru toate cazurile posibile privind poziţia axei neutre.

Comparaţia rezultatelor teoretice cu cele obţinute pe cale experimentală confirmă justeţea ipotezelor de calcul adoptate pentru cazurile de solicitare tratate , în cadrul stării limită de rezistenţă.

În anexele lucrării se prezintă numeroase nomograme şi tabele, care constituie un sprijin preţios la calculul elementelor studiate. De asemenea se dă un număr apreciabil de exemple de calcul.

Cartea lui M.C. Торяник, reprezintă o contribuţie originală deosebit de valoroasă, înscriindu-se pe linia perfecţionării şi extinderii metodelor moderne de calcul în betonul armat, pentru toate tipurile de solicitări.

Lucrarea are o deosebită valoare practică, constituind un real ajutor în special pentru inginerii constructori care se ocupă cu proiectarea construcţiilor de beton armat.

V. Pelcu

JIŘÍ HOŘEJŠÍ, *Pruty s náhlou změnou průřezu* (Grinzi cu moment de inerţie variabil), 160 pag; *Nosník na pružném podkladě* (Grinzi pe mediu elastic), 116 pag., Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1958.

Cele două volume publicate la Praga de doc. ing. dr. Jiří Hořejší sînt consacrate unor probleme înrudite de statica construcţiilor. Ambele probleme sînt cercetate prin metode de calcul personale, rezultatele fiind duse pînă la posibilităţi de aplicare practică şi tabele de calcul, ceea ce reprezintă şi scopul lucrării, de altfel.

În prima din aceste lucrări autorul se ocupă de problema grinzilor cu moment de inerţie variabil. Se consideră astfel grinzile drepte cu o singură deschidere, simplu rezemate sau încastrate, cu moment de inerţie constant pe porţiuni — deci cu secţiunea transversală variind în trepte ; autorul dă rezultate în special pentru grinzile cu moment de inerţie constant pe două porţiuni (grinzile cu o vută constantă) şi pentru grinzile cu îngroşări constante în zona reazemelor (grinzile cu două vute constante, simetrice sau nu). Rezultatele teoretice sînt însoţite de tabele şi diagrame (acestea ocupînd circa două treimi din întinderea lucrării) privitoare la liniile de influenţă ale momentului încovoietor, forţei tăietoare sau săgeţii, într-un punct curent al grinzii (inclusiv punct de reazem — deci liniile de influenţă ale momentelor de încastrare). Diagramele prezentate sînt deosebit de sugestive şi utile în practică.

A doua lucrare este destinată studiului grinzilor drepte pe mediu elastic. Se foloseşte ipoteza simplificatoare Winkler- Zimmermann, în baza căreia se admite o proporţionalitate directă între tasare şi presiunea corespunzătoare punctului respectiv, şi se dau rezultate privitoare la grinzi de lungime infinită sau semiinfinită ; se arată de asemenea cum se pot aplica aceste rezultate în cazul grinzilor scurte (de lungime finită). Se dau apoi tabele pentru unele funcţii trigonometrice şi hiperbolice care intervin în mod curent în calcul, precum şi pentru calculul momentelor încovoietoare şi forţelor tăietoare în unele secţiuni.

Volumele dr. ing. Hořejší sînt destinate în special proiectanţilor din domeniul construcţiilor, fiind deosebit de utile în aplicaţii practice.

P. P. Teodorescu

PIERRE CHARON, *Le calcul pratique des constructions à inertie variable, Théorie et Applications* (Calculul practic al construcţiilor cu inerţie variabilă, Teorie şi aplicaţii). Editions Eyrolles, Paris, 1961, XVI + 778 p.

Manualul lui P. Charon este destinat, în primul rînd, calculului construcţiilor (cadre, sisteme de bare etc.) static nedeterminate. În cazul în care elementele componente sînt de secţiune constantă se folosesc în mod curent diferite metode de calcul bine cunoscute, cum sînt : metoda aproximaţiilor succesive (Cross şi diferitele ei variante), metoda focarelor, metoda determinării unghiurilor de rotire prin anumite ecuaţii etc. În cazul însă în care elementele de construcţie sînt cu moment de inerţie variabil, aceste metode conduc la calcule lungi şi fastidioase pe care inginerii proiectanţi le pot aplica cu greu în practică ; aceasta face ca adesea să se neglijeze efectul îngroşărilor de secţiuni (vutelor) sau să se folosească formule mult prea aproximative. În cartea sa, care cuprinde patru părţi, autorul încearcă să prezinte metode de calcul care să permită calculul construcţiilor cu moment de inerţie variabil în mod riguros (în cadrul ipotezelor rezistenţei materialelor) şi, pe cît posibil, tot atît de simplu ca şi în cazul construcţiilor cu moment de inerţie constant.

Prima parte a lucrării, care cuprinde nouă capitole, este destinată studiului grinzii drepte cu o singură deschidere, avînd secţiunea variabilă. Pornind de la formulele generale ale lui Bresse, se dau rezultate generale pentru grinzi dublu încastrate sau pentru grinzi încastrate la un capăt şi simplu rezemate la celălalt capăt. În ceea ce priveşte variaţia secţiunii transversale, în special a înălţimii acestei secţiuni — considerată dreptunghiulară — se insistă asupra variaţiei liniare sau parabolice, precum şi asupra variaţiei în trepte. Observăm că se refac demonstraţiile pentru fiecare caz în parte, ceea ce îngreuiază oarecum lucrarea. Fiecare caz este însoţit de exemple numerice şi de diagrame utile, în practică.

În partea a doua a lucrării se dezvoltă metode de calcul pentru construcţii static nedeterminate. Se presupune în general că nodurile sînt rigide, deci că barele care se întîlnesc într-un punct se rotesc cu acelaşi unghi. Se expun astfel metode de determinare directă a momentelor (metode folositoare în cazul în care nodurile sînt fixe şi metode ce se aplică în cazul în care nodurile suferă deplasări liniare), metode de determinare a unghiurilor de rotaţie şi metoda punctelor fixe (metoda focarelor). Un loc important a fost rezervat de asemenea unor cazuri particulare de cadre, care se întîlnesc adesea în practică.

Aplicaţii numerice interesante se dau în partea a treia a lucrării : determinări de eforturi, linii de influenţă etc. În partea a patra (care cuprinde peste 300 pag.) se dau diferite tabele de valori numerice, abace şi diagrame, deosebit de folositoare pentru practica de proiectare. Multe din acestea aparţin autorului. Ele permit, în general, calculul construcţiilor static nedeterminate cu moment de inerţie variabil în acelaşi fel ca şi calculul construcţiilor static nedeterminate, cu moment de inerţie constant.

Lucrarea lui P. Charon dă astfel posibilitatea unui studiu sistematic al unei construcţii static nedeterminate, oricît de complicată ar fi aceasta. De asemenea, cei care s-au obişnuit să calculeze construcţii static determinate cu moment de inerţie constant îşi vor putea adapta cunoştinţele lor, fără dificultate, şi pentru cazul construcţiilor cu vute static nedeterminate.

Trebuie să remarcăm în această carte claritatea expunerii şi sistematizarea rezultatelor, ceea ce uşurează mult utilizarea ei. În felul acesta manualul prezentat poate fi folosit cu deosebit succes, în special de inginerii proiectanţi.

P. P. Teodorescu

---

* * * *Sbornik vysoké školy dopravní* (Culegere de lucrări a Institutului de căi de comunicaţie). Fakulta provozu a ekonomiky dopravy (Facultatea de exploatare şi economie a comunicaţiilor). Vol 3, Nakladatelství dopravy a spojů, Praha, 1961, 284 p.

Analele Institutului de căi de comunicaţie din Praga, vol. 3, cuprind 20 de comunicări ale membrilor corpului didactic din Facultatea de exploatare şi economie a comunicaţiilor, privind diferite domenii ale tehnicii. Fiecare din aceste comunicări este însoţită de un amplu rezumat în limbile rusă, engleză și germană, ceea ce face ca lucrarea să fie accesibilă, cu toate că este scrisă în limba cehă.

Unele din aceste lucrări sînt destinate problemelor de calcul ale mecanicii construcţiilor. Menţionăm astfel articolul lui J. Ducháček cu privire la momentele statice de ordin superior; cu ajutorul acestor mărimi introduse, autorul consideră impulsurile statice de ordin superior, obţinînd anumite metode de calcul. L. Berka discută aceste rezultate în cazul unei bare prismatice, determinînd semnificaţia mecanică a impulsurilor de grad doi, trei și patru. Probleme privind efecte de impact asupra construcţiilor sînt discutate de J. Jeřábek; sînt analizate în special unele rezultate experimentale privind șocul într-o bară. M. Pirner dă cîteva rezultate privind oscilaţiile amortizate la poduri din grinzi cu zăbrele pentru calea ferată.

Celelalte lucrări sînt destinate unor probleme de construcţii, de exploatare sau de economie. Menţionăm studiile întreprinse de Vl. Elahák cu privire la măsurările de deformaţii ale tunelelor, precum și rezultatele date de F. Matoušek cu privire la protecţia căptușelii tunelelor de efectele apei și aerului. J. Gabriel și K. Slach prezintă două lucrări asupra nodurilor de cale ferată. Alte articole sînt destinate construcţiilor de gări și peroane acoperite etc.

Culegerea de articole este destinată, în primul rînd inginerilor constructori, unele din acestea putînd fi consultate cu succes și de cercetătorii din domeniul mecanicii aplicate.

P. P. Teodorescu

FRANTIŠEK BAUER, JINDŘICH MAREK, *Izentropiceskoe tecenie gazov, Tabliţi i popravocinîe nomogrammî.* (Isentropic Gas-Flow, Tables and Correction Nomograms), Izdatelstvo Cehoslovaţkoi Akademii Nauk, Praga 1961 (Scurgerea izentropică a gazelor, Tabele și nomograme de corecţie).

În cadrul dinamicii gazelor, scurgerea staţionară unidimensională joacă un rol deosebit de important, datorită pe de o parte simplităţii formulelor, iar pe de alta numeroaselor aplicaţii practice. Într-adevăr, se știe că variaţia parametrilor gazului în funcţie de numărul lui Mach se exprimă prin formule deosebit de simple, iar ca aplicaţii putem cita, în afară de diferite calcule din aerodinamica subsonică și supersonică, probleme referitoare la rachete și motoare cu reacţie, inclusiv teoria combustiei și a detonaţiei. În vederea acestor multiple aplicaţii, Academia cehoslovacă de știinţe a însărcinat pe autorii prezentului volum cu alcătuirea tabelelor de variaţie a parametrilor gazului în funcţie de numărul lui Mach. Formulele la care ne-am referit, utilizate pentru calcularea valorilor numerice, sînt valabile pentru scurgerea staţionară, unidimensională și izentropică a unui gaz ideal. Acest lucru implică desigur anumite abateri ale valorilor calculate faţă de acelea reale. Pentru a elimina cel puţin în parte inconvenientul semnalat, autorii au considerat și ceea ce ei numesc un gaz cu grad redus de idealizare, la care căldurile specifice la presiune constantă și la volum constant sînt funcţii de temperatură dar nu și de presiune. Se ajunge astfel la o apropiere mai mare de comportarea unui gaz real și partea cea mai originală a lucrării constă tocmai în utilizarea unei metode elaborată de unul dintre autori, care permite introducerea acestor corecţiuni.

Lucrarea este divizată în patru părţi, dintre care primele două conţin expunerea bazelor teoretice, iar următoarele, tabelele de valori. În anexă, sînt date nomogramele de corecţie. Textul este redactat în limbile rusă și engleză.

Prima parte conţine o serie de consideraţii asupra metodelor de rezolvare pentru scurgerea izentropică, atît pentru gazele ideale cît și pentru acelea cu grad redus de idealizare, în sensul precizat mai sus. În tabele, sînt date valorile, în funcţie de temperatură, ale mărimilor termodinamice ale aerului uscat, constantele fizice ale gazelor di- şi triatomice precum şi ale mai multor serii de hidroçarburi gazoase. Sînt incluse de asemenea tabele pentru variaţia în funcţie de temperatură a raportului k dintre căldurile specifice ale aceloraşi gaze.

Partea a doua este dedicată prezentării metodelor de interpolare utilizabile la găsirea valorilor funcţiilor tabulate pentru valori ale argumentului care nu sînt trecute în tabele. În partea a treia sînt cuprinse tabelele funcţiilor T/T_0, p/p_0, ρ/ρ_0, a/a_0, F/F^* (F secţiunea transversală a ajutajului) şi q/p_0, q fiind presiunea dinamică, pentru valori ale numărului lui Mach cuprinse între 0 şi 5, din sutime în sutime. Valorile exponentului k luate în considerare sînt cuprinse între 1,01 şi 1,41, de asemenea din sutime în sutime. La tabelele corespunzătoare fiecăreia dintre aceste valori sînt indicate, acolo unde este cazul, gazele la care corespund ele.

În ultima parte sînt date tabelele aceloraşi funcţii pentru scurgerea izentropică a aerului uscat ($k = 1{,}40$), numărul lui Mach fiind cuprins între 0 şi 8, cu valori din sutime în sutime. Numai pentru acest caz, sînt anexate nomogramele de corecţie pentru aerul uscat, referitoare la toate funcţiile tabulate.

Prezentarea grafică a volumului este foarte îngrijită şi astfel făcută încît utilizarea tabelelor să fie cît mai uşurată. Este evident că o astfel de lucrare este foarte utilă în special pentru ingineri, dar poate fi de folos şi pentru calculele legate de unele cercetări ştiinţifice.

T. Oroveanu

O. PINKUS, B. STERNLICHT, *Theory of Hydrodynamic Lubrication* (Teoria lubrificaţiei hidrodinamice). Mc. Graw-Hill Book Co, New York, 1961, 465 p.

Cartea reprezintă o sinteză a principalelor rezultate obţinute pînă în prezent în domeniul teoriei hidrodinamice a lubrificaţiei.

Se remarcă de la început grija autorilor de a cuprinde cît mai complet toate aspectele problemei. Astfel, după unele consideraţii generale (ecuaţiile lubrificaţiei, unele probleme elementare ca scurgerea între două plăci, cilindri sau prin orificii), se studiază lagărele de alungire infinită circulare şi axiale, lagărele reale de alungire finită, lagărele cu aer, lagărele hidrostatice, lagărele supuse la sarcini şi viteze variabile, instabilitatea hidrodinamică, efecte termice asupra lubrificaţiei. În continuare sînt prezentate unele probleme care reprezintă extensiuni moderne ale teoriei lubrificaţiei, ca : lubrificaţia lagărelor deformabile, teoria hidrodinamică a suprafeţelor cu mişcare de rostogolire, efectul forţelor de inerţie şi al regimului turbulent de mişcare, reologia lubrificaţiei, extinderea teoriei clasice la cazul lubrificaţiei în straturi groase. Cartea se încheie cu un capitol ce conţine o selecţie de rezultate experimentale care reliefează diferitele particularităţi ale fenomenelor de lubrificaţie şi concordanţa care există între teorie şi experienţă.

Autorii au meritul că au reuşit să redea într-un volum aşa de concis numeroasele aspecte ale teoriei moderne a lubrificaţiei. Desigur că sinteza concisă efectuată a avut drept efect omiterea unor probleme (de exemplu în capitolele privind lagărele hidrostatice, turbulenţa) ; totuşi, în general, tratarea este complexă şi cu finalitate. Deosebit de valoroase pentru modul de prezentare sînt capitolele privind lagărele încărcate dinamic şi instabilitatea hidrodinamică. De asemenea, prezentarea a numeroase tabele şi diagrame obţinute prin calcule numerice, dintre care o mare parte sînt contribuţia personală a autorilor măresc interesul şi utilitatea cărţii.

La finele fiecărui capitol se prezintă o listă selecţionată de referinţe bibliografice, majoritatea recente. Completarea referinţelor cu unele lucrări, îndeosebi europene, ar fi întregit problemele expuse cu o serie de aspecte interesante.

Lucrarea este scrisă clar, într-un mod unitar şi la un nivel ridicat. Ea este accesibilă în primul rînd celor familiarizaţi cu problemele teoretice ale lubrificaţiei sau ale mecanicii fluidelor. Lucrarea prezintă în acelaşi timp interes şi pentru ingineri, datorită numeroaselor date de calcul prezentate, care servesc ca bază pentru proiectarea lagărelor. În ansamblu, lucrarea reprezintă o contribuţie valoroasă adusă în problema lubrificaţiei.

V. N. Constantinescu

H. PARKUS, *Mechanik der festen Körper* (Mecanica corpurilor solide). Springer-Verlag, Wien, 1960, VIII + 264 p.

Cartea prof. Heinz Parkus, cercetător binecunoscut în domeniul teoriei elasticităţii şi, în particular, al termoelasticităţii, este dedicată unei prezentări cu caracter general a mecanicii corpului solid, înţelegînd prin aceasta atît rezultatele obţinute în cadrul mecanicii generale (în special rezultatele privind corpul rigid) cît şi rezultatele privind corpurile cu proprietăţi elastice (metode de rezistenţa materialelor — ipoteze simplificatoare — şi metode de teoria elasticităţii). Lucrarea cuprinde 21 de capitole şi o anexă cu cele mai importante formule din algebra şi analiza vectorială.

Primele trei capitole sînt destinate unor probleme introductive, în care se studiază fie mişcarea, fără a se lua în considerare cauzele care au produs-o, fie problemele de echivalenţă a sistemelor de forţe — în particular echivalenţa cu zero. Se dau astfel cele mai importante rezultate din domeniul cinematicii şi staticii, însoţite de diferite aplicaţii practice. De asemenea, găsim un studiu de geometrie a maselor : centre de masă, momente statice şi momente de inerţie.

Capitolele IV şi V cuprind principalele ecuaţii ale dinamicii, precum şi teoremele generale, deduse prin introducerea tensorului tensiune. Aceste rezultate sînt aplicate la unele probleme importante din domeniul dinamicii punctului material, precum şi din domeniul dinamicii sistemelor de puncte materiale.

Următoarele trei capitole se bazează pe introducerea noţiunilor de lucru mecanic şi energie. În felul acesta apare principiul lui d'Alembert şi se obţin ecuaţiile lui Lagrange. Metodele mecanicii analitice rămîn destul de puţin dezvoltate.

În capitolele IX şi X se introduc noţiunile de bază ale teoriei elasticităţii : stare de tensiune, stare de deformaţie, legea lui Hooke, principiul lui B. de St. Venant.

Problemele barei drepte şi curbe sînt studiate în capitolele XI, XII şi XIII. În afară de cazul solicitărilor simple, în această parte a lucrării este cuprins şi un studiu al torsiunii barei drepte de secţiune oarecare. Pentru încovoierea barelor curbe plane se dau, de asemenea, unele rezultate.

Plăcile plane subţiri circulare (cap. XIV) şi plăcile subţiri de rotaţie (cap. XV) sînt considerate din punct de vedere elementar, ultimele fiind studiate în special în cadrul teoriei fără momente.

Noţiunea de lucru mecanic de deformaţie este folosită în capitolele XVI şi XVII pentru studiul unor probleme speciale. Cu această ocazie se introduc şi teoremele lui Maxwell şi Castigliano. Metoda variaţională a lui Ritz, care utilizează conceptul de energie de deformaţie, este folosită (cap. XX) în studiul unor probleme de torsiune şi stabilitate.

Tensiunile din temperatură (cap. XVIII), stabilitatea mişcării (cap. XIX) şi unele probleme dinamice (cap. XXI) sînt tratate separat. Menţionăm în special aplicarea criteriului lui Dirichlet şi influenţa şocului asupra unui sistem elastic.

La fiecare capitol se găsesc diferite aplicaţii, care ilustrează rezultatele cu caracter teoretic. Prezentarea materialului se face cît mai succint posibil, cuprinzînd concomitent atît rezultate privind corpurile rigide cît şi rezultate privind corpurile deformabile.

Cartea, scrisă deosebit de clar şi cu multă rigurozitate, este destinată în primul rînd studenţilor din Institutele tehnice superioare; ea poate fi însă folosită cu succes de toţi cei care vor să aibă o orientare cu caracter general în domeniul mecanicii corpului solid.

P. P. Teodorescu

IAHNKE-EMDE, *Tafeln höherer Functionen. Tables of higher functions* (Tabele de funcţii speciale). B. G. Teubner verlagsgesellschaft-Leipzig 1960, 296 p.

Volumul de faţă apărut în anul 1960 este retipărirea ediţiei a cincea nemodificată a volumului de tabele binecunoscut de către inginerii şi tehnicienii din întreaga lume.

Ediţia a cincea a fost prelucrată de F. Emde în colaborare cu F. Lösch.

În fiecare capitol consacrat unei anumite funcţii speciale sau unui grup de funcţii speciale înrudite sînt prezentate: definiţii, proprietăţi, formule esenţiale, bibliografie, reprezentări grafice şi tabele numerice. Funcţiile speciale care sînt prezentate în acest volum sînt următoarele: sinusul, cosinusul şi logaritmul integral, funcţia factorial, funcţii teta, integrale eliptice, funcţii eliptice, funcţii Legendre, funcţii Bessel, funcţiile zeta ale lui Riemann, funcţiile hipergeometrice, funcţii Mathieu.

Această lucrare constituie un instrument de calcul foarte util pentru toţi acei care au de făcut calcule numerice cu aplicaţii ale funcţiilor speciale.

Ş. Săndulescu.

O. TIETJENS, *Strömungslehre, Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt* (Studiul scurgerilor, fundamentare fizică din punct de vedere tehnic.)
Vol. 1. — Hydro- und Aerostatik, Bewegung der idealen Flüssigkeit. (Hidro şi aerostatica, Mişcarea fluidelor ideale) Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960, 536 p.

În primul volum, după cum indică şi titlul, autorul se ocupă cu studiul scurgerilor fluidelor ideale. În tot cursul expunerii se pune în evidenţă aspectul real al scurgerilor fluidelor şi măsura în care este utilă şi valabilă teoria fluidelor ideale. În al doilea volum autorul se ocupă, după cum anunţă la sfîrşitul primului volum, cu problemele stratului limită, turbulenţei şi dinamicii gazelor.

Materia din primul volum este împărţită în şapte capitole, precum urmează:

Capitolul 1 cuprinde proprietăţile lichidelor şi gazelor, capitolul 2 problemele de echilibru şi stabilitate, capitolul 3 tensiunea superficială şi capilaritatea, capitolul 4 scurgerea potenţială a unui fluid incompresibil fără suprafeţe libere, capitolul 5 scurgerea potenţială bi-dimensională fără suprafeţe libere, capitolul 6 scurgeri cu suprafeţe libere şi capitolul 7 scurgeri cu rotaţie şi vîrtejuri.

Toate aceste subiecte sînt profund, concret şi detaliat tratate ; expunerea este însoţită de multe figuri şi diagrame.

Lucrarea de faţă completată cu volumul al doilea poate să constituie o lucrare de bază pentru cei ce doresc să cunoască cît mai complet diferitele aspecte ale scurgerii fluidelor şi să lucreze în domeniul respectiv.

Ş. Săndulescu

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB

Trudî instituta mașinovedenia. Seminar po T.M.M., XXII, vîp. 87, 1961.
Prikladnaia Matematika i Mehanika. XXV, vîp. 4, 1961.
Prikladna Mehanika. Kiev, VII, vîp. 1, 2, 3, 1961.
Referativnîi biulleten. Sofia, *2*, 1961.
Stavebnicky casopis. *7*, 1961.
Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Verkehrswesen. Dresden, *2*, 1960/1961.
Polish Technical Abstracts. *1*, 1961.
Proceedings of vibrations problems. Warszawa, *2*, 1961.
Przeglad Prac Naukowych i budowych. Institutul Politehnic Warszawa.
Quarterly Review of scientific publications. Academia Poloneză de științe, *3–4*, 1960.
Jarmüvek. Budapesta, *9*, 1961.

G. S. KIT, *Priblijennoe reșenie zadaci cistogo kruceniia.* Izd. Akademii Nauk Ukrainskoi SSR, Kiev, 1960, 81 p.

— *Suhoe trenie.* Izd. Akademii Nauk Latvinskoi SSR, Riga, 1961, 203 p.

— *Teoria invariantnosti i eë primenenie v avtomaticeskih ustroistvah.* Trudî soveșcaniia sostoiavșegosia v.g. Kieve 16–20 oktiabria 1958 goda, Moskva, 1959, 377 p.

A. MAJOR, *Berechnung und Planung von Maschinen- und Turbinenfundamenten.* VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1961, 851 p.

De la Institutul de aerofizică, Toronto (Canada)

I. J. BILLINGTON and I. I. GLASS, *Analysis of boiler room pressures following a potential rupture of the main coolant line in a nuclear power plant.* 1960, 41 p. (UTIA Report no. 70).

R. E. SMITH, *Studies of ground effect on a 60° inwardly inclined annular jet.* 1961, 28 p. (UTIA Technical Note no. 47).

E. D. POPPLETON, *Note on the matrix analysis of non-linear structures.* 1961, 22 p. (UTIA Technical Note no. 46).

R. MCCLEAN, *The optimization of an autopilot for an airplane subjected to random atmospheric turbulence* (UTIA Technical Report no. 45) 1960, 32 p.

H. Y. T. WONG, *A preliminary investigation of the use of expanders to generate hypersonic flow in a wind tunnel.* 1960, 15 p. (UTIA Technical Note no. 44).

L. BERGERON, *Water hammer in hydraulics and wave surges in electricity*. J. Wiley & Sons, New York, 1961, 293 p.

DOLEZAL, *Grosskessel-Feuerungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1961.

H. MAURI, *Vorrichtungsbau*. Teil I. *Einteilung, Aufgaben und Elemente der Vorrichtungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1961, 70 p.

Disertaţii de la Universitatea tehnică, Berlin

M. FRANKE, *Über den Einfluss überlagerter Schwingungen auf den Stoffübergang zwischen frei fallenden Tropfen und Flüssigkeit*. 1960, 80 p.

H. G. WENDEROTH, *Untersuchungen über den Verschleiss von Grauguss mit einer Prüfmaschine für hin- und hergehende Bewegung* 1960, 52 p.

H. PFÜTZNER, *Koppelschwingungen von Rad und Schaufeln an Turbomaschinen*, 1961, 69 p.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

2

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*
- Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*
- Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*
- *Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).*
- *Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide, continue).*
- *Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).*
- *Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii).*
- *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 februarie".

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIII, nr. 2 1962

SUMAR

STUDII

Pag.

AEROMECANICĂ

ELIE CARAFOLI și DAN MATEESCU, Interferența dintre aripă și fuzelaj în scurgerile conice de ordin superior 275
T. HACKER, Unele probleme ale stabilizării automate a avioanelor DAV în zbor imobil 295
ȘT. N. SĂVULESCU, Unele aplicații ale ipotezei de organizare statistică limitativă a fluctuațiilor de energie turbulentă 311
GH. RADO, Elicopter cu stabilitate proprie în zbor la punct fix 327

HIDROMECANICĂ

D. DUMITRESCU, V. IONESCU și C. CRĂCIUN, Studiul unitar al mișcării fluidelor grele cu suprafața liberă 353
T. OROVEANU, Asupra dezlocuirii petrolului de către apă în medii poroase fisurate 363
DAN GH. IONESCU, Asupra aplicării teoriei funcțiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. IV. Soluția pentru domenii multiplu conexe . . 377

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

V. N. CONSTANTINESCU, Asupra scurgerii gazelor cu viteze mari în straturi subțiri 383
AL. NICA, Studiul comparativ al materialelor antifricțiune 401
OLGA BIȚĂ și I. DINCĂ, Aspecte ale influenței naturii suprafețelor în frecare asupra rezistenței la abraziune 409

ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

RADU PRIȘCU și GHEORGHE OLTEANU, Eficiența înclinării tălpii de fundație la barajele de greutate 419
MIRCEA SOARE, Contribuții la teoria încovoierii paraboloidului hiperbolic în șa . 429
M. ARCAN, O metodă de calcul al diafragmelor de rigidizare cu un șir de goluri . 451

Pag.

N. IOSIPESCU, Cercetări fotoelastice asupra unui procedeu corect de încercare la forfecare pură a materialelor 473
VALERIU PETCU, Momente plastice optime în grinzi continue de beton armat cu secţiunea variabilă 497
V. MANEA, Asupra ecuaţiilor neliniare de mişcare ale unui mediu continuu deformabil 507

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

M. NĂSTASE, Asupra parametrilor optimi în defectoscopia cu raze X şi γ 517

NOTE

EMERIC DEUTSCH, Torsiunea barelor prismatice cu secţiunea transversală în formă de cruce cu braţele opuse egale 529

RECENZII 539

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 555

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XIII, № 2 **1962**

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

Стр.

АЭРОМЕХАНИКА

Е. КАРАФОЛИ и ДАН МАТЕЕСКУ, Взаимодействие между крылом и фюзеляжем при конических течениях высшего порядка 275
Т. ХАКЕР, Об устойчивости при висении самолетов вертикального взлета и посадки с автоматом стабилизации 295
ШТ. СЭВУЛЕСКУ, Некоторые применения гипотезы ограничительной статистической организации флуктуации турбулентной энергии 311
Г. РАДО, Вертолет с собственной устойчивостью в полете при висении . . . 327

ГИДРОМЕХАНИКА

Д. ДУМИТРЕСКУ, В. ИОНЕСКУ и К. КРЭЧУН, Комплексное исследование движения тяжелых жидкостей со свободной поверхностью 353
Т. ОРОВЯНУ, О вытеснении нефти водой в трещиноватых пористых средах 363
ДАН ИОНЕСКУ, О применении теории функций комплексного переменного в гидродинамике вязких жидкостей. IV. Решение для многосвязных областей 377

СМАЗКА – ТРЕНИЕ – ИЗНОС

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, О течении газов в тонких слоях при больших скоростях 383
А. НИКА, Сравнительное исследование антифрикционных материалов . . 401
ОЛЬГА БИЦЭ и И. ДИНКЭ, Аспекты влияния характера трущихся поверхностей на абразивную устойчивость 409

УПРУГОСТЬ – ПЛАСТИЧНОСТЬ – СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

РАДУ ПРИШКУ и Г. ОЛТЯНУ, Эффективность наклона подошвы фундамента гравитационных плотин 419
М. СОАРЕ, К теории изгиба гиперболического седловидного параболоида 429
М. АРКАН, Метод расчета диафрагм жесткости с одним рядом проемов . . 451

Стр.

Н. ИОСИПЕСКУ, Фотоупругие исследования по правильному способу испытания материалов на чистый срез 473
В. ПЕТКУ, Оптимальные пластические моменты в неразрезных железобетонных балках переменного сечения 497
В. МАНЯ, О нелинейных уравнениях движения деформируемой сплошной среды 507

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

М. НЭСТАСЕ, Об оптимальных параметрах в рентгеновской и гамма-дефектоскопии 517

ЗАМЕТКИ

Е. ДЕЙЧ, Кручение призматических стержней с крестообразным поперечным сечением с одинаковыми противоположными плечами 529
РЕЦЕНЗИИ 539
ПУБЛИКАЦИИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ . . . 555

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

● Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

● Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

● Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

● Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

● *Астродинамика (оптимальные траектории, расчет орбит или отрезка орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа).*

● *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*

● *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*

● *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*

● *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, элекрические и гидравлические аналогии).*

● *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*

● *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в мехнике.*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

Le périodique

«STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie:

- *des* études originales à *caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique*;
- *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question*;
- *des* exposés scientifiques et techniques *ou l'on expose*: *l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau*; *des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée*;
- *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants:

- *astrodynamique (réalisation des trajectoires optimum, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véchicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorélativité, vol en atmosphère raréfiée, retours dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique).*
- *aéromécanique (mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs)*;
- *hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes)*;
- *constructions mécaniques (cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus)*;
- *mécanique générale (résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs stabilité, analogies électriques et hydrauliques)*;
- *statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction)*;
- *technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique).*

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XIII, nº 2 1962

SOMMAIRE

ÉTUDES

Page

AÉROMÉCANIQUE

ELIE CARAFOLI and DAN MATEESCU, Wing-body interference in high-order conical flow 275
T. HACKER, On the stability of VTOL aircrafts with automatic stabilizer in hovering flight 295
ŞT. N. SĂVULESCU, Some applications of the hypothesis of limitative statistical organization of turbulent energy fluctuations 311
GH. RADO, Hubschrauber mit Eigenstabilität im Schwebeflug 327

HYDROMÉCANIQUE

D. DUMITRESCU, V. IONESCU et C. CRĂCIUN, Etude unitaire du mouvement des fluides pesants à surface libre 353
T. OROVEANU, Sur le déplacement par l'eau, du pétrole, dans les milieux poreux fissurés 363
DAN GH. IONESCU, Sur l'application de la théorie des fonctions d'une variable complexe dans l'hydrodynamique des fluides visqueux. IV. Solution pour les domaines multiplement connexes 377

LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE

V. N. CONSTANTINESCU, On the flow of high-speed gases in thin layers 383
AL. NICA, Comparative study of anti-friction materials 401
OLGA BIŢĂ et I. DINCĂ, Aspects de l'influence de la nature des surfaces de frottement sur la résistance à l'abrasion 409

ÉLASTICITÉ — PLASTICITÉ — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

RADU PRIŞCU et GHEORGHE OLTEANU, Efficacité de l'inclinaison de la surface de fondation dans le cas des barrages-poids. 419
MIRCEA SOARE, Contributions to the bending theory of the saddle hypar . . . 429

Page

M. ARCAN, A method for calculating rigidity diaphragms with a row of holes . . . 451
N. IOSIPESCU, Recherches photoélastiques sur un procédé correct d'essais au cisaillement pur des matériaux 473
VALERIU PETCU, Optimum plastic moments in reinforced concrete continuous beams of variable cross-section 497
V. MANEA, Sur les équations non linéaires du mouvement d'un milieu continu déformable 507

TECHNIQUE DES MESURES

M. NĂSTASE, On the optimum parameters of the X and γ ray defectoscopy . . . 517

NOTES

EMERIC DEUTSCH, Torsion des barres prismatiques à section transversale en croix aux bras opposés égaux 529

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 539

PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION 555

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

STUDII

AEROMECANICĂ

INTERFERENȚA DINTRE ARIPĂ ȘI FUZELAJ ÎN SCURGERILE CONICE DE ORDIN SUPERIOR

DE

ELIE CARAFOLI și DAN MATEESCU

NOTAȚII ȘI FORMULE UZUALE

U_∞ — viteza curentului neperturbat,

a_∞ — viteza sunetului în condițiile de la infinit,

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach,

$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$,

$Ox_1x_2x_3$ — sistem ortogonal de coordonate, axa Ox_1 fiind dirijată după axa fuzelajului,

$y = \dfrac{x_2}{x_1}$, $z = \dfrac{x_3}{x_1}$ — coordonatele planului fizic oyz (fig. 1)

$\omega\,\eta\,\zeta$ — planul lui Busemann obținut prin transformarea geometrică

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2},\quad \theta = \theta\ (r^2 = y^2 + z^2,\ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2), \tag{1}$$

oyz — plan auxiliar obținut prin transformarea conformă,

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2},\quad (x = y + iz,\ \xi = \eta + i\zeta), \tag{2}$$

OYZ — plan auxiliar obținut prin transformarea conformă,

$$X = x + \frac{c^2}{x},\quad X = Y + iZ, \tag{3}$$

unde c este raza secțiunii fuzelajului în planul fizic ($x_1 = 1$),

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ — potențialul vitezelor de perturbație care, în cazul problemei totale, este o funcție omogenă de ordin n,

$\Phi_{n-q-r,q,r} = \dfrac{\partial^n \Phi}{\partial x_1^{n-q-r} \partial x_2^q \partial x_3^r}$ — funcții omogene de ordin zero $(q + r \leqslant n)$ care satisfăcînd ecuația liniarizată a potențialului, sînt funcții armonice în planele ξ, x, X,

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \Phi_{1.0.0}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \Phi_{0.1.0}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \Phi_{0.0.1} -$$

— vitezele de perturbație după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3 care sînt funcții omogene de ordin $(n - 1)$, și care, aplicînd teorema lui Euler pentru funcții omogene, pot fi exprimate sub forma

$$\frac{(n-1)!\,u}{x_1^{n-1}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial x_2} + z\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \sum_{r=0}^{q} C_q^r y^{q-r} z^r \Phi_{n-q,\,q-r,\,r}, \tag{4a}$$

$$\frac{(n-1)!\,v}{x_1^{n-1}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial x_2} + z\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \sum_{r=0}^{q} C_q^r y^{q-r} z^r \Phi_{n-q-1,\,q-r+1.\,r}, \tag{4b}$$

$$\frac{(n-1)!\,w}{x_1^{n-1}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial x_2} + z\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \sum_{r=0}^{q} C_q^r y^{q-r} z^r \Phi_{n-q-1,\,q-r,\,r+1}, \tag{4c}$$

$F_{n-q-r,q,r} = \Phi_{n-q-r,q,r} + i\,\Phi'_{n-q-r,q,r}$ — funcții analitice între care există relații de compatibilitate, deduse din condiția de irotaționalitate care impun identitatea tuturor expresiilor de forma

$$(-1)^q x^q \left(\frac{i\,x}{\sqrt{1 - B^2 x^2}}\right)^r d\,F_{n-q-r,q,r}, \quad (q + r \leqslant n). \tag{5}$$

1. INTRODUCERE

Într-o serie de lucrări anterioare [1], [2], [3], [4], [5] am studiat scurgerea supersonică conică în jurul aripilor simple sau cruciforme prevăzute cu fuzelaje conice; în toate aceste lucrări incidența aripii a fost presupusă constantă pe diferitele porțiuni ale aripii mărginite de raze vectoare duse din vîrful acesteia, valoarea constantei fiind diferită de la o porțiune la alta.

În această lucrare ne propunem ca, folosind mișcările conice de ordin superior, să studiem sistemul aripă-fuzelaj conic plasat în curent supersonic în cazul cînd incidența aripii este distribuită în planul aripii după o funcție care poate fi descompusă într-o sumă de polinoame omogene de diferite ordine ; dacă aripa este groasă, pantele care caracterizează grosimea simetrică a aripii vor fi considerate ca avînd o distribuție asemănătoare.

Într-o lucrare precedentă [6] am tratat un caz particular al acestei probleme studiind aripa delta subțire prevăzută cu fuzelaj conic în cazul cînd incidența aripii este distribuită simetric față de axa fuzelajului. În cele ce urmează vom studia cazul general cînd distribuția vitezei verticale (care rezultă din distribuția de incidență sau pantă) pe aripă este diferită pe diversele porțiuni ale acesteia separate prin raze vectoare duse din vîrf.

Este de menționat că metoda de soluționare care va fi dezvoltată în această lucrare permite soluționarea cu ușurință și a problemei sistemului considerat, plasat în curent neuniform prezentînd o distribuție de viteză verticală, care poate fi descompusă într-o sumă de polinoame omogene, precum și a problemei oscilațiilor de mică frecvență a aceluiași sistem, care se reduce de fapt la studiul a două mișcări conice de diferite ordine.

Vom trata mai întîi cazul aripii subțiri și vom considera în acest scop o mișcare conică de ordin n în jurul sistemului fuzelaj conic-aripă subțire indicat în figura 1, axa fuzelajului fiind paralelă cu viteza curentului neperturbat (fuzelajul neavînd incidență [1])), iar incidența aripii și deci și viteza verticală pe aripă (deoarece $w = \alpha U_\infty$), fiind distribuită sub forma unui polinom omogen de ordin $(n - 1)$, ceea ce revine la a scrie

$$w = \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1} x_2^{q}, \quad (w_{n-q-1,q} = \alpha_{n-q-1,q}\, U_\infty) \tag{6}$$

în care coeficienții $w_{n-q-1,q}$ sînt constanți pe aripă avînd diferite valori pe diversele porțiuni ale aripii separate de raze vectoare duse din vîrf (de exemplu pe porțiunea OM_1M_3 fig. 1).

În ipoteza micilor perturbații, considerînd deci că dimensiunile transversale ale fuzelajului sînt reduse față de conul Mach ($B^2c^2 \ll 1$) și că incidența în orice punct al aripii este destul de mică, din mișcarea generală în jurul sistemului considerat poate fi separată scurgerea axial-simetrică în jurul fuzelajului conic izolat, fără incidență (problemă cunoscută).

În cele ce urmează vom studia mișcarea rezultată în urma acestei separări, urmînd ca la soluția obținută să fie adăugată cea a scurgerii axial-simetrice sus-menționate.

---

[1]) Dacă şi fuzelajul are incidenţă, problema poate fi descompusă, în ipoteza micilor perturbaţii, într-o mişcare conică în care sînt considerate atît incidenţa fuzelajului cît şi cea a aripii presupusă constantă pe porţiuni, şi într-o mişcare conică de ordin superior în care fuzelajul nu are incidenţă, aripa avînd incidenţa distribuită după un polinom omogen.

Considerînd fuzelajul de dimensiuni reduse faţă de conul Mach ($B^2c^2 \ll 1$), se pot deduce din (5) relaţiile

$$d F_{n-q,q-r,r} = i^r \, d F_{n-q,q,0}\,, \quad \Phi_{n-q,q-r,r} = \mathcal{R}e\, i^r F_{n-q,q,0} + k_{q,r} \tag{7a}$$

$$d F_{n-q-1,q-r+1,r} = i^r \, d F_{n-q-1,q+1,0}\,, \quad \Phi_{n-q-1,q-r+1,r} = \\ = \mathcal{R}e\, i^r F_{n-q-1,q+1,0} + k_{q+1,r} \tag{7b}$$

$$d F_{n-q-1,q-r,r+1} = i^{r+1} \, d F_{n-q-1,q+1,0}\,, \quad \Phi_{n-q-1,q-r,r+1} = \\ = - \mathcal{I}m\, i^r F_{n-q-1,q+1,0} + k_{q+1,r+1} \tag{7c}$$

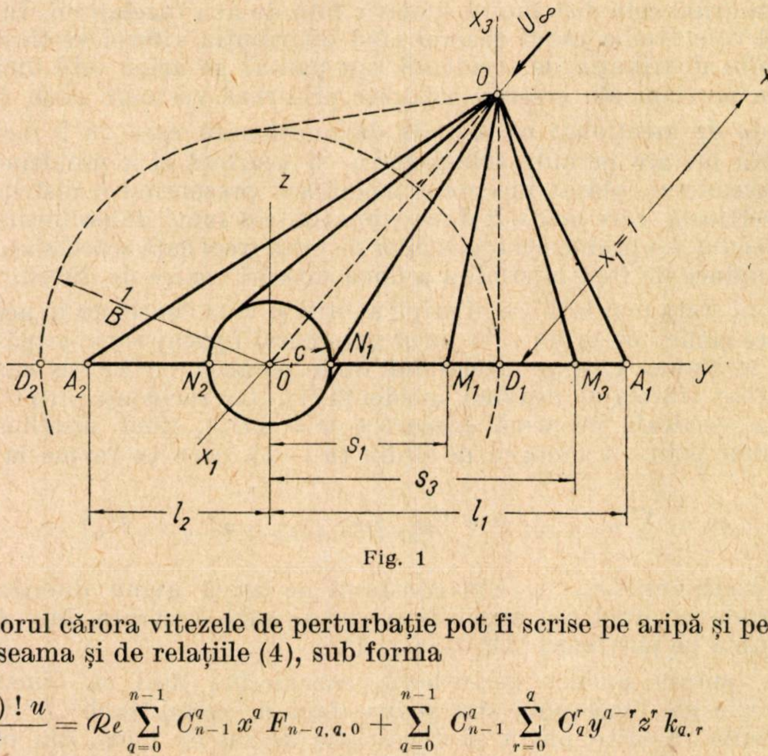


Fig. 1

cu ajutorul cărora vitezele de perturbaţie pot fi scrise pe aripă şi pe fuzelaj, ţinînd seama şi de relaţiile (4), sub forma

$$\frac{(n-1)!\,u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q F_{n-q,q,0} + \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \sum_{r=0}^{q} C_q^r y^{q-r} z^r k_{q,r} \tag{8a}$$

$$\frac{(n-1)!\,v}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q F_{n-q-1,q+1,0} + \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \sum_{r=0}^{q} C_q^r y^{q-r} z^r k_{q+1,r} \tag{8b}$$

$$\frac{(n-1)!\,w}{x_1^{n-1}} = - \mathcal{I}m \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q F_{n-q-1,q+1,0} + \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \sum_{r=0}^{q} C_q^r y^{q-r} z^r k_{q+1,r+1} \tag{8c}$$

în care constantele $k_{q,r}$. $k_{q+1,r}$, $k_{q+1,r+1}$ sînt încă nedeterminate, n dintre ele putînd fi însă determinate imediat din (7 a) şi (7 b), rezultînd

$$k_{q,0} = k_{q+1,0} = 0 \qquad (q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{9}$$

Viteza verticală de perturbație w mai poate fi exprimată pe aripă ($z = 0$) și sub forma

$$\frac{(n-1)!\,w}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, x^{q} F_{n-q-1,\,q,\,1}, \tag{10}$$

dedusă din (4 c), care va fi mult utilizată în cele ce urmează.

Din relația (8 a) se remarcă ușor că pentru a determina expresia vitezei axiale de perturbație u pe aripă și pe fuzelaj $\left(\text{și deci și distribuția de presiune, deoarece coeficientul de presiune } C_p = -2\frac{u}{U_\infty}\right)$ este suficient să se determine una din funcțiile $F_{n-q,\,q,\,0}$, celelalte putînd fi apoi ușor determinate utilizînd relația (5). În cele ce urmează vom căuta să determinăm una din aceste funcții ale cărei condiții la limită pot fi exprimate simplu.

2. PRINCIPIUL METODEI DE REZOLVARE

Pentru a ușura expunerea, menținînd în același timp generalitatea problemei, în acest paragraf la stabilirea condițiilor de scurgere pe aripă ne vom ocupa numai de porțiunea OM_1M_3 a aripii avînd bordurile de atac OA_1 ($y = l_1$) și OA_2($y = -l_2$). Pe această porțiune vom considera că incidența aripii este dată sub forma unui polinom omogen de ordin ($n - 1$), ceea ce conduce la o expresie de forma (6) pentru viteza verticală de perturbație în care coeficienții $w_{n-q-1,\,q}$ sînt constanți pe această porțiune

$$w_{n-q-1,\,q} = \alpha_{n-q-1,\,q}\, U_\infty = \text{const.}, \tag{11}$$

unde $\alpha_{n-q-1,\,q}$ sînt coeficienții polinomului omogen de același ordin care exprimă incidența α a aripii pe această porțiune; vom mai considera că pe aripă la stînga și la dreapta acestei porțiuni, în imediata vecinătate a ei, coeficienții $w_{n-q-1,\,q}$ (și deci și $\alpha_{n-q-1,\,q}$) au alte valori date, razele vectoare OM_1 și OM_3 care separă fiecare două regimuri diferite de distribuție a incidenței fiind denumite muchii; în sfîrșit vom mai considera la stabilirea condițiilor de scurgere pe aripă, de asemenea pentru simplificarea expunerii, că porțiunea OM_1M_3 este parțial cuprinsă în conul Mach, condițiile pe oricare alte porțiuni ale aripii cuprinse în interiorul sau situate în afara conului Mach fiind întru totul asemănătoare cu cele corespunzătoare stabilite pentru porțiunea OM_1M_3.

Pentru mișcarea de care ne ocupăm în această lucrare, rezultată în urma separării sus-menționate, va rezulta următoarea condiție de scurgere pe fuzelaj (considerat fără incidență):

$$v \cos\theta + w \sin\theta = 0, \quad \left(\cos\theta = \frac{y}{c},\ \sin\theta = \frac{z}{c}\right), \tag{12}$$

care, fiind derivată de $(n-1)$ ori în raport cu x_1, devine

$$y\,\Phi_{n-1,1,0} + z\,\Phi_{n-1,0,1} = 0. \tag{13}$$

Această ultimă condiție, ținînd seama de (7 c) aplicată la cazul $q = r = 0$ și considerînd mereu $B^2c^2 \ll 1$, mai poate fi scrisă în planul x (fig. 2), cu ajutorul funcției $F_{n-1,1,0}$ sub forma complexă

$$\mathcal{Re}\, x\,(F_{n-1,1,0} - ik_{1,1}) = 0. \tag{14}$$

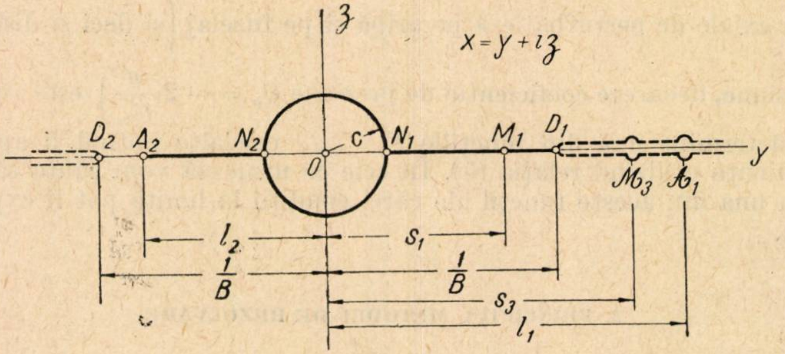


Fig. 2

În ceea ce privește condițiile pe aripă, comparînd relațiile (6), (10) și (11) se obțin pentru porțiunea OM_1M_3 condițiile

$$\Phi_{n-q-1,q,1} = \frac{(n-1)!}{C_{n-1}^{q}}\, w_{n-q-1,q}, \tag{15}$$

în timp ce pe aripă la stînga și la dreapta acestei porțiuni, în imediata ei vecinătate $\Phi_{n-q-1,q}$ sînt de asemenea constante avînd însă valori diferite de cele de pe porțiunea OM_1M_3. Din aceste condiții, precum și din relațiile de compatibilitate (5), aplicate la cazurile $q = r - 1 = 0$ și $q - 1 = r = 0$, pot fi deduse cu ușurință în planul x condițiile la limită ale funcției $F_{n-1,1,0}$ pentru porțiunea OM_1M_3 a aripii, care sînt

$$\mathcal{Im}\, F_{n-1,1,0} = C = \text{const.}, \tag{16}$$

pe segmentul M_1D_1 corespunzător suprafeței porțiunii OM_1M_3 cuprinse în interiorul conului Mach și

$$\mathcal{Re}\, F_{n-1,1,0} = Q = \text{const.} \tag{17}$$

pe segmentul $D_1\mathcal{M}_3$ corespunzător suprafeței porțiunii de aripă OM_1M_3 situată în afara conului Mach.

Pe axa reală din planul x, în afara aripii ($x = y > l_1$ și $x = y < -l_2$) condițiile la limită vor fi aceleași ca și în cazul aripii izolate subțiri, rezultînd pentru funcția considerată condiția

$$\mathcal{Re}\, F_{n-1,1,0.} = 0. \tag{18}$$

Trebuie remarcat că atît în bordurile de atac cît și în muchiile aripii, funcția $F_{n-1,1,0}$ ($\Phi_{n-1,1,0} = \mathcal{R}e\, F_{n-1,1,0}$ fiind una din derivatele de ordin $(n-1)$ ale vitezelor de perturbație u și v) va prezenta aceleași singularități ca și în cazul aripii izolate subțiri.

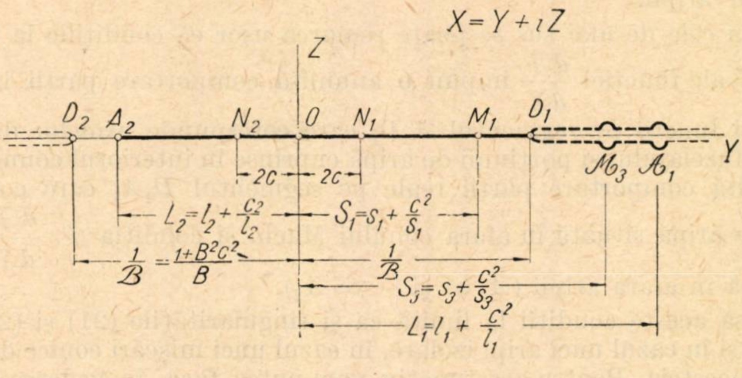


Fig. 3

Pentru determinarea funcției $F_{n-1,1,0}$, prin analogie cu lucrările precedente (1), (2), vom introduce funcția $\frac{d\mathcal{F}}{dx}$ definită de relația

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} = F_{n-1,1,0} - ik_{1,1} \tag{19}$$

iar în planul X, obținut prin transformarea conformă (3) vom considera funcția

$$\frac{d\mathcal{F}}{dX} = \frac{d\mathcal{F}}{dx}\cdot\frac{dx}{dX} = \frac{d\mathcal{F}}{dx}\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}}\right) \tag{20}$$

ale cărei condiții la limită pot fi deduse din cele ale funcției $F_{n-1,1,0}$ prin intermediul funcției $\frac{d\mathcal{F}}{dx}$; este ușor de văzut că funcția $\frac{d\mathcal{F}}{dX}$ va trebui să prezinte în punctele corespunzătoare bordurilor de atac și muchiilor aripii aceleași singularități ca și $F_{n-1,1,0}$, însă transpuse în planul X, adică

$$\frac{1}{\sqrt{X - Y_i}},\ \frac{1}{(X - Y_i)^{3/2}},\ \ldots,\ \frac{1}{(X - Y_i)^{n-1/2}} \tag{21}$$

și

$$\ln(X - Y_i),\ \frac{1}{X - Y_i},\ \ldots,\ \frac{1}{(X - Y_i)^{n-1}} \tag{22}$$

în punctele $X = Y_i = y_i + \dfrac{c^2}{y_i}$ corespunzătoare bordurilor de atac subsonice $|\, y_i \,| < \dfrac{1}{B}$, și respectiv bordurilor de atac supersonice $|\, y_i \,| > \dfrac{1}{B}$ sau muchiilor aripii.

Din cele de mai sus se poate remarca ușor că condițiile la limită în planul X ale funcției $\dfrac{d\mathcal{F}}{dX}$ impun o anumită comportare părții imaginare a acestei funcții pe segmentul A_2D_1 care corespunde urmelor din planul fizic ale fuzelajului și porțiunii de aripă cuprinse în interiorul conului Mach, o anumită comportare părții reale pe segmentul D_1A_1 care corespunde părții de aripă situată în afara conului Mach, și condiția $\mathcal{R}e\, \dfrac{d\mathcal{F}}{dX} = 0$ pe axa reală în afara aripii ($A_1\infty$ și $-\infty A_2$).

Însă aceste condiții la limită ca și singularitățile (21) și (22) pot fi întîlnite și în cazul unei aripi izolate, în cazul unei mișcări conice de ordin n în jurul acesteia. Pentru acest motiv vom putea face, în vederea determinării funcției $\dfrac{d\mathcal{F}}{dX}$ și deci, prin formulele (19), (20), și a funcției $F_{n-1,1,0}$, următoarea analogie de calcul

$$F^{(a)}_{n-1,1,0} = \frac{d\mathcal{F}}{dX} \tag{23}$$

în care $\Phi^{(a)}_{n-1,1,0} = \mathcal{R}e\, F^{(a)}_{n-1,1,0}$ este una din derivatele de ordin n ale potențialului dintr-o mișcare conică de ordin n în jurul unei aripi subțiri izolate fictive avînd o anumită distribuție de incidență; aripa fictivă prezentînd aceleași borduri de atac și muchii în aceleași puncte din planul X, unde este reprezentată transformata urmei aripii pe segmentul A_1A_2, funcția $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ va prezenta aceleași singularități (23) și (24) și aceleași condiții la limită, care pot fi deduse din cele ale funcției $F_{n-1,1,0}$, ținînd seama de (19), (20) și (23), și anume

$$\mathcal{I}m\, F^{(a)}_{n-1,1,0} = 0 \tag{24}$$

pe segmentul N_1N_2, corespunzător urmei fuzelajului din planul fizic

$$\mathcal{I}m\, F^{(a)}_{n-1,1,0} = \frac{K}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right), \text{ unde } K = C - k_{1,1} = \text{const.} \tag{25}$$

pe segmentul M_1D_1 corespunzător urmei suprafeței din porțiunea de aripă OM_1M_3 cuprinse în interiorul conului Mach,

$$\mathcal{R}e\, F^{(a)}_{n-1,1,0} = \frac{Q}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \tag{26}$$

pe segmentul $D_1\mathcal{M}_3$ corespunzător urmei suprafeței din porțiunea de aripă OM_1M_3 situată în afara conului Mach, şi

$$\mathcal{R}e\, F^{(a)}_{n-1,1,0} = 0 \tag{27}$$

pe semidreptele $A_1 \infty$ şi $-\infty A_2$.

Presupunînd cunoscută funcția $F^{(a)}_{n-1,1,0}$, din relațiile (19), (20) şi (23) poate fi determinată cu uşurință funcția $F_{n-1,1,0}$,

$$F_{n-1,1,0} = F^{(a)}_{n-1,1,0}\frac{dX}{dx} + ik_{1,1} = \left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right)F^{(a)}_{n-1,1,0} + ik_{1,1}. \tag{28}$$

Pentru determinarea vitezei axiale de perturbație pe aripă vom utiliza acum relația

$$F_{n-q,q,0} = \int_{x_0}^{x} \frac{dF_{n-1,1,0}}{(-x)^{q-1}} \tag{29}$$

obținută prin integrarea relațiilor de compatibilitate (5) între un punct oarecare x_0 situat pe porțiunea neperturbată a cercului Mach și un punct x de pe sistemul considerat. Introducînd acum aceste ultime două relații în (8 a), viteza axială de perturbație u pe sistemul considerat poate fi exprimată numai în funcție de $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ care urmează să fie determinată, şi anume

$$\frac{(n-1)!\,u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C^q_{n-1}\, x^q \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(-x)^{q-1}}\, d\left[\left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right)F^{(a)}_{n-1,1,0} + ik_{1,1}\right] +$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} C^q_{n-1} \sum_{r=0}^{q} C^r_q y^{q-r} z^r k_{q,r}, \tag{30}$$

constantele $k_{q,r}$ intervenind după cum este uşor de văzut numai în expresia lui u pe fuzelaj, deoarece pe aripă $z = 0$, iar $k_{q,0} = 0$.

În acest mod problema determinării scurgerii supersonice în jurul sistemului considerat a fost redusă la aceea a determinării funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ din mişcarea conică de ordin n în jurul unei aripi izolate fictive.

3. DETERMINAREA FUNCȚIEI $F^{(a)}_{n-1,1,0}$

Pentru determinarea funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ din mişcarea conică de ordin n în jurul aripii fictive considerate, vom utiliza rezultatele obținute anterior în cazul aripii izolate. Pentru a găsi expresia funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$, pe lîngă contribuțiile bordurilor de atac şi muchiilor aripii binecunoscute din lucrările anterioare [7], [8], va trebui să determinăm şi contribuțiile porțiunilor aripii pe care $\mathcal{I}m\, F^{(a)}_{n-1,1,0}$ sau $\mathcal{R}e\, F^{(a)}_{n-1,1,0}$ nu sînt constante ci sînt funcții de Y.

În sensul lucrărilor mai sus-citate, fiecare porțiune a aripii fictive pe care condițiile la limită sînt de tipul condițiilor (25) sau (26) poate fi înlocuită printr-o distribuție continuă de muchii, fiecare din aceste muchii, pe care să o considerăm plasată într-un punct oarecare $X = \eta$ de pe porțiunea respectivă, trebuind să asigure saltul elementar:

$$d\left[\mathcal{I}m\, F^{(a)}_{n-1,1,0}\right] = \left\{\frac{d}{dY}\left[\frac{K}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right)\right]\right\}_{Y=\eta} d\eta \tag{31}$$

în cazul unei condiții la limită de tipul celei din (25), sau respectiv

$$d\left[\mathcal{R}e\, F^{(a)}_{n-1,1,0}\right] = \left\{\frac{d}{dY}\left[\frac{Q}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right)\right]\right\}_{Y=\eta} d\eta \tag{32}$$

în cazul unei condiții de tipul celei din (26).

Ținînd seama de cele de mai sus și utilizînd expresiile contribuțiilor muchiilor obținute în [7] și [8], contribuția porțiunii M_1D_1 în expresia funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ va fi de exemplu în cazul considerat mai sus

$$F^{(M_1D_1)}_{n-1,1,0} = \frac{2}{\pi}\int_{S_1}^{\frac{1}{\mathcal{B}}} \frac{d}{d\eta}\left[\frac{K}{2}\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right)\right] \operatorname{argch} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + \eta)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(\eta - X)}}\, d\eta, \tag{33}$$

iar contribuția porțiunii $D_1\mathcal{M}_3$ în aceeași funcție va fi

$$F^{(D_1\mathcal{M}_3)}_{n-1,1,0} = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{\mathcal{B}}}^{S_3} -\frac{d}{d\eta}\left[\frac{Q}{2}\left(1 + \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 4c^2}}\right)\right] \arccos \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} - X\right)(L_2 + \eta)}{\left(\frac{1}{\mathcal{B}} + L_2\right)(\eta - X)}}\, d\eta. \tag{34}$$

La cele de mai sus va trebui să adăugăm contribuțiile muchiilor M_1 și M_3.

În cele ce urmează vom prezenta expresiile funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ determinate, prin metoda prezentată mai sus, în cazurile simple, necesare pentru determinarea soluției în cazul cel mai general al problemei tratate.

În exprimarea rezultatelor obținute vom utiliza următoarele notații ¹)

$$L_i = l_i + \frac{c^2}{l_i},\quad S_i = s_i + \frac{c^2}{s_i},\quad (i = 1, 2),\quad \frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1 + B^2c^2}{B}, \tag{35 a}$$

$$\Lambda = \lambda + \frac{c^2}{\lambda},\quad G = g + \frac{c^2}{g},\quad D = d + \frac{c^2}{d}, \tag{35 b}$$

---

¹) *Remarcă.* Aceste notații au și un sens fizic, în sensul analogiei hidrodinamice. Astfel de exemplu $\mathbf{A}^{(1)}_{\Lambda}$ și $\mathbf{A}^{(2)}_{\Lambda}$ reprezintă contribuțiile bordurilor de atac subsonice, $\mathbf{R}^{(\Lambda)}_{G,D} + \mathbf{E}^{(\Lambda)}_{G,D}$ reprezintă suma contribuțiilor muchiei plasate în $y = \lambda_1$ și a porțiunii de aripă $\lambda_1 < y < g$ avînd aceeași incidență, etc.

$$\mathbf{A}_{\Lambda}^{(L_1)} = \sqrt{\frac{\Lambda + X}{L_1 - X}}\, \frac{\sum\limits_{q=0}^{n-1} a_q^{(1)} X^q}{(L_1 - X)^{n-1}}, \quad \dot{\mathbf{A}}_{\Lambda}^{(L_2)} = \sqrt{\frac{\Lambda - X}{L_2 + X}}\, \frac{\sum\limits_{q=0}^{n-1} a_q^{(2)} X^q}{(L_2 + X)^{n-1}}, \tag{36 a}$$

$$\mathbf{R}_{G,D}^{(\Lambda)} = \frac{K^{(\Lambda)}}{\pi} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(G - X)(D + \Lambda)}{(G + D)(\Lambda - X)}} + $$
$$+ \sqrt{(G - X)(D + X)}\, \frac{\sum\limits_{q=0}^{n-2} b_q^{(\Lambda)} X^q}{(\Lambda - X)^{n-1}}, \quad (\Lambda < G). \tag{36 b}$$

Dacă $\Lambda > G$ în relaţia (36 b), se schimbă arg ch prin arc cos.

$$\mathbf{E}_{G,D}^{(\Lambda)} = \frac{K^{(\Lambda)}}{\pi} \frac{2c}{X + 2c} \frac{\sqrt{(G - X)(D + X)}}{\sqrt{(G + 2c)(D + 2c)}} \Big\{ \mathbf{K}(k) - \mathbf{F}(\varphi_{(\lambda)}, k) - $$
$$- \frac{2X}{X + 2c} [\mathbf{\Pi}(\rho, k) - \mathbf{\Pi}(\varphi_{(\lambda)}, \rho, k)] + i\psi_{(\Lambda)} \tag{36 c}$$

în care

$$\psi_{(\Lambda)} = \frac{K^{(\Lambda)}}{2} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}} \text{ pe segmentul } \Lambda < X = Y < G, \text{ şi } \psi_{(\Lambda)} = 0 \text{ în afara acestui segment}$$

şi în care $\mathbf{F}(\varphi_{(\Lambda)}, k)$ şi $\mathbf{\Pi}(\varphi_{(\lambda)}, \rho, k)$ sînt integrale eliptice de speţa I şi respectiv a III-a, k, ρ şi $\varphi_{(\Lambda)}$ avînd expresiile

$$k = \frac{(g - c)(d - c)}{(g + c)(d + c)}, \quad \rho = - \frac{(g - c)^2 (x + c)^2}{(g + c)^2 (x - c)^2}, \quad \varphi_{(\lambda)} = \arcsin \frac{(g + c)(\lambda - c)}{(g - c)(\lambda + c)}$$

iar $\mathbf{K}(k)$ şi $\mathbf{\Pi}(\rho, k)$ sînt integrale eliptice complete de speţa I şi respectiv a III-a.

$$\mathbf{H}_{G,D}^{(\Lambda)} = \frac{K^{(\Lambda)}}{\pi (X - 2c)} \frac{\sqrt{(G - X)(D + X)}}{\sqrt{(G + 2c)(D + 2c)}} \Big[2c\, \mathbf{F}(\varphi^{*}_{(\Lambda)}, k_1) + $$
$$+ \frac{X}{X - G} (G - 2c)\, \mathbf{\Pi}(\varphi^{*}_{(\Lambda)}, \rho_1, k_1) \Big] + f_{(\Lambda)} \tag{36 d}$$

în care

$$f_{(\Lambda)} = \frac{K^{(\Lambda)}}{2} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}} \text{ pe segmentul } G < X = Y < \Lambda_1 \text{ şi } f_{(\Lambda)} = 0 \text{ în afara acestui segment}$$

şi în care

$$k_1^2 = \frac{4c(G + D)}{(G + 2c)(D + 2c)}, \quad \rho_1 = - \frac{(G + D)(X - 2c)}{(D + 2c)(X - G)},$$
$$\varphi^{*}_{(\Lambda)} = \arcsin \sqrt{\frac{(D + 2c)(\Lambda - G)}{(G + D)(\Lambda - 2c)}}$$

$$\mathbf{T}_{G}^{(\Lambda)} = \frac{K^{(\Lambda)}}{\pi} \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(G^2 - X^2)(\Lambda^2 - 4c^2)}{(\Lambda^2 - X^2)(G^2 - 4c^2)}}, \quad (\Lambda < G). \tag{36 e}$$

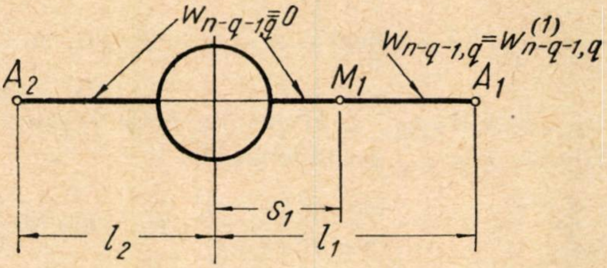
Dacă $\Lambda > G$ în relația (36 e), se schimbă arg ch prin arc cos.

Dacă se va nota de exemplu $\mathbf{E}^{(S_1)}_{L_1\,,\,L_2}$ (în care $S_1 < L_1$) aceasta înseamnă că expresia notată prin acest simbol se va obține înlocuind în (36 c) pe G, D și Λ respectiv prin L_1, L_2 și S_1, iar pe g, d și λ respectiv prin l_1, l_2 și s_1.

Remarcă. Notațiile prevăzute cu un punct deasupra, se referă la elementele din partea stîngă a aripii, iar expresiile lor se pot deduce înlocuind în expresiile notațiilor corespunzătoare, fără punct, pe g, d, c și λ respectiv prin $-d$, $-g$, $-c$ și $-\lambda$, iar pe G, D și Λ respectiv prin $-D$, $-G$ și $-\Lambda$.

Expresia funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ pentru diferite cazuri

Cazul I



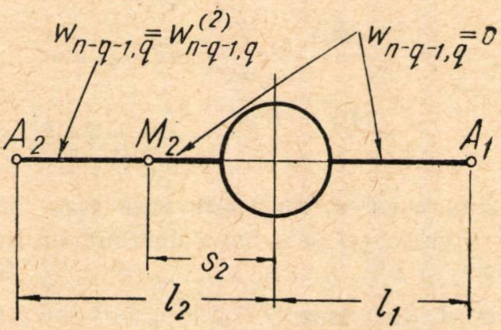
$$\text{Dacă } l_1 < \frac{1}{B} \quad F^{(a)}_{n-1,1,0} = \mathbf{A}^{(L_1)}_{L_2} + \dot{\mathbf{A}}^{(L_2)}_{L_1} + \mathbf{R}^{(S_1)}_{L_1,\,L_2} + \mathbf{E}^{(S_1)}_{L_1,\,L_2}. \tag{37 a}$$

$$\text{Dacă } s_1 < \frac{1}{B} < l_1 \quad F^{(a)}_{n-1,1,0} = \dot{\mathbf{A}}^{(L_2)}_{\frac{1}{\mathcal{B}}} + \mathbf{R}^{(L_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\,L_2} + \mathbf{H}^{(L_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\,L_2} + \mathbf{R}^{(S_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\,L_2} + \mathbf{E}^{(S_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\,L_2}. \tag{37 b}$$

$$\text{Dacă } \frac{1}{B} < s_1 < l_1 \quad F^{(a)}_{n-1,1,0} = \dot{\mathbf{A}}^{(L_2)}_{\frac{1}{\mathcal{B}}} + \mathbf{R}^{(L_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\,L_2} + \mathbf{H}^{(L_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\,L_2} + \mathbf{R}^{(S_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\,L_2} + \mathbf{H}^{(S_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\,L_2}. \tag{37 c}$$

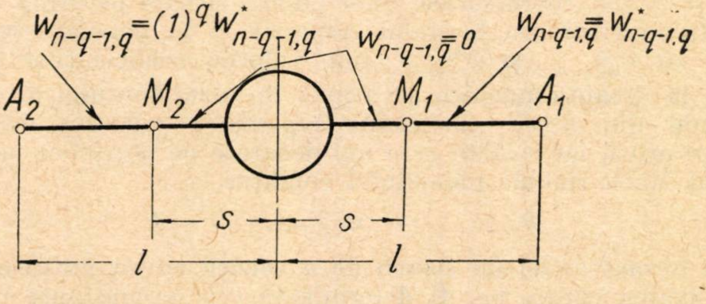
Remarcă. Dacă $l_2 > \frac{1}{B}$, expresia funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ se obține din relațiile de mai sus făcînd $\dot{\mathbf{A}}^{(L_2)}_{\frac{1}{\mathcal{B}}} = 0$ și înlocuind pe L_2 prin $\frac{1}{\mathcal{B}}$, și respectiv pe l_2 prin $\frac{1}{B}$.

Cazul II



Expresia funcţiei $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ în acest caz se poate obţine înlocuind în expresiile stabilite pentru cazul I pe l_1, l_2, s_1, c şi $\frac{1}{B}$ respectiv prin $-l_2$, $-l_1$, $-s_2$, $-c$ şi $-\frac{1}{B}$.

Cazul III


$w_{n-q-1,q} = (1)^q w^{*}_{n-q-1,q}$
$w_{n-q-1,q} = 0$
$w_{n-q-1,q} = w^{*}_{n-q-1,q}$
A_2
M_2
M_1
A_1
s
s
l
l

$$\text{Dacă } l < \frac{1}{B} \quad F^{(a)}_{n-1,1,0} = \mathbf{A}^{(L)}_{L} + \dot{\mathbf{A}}^{(L)}_{L} + \mathbf{R}^{(S)}_{L,L} + \dot{\mathbf{R}}^{(S)}_{L,L} + \mathbf{T}^{(S)}_{L,L}\,. \tag{38 a}$$

$$\text{Dacă } l > \frac{1}{B} \quad F^{(a)}_{n-1,1,0} = \mathbf{R}^{(L)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\frac{1}{\mathcal{B}}} + \dot{\mathbf{R}}^{(L)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\frac{1}{\mathcal{B}}} + \mathbf{T}^{(L)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\frac{1}{\mathcal{B}}} + \mathbf{R}^{(S)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\frac{1}{\mathcal{B}}} + \dot{\mathbf{R}}^{(S)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\frac{1}{\mathcal{B}}} + \mathbf{T}^{(S)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\frac{1}{\mathcal{B}}}\,. \tag{38 b}$$

4. DETERMINAREA CONSTANTELOR

În expresiile de mai sus ale funcţiei $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ apar o serie de constante nedeterminate : $a^{(1)}_q$, $a^{(2)}_q$, $K^{(s_1)}$ şi $b^{(s_1)}_q$, $Q^{(l_1)}$ şi $b^{(l_1)}_q$ etc. Aceste constante pot fi determinate din condițiile de scurgere pe aripă (15), utilizînd relațiile de compatibilitate (5) scrise sub forma

$$dF_{n-q-1,q,1} = \frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\,\frac{1}{(-x)^{q-1}}\,dF_{n-1,1,0} = \frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\,\frac{1}{(-x)^{q-1}}\,d\left[F^{(a)}_{n-1,1,0}\frac{dX}{dx}\right]. \tag{39}$$

Pentru determinarea celor n constante care apar în expresia funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ ca urmare a prezenței pe aripă a unei muchii subsonice sau supersonice ($K^{(s_i)}$ sau $Q^{(s_i)}$ și $b_q^{(s_i)}$, $q = 0, 1, \ldots, (n-2)$), situată în punctul $y=s_i$), sau a unui bord supersonic ($Q^{(l_i)}$ și $b_q^{(l_i)}$, $i=1$ sau 2, $q=0, 1, \ldots, n-2$), prin integrarea relațiilor (43) în jurul muchiei sau bordului respectiv se obțin condiții de forma

$$\mathcal{Re}\int_{x_s}^{x_d}\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\,\frac{1}{(-x)^{q-1}}\,d\left[F^{(a)}_{n-1,1,0}\frac{dX}{dx}\right] = \frac{(n-1)!}{C^q_{n-1}}\left[w^{(d)}_{n-q-1,q} - w^{(s)}_{n-q-1,q}\right], \quad q = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{40}$$

unde x_s și x_d sînt coordonatele unor puncte situate pe aripă la stînga și la dreapta muchiei sau bordului respectiv și în imediata vecinătate a acestuia, iar $w^{(s)}_{n-q-1,q}$ și $w^{(d)}_{n-q-1,q}$ sînt valorile coeficienților $w_{n-q-1,q}$ la stînga și la dreapta muchiei, pe aripă; în cazul bordului de atac supersonic, unul din acești coeficienți reprezintă valoarea coeficientului $w_{n-q-1,q}$ pe aripă, iar celălalt este nul deoarece pe porțiunea neperturbată a cercului Mach trebuie îndeplinită condiția

$$\Phi_{n-q-1,q,1} = \mathcal{Re}\,F_{n-q-1,q,1} = 0. \tag{41}$$

S-a format astfel un sistem de n ecuații cu tot atîtea necunoscute prin rezolvarea căruia pot fi determinate cele n constante menționate.

Pentru determinarea celor n constante care apar în expresia funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ ca urmare a prezenței pe aripă a unui bord subsonic ($a_q^{(1)}$ sau $a_q^{(2)}$, $q = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) din aceleași relații (43) se vor obține condiții de forma

$$\mathcal{Re}\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{ix}\,\frac{1}{(-x)^{q-1}}\,d\left[F^{(a)}_{n-1,1,0}\frac{dX}{dx}\right] = \frac{(n-1)!}{C^q_{n-1}}\,w_{n-q-1,q}, \quad (q = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{42}$$

unde x_0 este un punct de viteză verticală nulă situat pe porțiunea neperturbată a cercului Mach $\left(x_0 = y_0 > \frac{1}{B} > l_1 \text{ sau } x_0 = y_0 > l_1 > \frac{1}{B}\right)$, x este un punct situat pe aripă în imediata vecinătate a bordului respectiv, iar $w_{n-q-1,q}$ reprezintă valoarea acestui coeficient pe aripă în imediata vecinătate a bordului respectiv.

Însă, în expresia vitezei axiale de perturbație după cum se poate vedea din (8a) mai apar încă $\frac{n(n+1)}{2}$ constante, și anume $k_{q,r}$ $(r = 0, 1, \ldots, q$, și $q = 1, 2, \ldots, n-1)$ dintre care numai o parte sînt determinate prin relația (9). Celelalte constante $k_{q,r}$ vor putea fi determinate folosind condiția (12), care, ținînd seama de (8b), (8c) și (5), poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{Re} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, x^{q+1} \int_{x_0}^{x} \frac{d\left[F^{(a)}_{n-1,1,0}\,\dfrac{dX}{dx}\right]}{(-x)^{q}} =$$

$$= -\sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q} \sum_{r=0}^{q} C_{q}^{r} y^{q-r} z^{r} \left(y k_{q+1,r} + z k_{q+1,r+1}\right) \qquad (43)$$

în care x_0 este un punct situat pe porțiunea neperturbată a cercului Mach, iar x este un punct oarecare situat pe fuzelaj $(x = ce^{i\theta})$. Această condiție introduce însă încă $(n+1)$ constante și anume $k_{n,r}$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$, dintre care numai una este determinată prin relația (9), $(k_{n,0} = 0)$, pentru care mai poate fi scrisă condiția $[w]_{x=ic} = 0$, care poate fi pusă sub forma

$$\mathcal{Im} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, x^{q} \int_{x_0}^{x=ic} \frac{d\left[F^{(0)}_{n-1,1,0}\,\dfrac{dX}{dx}\right]}{(-x)^{q}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, c^{q} k_{q+1,q+1}\,. \qquad (44)$$

5. EXTINDEREA METODEI LA CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ-ARIPĂ GROASĂ, PORTANTĂ

În cazul cînd aripa are grosime avînd în același timp și incidențe (aripă groasă portantă), mișcarea rezultată prin separarea, din scurgerea în jurul sistemului considerat a scurgerii axial-simetrice în jurul fuzelajului izolat poate fi descompusă în două mișcări simple și anume: o mișcare în jurul sistemului fuzelaj-aripă subțire, în care se ia în considerație numai incidența scheletului aripii (și care a fost tratată mai sus), și o mișcare în jurul sistemului fuzelaj-aripă de grosime simetrică în care se ia în considerație numai efectul grosimii simetrice a aripii, fuzelajul și aripa fiind considerate fără incidență. În cadrul acestei ultime mișcări, vom considera că grosimea simetrică, a aripii este distribuită după un polinom omogen de ordin $(n-1)$, ceea ce conduce pentru viteza verticală de perturbație pe aripă la o expresie de forma

$$w = \sum_{q=0}^{n-1} \pm\, w_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1} x_q^{q}\,, \qquad (45)$$

în care semnul + (plus) se referă la extradosul aripii, iar semnul — (minus) la intrados, şi în care coeficienţii $w_{n-q-1,q} = \gamma_{n-q-1,q}\, U_\infty$ (unde $\gamma_{n-q-1,q}$ sînt coeficienţii polinomului omogen de ordin n care exprimă panta γ a aripii) sînt constanţi pe diferitele porţiuni ale aripii separate prin vase vectoare duse din vîrful acesteia. În acest caz se vor obţine pentru funcţia $F_{n-1,1,0}$ aceleaşi condiţii la limită privind semiplanul superior al planului x pe aripă, pe fuzelaj şi pe porţiunea neperturbată a urmei cercului Mach ca şi în cazul aripii subţiri, adică condiţii de tipul condiţiilor (24), (25), (26) şi (27), acesta din urmă privind de această dată numai porţiunea neperturbată a urmei cercului Mach. Singura deosebire faţă de aripa subţire care apare în condiţiile la limită pentru semiplanul superior, este condiţia

$$\Phi_{n-q-1,q,1} = 0 \quad \text{sau} \quad \mathcal{J}m\, F_{n-1,1,0} = 0, \tag{46}$$

care trebuie respectată, ca şi în cazul aripii izolate de grosime simetrică, pe porţiunile axei reale situate în afara aripii dar în interiorul conului Mach (de exemplu porţiunea D_2A_2 din fig. 2). Dar această condiţie (46) este echivalentă cu condiţia de scurgere pe o porţiune de aripă avînd incidenţa şi deci şi viteza verticală nulă.

Este evident deci acum că mişcarea conică de ordin n din semiplanul superior în jurul sistemului fuzelaj-aripă de grosime simetrică este echivalentă cu aceea tot de ordin n, din semiplanul superior în jurul unui sistem fictiv fuzelaj-aripă subţire, aripa fictivă avînd bordurile supersonice, situate bineînţeles în afara bordurilor aripii reale de grosime simetrică (de exemplu în $A_1'(x = l_1')$ şi $A_2'(x = -l_2')$, (fig. 4), şi avînd incidenţa dată sub forma (45) (în care se consideră numai semnul + pe porţiunea comună dintre cele două aripi, adică pe toată întinderea aripii reale (porţiunea A_1A_2, fig. 4) şi incidenţa nulă ($w_{n-q-1,q} = 0$) pe porţiunile rămase în afara aripii reale (porţiunile A_1A_1' şi $A_2'A_2$, fig. 4).

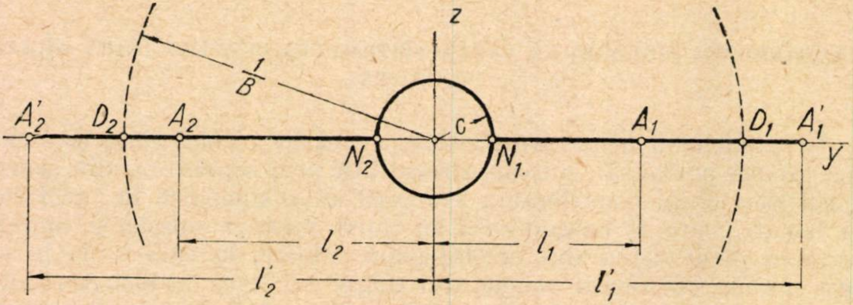
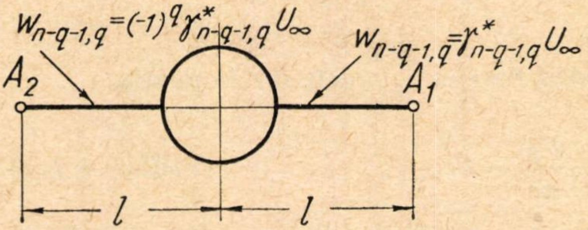


Fig. 4

Soluţia problemei scurgerii conice de ordin n în jurul sistemului fuzelaj-aripă de grosime simetrică poate fi deci acum uşor determinată folosind rezultatele obţinute mai sus în cazul sistemului fuzelaj-aripă subţire.

Pentru fixarea ideilor vom indica, utilizînd notaţiile din relaţiile (35) şi (36), expresia funcţiei $F_{n-1,1,0}^{(a)}$ pentru cazul indicat mai jos, din această expresie putînd fi dedusă, prin utilizarea aceleași relații (30), și expresia vitezei axiale de perturbație u, iar determinarea constantelor făcîndu-se ca și în cazul aripii subțiri în modul indicat, mai sus (cu observația că în cazul aripii de grosime simetrică nu apar constantele $a_q^{(1)}$ și $a_q^{(2)}$ și deci nu vor fi utilizate condiții de tipul (42)).

Expresia funcției $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ *pentru cazul*


$W_{n-q-1,q}=(-1)^q\gamma^*_{n-q-1,q}U_\infty$
A_2
$W_{n-q-1,q}=\gamma^*_{n-q-1,q}U_\infty$
A_1
l
l

$$F^{(a)}_{n-1,1,0} = \mathbf{R}^{(L)}_{\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}},\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}}} + \dot{\mathbf{R}}^{(L)}_{\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}},\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}}} + \mathbf{T}^{(L)}_{\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}},\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}}} + \dot{\mathbf{R}}^{(2c)}_{\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}},\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}}} + \mathbf{R}^{(2c)}_{\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}},\frac{1}{\overline{\mathcal{B}}}} + \frac{iK^{(2c)}}{2}\frac{X}{\sqrt{X^2-4c^2}}. \tag{47}$$

6. EXTINDEREA METODEI PROPUSE LA CAZUL SISTEMULUI ARIPĂ-FUZELAJ CONIC PLASAT ÎNTR-UN CURENT NEUNIFORM

Vom considera că curentul în care este plasat sistemul aripă-fuzelaj este neuniform prezentînd în fiecare punct o viteză verticală dată sub forma unui polinom omogen de ordin n

$$w^{(0)} = \sum_{q=0}^{n-1} w^{(0)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q \tag{48}$$

și o viteză laterală

$$v^{(0)} = \sum_{q=0}^{n-1} v^{(0)}_{n-r-1,r}\, x_1^{n-r-1}\, x_3^r. \tag{49}$$

În cadrul ipotezei perturbațiilor mici din scurgerea în jurul sistemului considerat pot fi separate mișcarea axial-simetrică în jurul fuzelajului izolat fără incidență, mișcările studiate anterior care iau în considerație efectul incidențelor aripii și efectul grosimii aripii, precum și mișcarea în jurul fuzelajului izolat — plasat într-un curent lateral neuniform definit prin relația (49).

În cele ce urmează vom trata mișcarea rezultată în urma acestor separări, mișcare care ia în considerație numai efectul curentului neuniform $w^{(0)}$ asupra scurgerii în jurul sistemului considerat.

Pentru această mișcare vor rezulta următoarele condiții la limită:

$$v \cos \theta + (w + w^{(0)}) \sin \theta = 0, \tag{50}$$

pe fuzelaj, care mai poate fi scrisă sub forma

$$y\, \Phi_{n-1,1,0} + z\, [\Phi_{n-1,0,1} + (n-1)!\, w^{(0)}_{n-1,1}] \tag{51}$$

și

$$w = - w^{(0)}, \tag{52}$$

pe aripă.

Introducînd funcția $\frac{d\mathcal{F}}{dx}$ definită de relația

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} = F_{n-1,1,0} - i\, [(n-1)!\, w^{(0)}_{n-1,1} + k_{1,1}] \tag{53}$$

și ținînd seama de relațiile (5), (20) și (23), condițiile de mai sus pot fi scrise sub forma

$$\mathcal{I}m\, F^{(a)}_{n-1,1,0} = 0 \tag{54}$$

atît pentru fuzelaj cît și pentru porțiunea de aripă situată în interiorul conului Mach, și

$$\mathcal{R}e\, F^{(a)}_{n-1,1,0} = \frac{Q}{2}\left(1 + \frac{Y}{\sqrt{Y^2 - 4c^2}}\right) \tag{55}$$

pentru porțiunile de aripă situate în afara conului Mach.

La aceste condiții se adaugă pe cercul Mach și pe porțiunile axei reale situate în afara aripii dar în interiorul conului Mach condiția

$$\mathcal{R}e\, F^{(a)}_{n-1,1,0} = 0. \tag{56}$$

Procedînd într-un mod asemănător ca mai sus, pentru funcția $F^{(a)}_{n-1,1,0}$ se vor obține următoarele expresii, în care am folosit notațiile indicate în relațiile (35), (36):

dacă $l_1 < \frac{1}{B}$, $l_2 < \frac{1}{B}$
$$F^{(a)}_{n-1,1,0} = \mathbf{A}^{(L_1)}_{L_2} + \dot{\mathbf{A}}^{(L_2)}_{L_1}, \tag{57 a}$$

dacă $l_1 < \frac{1}{B}$, $l_2 > \frac{1}{B}$
$$F^{(a)}_{n-1,1,0} = \mathbf{A}^{(L_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}}} + \dot{\mathbf{R}}^{(L_2)}_{L_1,\, \frac{1}{\mathcal{B}}} + \dot{\mathbf{H}}^{(L_2)}_{L_1,\, \frac{1}{\mathcal{B}}}, \tag{57 b}$$

dacă $l_1 > \frac{1}{B}$, $l_2 < \frac{1}{B}$
$$F^{(a)}_{n-1,1,0} = \dot{\mathbf{A}}^{(L_2)}_{\frac{1}{\mathcal{B}}} + \mathbf{R}^{(L_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\, L_2} + \mathbf{H}^{(L_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\, L_2}, \tag{57 c}$$

dacă $l_1 > \frac{1}{B}$, $l_2 > \frac{1}{B}$
$$F^{(a)}_{n-1,1,0} = \mathbf{R}^{(L_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\, \frac{1}{\mathcal{B}}} + \dot{\mathbf{R}}^{(L_2)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\, \frac{1}{\mathcal{B}}} + \mathbf{H}^{(L_1)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\, \frac{1}{\mathcal{B}}} + \dot{\mathbf{H}}^{(L_2)}_{\frac{1}{\mathcal{B}},\, \frac{1}{\mathcal{B}}}. \tag{57 d}$$

Expresia vitezei axiale de perturbație u pe aripă și pe fuzelaj va fi determinată utilizînd aceeași relație (30), iar constantele care intervin în această expresie vor putea fi determinate într-un mod asemănător celui indicat mai sus.

Primită la redacție la data de 27 decembrie 1961.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ КРЫЛОМ И ФЮЗЕЛЯЖЕМ ПРИ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается сверхзвуковое обтекание системы крыло-конический фюзеляж в случае, когда угол атаки или уклон крыла распределен в виде суммы однородных полиномов различных порядков, причем предполагается, что на крыле имеются ребра, отделяющие различные режимы распределения угла атаки. Приведенное в работе исследование позволяет решить и случай рассматриваемой системы, находящейся в неравномерном потоке, а также случай гармонических колебаний малой частоты этой системы в сверхзвуковом потоке.

Рассматривая коническое обтекание порядка n системы крыло-конический фюзеляж, задачу определения давлений авторы сводят в подходящим образом выбранной плоскости к решению конического обтекания того же порядка n изолированного фиктивного крыла с определенным распределением угла атаки.

WING-BODY INTERFERENCE IN HIGH-ORDER CONICAL FLOW

ABSTRACT

This paper examines the supersonic flow around the wing-conical body system when the incidence or the slope of the wing is distributed under the form of a sum of homogeneous polynominals of various orders; it is assumed that the wing is fitted with ridges which separate two different regimes of incidence distribution. The method presented permits also the solving of the case in which the considered system is placed in a non-uniform flow, as well as the case of low frequency harmonic oscillations of this system in supersonic flow.

The conical flow of n order around the wing-conical body system is treated, the problem of determining the pressure distribution being reduced to that of solving, in a conveniently chosen plane, the conical flow of the same n order around a fictitious wing alone having a certain incidence distribution.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, D. MATEESCU, *Ecoulement supersonique autour du système portant aile-fuselage conique*. Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **IV**, *3* (1959).
2. — *A General Method for Determining the Wing-Conical Body Interference in Supersonic Flow*. Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **V**, *2* (1960).
3. — *Supersonic Flow around the Cruciform Wing-Conical Body System*. Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **V**, *3* (1960).
4. D. MATEESCU „*Сверхзвуковое обтекание трапецоидального крыла с двумя коническими обтекателями*”. Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **VI**, *3* (1961).
5. E. CARAFOLI, D. MATEESCU, *Interferența dintre aripă cruciformă și fuzelaj conic în regim supersonic. Metodă generală*. (În curs de publicare).
6. — *High Order Conical Flow around the Delta Wing Fitted with Conical Body*. Lucrare prezentată la Seminarul de științe aeronautice, 27 nov.-2 dec. 1961, Bangalore, India (sub tipar).
7. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique.*, Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **II**, *1*, (1957).
8. E. CARAFOLI, *High Speed Aerodynamics*. Ed. tehnică, București, 1956.

STUDII

AEROMECANICĂ

UNELE PROBLEME ALE STABILIZĂRII AUTOMATE A AVIOANELOR DAV ÎN ZBOR IMOBIL

DE

T. HACKER

NOTAȚII

xyz — sistem de axe de coordonate legat de corp (avion) cu originea în centrul de greutate al avionului;

t — timpul (s);

σ_x, σ_y, σ_z — mărimile de ieșire ale sistemului de stabilizare relative la axele sistemului ales (adimensionale);

ω_x, ω_y, ω_z — componentele vitezei unghiulare a avionului în jurul centrului său de greutate (rad s^{-1});

γ — unghiul de înclinare laterală a avionului (unghiul diedru format de planul de simetrie cu planul vertical conținînd axa Ox) (rad);

ψ — unghiul de girație (azimut, format de proiecția axei Ox pe un plan orizontal cu o direcție fixă din acest plan) (rad);

ϑ — unghiul de tangaj (format de axa Ox cu un plan orizontal) (rad);

M_x, M_y, M_z — componentele rezultantei momentelor exterioare (kg m);

$M_x^{\sigma_x}$, $M_y^{\sigma_y}$, $M_z^{\sigma_z}$ — derivatele parțiale ale momentelor în jurul axelor sistemului $Oxyz$ în raport cu mărimile de ieșire respective ale sistemului de stabilizare (kg m);

m — masa avionului (kg $m^{-1} s^2$);

I_x, I_y, I_z — momentele de inerție ale avionului în raport cu axele de coordonate adoptate (kg m s^2);

I_{xy} — momentul de inerție centrifugal al avionului în raport cu axele Ox și Oy (kg m s^2);

r_x — raza de girație (inerție) în raport cu axa Ox $\left(r_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}\right)$ (metri);

K_x, K_y, K_z — componentele momentului principal al cantității de mișcare a maselor în rotație ale motoarelor (kg m s);

J — momentul de inerție al maselor mobile principale ale motoarelor în raport cu axele de rotație respective (kg m s^2);

Ω — viteza unghiulară a rotației maselor mobile principale ale motoarelor (rad s^{-1}).

1. CONSIDERAȚII GENERALE

În lucrarea [1] s-a cercetat mișcarea perturbată a avioanelor DAV în ipoteza constrîngerii parametrilor mișcării de translație, lăsîndu-se liberă mișcarea de rotație în jurul centrului de greutate. Pentru cazul zborului imobil s-a conchis necesitatea stabilizării prin comenzi a tuturor componentelor mișcării de rotație. S-a analizat mișcarea perturbată respectivă, evaluîndu-se gradul de instabilitate și frecvența de oscilație a deviațiilor, pentru a se găsi criterii care să asigure eficiența intervenției stabilizatoare a comenzilor.

În lucrarea de față se va considera sistemul dinamic avion + factori de stabilizare conform schemei următoare : se presupune că natura mișcării centrului de greutate (viteză, frecvență proprie) diferă suficient de mult de aceea a mișcării în jurul centrului de greutate, pentru ca variabilele dinamice, caracterizînd prima componentă a mișcării perturbate (și deci și ecuațiile respective), să poată fi eliminate pe baza teoriei stabilității mișcărilor parțial controlate [1]). Se vor considera deci, ca sistem auxiliar, ecuațiile liniarizate ale mișcării perturbate corespunzătoare parametrilor mișcării de rotație și parametrilor de funcționare a automatului de stabilizare. Se va presupune că stabilizorul reacționează la deviațiile și vitezele unghiulare în jurul celor trei axe ale sistemului legat de avion.

Se va ține seama de întîrzierile ce apar în funcționarea stabilizorului automat. Se va admite că întîrzierile sînt constante și în general diferite pentru diferitele componente ale rotației.

Considerarea întîrzierii reclamă, evident, o modelare matematică diferită de aceea a mișcării perturbate a avionului necontrolat, sau prevăzut cu stabilizor ideal. Ecuațiile respective vor fi de tipul cunoscut în literatura matematică sub denumirea de ecuații diferențiale cu argument întîrziat [2]).

---

[1]) Cu privire la valabilitatea extinderii teoremelor de stabilitate corespunzătoare mișcărilor parțial controlate la sistemele cu întîrziere, vezi [2], paragraful 4.

[2]) În literatura sovietică se întîlnește și denumirea mai generală de *ecuații diferențiale cu argument deplasat* (дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами) desemnînd ecuații în care funcțiile necunoscute apar simultan pentru valori diferite ale variabilei independente ; în literatura în limba engleză se utilizează cel mai frecvent denumirea de *difference-differential equations*.

Teoria acestor ecuații, deși problema a fost formulată încă de Bernoulli (1728) [1], a format obiectul unor cercetări sistematice abia în ultimii 10—15 ani, perioadă în care s-au demonstrat unele teoreme, prin care a devenit posibilă considerarea acestui tip de ecuații la rezolvarea unor probleme aplicative din domeniul științelor tehnice (în primul rînd al teoriei comenzilor și reglajului automat).

În perioada în care aparatul matematic adecvat încă nu fusese elaborat într-o formă accesibilă aplicațiilor practice, s-au făcut unele încercări de modelare matematică a problemei stabilității avionului cu autopilot real, utilizînd drept parametru nu întîrzierea (constantă sau variabilă) ci viteza de funcționare a automatului, presupusă cunoscută și constantă. Astfel, de exemplu, în [4] se consideră pentru ilustrarea metodei o schemă simplificată descrisă de o ecuație de forma

$$\frac{d\sigma}{dt} = a\left(\Delta\vartheta - \frac{\sigma}{\varkappa}\right), \tag{1.1}$$

unde prin a s-a notat un coeficient al vitezei de funcționare a servomotorului, iar prin $\varkappa$ raportul de transmisie al autopilotului. În acest caz, mărimea de ieșire a autopilotului, σ, reprezintă bracajul profundorului. Pentru cazul întîrzierii nule ($a \to \infty$) această schemă corespunde autopilotului ideal care brachează profundorul cu un unghi proporțional cu deviația unghiului de tangaj

$$\sigma = \varkappa\Delta\vartheta. \tag{1.2}$$

Valabilitatea utilizării pentru determinarea domeniului de stabilitate a unei ecuații de tip (1.1) însă nu se poate considera justificată, din punctul de vedere teoretic.

Într-adevăr, schemei unui autopilot, care în mișcarea longitudinală a avionului bracheaza profundorul cu un unghi proporțional cu deviația unghiului de tangaj, dar cu o întîrziere oarecare τ, îi corespunde o ecuație de forma

$$\sigma(t) = \varkappa\Delta\vartheta(t - \tau). \tag{1.3}$$

Pentru a se ajunge de la această ecuație la una de forma (1.1) se vor face următoarele operații formale: se va dezvolta membrul al doilea al ecuației (1.3) într-o serie de puteri, după puterile lui τ și se va considera numai termenul care conține parametrul τ la puterea întîia (liniarizarea seriei în raport cu τ). Prin aceasta, ecuația cu argument întîrziat (1.3) este înlocuită formal printr-o ecuație fără argument întîrziat

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{\varkappa}{\tau}\left[\Delta\vartheta(t) - \frac{1}{\varkappa}\sigma(t)\right]. \tag{1.4}$$

Se vede ușor că $\frac{\varkappa}{\tau}$, în ipoteza întîrzierii constante, este un coeficient proporțional cu viteza de lucru a servomotorului. Într-adevăr, notînd prin $\Delta\vartheta_{\max}$ deviația unghiului de tangaj corespunzătoare, conform (1.2), bracajului maxim al profundorului, și cu k un factor de proporționalitate dimensional, constant, în ipoteza τ — independent de deviație, viteza servomotorului [1]) se poate exprima sub forma $k \frac{\varkappa}{\tau} \Delta\vartheta_{\max}$.

---

[1] J. Bernoulli, *Meditationes. De chordis vibrantibus*... Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 3 (1728), 13—28, Collected Works, III, p. 198 (citat după [3], p. 12).

O discuție asupra valabilității înlocuirii aproximative a unei ecuații de forma (1.3) cu una de forma (1.4) este făcută în [5] [2]). În concluzie, se arată că o asemenea înlocuire este admisibilă (fără a fi însă și recomandabilă) pentru integrarea aproximativă a ecuației de tipul (1.3) pe un interval finit de timp, dar poate duce la rezultate pe de-a întregul eronate în cazul cercetării comportării asimptotice a soluției, în particular al cercetării domeniului de stabilitate.

Considerarea schemelor de tipul (1.1) pentru modelarea funcționării autopilotului real a reprezentat totuși, la epoca respectivă, un progres în raport cu ipoteza întîrzierii nule. Într-adevăr, dacă folosirea acestui model matematic nu poate fi considerată ca justificată pentru definirea domeniului de stabilitate în cazul unui sistem avion + autopilot (care trebuie să fie, dinamic, riguros stabil, adică stabil pe un interval de timp oricît de mare) și în general al oricărui sistem pentru care definirea stabilității pe un interval limitat de timp nu are sens, ea poate da totuși unele informații calitative veridice privind mișcarea perturbată pe un interval finit de timp. Acest tip de rezultate poate fi util mai ales în cazul stabilizorilor automați speciali cu funcționare de scurtă durată, sau în cazul funcționării concomitente cu acțiunea pilotului.

2. ECUAȚIILE MIȘCĂRII PERTURBATE

Ecuațiile de funcționare ale stabilizorului automat vor corespunde unor scheme simplificate, în care componentele după cele trei axe legate ale mărimii de ieșire depind liniar de deviația poziției unghiulare și a vitezei unghiulare respective :

$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \varkappa_1\,\omega_x(t-\tau_1) + \varkappa_4\,\gamma(t-\tau_1) \\ \sigma_y(t) &= \varkappa_2\,\omega_y(t-\tau_2) + \varkappa_5\,\psi(t-\tau_2) \qquad (2.1) \\ \sigma_z(t) &= \varkappa_3\,\omega_z(t-\tau_3) + \varkappa_6\,\Delta\vartheta(t-\tau_3) \end{aligned}$$

unde coeficienții $\varkappa_i$ și întîrzierile τ_i se consideră mărimi constante. Mărimile de ieșire σ_x, σ_y, σ_z reprezintă comenzi prin care se controlează componentele mișcării avionului în jurul centrului său de greutate. Aceste comenzi pot fi materializate, de exemplu, prin jeturi de aer, prelevate de la compresorul motorului sau produse de un compresor suplimentar etc., ajutajele respective fiind convenabil plasate în raport cu centrul de greutate al avionului. Stabilizorul comandă în acest caz admisia de gaze, spre ajutaje.

---

[1]) De exemplu, viteza de deplasare a pistonului în cazul unui servohidraulic.
[2]) p. 208—210 și p. 237—238.

Conform tehnicii obişnuite, bazate pe metoda micilor perturbaţii, se vor considera pentru descrierea mişcării perturbate ecuaţii liniarizate. În aceeaşi aproximaţie liniară, dacă pentru starea neperturbată $\gamma = \psi = 0$, iar ϑ mic, se poate scrie [1]

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x,$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_y, \qquad (2.2)$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z,$$

şi deci sistemul de ecuaţii considerat [2] va fi

$$\frac{d\omega_x(t)}{dt} = \frac{K_v}{I_x}\omega_z(t) + \frac{M_x^{\sigma_x}}{I_x}[\varkappa_1\omega_x(t-\tau_1) + \varkappa_4\gamma(t-\tau_1)],$$
$$\frac{d\omega_y(t)}{dt} = -\frac{K_x}{I_y}\omega_z(t) + \frac{M_y^{\sigma_y}}{I_y}[\varkappa_2\omega_y(t-\tau_2) + \varkappa_5\psi(t-\tau_2)], \qquad (2.3)$$
$$\frac{d\omega_z(t)}{dt} = -\frac{K_y}{I_z}\omega_x(t) + \frac{K_x}{I_z}\omega_y(t) + \frac{M_z^{\sigma_z}}{I_z}[\varkappa_3\omega_z(t-\tau_3) + \varkappa_6\vartheta(t-\tau_3)],$$

la care se adaugă relaţiile cinematice (2.2).

Pentru stabilirea sistemului (2.3) s-au făcut următoarele presupuneri :

1° Axele legate adoptate se consideră suficient de apropiate de axele principale de inerţie pentru a se putea neglija termenii care au în factor momentul de inerţie centrifugal I_{xy} [3].

2°. Axele de rotaţie ale maselor mobile ale motoarelor se consideră situate în plane paralele cu planul de simetrie longitudinal al avionului şi, prin urmare, $K_z = 0$.

Tracţiunea pe verticală, necesară sustentaţiei, se obţine în cazul motoarelor fixe fie prin poziţia verticală a avionului $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$, fie prin deflecţia totală în jos a jetului; iar în cazul motoarelor basculante prin rotirea în poziţie verticală a acestora. Cazului motorului fix îi corespunde la limită aproximaţia $K_y = 0$, iar cazului motorului basculant, aproximaţia $K_x = 0$. Pentru fixarea ideilor, în cele ce urmează se va considera cazul motorului fix cu deflecția jetului. Pentru aceasta se pot admite următoarele aproximații, privind componentele momentului principal K al cantității de mişcare a organelor în rotație ale motoarelor

---

[1] Pentru formulele de transformare, vezi [4], p. 223.

[2] Cf. [1] sistemul (4.3).

[3] Aproximaţia, evident, este cu atît mai bună, cu cît avionul prezintă o mai mare apropiere de cazul unei simetrii faţă de planul zOx. În cazul unei simetrii axiale pe lîngă anularea momentului de inerţie centrifugal apare şi o altă posibilitate de simplificare a ecuaţiilor din egalitatea $I_y = I_z$.

$$K_x \approx K \approx J\Omega, \quad K_y \approx K_z \approx 0.$$

Cu aceste simplificări sistemul (2.3) + (2.2) devine

$$\begin{aligned}
&\frac{d\omega_x(t)}{dt} = b_{11}\,\omega_x(t-\tau_1) + b_{14}\,\gamma(t-\tau_1),\\
&\frac{d\omega_y(t)}{dt} = a_{23}\,\omega_z(t) + b_{22}\,\omega_y(t-\tau_2) + b_{25}\,\psi(t-\tau_2),\\
&\frac{d\omega_z(t)}{dt} = a_{32}\,\omega_y(t) + b_{33}\,\omega_z(t-\tau_3) + b_{36}\,\vartheta(t-\tau_3),\\
&\frac{d\gamma(t)}{dt} = \omega_x(t),\\
&\frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_y(t),\\
&\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_z(t),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

unde

$$b_{11} = \frac{\varkappa_1}{I_x} M_x^{\sigma_x}, \quad b_{14} = \frac{\varkappa_4}{I_x} M_x^{\sigma_x},$$

$$a_{23} = -\frac{K_x}{I_y} \approx -\frac{J}{I_y}\Omega, \quad b_{22} = \frac{\varkappa_2}{I_y} M_y^{\sigma_y}, \quad b_{25} = \frac{\varkappa_5}{I_y} M_y^{\sigma_y},$$

$$a_{32} = \frac{K_x}{I_z} \approx \frac{J}{I_z}\Omega, \quad b_{33} = \frac{\varkappa_3}{I_z} M_z^{\sigma_z}, \quad b_{36} = \frac{\varkappa_6}{I_z} M_z^{\sigma_z}.$$

Se vede că sistemul (2.4) se separă în două sisteme independente : unul corespunzător mişcării de ruliu

$$\begin{aligned}
&\frac{d\omega_x(t)}{dt} = b_{11}\,\omega_x(t-\tau_1) + b_{14}\,\gamma(t-\tau_1),\\
&\frac{d\gamma(t)}{dt} = \omega_x(t)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

şi al doilea corespunzător mişcărilor de giraţie şi de tangaj, cuplate prin efectul giroscopic al maselor în rotaţie ale motoarelor

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_y(t)}{dt} &= a_{23}\,\omega_z(t) + b_{22}\,\omega_y(t-\tau_2) + b_{25}\,\psi(t-\tau_2),\\
\frac{d\omega_z(t)}{dt} &= a_{32}\,\omega_y(t) + b_{33}\,\omega_z(t-\tau_3) + b_{36}\,\vartheta(t-\tau_3),\\
\frac{d\psi(t)}{dt} &= \omega_y(t),\\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z(t).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

În paragrafele următoare se va considera, pentru economia expunerii, numai sistemul (2.5). Toate raţionamentele privind acest sistem se vor putea extinde, fără nici o dificultate principială, la sisteme mai complicate, în particular şi la (2.6).

3. ADUCEREA ECUAŢIILOR LA O FORMĂ ADIMENSIONALĂ

Pentru regimul de zbor imobil, transformarea de tip Glauert, bazată pe considerente fizice privind forţele aerodinamice, este, evident, inadecvată.

Pentru acest caz, drept unităţi fundamentale se vor propune: masa avionului (m), acceleraţia gravităţii (g) şi o lungime caracteristică a avionului (anvergura, coarda medie aerodinamică, sau rădăcina pătrată din aria suprafeţei portante etc.). Pentru a realiza o cît mai mare simplificare a ecuaţiilor (2.5) considerate, se va adopta drept lungime caracteristică raza de inerţie r_x. Atunci unitatea pentru timp va fi $\sqrt{\frac{r_x}{g}}$, pentru moment mgr_x, pentru moment de inerţie mr_x^2 etc. Dintre constantele $\varkappa_1$ şi $\varkappa_4$, σ_x considerîndu-se adimensional, $\varkappa_1$ are dimensiunea unui timp iar $\varkappa_4$ este fără dimensiuni. Atunci, notînd cu m_x coeficientul adimensional al momentului M_x, ($m_x = M_x\,(mgr_x)^{-1}$), cu τ forma adimensională a întîrzierii τ_1, $\left(\tau = \sqrt{\frac{g}{r_x}}\tau_1\right)$, marcînd prin bare forma adimensională corespunzătoare celorlalte mărimi şi operînd transformările de aducere la forma adimensională conform sistemului de unităţi fundamentale ales, sistemul (2.5) devine

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\omega}_x(\bar{t})}{d\bar{t}} &= -a\bar{\omega}_x(\bar{t}-\tau) - b\gamma(\bar{t}-\tau),\\
\frac{d\gamma(\bar{t})}{d\bar{t}} &= \bar{\omega}_x(\bar{t}),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

cu

$$a = -\bar{\varkappa}_1 m_x^{\sigma x}, \ b = -\varkappa_4 m_x^{\sigma x}, \ \bar{\varkappa}_1 = \sqrt{\frac{g}{r_x}}\varkappa_1.$$

4. TRANSFORMATA LAPLACE A SISTEMULUI (3.1)

Dacă se notează prin $\tilde{\omega}_x$ și $\tilde{\gamma}$ transformatele Laplace, respectiv, ale funcțiilor $\bar{\omega}_x(\bar{t})$ și $\gamma(\bar{t})$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_x &= \mathfrak{L}\,\bar{\omega}_x(\bar{t}) = \int_0^\infty e^{-p\bar{t}}\,\bar{\omega}_x(\bar{t})\,d\bar{t}, \\ \tilde{\gamma} &= \mathfrak{L}\,\gamma(\bar{t}) = \int_0^\infty e^{-p\bar{t}}\,\gamma(\bar{t})\,d\bar{t}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

atunci, se deduc imediat următoarele relații evidente

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}\frac{d\bar{\omega}_x(\bar{t})}{d\bar{t}} = p\tilde{\omega}_x - \bar{\omega}_x(0), \\ &\mathfrak{L}\frac{d\gamma(\bar{t})}{d\bar{t}} = p\tilde{\gamma} - \gamma(0), \\ &\mathfrak{L}\,\bar{\omega}_x(\bar{t}-\tau) = e^{-p\tau}\,\tilde{\varphi}_x + e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-p\bar{t}}\,\bar{\omega}_x(\bar{t})\,d\bar{t}, \\ &\mathfrak{L}\,\gamma(\bar{t}-\tau) = e^{-p\tau}\,\tilde{\gamma} + e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-p\bar{t}}\,\gamma(\bar{t})\,d\bar{t}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Cu aceste expresii, transformatele Laplace ale ecuațiilor (3.1) vor fi

$$\begin{aligned} (-ae^{-\tau p} - p)\tilde{\omega} - be^{-\tau p}\tilde{\gamma} &= -\bar{\omega}_x(0) + e^{-\tau p}\int_{-\tau}^{0} e^{-p\bar{t}}\,[a\,\bar{\omega}_x(\bar{t}) + b\gamma(\bar{t})]\,d\bar{t} \\ \tilde{\omega}_x - p\,\tilde{\gamma} &= -\gamma(0), \end{aligned} \tag{4.3}$$

avînd următorul cvasipolinom caracteristic :

$$w(p) = p^2 + ae^{-\tau p}\,p + be^{-\tau p}. \tag{4.4}$$

5. CONDIȚIILE DE STABILITATE. DOMENIUL DE STABILITATE ÎN SPAȚIUL PARAMETRILOR

Asemănarea formală dintre cvasipolinoamele caracteristice corespunzătoare sistemelor de ecuații cu argument întîrziat, liniare și cu coeficienți constanți, pe de o parte, și polinoamele caracteristice ale sistemelor autonome liniare obişnuite, pe de altă parte, a sugerat, pentru punerea în evidenţă a stabilităţii asimptotice a soluţiei banale a celor dintîi, folosirea, drept condiţie necesară şi suficientă, a sistemului de inegalităţi

$$\mathcal{Re}\,(p_i) < 0 \qquad i = 1, 2, \ldots$$

unde p_i reprezintă toate zerourile quasipolinomului caracteristic respectiv. Demonstrarea însă a unei condiţii necesare şi suficiente riguroase de stabilitate asimptotică pentru ecuaţiile cu argument întîrziat cu coeficienţi constanţi, legate de părţile reale ale zerourilor cvasipolinomului caracteristic, este de dată relativ recentă. O dată cu aceasta au fost demonstrate şi teoremele respective de stabilitate în primă aproximaţie [1]. Conform acestora, în ipoteze suficient de largi, ca să se poată include tipul de probleme formulat mai sus, condiţia necesară şi suficientă de stabilitate asimptotică în primă aproximaţie se exprimă prin următorul sistem de inegalităţi referitoare la toate zerourile, p_i, ale cvasipolinomului caracteristic

$$\mathcal{Re}\,(p_i) \leqslant -\varepsilon < 0, \tag{5.1}$$

unde ε este un număr pozitiv oricît de mic.

Mai departe, dacă $w\,(p)$ este cvasipolinomul caracteristic al unui sistem de ecuaţii cu argument întîrziat, liniar şi cu coeficienţi constanţi, ecuaţia

$$w\,(p) = 0 \tag{5.2}$$

va fi denumită, prin analogie, ecuaţia caracteristică.

Înainte de a se defini noţiunea de domeniu de stabilitate asimptotică în spaţiul parametrilor se dau unele precizări în legătură cu natura acestor parametri. Parametrii constructivi, cei care caracterizează regimul neperturbat, precum şi caracteristicile de funcţionare ale automatului de stabilizare, influenţează mişcarea perturbată într-o anumită combinaţie, reprezentată prin coeficienţii ecuaţiilor respective. Cînd se consideră numai problema stabilităţii, numărul parametrilor de care trebuie să se ţină seama şi care conţin implicit pe cei enumeraţi mai sus, este şi mai redus. Evident, alegerea parametrilor depinde de natura problemei considerate, de posibilitatea urmăririi efectului lor asupra proprietăţii studiate, de posibilitatea practică a varierii acestora etc. Astfel, pentru categoria de probleme, în care intră şi cea considerată în acest articol, se pot alege drept parametri coeficienţii ecuaţiei caracteristice (depinzînd la rîndul lor de parametrii constructivi, regim şi caracteristicile automatului), o parte din aceşti coeficienţi, sau o anumită combinaţie a lor, precum şi întîrzierile ce apar la stabilizarea automată sau cea mai mare dintre aceste întîrzieri.

În continuare, domeniul de stabilitate asimptotică în hiperspaţiul parametrilor aleşi $a_1, a_2, \ldots$, se defineşte ca mulţimea tuturor punctelor hiperspațiului pentru care sînt satisfăcute simultan condițiile (5.1)[1] Frontiera unui asemenea domeniu va fi o hipersuprafață reprezentînd mulțimea tuturor punctelor pentru care cel puțin o rădăcină a ecuației caracteristice are partea reală egală cu $-\mu$. Într-adevăr, se presupune că toate rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare unui punct din hiperspațiul parametrilor, satisfac condiția (5.1) (punctul se află în domeniul de stabilitate asimptotică). Rădăcinile ecuației caracteristice fiind presupuse funcții continue de parametrii aleși, este evident că nu se poate ajunge, prin variația continuă a parametrilor, la situația ca cel puțin o rădăcină să aibă partea reală μ mai mare decît $-\varepsilon$, decît dacă la un moment dat a trecut prin această valoare, ceea ce echivalează cu traversarea frontierei domeniului de stabilitate[2]. Deci toate punctele frontierei satisfac ecuația

---

[1] Primele rezultate aparţin, se pare, lui R. Bellman [6]. Ele au fost extinse de alţi autori, dintre care se citează, marcînd etape mai importante, contribuţia lui E. M. Wright [7] şi a lui N.N. Krasovski (vezi [8], cap. 6).

$$w(-\varepsilon + i\nu;\, a_1, a_2, \dots) = 0 \tag{5.3}$$

frontiera fiind descrisă de ecuațiile parametrice (cu $\nu = \mathcal{Im}(p)$ ca parametru)

$$\begin{aligned} \mathcal{Re}\,(w) &\equiv u(-\varepsilon + i\nu;\, a_1, a_2, \dots) = 0. \\ \mathcal{Im}\,(w) &\equiv v(-\varepsilon + i\nu;\, a_1, a_2, \dots) = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Practic, frontiera domeniului de stabilitate asimptotică se construiește pe baza ecuațiilor (5.4). Pentru a determina care porțiune a spațiului parametrilor delimitată de frontieră reprezintă domeniul de stabilitate se poate proceda dîndu-se o creștere uneia dintre coordonatele, după caz, ale unuia sau mai multor puncte ale frontierei și urmărindu-se sensul creșterii corespunzătoare a lui μ (care în punctul de pe frontieră are valoarea $-\varepsilon$). Fie, de exemplu, întîrzierea τ coordonata aleasă. Unei creșteri $\delta\tau$ îi va corespunde, evident, o creștere a lui μ egală cu $\delta\mu = \mu(\tau + \delta\tau) - \mu(\tau)$, care se poate obține printr-o dezvoltare în serie Taylor a lui $\mu(\tau + \delta\tau)$

$$\delta\mu = -\,\mathcal{Re}\left[\frac{\dfrac{\partial w}{\partial \tau}}{\dfrac{\partial w}{\partial p}}\,\delta\tau + T(p, \tau;\, \delta\tau)\,\delta\tau^2\right], \tag{5.5}$$

unde $T\delta\tau^2$ reprezintă suma termenilor în $\delta\tau$ la puterea $\geqslant 2$. Creșterea $\delta\tau$ se va lua suficient de mică, pentru ca semnul lui $\delta\mu$ să fie dat de partea reală a termenului din paranteză diferit de zero de gradul cel mai mic.

Se înțelege că pentru a stabili dacă o anumită zonă a spațiului parametrilor delimitată de o porțiune a frontierei face parte sau nu din dome-

---

[1] În terminologia folosită în [3] (vezi cap. III, paragraful 9) o asemenea mulțime s-ar numi un *platou* $(-\varepsilon, 0)$.

[2] Folosind o reprezentare geometrică, s-ar putea spune că frontiera domeniului de stabilitate asimptotică în spațiul (sau hiperspațiul) parametrilor este o suprafață (respectiv, hipersuprafață) reprezentînd *imaginea* în acest spațiu a dreptei $\mu = -\varepsilon$ din planul p, obținută prin transformarea definită de ecuația

$$w(p\,;\, a_1, a_2, \dots) = 0.$$

niul de stabilitate asimptotică, se poate proceda şi mai simplu, prin verificarea inegalităţii (5.1) pentru un punct oarecare al zonei respective. Dacă printre parametri figurează o singură întîrziere τ, de multe ori este avantajos a se alege în acest scop un punct de pe hiperplanul $\tau = 0$, deoarece în acest fel ecuaţia caracteristică degenerează într-o ecuaţie algebrică, căreia i se pot aplica criteriile obişnuite pentru semnul părţilor reale ale rădăcinilor (Hurwitz etc.).

Este de remarcat că în cazurile practice uzuale, pentru $\tau = 0$ (stabilizor ideal), corespunde întotdeauna o soluţie asimptotic stabilă, cu o rezervă suficientă pentru prevenirea efectului, de obicei destabilizator, al întîrzierii.

Verificarea amintită este deci echivalentă cu cercetarea stabilităţii în ipoteza automatului ideal.

Dacă existenţa stabilităţii soluţiei în acest caz ideal este demonstrată pe o altă cale, orice verificare din cele arătate este de prisos, domeniul de stabilitate asimptotică în spaţiul parametrilor fiind, a priori, acela, care conţine (în întregime) hiperplanul $\tau = 0$ [1]).

6. APLICAŢIE PENTRU SISTEMUL (3.1)

Se aleg drept parametri : raportul $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\bar{\varkappa}_1}{\varkappa_4}$, care se notează cu c, şi întîrzierea (adimensională) τ. Valoarea unuia dintre coeficienţii a şi b de exemplu, a lui b se consideră fixată. Frontiera domeniului de stabilitate asimptotică va fi o curbă reprezentată de ecuaţiile parametrice

$$\begin{aligned} u^{*}(\nu\,;c,\tau) &\equiv u(-\varepsilon + i\nu\,;c,\tau) \equiv -\nu^2 + \varepsilon^2 + be^{\tau\varepsilon}[(1 - \\ &\quad - \varepsilon c)\cos\tau\nu + c\nu\sin\tau\nu] = 0, \\ v^{*}(\nu\,;c,\tau) &\equiv v(-\varepsilon + i\nu\,;c,\tau) \equiv -2\varepsilon\nu - be^{\tau\varepsilon}[-(1 - \\ &\quad - \varepsilon c)\sin\tau\nu + c\nu\cos\tau\nu] = 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

corespunzătoare dreptei $\mu = -\varepsilon$ din planul complex p $(\mu \equiv \mathcal{Re}\,(p))$. Se poate arăta uşor că făcînd pe ε suficient de mic, se poate obţine ca frontiera, reprezentată de ecuaţiile (6.1), să difere oricît de puţin de curba corespunzătoare aceloraşi ecuaţii în care s-a făcut $\varepsilon = 0$, în particular mai puţin decît deformaţia curbei datorită erorilor de calcul. De aceea, în continuare, se vor considera pentru construirea frontierei domeniului de stabilitate asimptotică, în locul sistemului (6.1), ecuaţiile

$$\begin{aligned} u_0^{*}(\nu\,;c,\tau) &\equiv -\nu^2 + bc\nu\sin\tau\nu + b\cos\tau\nu = 0, \\ v_0^{*}(\nu\,;c,\tau) &\equiv \phantom{-\nu^2 +{}} bc\nu\cos\tau\nu - b\sin\tau\nu = 0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

---

[1]) Existenţa stabilităţii soluţiei pentru $\tau = 0$, cel puţin teoretic, nu apare necesară pentru stabilitatea în cazul $\tau \neq 0$, întîrzierea putînd avea în anumite împrejurări şi un efect stabilizator. Această situaţie teoretică va fi ilustrată pe exemplul considerat în cele ce urmează.

din care rezultă imediat

$$c = \frac{\pm\sqrt{\nu^4 - b^2}}{|b\nu|},$$

$$\tau = \frac{1}{\nu}\,\text{arc tg}\,\nu c. \tag{6.3}$$

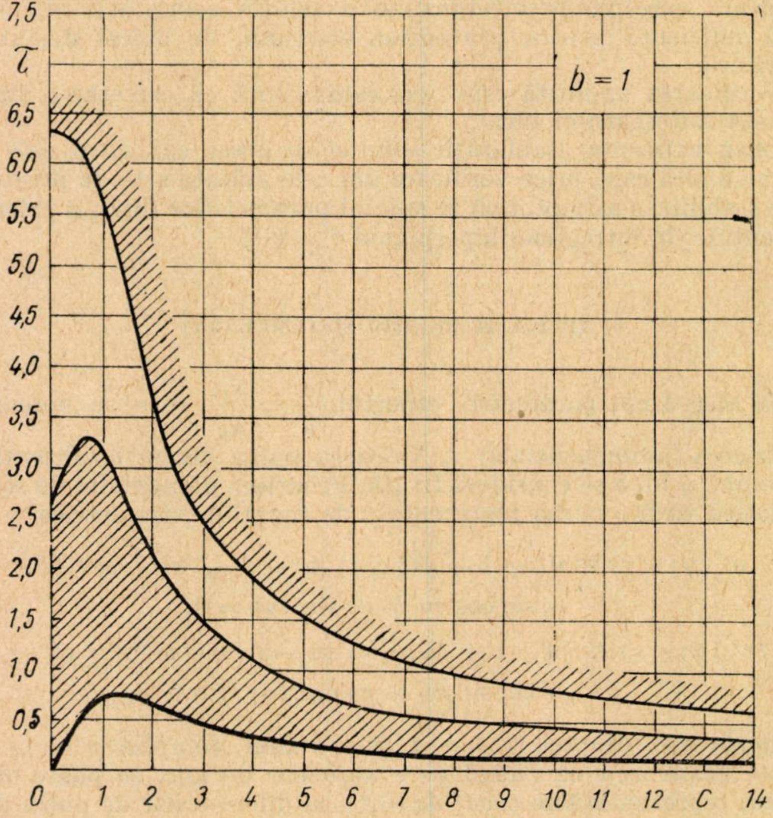


Fig. 1

Parametrii a, b și τ fiind pozitivi în toate cazurile practice, se va considera din planul parametrilor numai cadranul $c > 0$, $\tau > 0$. În acest cadran, prin eliminarea lui ν între ecuațiile (6.3), se obține o familie de curbe tinzînd, pentru $c \to \infty$, asimptotic către axa $\tau = 0$ și avînd alura din figura 1. Ramurile frontierei corespund, evident, diferitelor valori ale numărului întreg k din relația

$$\tau = \frac{1}{\nu}\,[(\text{arc tg}\,\nu c)_0 + k\pi], \tag{6.4}$$

unde

$$-\frac{\pi}{2} < (\text{arc tg } \nu c)_0 < \frac{\pi}{2}\cdot$$

Ştiind că pentru $\tau = 0$ (ipoteza autopilotului ideal, cu $a > 0$ şi $b > 0$) soluţia nulă a sistemului (3.1) este asimptotic stabilă, se deduce imediat că zona dintre axa Oc şi prima ramură a frontierei adică cea care trece prin origine, aparţine domeniului de stabilitate [1]). Zona următoare aparţine domeniului de instabilitate, ş.a.m.d. (pe figură zonele de instabilitate sînt haşurate). Această succesiune, care pare evidentă în virtutea definiţiei frontierei, poate fi verificată cercetînd semnul coeficientului lui $\delta\tau$ din formula (5.5). Într-adevăr, se poate arăta uşor că acest coeficient are expresia următoare

$$-\mathcal{R}e\left(\frac{\dfrac{\partial w}{\partial \tau}}{\dfrac{\partial w}{\partial p}}\right) = \frac{b\nu^2 (bc^2 - 2c\nu \sin \tau\nu - 2\nu \cos \tau\nu)}{[b(c-\tau) + 2\nu \sin \tau\nu]^2 + \nu^2 (bc\tau - 2 \cos \tau\nu)^2} \qquad (6.5)$$

Întrucît b are un semn bine definit (de obicei, pozitiv), semnul expresiei (6.5) este dat de paranteza de la numărător (care se va nota cu P). Or, se vede uşor că pe frontieră, pe baza relaţiilor (vezi 6.3)

$$\operatorname{tg} \tau\nu = c\nu$$
$$c = \frac{\sqrt{\nu^4 - b^2}}{|b\nu|}, \qquad (6.6)$$

paranteza P devine

$$P = \frac{\nu^2}{b^2} - \frac{b}{\nu^2} - \frac{2}{\cos \tau\nu}.$$

Întrucît, în virtutea aceloraşi relaţii (6.6) de pe frontieră,

$$\left|\frac{2}{\cos\tau\nu}\right| = \frac{2\nu^2}{b} > \frac{\nu^2}{b} - \frac{b}{\nu^2}$$

se vede că semnul lui P, deci şi al expresiei (6.5), va fi dat de termenul $-\dfrac{2}{\cos\tau\nu}$. Rezultă că semnul lui $\delta\mu$ va fi acelaşi în tot lungul unei ramuri a frontierei şi se va schimba cînd se trece de pe o ramură pe una vecină (cînd în (6.4), k variază cu unu).

---

[1]) În acest caz simplu se vede imediat că, pentru $\tau = 0$, $a > 0$ şi $b > 0$, ecuaţia caracteristică

$$p^2 + ap + b = 0,$$

este hurwitziană.

Alura ramurilor frontierei de stabilitate asimptotică arată că raportul $c = \frac{\bar{\varkappa}_1}{\varkappa_4}$ optim, permițînd întîrzierea maximă în stabilizare se plasează în apropierea lui $c = 1$ (aproximativ 1,2) și că întîrzierea admisibilă scade foarte repede cu scăderea lui c, deci a coeficientului $\bar{\varkappa}_1$. Înrăutățirea situației cu scăderea lui $\varkappa_4$ (creșterea lui c) este mai lentă.

Observație. Din diagrama din figura 1 se poate trage și o concluzie care, din punctul de vedere practic, pare paradoxală ; îmbunătățirea caracteristicilor de stabilitate, mai precis, trecerea de la instabilitate la stabilitate prin creșterea întîrzierii. Mai mult decît atît, considerînd $a < 0$ și $b < 0$, alura curbelor se menține neschimbată, dar în schimb, se modifică succesiunea zonelor de stabilitate și instabilitate. Astfel, zona din vecinătatea axei absciselor, inclusiv axa $\tau = 0$, va aparține domeniului de instabilitate și pentru obținerea stabilității asimptotice va trebui să fie impusă o anumită întîrziere în funcționarea automatului. În această versiune (cu $m_x^{\sigma_x} > 0$) ar apărea oportune rapoarte $\frac{\bar{\varkappa}_1}{\varkappa_4}$ cît mai mici. După cunoștințele autorului, cel puțin în aviație, nu există tipuri de stabilizoare automate la care întîrzierea să apară necesară sau avantajoasă. Dar, după cum s-a văzut, există posibilitatea principială a conceperii unor astfel de scheme.

7. UNELE CONCLUZII

Procedeul ilustrat mai sus este comod pentru sisteme simple, ca cel considerat în paragraful precedent, sau pentru sisteme de ordin superior, dacă utilizarea unui număr destul de mic de parametri rezultă concludentă. În acest din urmă caz, fiind necesară considerarea unor ecuații algebrice de grad egal cu ordinul sistemului, pentru efectuarea într-un timp acceptabil a calculelor necesare analizei influenței parametrilor, este recomandabilă utilizarea mașinilor electronice de calcul.

Recurgerea la calculul cu mașina electronică devine însă obligatorie o dată cu considerarea tuturor parametrilor de care dispune constructorul. În acest caz analiza se poate face pe baza unui număr de secțiuni ale domeniului de stabilitate corespunzătoare diferitelor valori date cîte unora dintre parametri. Pentru ca o astfel de analiză să fie concludentă este necesară considerarea unui număr mare de asemenea secțiuni, comportînd o cantitate extrem de mare de calcule.

Pentru acest motiv, pentru efectuarea calculelor estimative necesare anteproiectului, poate apare mai utilă evaluarea întîrzierii admisibile în funcție de ceilalți parametri, pe baza unor procedee analitice aproximative. Asemenea procedee devin inevitabile, în cazul considerării stabilității în regim nepermanent, de exemplu, în zborul de tranziție (trecerea de la zborul orizontal la cel vertical și invers), deoarece n-au fost pînă în prezent elaborate metodele matematice privind stabilitatea sistemelor cu întîrziere pentru mișcările de bază nepermanente.

Într-un articol viitor vor fi prezentate unele procedee analitice de evaluare a întîrzierii admisibile, atît pentru mişcări permanente (în particular, pentru zborul imobil), cît şi pentru zborul de tranziţie.

Primită la redacţie la 28 decembrie 1961

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ВИСЕНИИ САМОЛЕТОВ ВЕРТИКАЛЬНОГО ВЗЛЕТА И ПОСАДКИ С АВТОМАТОМ СТАБИЛИЗАЦИИ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается возмущенное движение вокруг центра тяжести висящего самолета со взлетом и посадкой по вертикали, когда все составляющие вращения стабилизированы, в предположении принуждения летчиком параметров поступательного движения. Исследуется устойчивость такой динамической системы с учетом запаздывания, появляющегося при стабилизации. Приводится математическое моделирование задачи и излагается упрощенный операционный метод для определения области устойчивости в пространстве параметров.

ON THE STABILITY OF VTOL AIRCRAFTS WITH AUTOMATIC STABILIZER IN HOVERING FLIGHT

ABSTRACT

This paper considers the disturbed motion of a VTOL aircraft about its c.g., all the components being automatically stabilized. It is assumed that the pilot constraints the kinematic parameters of the translation. The stability of this dynamical system is discussed, the lag of the automatic control system being taken into consideration. The mathematical treatment of the problem and a simplified operational procedure for determining the region of asymptotic stability in the space of parameters are presented.

BIBLIOGRAFIE

1. T. HAÇKER, *Despre calităţile de zbor ale avioanelor DAV parţial controlate (fără automat de stabilizare)* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **13**, *1* (1962), 31–47.
2. A. ХАЛАНАЙ, ***Теоремы устойчивости для систем с запаздывающим аргументом.*** Revue de Mathématiques pures et appliquées. Acad. R.P.R., **3**, *2*, 207–215 (1958).

3. E. PINNEY, *Ordinary Difference-Differential Equations*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1958, (Traducerea în limba rusă: ***Издательство иностранной литературы***, Москва, 1961).

4. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, ***Аэродинамика самолета***. Оборонгиз, 1957.

5. Л. Э. ЭЛЬСГОЛЬЦ, ***Качественные методы в математическом анализе***, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1955.

6. R. BELLMAN, *On the Existence and Boundedness of Solutions of Nonlinear Differential — Difference Equations*. Ann. Math, **50**, *2*, 347—355 (1949).

7. E. M. WRIGHT, *The Stability of Solutions of Non-Linear Differential Equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **63**, 18—26 (1950).

8. Н. Н. КРАСОВСКИЙ, ***Некоторые задачи теории устойчивости движения***. Физ. мат. изд., Москва, 1959.

STUDII

AEROMECANICĂ

UNELE APLICAȚII ALE IPOTEZEI DE ORGANIZARE STATISTICĂ LIMITATIVĂ A FLUCTUAȚIILOR DE ENERGIE TURBULENTĂ

DE

ȘT. N. SĂVULESCU

1. Această lucrare se ocupă de extinderea cîmpului de aplicații ale ipotezei de organizare limitativă a fluctuațiilor turbulente dintr-un domeniu de turbulență anizotropă, susținută de o distribuție de energie medie, ipoteză expusă în lucrările [1] și [2].

Fie acest domeniu format din straturi de fluid ce se scurg în medie paralel cu un perete rigid de la care, pe normala la straturi, să considerăm abscisa y, astfel că δ este valoarea lui y care mărginește domeniul de influență al peretelui. De asemenea, fie energia cinetică a unității de volum într-un punct $E(y) = \rho \dfrac{V^2}{2}$, unde ρ este densitatea, $V - \xi$ viteza cu componentele $U + u'$, $v + v'$, $w + w'$, astfel că $v \simeq w \simeq 0$ și să punem $E_e(\delta) = \rho_e \dfrac{V_e^2}{2}$, $\eta_0 = \dfrac{y}{\delta}$, $E_a(\eta_0) = \dfrac{E}{E_e} = \dfrac{\rho}{\rho_e}\left(\dfrac{V}{V_e}\right)^2 = \rho_a \cdot V_a^2 \cdot$ Avem $E_a(\eta_0) = \rho_a \cdot U_a^2$ pentru valoarea medie, iar pentru fluctuația de energie $e(\eta_0) = \left(\rho \dfrac{V^2}{2}\right)' \simeq \rho \cdot \left(\dfrac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}\right) + V \cdot [\overline{\rho' u'} + \overline{\rho' v'} + \overline{\rho' w'}]$, respectiv $e_a(\eta_0) = \dfrac{e}{e_{\max}}$ dacă neglijăm corelația $\overline{\rho' u'^2}$ și analogele.

Am arătat că efectuînd transformarea de scară

$$\eta = \frac{\int_0^{\eta_0} E_a(\eta_0)\, d\eta_0}{\int_0^1 E_a(\eta_0)\, d\eta_0} \tag{1}$$

obținem distribuția $\dot{E}_a(\eta)$, cu $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Semnificaţiile fizice atribuite acestei transformate erau :

a) Distribuţia $E_a^{\bullet}(\eta)$ reprezintă distribuţia limită a unităţilor individualizate de turbulenţă, din aproape întregul spectru de frecvenţe, astfel ca energia de interacţiune să fie minimă, adică un stadiu de organizare static limitativă a acestor vîrtejuri de turbulenţă, stadiu analog organizării statistice a interacţiunilor moleculare care conduc la viscozitatea obişnuită. Urmează de aici că dacă o scurgere are soluţii fizic stabile în mişcarea laminară, transformata distribuţiei adimensionalizate de energie laminară, efectuată cu ajutorul expresiei (1), va da distribuţia adimensionalizată de energie turbulentă, fără a lua în considerare influenţa rugozităţii, a numărului Reynolds, sau turbulenţa curentului exterior.

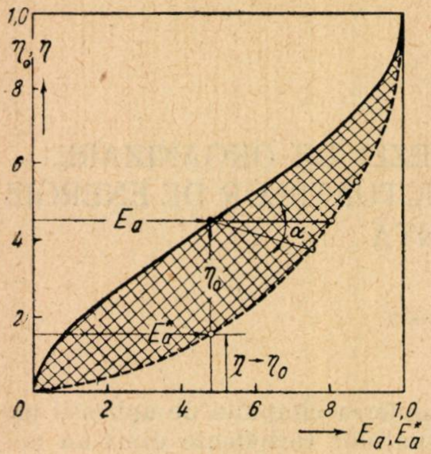


Fig. 1. – Distribuţia adimensională de energie medie, transformata sa şi banda cuprinsă între ele.

b) Banda energetică cuprinsă între distribuţiile adimensionalizate ale scalarilor care reprezintă energia medie şi transformata sa cuprinde proporţional tocmai distribuţia intensităţii (mediate) a fluctuaţiilor de energie turbulentă care este tot un scalar. Această bandă geometrică are un sens fizic intrinsec de cîmp de probabilităţi, astfel că fluctuaţia după o direcţie oarecare este aproximativ proporţională cu segmentul tăiat de această direcţie în bandă [2]. Cu alte cuvinte, momentul de ordinul 2 al vitezei de fluctuaţii după o direcţie este aproximativ proporţional cu segmentul suportat de această direcţie şi cuprins în bandă, adică avem

$$e_a(\eta_0) \simeq K \cdot [E_a^{\bullet}(\eta_0) - E_a(\eta_0)]. \qquad (2)$$

Se poate spune că aceste observaţii şi considerente au un grad de generalitate totuşi limitat (strat limită turbulent), că sînt primele aproximaţii ale unui fenomen complex, însă că pot reprezenta în acelaşi timp unul din mecanismele mişcării turbulente sau să constituie criteriul unui anume tip de turbulenţă. În lucrările precedente am dat exemple numeroase şi variate, însă numai din domeniul stratului limită turbulent complet dezvoltat. Vom da în lucrarea de faţă exemple aplicative care extind această ipoteză şi asupra altor tipuri de scurgeri, de asemenea, vom încerca să determinăm cu ajutorul aceleiaşi ipoteze momentele pare de ordin superior ale vitezei de fluctuaţie într-o scurgere turbulentă lîngă perete.

2. Ca o primă aplicaţie afirmăm că relaţia (2) constituie un criteriu de existenţă a scurgerilor cu mecanism intern turbulent pentru anumite

mişcări particulare. În acest sens să considerăm scurgerile în jurul numărului Richardson critic. În lucrarea [3] se obține expresia

$$R_f = \frac{\left(\frac{g}{T}\right)\overline{\theta v}}{\overline{uv}\,\frac{\partial U}{\partial y}} \simeq \frac{1}{2}\left[1-(1-KR_i)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{4}KR_i\left(1+\frac{KR_i}{4}+\ldots\right) \tag{3}$$

în cazul absenței termenului de transfer de energie prin radiație. În această expresie $\frac{g}{T}\overline{\theta v}$ reprezintă pierderea de energie datorită forțelor Arhimede ale fluctuațiilor de densitate, $\overline{uv}\,\frac{\partial U}{\partial y}$ reprezintă producerea de energie turbulentă prin transfer de la mişcarea medie, K este aproximativ o constantă, iar R_i are expresia

$$R_i = \frac{\frac{g}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{g}{C_p}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} < \frac{1}{K}, \tag{4}$$

unde T temperatura, g accelerația gravității, C_p căldura specifică la presiunea constantă, iar $\frac{\partial u}{\partial y}$ este derivata fluctuației de viteză în raport cu variabila din direcția normală curgerii medii.

Pentru un anume număr Richardson critic, proporțional după relația (3) cu R_i, avem un minim al raportului dintre pierderea de energie prin forțele Arhimede şi de viscozitate şi producerea de energie prin transfer de la mişcarea medie. Cînd acest număr este depăşit, mişcarea turbulentă dispare, nemaifiind susținută de producerea de energie. Un astfel de fenomen se observă în stratul limită turbulent de pe o placă al cărui perete este încălzit la o anumită distanță de la bordul de atac. Dezvoltarea normală a stratului limită în porțiunea inițială este urmată de o alterare frapantă a caracteristicilor sale în porțiunea finală ceea ce arată decăderea structurii turbulente a mişcării în alt tip de scurgere.

În figura 2 sînt arătate trei situații în această porțiune de strat limită [3]. S-a considerat $E_a = \rho_a u_a^2 \simeq \frac{u_a^2}{T_a}$ dat fiind că p variază puțin datorită variației densității. Într-adevăr, dacă scriem în prima aproximație $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g = -\frac{p}{T}\frac{g}{R}$, unde R este constanta gazelor perfecte şi integrăm, obținem

$$\frac{p}{p_e} = e^{\frac{g\delta}{RT_e}\int_1^{\eta_0}\frac{d\eta_0}{T_a}}, \tag{5}$$

unde e este indicele pentru exterior, δ este grosimea stratului $T_a = \frac{T}{T_e}$, $\eta_0 = \frac{y}{\delta}\cdot$ Avem $\left|\frac{g\delta}{RT_e}\right| \simeq 3{,}65 \times 10^{-6}$ pentru $\delta = 3\cdot 10^{-3}$ m $T_e = 288$°K

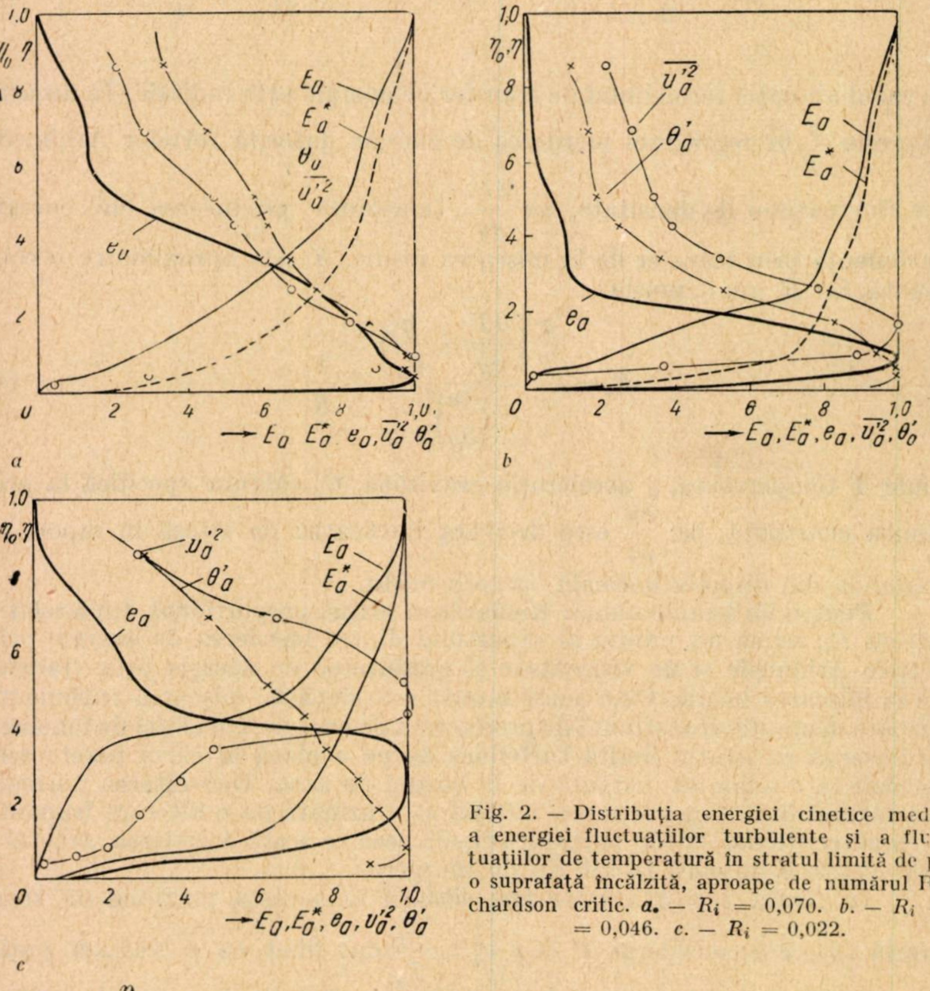


Fig. 2. — Distribuția energiei cinetice medii, a energiei fluctuațiilor turbulente și a fluctuațiilor de temperatură în stratul limită de pe o suprafață încălzită, aproape de numărul Richardson critic. *a.* — $R_i = 0{,}070$. *b.* — $R_i = 0{,}046$. *c.* — $R_i = 0{,}022$.

astfel că $\frac{p}{p_e} \simeq 1$. Transformarea (1) conduce la determinarea distribuției $E_a^*(\eta_0)$ și a distribuției $e_a = \frac{E_a^* - E_a}{|E_a^* - E_a|_{\max}}$.

Punctele experimentale arată distribuția mărimilor $\overline{u_a'^2} = \overline{u'^2}/|\overline{u'^2}|_{\max}$ și $\theta_a' = \sqrt{\overline{\theta'^2}}/|\sqrt{\overline{\theta'^2}}|_{\max}$ care sînt legate de banda energetică dintre cele două distribuții. Se observă clar că, în limitele erorilor experimentale provocate de dificultățile de lucru într-un astfel de domeniu precum și în limitele valabilității ipotezei de organizare statistică limitativă, proporționalitatea dintre distribuția fluctuațiilor de energie și mărimea e_a este în strînsă legătură cu dispariția caracterului turbulent al mișcării. Astfel pentru figura 2 *a*, la $R_i = 0{,}070$ se observă o bună respectare a ipotezei pe o porțiune de 80% din grosimea stratului limită, partea exterioară fiind evident în afara condițiilor teoretice ale ipotezei. În figura 2 *b* există diferențe sensibile între poziția maximelor lui θ_a, $\overline{u_a'^2}$ și e_a, însă alura este totuși respectată. Pentru figura 2 *c*, la $R_i = 0{,}022$ aceste diferențe sînt sensibil mari și mecanismul intern al mișcării nu mai este turbulent.

Extinzînd aplicabilitatea ipotezei de organizare statistică a fluctuațiilor turbulente și în cazul stratului limită cu număr Richardson critic, putem spune că simpla explorare cu tubul Pitot precum și cîteva puncte obținute cu aparatul de fir cald permit clar să se stabilească existența scurgerii turbulente, sau decăderea ei, fără a fi nevoie de calculul complicat al numărului Richardson.

3. Ca al doilea exemplu de aplicație a ipotezei de organizare statistică limitativă a fluctuațiilor de energie turbulentă vom examina determinarea aproximativă a caracteristicilor scurgerii turbulente între doi pereți rigizi în mișcare relativă. Fie cei doi pereți în mișcarea relativă din figura 3.

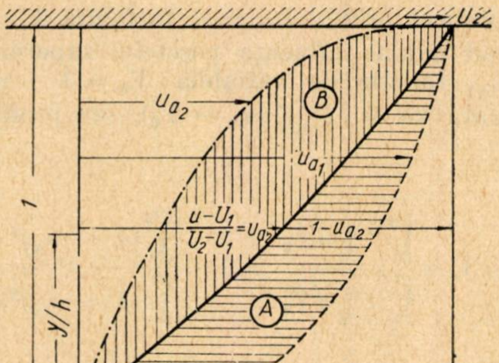


Fig. 3. — Distribuția adimensională de viteză în scurgerea laminară dintre doi pereți în mișcare relativă și transformatele acestei distribuții.

Viteza relativă a mișcării laminare, u_{a_l}, este astfel încît

$$|u_l|_{y=0} = 0, \quad |u_l|_{y=h} = U_2 - U_1 = u_{l_e} \neq 0$$

şi nu avem maxim al vitezei între cei doi pereţi. În figura 3 avem deci mărimea adimensională $u_{a_l} = u_l / u_{l_e} = f(\eta_0)$, $\eta_0 = \dfrac{y}{h}\cdot$

Pentru a obţine distribuţia mărimilor turbulente ne vom referi la semnificaţia transformatei (1) ca organizare statistic limitativă a fluctuaţiilor turbulente pentru realizarea unei macroizotropii asemănătoare izotropiei viscozităţii moleculare. Deci, aplicînd transformarea (1) distribuţiei de energie laminară obţinem distribuţia de energie medie turbulentă, ideală, fără influenţa rugozităţii, numărului Reynolds etc. Pentru cazul a doi pereţi vom considera separat influenţa relativă a celor doi pereţi, combinînd aditiv, în primă aproximaţie, aceste influenţe.

a) Considerînd numai influenţa peretelui inferior, avem distribuţia energiei în mişcarea laminară $u^2_{a_l}(\eta_0)$ şi distribuţia energiei în mişcarea turbulentă $(u^2_{a_l})^*$ $(\eta_1 \to \eta_0)$, deci profilul $u_{a_1} = (u_{a_l})^{**}$, unde

$$\eta_1 = \frac{\int_0^{\eta_0} u^2_{a_l}\, d\eta_0}{\int_0^1 u^2_{a_l}\, d\eta_0}, \tag{6}$$

acest profil fiind indicat prin – – – – – în figura 3.

b) Considerînd numai influenţa peretelui superior profilul laminar este $U_{a_l} = 1 - u_{a_l}$, funcţie de variabila $Y_0 = 1 - \eta_0$. Distribuţia de energie transformată va fi $(U^2_{a_l})^*$ $(\eta_2 \to Y_0)$, sau profilul $u_{a_2} = (U_{a_l})^{**}$, unde

$$\eta_2 = 1 - \frac{\int_0^{y_0} U^2_{a_l}\, dY_0}{\int_0^1 U^2_{a_l}\, dY_0} = 1 - \frac{\int_0^{\eta_0} (1 - u_{al})^2\, d\eta_0}{\int_1^0 (1 - u_{a_l})^2\, d\eta_0}, \tag{7}$$

acest profil fiind indicat prin –·–·–·–·– în figura 3.

Combinînd aditiv, în primă aproximaţie, cele două profile, avem profilul rezultant

$$u_{at} = C_1\, u_{a_1}(\eta_0) + C_2\, u_{a_2}(\eta_0), \tag{8}$$

cu condiţiile respectării debitului şi valorii la perete

$$\int_0^1 u_{at}\, d\eta_0 = \int_0^1 u_{al}\, d\eta_0 \tag{9}$$

$$1 = C_1 + C_2, \Leftarrow |\, u_{a_l} \,|_{\eta_0 = 1} = |\, u_{a1} \,|_{\eta_0 = 1} = |\, u_{a2} \,|_{\eta_0 = 1} = 1.$$

Se vor obţine uşor valorile

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\int_0^1 (u_{a_l} - u_{a_2})\, d\eta_0}{\int_0^1 (u_{a_1} - u_{a_2})\, d\eta_0} = \frac{\int_0^1 (\eta_2 - \eta_0)\, du_{a_l}}{\int_0^1 (\eta_2 - \eta_1)\, du_{a_l}} = \frac{\text{aria } B}{\text{aria } A + \text{aria } B}, \\ C_2 &= \frac{\int_0^1 (u_{a_1} - u_{a_l})\, d\eta_0}{\int_0^1 (u_{a_1} - u_{a_2})\, d\eta_0} = \frac{\int_0^1 (\eta_0 - \eta_1)\, du_{a_l}}{\int_0^1 (\eta_2 - \eta_1)\, du_{a_l}} = \frac{\text{aria } A}{\text{aria } A + \text{aria } B}, \end{aligned} \tag{10}$$

care se văd pe figura 3.

Ca aplicaţii concrete să considerăm scurgerea Couette şi cea dintre doi cilindri rotitori.

α) Pentru scurgerea Couette plană avem $U_2 = u_e$, $U_1 = 0$ şi deci $u_{a_l} = \eta_0$. Obţinem imediat $\eta_1 = \eta_0^3$ şi $\eta_2 = 3\,\eta_0 \left(1 - \eta_0 + \frac{1}{3}\eta_0^2\right)$. Cele două profile transformate sînt

$$u_{a_1} = \eta_1^{\frac{1}{3}} \rightarrow \eta_0^{\frac{1}{3}}, \quad u_{a_2} = 1 - (1 - \eta_2)^{\frac{1}{3}} \rightarrow 1 - (1 - \eta_0)^{\frac{1}{3}}. \tag{11}$$

Aplicînd condiţiile precedente se obţine $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ şi deci profilul turbulent

$$u_{a_t} = \frac{1}{2}\left[1 + \eta_0^{\frac{1}{3}} - (1 - \eta_0)^{\frac{1}{3}}\right]. \tag{12}$$

Acest profil reprezintă cazul ideal în care mişcarea laminară cunoscută, supusă perturbaţiilor, tinde către o nouă organizare internă, independent de parametrii externi obişnuiţi: rugozitate, număr Reynolds etc.

Este interesant de remarcat că acest profil se apropie atît ca expresie formală (12), cît şi ca valoare cantitativă, de cel dedus de Pai [4] şi de Munk [4] pe considerente cu totul deosebite între ele şi deosebite de lucrarea de faţă. Comparaţia cu datele experimentale din figura 4, date de Robertson [4] arată deosebiri importante, care însă se datoresc

— dezvoltării stratului limită pe cei doi pereţi,

— intervenţiei aerului suplimentar suflat între cei doi pereţi,

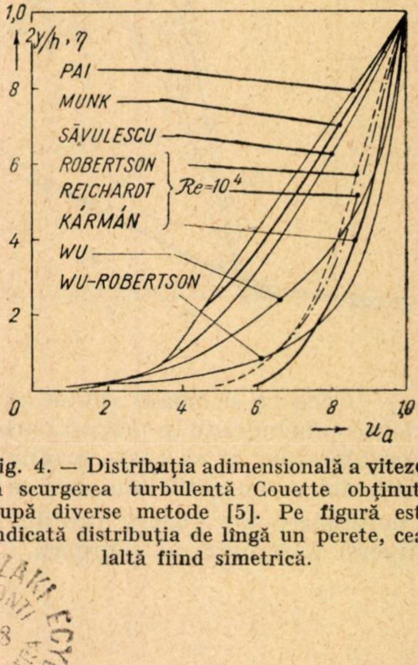
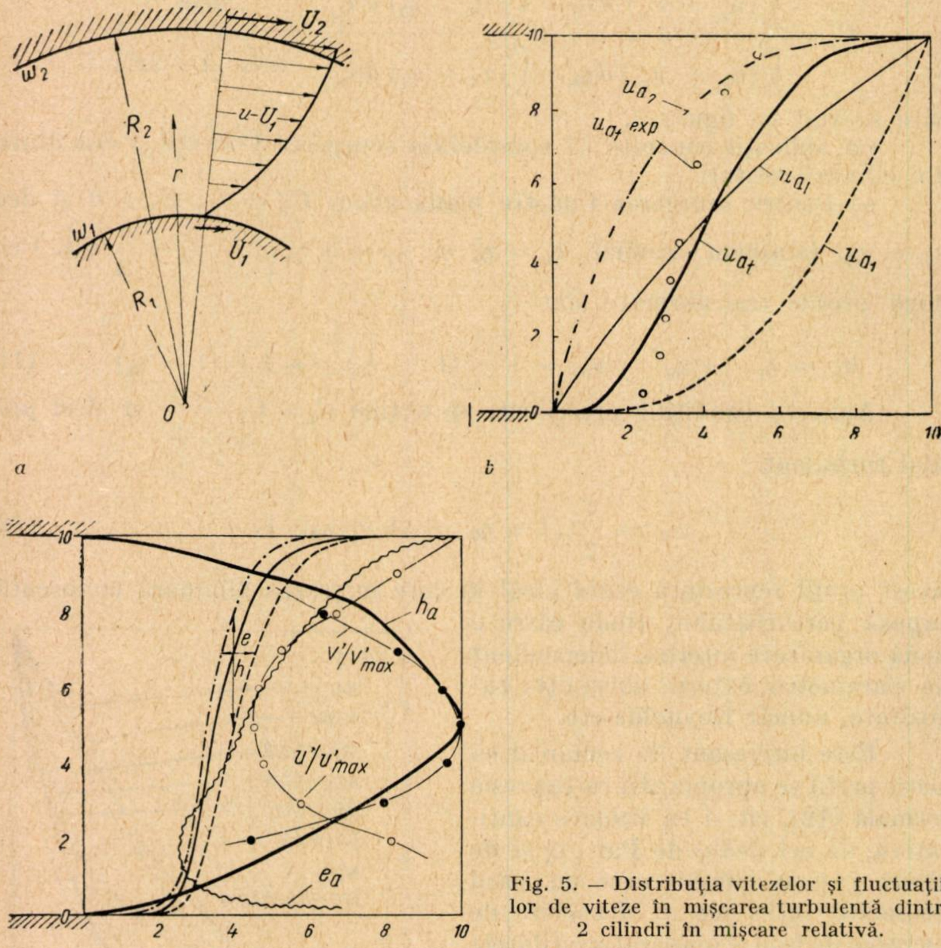


Fig. 4. — Distribuţia adimensională a vitezei în scurgerea turbulentă Couette obţinută după diverse metode [5]. Pe figură este indicată distribuţia de lîngă un perete, cealaltă fiind simetrică.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

— influenţii gradienţilor de presiune longitudinal, a neuniformităţii distanţei dintre pereţi şi a numărului Reynolds.

Transformări în continuare ale expresiei (12) dau profile apropiate de cele reale, dar dependenţa acestor transformări de condiţiile scurgerii rămîne necunoscută.



a

b

c

Fig. 5. — Distribuţia vitezelor şi fluctuaţiilor de viteze în mişcarea turbulentă dintre 2 cilindri în mişcare relativă.

Ceea ce se poate spune cu certitudine este că realizarea unor experienţe concludente în privinţa acestei mişcări simple se loveşte de dificultăţi considerabile, şi că toate profilele turbulente obţinute prin transformarea naturală a scurgerii laminare se află între cele două distribuţii u_{a_1} şi u_{a_2}. Combinarea lor pentru profilul rezultant rămîne de studiat, funcţie de diverşi parametri ai scurgerii.

β) Pentru mișcarea dintre doi cilindri coaxiali, conform figurii 5 *a*, avem soluția laminară cunoscută :

$$u = Ar + \frac{B}{r}, \tag{13}$$

cu condițiile $U_1 = \omega_1 R_1 = AR_1 + \frac{B}{R_1}$; $U_2 = \omega_2 R_2 = AR_2 + \frac{B}{R_2}$.

Condiția de extrem pentru u, adică $\frac{du}{dr} = 0$, conduce la determinarea valorii r_M, punctul unde u are un extrem, dat de

$$r_M^2 = \frac{U_2R_1 - U_1R_2}{U_1R_1 - U_2R_2} R_1R_2. \tag{14}$$

Ne interesează cazurile în care $R_2 < r_M < R_1$. Să introducem notațiile

$$C = \frac{(1-p)\,q}{1-pq^2}, \; p = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \; q = \frac{R_2}{R_1},$$

cu ajutorul cărora obținem $r_M^2 = -R_1 \frac{C}{q}$. Avem două situații

1) $U_2 > U_1$, pentru care obținem

$$u_a = \eta_0 \frac{1 + C\dfrac{q}{1 + (q-1)\,\eta_0}}{1 + C}, \tag{15}$$

unde

$$u_a = \frac{u - U_1}{U_2 - U_1}, \quad \eta_0 = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}.$$

2) $U_1 > U_2$, pentru care găsim

$$u_a = \eta_0 \frac{1 + C\dfrac{1}{q - (q-1)\,\eta_0}}{1 + C}, \tag{16}$$

unde

$$u_a = \frac{u - U_2}{U_1 - U_2}, \quad \eta_0 = \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}.$$

Cazul particular $U_1 = U_2 = U$ dă $r_M^2 = R_1R_2$ deci maxim al lui u între cei doi pereți și ca urmare două profile diferite.

Profilele (15) și (16) se pot transforma obținînd profilele turbulente corespunzătoare cazurilor laminare fundamentale. Ca exemplu particular să considerăm cazul cilindrului exterior în repaus $p = 0$, $q = 2$. Găsim $r_M^2 = -R_1^2$, deci nu avem maxim între cei doi pereți, așa că obținem distribuția vitezei laminare

$$u_{a_l} = \frac{1}{3}\eta_0 \frac{4-\eta_0}{2-\eta_0}, \quad \eta_0 = 2 - \frac{r}{R_1}. \tag{17}$$

Pornind de la această distribuție, cu ajutorul expresiilor (6) și (7) obținem relațiile de transformare sub forma

$$\eta_1 = \frac{1}{7}\left[-64 + \frac{48}{2-\eta_0} + 24\,(2-\eta_0) - (2-\eta_0)^3\right], \tag{18}$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{35 + 3\,(2-\eta_0) - \dfrac{48}{2-\eta_0} + 9\,(2-\eta_0)^2 + (2-\eta_0)^3 - 72 \ln (2-\eta_0)}{61 - 72 \ln 2}. \tag{19}$$

Cu ajutorul acestor relații au fost determinate în figura 5 *b* profilele $n_{a_1}(\eta_0)$ și $n_{a_2}(\eta_0)$, a căror expresie analitică este încă dificil de obținut. Conform formulelor (10) obținem constantele $C_1 = 0{,}423$, $C_2 = 0{,}577$ și deci profilul turbulent rezultat $u_{a_t} = C_1 u_{a_1} + C_2 u_{a_2}$. În figura 5 *b* este arătată comparația cu datele experimentale [5], pentru condiții care nu sînt legate de tranziția imediată de la scurgerea laminară. Deși deosebirile sînt mari, totuși alura și chiar valoarea distribuției sînt apropiate și în orice caz semnificative pentru acest mod teoretic de deducere a distribuției vitezei în mișcarea turbulentă. Este sigur că o cunoaștere mai profundă a interdependenței dintre transformarea utilizată și condițiile secundare ale scurgerii (număr Reynolds, rugozitate etc.), precum și o combinare mai exactă a efectelor celor doi pereți va duce la rezultate și mai apropiate de realitate.

Dar cel mai important rezultat experimental în sprijinul ipotezei acesteia de organizare statistică limitativă este distribuția fluctuațiilor de turbulență între cei doi pereți. Așa cum rezultă din banda cuprinsă între distribuția de viteză medie și transformata ei față de cei doi pereți se observă un maxim al fluctuației transversale către centru în timp ce fluctuația paralelă cu peretele are un minim spre centru. În același timp mărimea absolută a fluctuației transversale în centru, așa cum rezultă din bandă, este superioară mărimii fluctuației longitudinale.

Aceste distribuții de fluctuații precum și o indicație asupra situării maximului lor se găsesc clar verificate experimental în figura 5 *c*, unde s-a luat drept profil de viteze medii cel experimental obținut de Taylor [5], iar fluctuațiile turbulente cele obținute de Mac Phail [5], ambele pentru cilindrul interior rotitor. Trebuie să remarcăm că această corespondență între un profil de viteze medii dintr-o experiență și distribuția de fluctuații din altă experiență are un caracter ilustrativ însă cuprins în limita interpretărilor calitative. Nu posedăm date experimentale mai complete pentru evaluări cantitative.

Aceste distribuţii de fluctuaţii ca şi cele obţinute de Robertson [4] pentru scurgerea Couette plană arată de o parte rolul fizic al transformatei (1), iar pe de altă parte pot da viitoare indicaţii pentru naşterea turbulenţei în interiorul unui strat de fluid cu viteze relative între substraturile componente.

4. În sfîrşit, să arătăm a treia extindere aplicativă a ipotezei de organizare statistică limitativă asupra momentelor pare de ordin superior ale fluctuaţiei de viteze lîngă pereţi. Formal vom putea generaliza transformarea (1), scriind

$$\eta_s = \frac{\int_0^{\eta_0} u_a^{2s}\, d\eta_0}{\int_0^1 u_a^{2s}\, d\eta_0}, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

şi vom obţine profilul transformat $(u_a^{2s})^\star$ $(\eta_s \to \eta_0)$. Avem expresiile următoare:

$$\overline{w_a'^{2s}} \simeq \overline{u_a'^{2s}} \simeq \frac{(u_a^{2s})^\star - u_a^{2s}}{|(u_a^{2s})^\star - u_a^{2s}|_{\max}}, \tag{21}$$

$$\overline{v_a'^{2s}} \simeq \frac{\eta_0 - \eta_s}{|\eta_0 - \eta_s|_{\max}}, \tag{22}$$

care reprezintă repartiţiile adimensionale ale momentelor pare de diferite ordine ale fluctuaţiilor paralele cu peretele şi normale peretelui. Dacă, luăm ca exemplu particular profilul

$$u_a = \eta_0^n, \tag{23}$$

atunci obţinem

$$\eta_s = \eta_0^{1+2\,ns},$$

$$(u_a^{2s})^\star = \eta_s^{\frac{2\,ns}{1+2\,ns}} \to \eta_0^{\frac{2ns}{1+2ns}},$$

$$\overline{u_a'^{2s}} \simeq \overline{w_a'^{2s}} \simeq \frac{\eta_0^{\frac{2ns}{1+2ns}} \quad \eta_0^{2ns}}{\left|\eta_0^{\frac{2ns}{1+2ns}} - \eta_0^{2ns}\right|_{\max}}, \tag{24}$$

$$\overline{v_a'^{2s}} \simeq \frac{\eta_0 - \eta_0^{1+2ns}}{|\eta_0 - \eta_0^{1+2ns}|_{\max}}. \tag{25}$$

Maximul expresiei $\Delta_u = |\, \eta_0^{\frac{2ns}{1+2ns}} - \eta_0^{2ns} \,|$ este situat la

$$\eta_{0u_M} = (1 + 2ns)^{-\frac{(1+2ns)}{4n^2s^2}} \tag{26}$$

şi are valoarea

$$\Delta_{u_M} = 2ns\,(1 + 2ns)^{-\frac{1+2ns}{2ns}} = 2ns\;\eta_{0u_M}^{2ns}. \tag{27}$$

Variaţia acestor măsuri cu s arată o creştere continuă pentru n = const. Maximul expresiei $\Delta_v = |\,\eta_0 - \eta_0^{1+2ns}\,|$ este situat la

$$\eta_{0v_M} = (1 + 2ns)^{-\frac{1}{1+2ns}} = \eta_{0u_M}^{\frac{2ns}{1+2ns}} \tag{28}$$

şi are valoarea

$$\Delta_{v_M} = 2ns\,(1 + 2ns)^{-\frac{1+2ns}{2us}}, \tag{29}$$

aceeaşi ca şi Δ_{u_M}, dar situat în alt punct.

Să considerăm rapoartele

$$R_u\,(\eta_0\,, n, s_1\,, s_2) = \frac{\overline{u'^{2s_1}}}{(\overline{u'^{2s_2}})^{\frac{s_1}{s_2}}} \simeq \frac{\eta_0^{\frac{2ns_1}{1+2ns_1}} - \eta_0^{2ns_1}}{(\eta_0^{\frac{2ns_2}{1+2ns_2}} - \eta_0^{2ns_2})^{\frac{s_1}{s_2}}}, \tag{30}$$

$$R_v\,(\eta_0\,, n, s_1\,, s_2) = \frac{\overline{v'^{2s_1}}}{(\overline{v'^{2s_2}})^{\frac{s_1}{s_2}}} = \frac{\eta_0 - \eta_0^{1+2ns_1}}{(\eta_0 - \eta_0^{1+2ns_2})^{\frac{s_1}{s_2}}}. \tag{31}$$

Se observă că aceste rapoarte iau şi valori infinite pentru $\eta_0 \to 0$ sau $\eta_0 \to 1$, în orice caz prezintă în aceste puncte nedeterminări evidente. De asemenea, pentru $\frac{s_1}{s_2} > 1$, avem în general R_u, $R_v >> 1$. Aceste observaţii se verifică extrem de rapid luînd $0 < n < 1$ şi $s_1, s_2 = 1, 2, 3 \ldots$

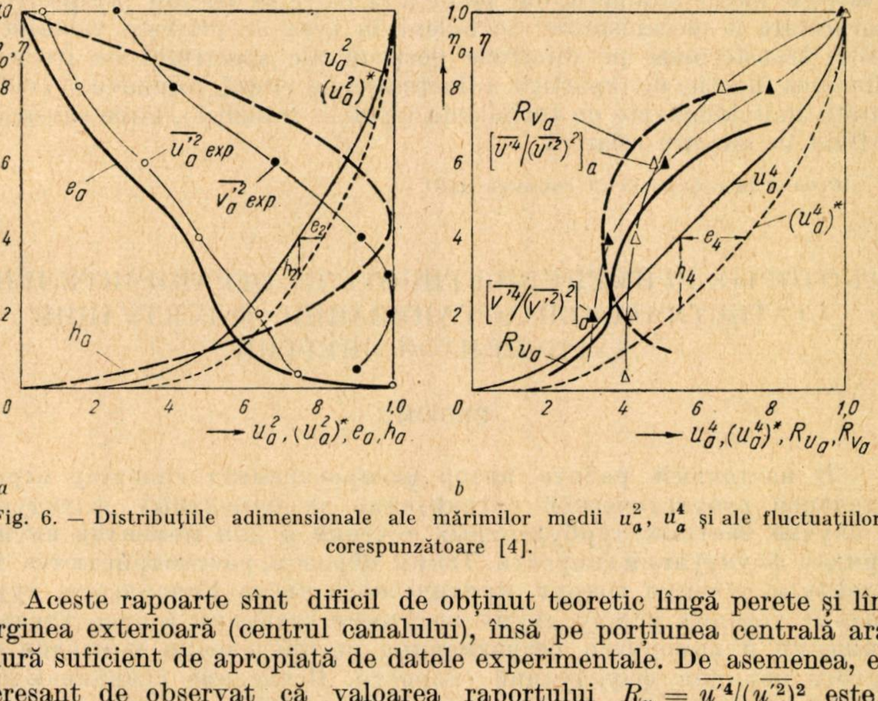
Pentru verificarea relaţiilor formale (21) şi (22) care dau momentele pare de ordin superior ale fluctuaţiilor de viteză dispunem de unele rezultate experimentale obţinute de Geneviève Comte-Bellot [6] într-un canal bidimensional cu pereţi paraleli. Deşi acest caz de scurgere nu respectă, ca stratul limită, condiţiile ipotezei noastre (fluctuaţia fiind mare în centrul canalului adică la marginea exterioară a stratului de fluid considerat), totuşi datele experimentale raportate în figura 6 permit unele constatări interesante.

— Astfel figura 6 *a* reprezintă, în mod obişnuit, distribuţiile adimensionale de energie medie şi fluctuaţii de energie turbulentă, adică momentele de ordinul 2 $(\overline{u'^2}, \overline{v'^2})$ pentru un anumit profil de viteze.

— În figura 6 *b* am reprezentat distribuţia adimensională a valorii medii u_a^4 şi a transformatei $(u_a^4)^*$, deci $s = 2$. Banda cuprinsă între aceste două distribuţii cuprinde pe $\overline{u'^4}$ şi $\overline{v'^4}$, $(\overline{w'^4} \sim \overline{u'^4})$ adică momentele de ordinul 4 al fluctuaţiilor de viteză, într-un mod oarecare, depinzînd de structura organizării statistice a fluctuațiilor turbulente. Dacă însă pornim cu ipoteza cea mai simplă a segmentelor cuprinse în bandă, paralel și respectiv normal pereților, atunci putem avea pe $\overline{u_a'^4}$ și $\overline{v_a'^4}$. Am reprezentat însă în figura 6 *b* rapoartele adimensionalizate :

$$R_{u_a}(\eta_0, 2, 1) = \frac{\overline{u'^4}}{(\overline{u'^2})^2} \Big/ \left[\frac{\overline{u'^4}}{(\overline{u'^2})^2}\right]_{\max},$$

$$R_{v_a}(\eta_0, 2, 1) = \frac{\overline{v'^4}}{(\overline{v'^2})^2} \Big/ \left[\frac{\overline{v'^4}}{(\overline{v'^2})^2}\right]_{\max}.$$



a *b*

Fig. 6. — Distribuțiile adimensionale ale mărimilor medii u_a^2, u_a^4 și ale fluctuațiilor corespunzătoare [4].

Aceste rapoarte sînt dificil de obținut teoretic lîngă perete și lîngă marginea exterioară (centrul canalului), însă pe porțiunea centrală arată o alură suficient de apropiată de datele experimentale. De asemenea, este interesant de observat că valoarea raportului $R_u = \overline{u'^4}/(\overline{u'^2})^2$ este în jurul lui 3 experimental, în timp ce simpla evaluare grafică l_4/e_2^2 dă valori în jurul lui 30 ÷ 40. De asemenea, valoarea raportului $R_v = \overline{v'^4}/(\overline{v'^2})^2$ este în jurul lui 1,6, în timp ce evaluarea grafică h_4/h_2^2 dă valori între 17 și 24, toate acestea bineînțeles pe porțiunea unde sînt aproximativ constante, și punînd pentru *e* și *h* valorile lor adimensionale.

O examinare atentă a rezultatelor experimentale mai arată că lîngă perete există, într-adevăr valori mari și nedeterminate bine experimental, așa cum arată rapoartele (30) și (31), însă aceasta se datorește și dificultăților de măsurare. În schimb, în centrul canalului, sîntem feriți de astfel de nedeterminări datorită faptului că fluctuațiile sînt nenule și mari, contrar situației de lîngă perete.

4. *Concluzii.* Expunerea descriptivă a unor exemple particulare de scurgere turbulentă în straturi a arătat că transformarea (1) este strîns legată de mecanismul intern de schimb de energie între unitățile individualizate de turbulență. Generalitatea acestei legături a fost verificată pentru cazuri de decădere a caracterului turbulent al mişcării (număr Richardson critic), pentru scurgeri între doi pereți rigizi în mişcare relativă şi pentru evaluarea aproximativă a momentelor pare de ordin superior ale fluctuației de viteză. Utilizarea acestei transformate are un dublu scop : pe de o parte, evaluarea rapidă, calitativă, a distribuțiilor de fluctuații, pornind de la distribuția de mărimi medii (deci criteriu de existență a scurgerilor turbulente) şi deducerea distribuțiilor de energie medie turbulentă din distribuții de energie medie laminară, dar pe de altă parte se deschid perspective de interpretare a mecanismului turbulent în ceea ce priveşte valabilitatea acestei transformate pe diferitele porțiuni ale spectrului de frecvențe, deducerea funcției de repartiție a fluctuației de viteză, formarea şi evoluția unității individualizate de turbulență (spot în tranziție), între substraturi de fluid în mişcare relativă.

Primită la redacție la 27 noiembrie 1961

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ГИПОТЕЗЫ ОГРАНИЧИТЕЛЬНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ТУРБУЛЕНТОЙ ЭНЕРГИИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор распространяет гипотезу ограничительной статистической организации турбулентных флуктуаций на случай частных турбулентных течений и для моментов высшего порядка флуктуации скорости. Таким образом, рассматриваются турбулентные течения вокруг критического числа Ричардсона, турбулентные течения между двумя жесткими стенками в относительном движении и выводятся безразмерные распределения моментов четвертого порядка флуктуаций скорости. Последние сравниваются с экспериментальными результатами в двухмерном канале с параллельными стенками.

Сравнение с существующими экспериментальными данными в каждом случае показывает, что гипотеза автора имеет широкое поле применений и тесно связана с механизмом турбулентного возмущения.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Безразмерное распределение средней энергии, его преобразованная и полоса, охваченная ими.

Рис. 2. — Распределение средней кинетической энергии, энергии турбулентных флуктуаций и флуктуаций температуры в пограничном слое на подог-

ретой поверхности вблизи критического числа Ричардсона: $a - R_i = 0{,}070$; $b - R_i = 0{,}46$; $R_i = 0{,}22$.

Рис. 3. — Безразмерное распределение скорости при ламинарном течении между двумя стенками в относительном движении и преобразованные этого распределения.

Рис. 4. — Безразмерное распределение скорости при турбулентном движении Куетта, полученное по различным методам [5]. На рисунке указано распределение вблизи одной стенки, другое распределение симметрично.

Рис. 5. — Распределение скорости и флуктуаций скорости при турбулентном движении между двумя цилиндрами в относительном движении.

Рис. 6. — Безразмерные распределения средних величин u_a^2, u_a^4 и соответствующих флуктуаций [4].

SOME APPLICATIONS OF THE HYPOTHESIS OF LIMITATIVE STATISTICAL ORGANIZATION OF TURBULENT ENERGY FLUCTUATIONS

ABSTRACT

This paper extends the hypothesis of limitative statistical organization of turbulent fluctuations occurring in the case of a particular turbulent flow to the high order moments of velocity fluctuations. Thus, the turbulent flow around the Richardson critical number and the turbulent flow between two rigid walls in relative motion are examined. The dimensionless distributions of the fourth order moments of velocity fluctuations are deduced and compared to the experimental results obtained in a two-dimensional channel with parallel walls.

A comparison with the experimental data existing in each case shows that author's hypothesis provides a large range of applications and is closely related to the mechanism of turbulent motion.

CAPTIONS

Fig. 1. — Dimensionless distribution of mean energy, its transform and the strip contained between them.

Fig. 2. — Distribution of the mean kinetic energy, of the turbulent fluctuation energy and of the temperature fluctuations in the boundary layer on a heated surface, close to the critical Richardson number: $a - R_i = 0.070$; $b - R_i = 0.046$; $c - R_i = 0.022$.

Fig. 3. — Dimensionless distribution of velocity in the laminar flow between two walls in relative motion and the transforms of this distribution.

Fig. 4. — Dimensionless distribution of velocity in the Couette turbulent flow, obtained with the aid of various methods [5]. The figure shows the distribution near the wall, the other distribution being symmetrical.

Fig. 5. — Distribution of velocities and velocity fluctuations in the turbulent motion between two co-axial cylinders in relative motion.

Fig. 6. — Dimensionless distribution of the mean magnitudes U_a^2, U_a^4 and of the corresponding fluctuations [4].

BIBLIOGRAFIE

1. ŞT. N. SĂVULESCU, *On a Hypothesis of limitative statistical Organization of Energy Fluctuations in the fully developed turbulent boudary-Layer*. Revue de mécanique appliquée, **V**, *6* (1960).

2. — *Distribuţia mărimilor turbulente în scurgere unidimensională prin conducte de secţiune oarecare*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *4* (1961).

3. A. A. TOWNSEND, *Turbulent Flow in a stability stratifield Atmosphere*. Journ. of Fluid Mechanics, Ianuary, 1958.

4. JAMES M. ROBERTSON, *A study of turbulent plane Couette Flow*. University of Illinois, T. & A. M. Report No. 141, 1959.

5. A. A. TOWNSEND, *The structure of turbulent Sheer Flow*. Cambridge University Press, 1956.

6. GENEVIÈVE COMTE BELLOT, *Coefficients d'aplatissement des fluctuations longitudinales de vitesse dans un tunel bidimensionnel à parois parallèles*. CRA S T 249, *22* (1959).

STUDII

AEROMECANICĂ

ELICOPTER CU STABILITATE PROPRIE ÎN ZBOR LA PUNCT FIX ¹)

DE

GH. RADO

NOTAŢII

a — distanța de la articulația de bătaie pînă la axa rotorului,
c — profunzimea palei rotorului,
c'_z — gradientul coeficientului de portanță al profilului palei,
c'_{za} — gradientul coeficientului de portanță al suprafețelor stabilizatoare,
c_m — coeficientul mediu de rezistență la înaintare a palei,
g — accelerația gravitației,
k_s — coeficientul de tracțiune $\left(k_s = \dfrac{S}{\dfrac{\rho}{2} F U^2}\right)$,
k_{sn} — componenta din planul rotorului a coeficientului de tracțiune,
l — distanța centrului de presiune al suprafeței stabilizatoare la centrul de greutate al elicopterului,
n — factorul de amplificare al gradientului coeficientului de portanță al suprafețelor stabilizatoare,
s — distanța de la centrul de greutate al elicopterului la discul rotorului,
v — viteza de deplasare a centrului rotorului,
w — viteza suflului rotorului,
z — numărul de pale,
F — aria discului rotorului,
F_c — forța centrifugă a unei pale,
G — greutatea elicopterului,

---

¹) Sinteză a lucrărilor [42], [43], [46], [47] prezentată la sesiunea științifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată, București, 4—7 iulie 1960.

I — momentul de inerţie al elicopterului faţă de axa transversală,
J_p — momentul de inerţie al unei pale în raport cu rădăcina ei,
M — momentul longitudinal,
M_c — momentul introdus prin intermediul comenzilor,
M_{ϑ_1} — $\dfrac{\partial M}{\partial \vartheta_1}$,
M_{η} — $\dfrac{\partial M}{\partial \eta}$,
$M_{\dot{\eta}}$ — $\dfrac{\partial M}{\partial \dot{\eta}}$,
M_v — $\dfrac{\partial M}{\partial v}$,
S — tracţiunea rotorului,
S_A — aria suprafeţei stabilizatoare,
S_n — forţa normală pe axul rotorului,
$S_{n\vartheta_1}$ — $\dfrac{\partial S_n}{\partial \vartheta_1}$,
$S_{n\eta}$ — $\dfrac{\partial S_n}{\partial \eta}$,
$S_{n\dot{\eta}}$ — $\dfrac{\partial S_n}{\partial \dot{\eta}}$,
S_{nv} — $\dfrac{\partial S_n}{\partial v}$,
U — viteza periferică,
ϑ — unghiul de incidenţă al palelor,
ϑ_0 — calajul mediu al palelor (faţă de axa de portanţă nulă),
ϑ_1 — amplitudinea periodic variabilă a unghiului de incidenţă; unghiul de înclinare al planului vîrfurilor palelor,
η — unghiul de rotire al elicopterului,
$\dot{\eta}$ — viteza de rotire,
$\ddot{\eta}$ — acceleraţia de rotire,
λ — pasul de înaintare,
ρ — densitatea aerului,
σ — soliditatea rotorului,
ψ — azimutul,
ω — viteza unghiulară a rotorului.

1. INTRODUCERE

Una dintre cele mai importante critici care se aduc calităţilor de zbor ale elicopterelor utilizate în prezent în practică este lipsa lor de stabilitate [1]—[7].

Deşi elicopterele nu au stabilitate proprie totuşi sînt utilizate în practică deoarece s-au găsit soluţii constructive care să ducă la realizarea de aparate pilotabile.

Elicopterele actuale nu au stabilitate proprie şi, o dată scoase din poziţia de echilibru de o perturbaţie oarecare, cu comenzile blocate, efectuează o serie de oscilaţii cu amplitudini crescătoare [8]—[15].

Cunoscînd parametrii de care depinde perioada de oscilaţie şi amplificarea oscilaţiilor, constructorii de elicoptere au reuşit să realizeze aparate care să aibă o perioadă de oscilaţie suficient de mare, astfel încît pilotul să poată interveni şi, prin acţionarea comenzilor, să menţină aparatul în poziţia normală [10]—[17].

S-au imaginat şi se folosesc în practică diferite dispozitive care îmbunătăţesc în oarecare măsură calităţile de zbor ale elicopterelor prin mărirea perioadei de oscilaţie şi micşorarea amplificării oscilaţiilor, fără însă a înlătura lipsa de stabilitate dinamică amintită şi care permit doar pilotului să intervină ceva mai rar cu comenzile pentru menţinerea poziţiei normale a aparatului [10], [14], [16], [18]. Pentru evitarea oboselii pilotului se folosesc şi piloţi automaţi care nu fac aparatul intrinsec stabil, ci doar efectuează mişcările necesare în mod automat, în locul pilotului [19]—[24].

Dacă pentru un anumit interval de viteze din jurul vitezei de croazieră s-au găsit mijloace de a se asigura stabilitatea dinamică a elicopterelor [10], [11], [16], [25], [26], în cazul vitezelor mici şi în special în zbor la punct fix nu există pînă în prezent nici un mijloc utilizabil în practică pentru asigurarea stabilităţii proprii a acestor aerodine.

Singurul elicopter care a avut stabilitate statică şi dinamică în zbor la punct fix, a fost elicopetrul imaginat şi realizat de inginerul maghiar Oszkàr Asboth. Stabilitatea acestui tip de elicopter a fost dovedită atît teoretic [27], [28] cît şi experimental cu aparatele construite la Budapesta, între anii 1928 şi 1931 [29]—[34].

Principial, stabilitatea acestui tip de elicopter a fost obţinută [35] prin plasarea în suflul rotorului cu încărcare mare, a unor suprafeţe stabilizatoare verticale, convenabil dispuse şi dimensionate. Centrul de presiune al acestor suprafeţe fiind situat sub centrul de greutate al aparatului, în caz de oscilaţii sau glisări, pe suprafeţele stabilizatoare iau naştere forţe aerodinamice, care, în raport cu centrul de greutate produc momente de redresare. Cu toate că acest tip de elicopter a dovedit şi stabilitate dinamică în zbor la punct fix, totuşi nu au fost realizate decît cîteva aparate experimentale. S-a renunţat la obţinerea stabilităţii în zbor la punct fix prin dispunerea de suprafeţe stabilizatoare în suflul rotorului, deoarece aceste suprafeţe stabilizatoare nu sînt eficace decît numai în cazul cînd încărcarea rotorului este mare şi deci viteza curentului de aer dat de suflul rotorului este suficient de mare [36], [37].

Pentru securitatea ocupanţilor aparatului se impune însă la toate elicopterele ca, în caz de pană de motor, rotorul să poată fi pus în autorotaţie şi în acest fel să devină posibilă revenirea la sol, în zbor planat, ca un autogir planor, cu viteză descendentă acceptabilă (suficient de mică).

Se știe însă că este foarte greu de asigurat autorotația rotoarelor cu încărcare mare [39], [40], [41]. Chiar dacă se face abstracție de această dificultate, viteza de planare și viteza descendentă ar fi inadmisibil de mare pentru o aterizare forțată.

Or, la elicopterele cu rotoare cu încărcare suficient de mică pentru a se putea obține, în caz de pană la motor, autorotație cu o viteză de planare și o viteză descendentă acceptabilă pentru aterizări forțate, viteza suflului rotorului este atît de mică încît un sistem de suprafețe stabilizatoare ca cele menționate nu poate asigura stabilitatea, chiar dacă aria lor se mărește în limitele posibile. Aceste suprafețe stabilizatoare trebuind să rămînă tot timpul în suflul rotorului nu pot fi mărite oricît.

Se poate demonstra ușor că se poate obține un elicopter stabil în zbor la punct fix, fără dezavantajele amintite ale elicopterului Asboth cu suprafețe stabilizatoare obișnuite [1]), înlocuindu-se acestea cu suprafețe stabilizatoare cu c'_{za} mai mare, avînd aceeași arie, dar care pot da, în anumite limite, o reacțiune aerodinamică de n ori mai mare, respectiv o pantă a coeficientului de portanță în funcție de incidență de n ori mai mare decît în cazul suprafețelor stabilizatoare obișnuite. c'_{za} al suprafețelor stabilizatoare poate fi mărită înzestrîndu-le cu sisteme sau dispozitive pentru controlul circulației sau pentru controlul stratului limită, or utilizînd suprafețe stabilizatoare care își pot mări autoreglabil unghiul dintre axa lor de portanță nulă și direcția curentului incident, realizate pe principiul ampenajelor de tip *autopter* [44], [45], or o combinație între aceste mijloace.

Suprafețele stabilizatoare cu c'_{za} mai mare se dispun la elicopter în așa fel încît în caz de oscilații sau glisări ale aparatului, pentru asigurarea stabilității longitudinale să poată da naștere unei sau unor forțe paralele cu axa longitudinală a elicopterului, iar pentru asigurarea stabilității laterale să poată da naștere unei sau unor forțe paralele cu axa transversală a elicopterului (fig. 3).

2. FORȚELE AERODINAMICE PE ROTOR ȘI MOMENTELE ACESTOR FORȚE ÎN RAPORT CU CENTRUL DE GREUTATE

Pentru stabilirea metodei de calcul, în cele ce urmează, vom prezenta cazul mai simplu al unui elicopter cu două rotoare coaxiale contrarotative, cu pale articulate.

2.1. Forțele aerodinamice, la rotor s-au determinat cu metoda și ipotezele folosite de K. Hohenemser în lucrarea [37].

Distanța dintre rotoare s-a considerat neglijabilă. Rotoarele fiind contrarotative, stabilitatea longitudinală și cea laterală pot fi studiate separat [10], [16]. Studiul se limitează la oscilații mici și se neglijează patratul vitezelor față de vitezele însăși. În caz că rotoarele sînt suflate lateral, în primă aproximație tracțiunea lor poate fi considerată invariabilă așa că nu există mișcări normale pe traiectorie. Mișcările longitudinale ale elicopterului se compun deci, în aceste ipoteze, doar din mișcări orizontale și rotații în jurul axei transversale.

---

[1]) Înțelegem prin termenul *obișnuite*, aripile sau suprafețele stabilizatoare ale majorității avioanelor clasice, fără nici un fel de dispozitive de hipersustentație.

S-au utilizat ecuațiile simplificate ale lui Glauert, valabile în cazul unui rotor cu pale dreptunghiulare netorsionate, într-un curent incident făcînd un unghi mic cu planul vîrfurilor palelor și în ipoteza că momentele de ruliu și de tangaj ale rotorului sînt compensate prin variația ciclică a pasului. La determinarea forțelor aerodinamice și masice pe pale s-a făcut ipoteza că planul vîrfurilor palelor nu-și schimbă poziția față de fuzelaj în timpul mișcărilor aparatului. Variația efectivă a înclinării planului vîrfurilor palelor față de axa fuzelajului se calculează în ipoteza că forțele aerodinamice și masice pe pale sînt staționare, adică mișcările aparatului sînt suficient de lente ca să se poată considera că elicopterul trece aproximativ printr-o succesiune de stări staționare. Exemplele numerice calculate cu formule mai exacte arată că ipotezele simplificatoare admise nu afectează sensibil rezultatele și sînt deci practic utilizabile [37].

Convențiile cu privire la semne sînt indicate în figura 1.

Variația ciclică a incidenței palelor este dată, în primă aproximație, de relația

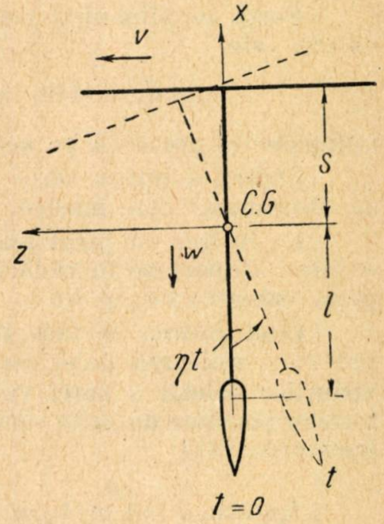


Fig. 1. — Schema de principiu a dispunerii unei suprafețe stabilizatoare în suflul rotorului.

$$\vartheta = \vartheta_0 - \vartheta_1 \sin \psi, \tag{1}$$

parametrul ϑ_1 putînd fi aproximat cu relația [37], [38]

$$\vartheta_1 = 2\vartheta_0\lambda. \tag{2}$$

Dacă palele sînt astfel articulate de butuc, încît în timpul mișcărilor de bătaie incidența lor nu variază, planul vîrfurilor palelor se înclină cu unghiul ϑ_1. Deoarece s-a presupus că elicopterul are două rotoare coaxiale contrarotative, se poate considera că înclinarea laterală a planului vîrfurilor palelor este nulă.

Unghiul ϑ_1 fiind mic, forța aerodinamică perpendiculară pe axul rotorului poate fi considerată ca fiind suma forței $S\vartheta_1$, datorită înclinării planului rotorului și a componentei din planul rotorului a tracțiunii $S\frac{k_{sn}}{k_s}$.

Valoarea coeficientului k_{sn} rezultă din relația $\frac{k_{sn}}{2\sigma} \approx \lambda \frac{c_m}{4}$ [38]. Cum $\frac{k_s}{2\sigma}$ variază între limite relativ strînse la elicopterele în serviciu, cu o bună aproximație se poate lua $\frac{k_s}{2\sigma} = 0{,}09$. De asemenea, $c_m \approx 0{,}016$ [37]. Rezultă că

$$\frac{k_{sn}}{k_s} = 0{,}044\ \lambda. \tag{3}$$

Forța aerodinamică perpendiculară pe axul rotorului, ținînd seama de (2), este

$$S_n = S(\vartheta_1 + 0{,}044\lambda) = S\lambda(2\vartheta_0 + 0{,}044). \tag{4}$$

Componenta greutății pe aceeași direcție este $G\eta$, iar $S_{n\eta} = -G$.

Pentru a putea scrie ecuațiile de mișcare, ca forțe mai rămîn de determinat cele masice.

La rotirea în jurul axei transversale, iau naștere momente giroscopice. Raportate la rădăcina palei aceste momente au, pentru fiecare pală, valoarea $2J_p\dot{\eta}\omega \sin \psi$.

Cînd rotirea se face în sensul unui picaj, momentele giroscopice provoacă ridicarea palei care avansează. Rezultă o înclinare a planului vîrfurilor palelor a cărei valoare se poate determina egalînd momentul forțelor portante datorite variației $\vartheta_1 \sin \psi$ a incidenței palelor cu momentul giroscopic [37]

$$2J_p\dot{\eta}\omega \sin \psi = \int_0^R c_z' \,\vartheta_1 \sin \psi U^2 \frac{\rho}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2 x c\, dx = c_z' \,\vartheta_1 U^2 \frac{\rho}{2}\,\frac{R^2}{4} c \sin \psi, \tag{5}$$

$$\vartheta_1 = \frac{16\, J_p \dot{\alpha}}{c_z' \,\omega \rho R^4 c}. \tag{6}$$

Din (4), utilizînd relația (6) se obține ușor

$$S_{n\dot{\eta}} = S_{n\vartheta_1} \frac{\vartheta_1}{\dot{\eta}} = G \frac{16\, J_p}{c_z' \,\omega \rho R^4 c}. \tag{7}$$

Din (4), punînd $S = G$ și $\lambda = \frac{v}{U}$ se obține

$$S_{nv} = \frac{G}{U}(2\vartheta_0 + 0{,}044). \tag{8}$$

2.2 Pentru a putea scrie ecuațiile de mișcare mai rămîn de determinat momentele.

Datorită înclinării ϑ_1 a planului vîrfurilor palelor față de planul normal pe axa rotorului, fiecare pală dă naștere unui moment $F_c\vartheta_1 a \cos \psi$. Asupra întregului elicopter acționează în acest caz momentul longitudinal $F_c\, \vartheta_1 a \cos^2\psi$ dat de fiecare pală. Partea staționară a momentelor longitudinale ale tuturor palelor se însumează astfel încît din cauza înclinării planului vîrfurilor palelor se obține, în raport cu axa transversală ce trece prin centrul de greutate al elicopterului, momentul de cabraj [37]

$$M_1 = \vartheta_1 \left(Ss + F_c \frac{a}{2} z \right) = 2\,\vartheta_0 \lambda \left(Ss + F_c \frac{a}{2} z \right). \qquad (9)$$

Ținînd seama de (3), componenta din planul rotorului a tracțiunii dă în raport cu axa transversală ce trece prin centrul de greutate al elicopterului momentul [37]

$$M_2 = Ss \frac{k_{sn}}{k_s} = 0{,}044 \; Ss\lambda. \qquad (10)$$

Momentul longitudinal al componentei greutății este nul.

Pentru simplificare, spre deosebire de ipotezele din [37], s-a presupus că centrul de presiune coincide pe toată lungimea palelor cu centrul de greutate, ceea ce de altfel se și realizează prin măsuri constructive potrivite la foarte multe dintre elicopterele utilizate în practică.

Rezultă că momentul longitudinal, ținînd seama de (9) și (10) și punînd $S = G$ și $\lambda = \dfrac{v}{U}$ este

$$M = M_1 + M_2 = 2\,\vartheta_0 \frac{v}{U} \left(Gs + F_c \frac{a}{2} z \right) + 0{,}044 \frac{Gs}{U}. \qquad (11)$$

Din (11) se obține imediat

$$M_v = \frac{2\,\vartheta_0}{U} \left(Gs + F_c \frac{a}{2} z \right) + 0{,}044 \frac{Gs}{U}, \qquad (12)$$

iar din (6) și (9)

$$M_{\dot\eta} = \frac{16\, J_n}{c_z' \,\omega R^4 \rho c} \left(Gs + F_c \frac{a}{2} z \right). \qquad (13)$$

3. FORȚELE AERODINAMICE PE SUPRAFEȚELE STABILIZATOARE ȘI MOMENTELE ACESTOR FORȚE ÎN RAPORT CU CENTRUL DE GREUTATE

Forțele aerodinamice pe suprafețele stabilizatoare presupuse ca avînd profil biconvex simetric s-au determinat în ipotezele din [28].

S-a presupus că suprafețele stabilizatoare se găsesc totdeauna în interiorul suflului rotorului, chiar dacă suflul rotorului este ușor deviat din cauza mișcărilor laterale ale elicopterului.

Dacă elicopterul se deplasează cu viteza v în direcție perpendiculară pe suprafața stabilizatoare, atunci aerul ce trece prin rotor capătă o componentă v perpendiculară pe direcția vitezei w. În acest caz pe suprafața stabilizatoare normală pe viteza v ia naștere o forță aerodinamică a cărei mărime este

$$P_1 = -\frac{\rho}{2} w^2 S_A c'_{za} n \frac{v}{w}. \tag{14}$$

Forța aerodinamică datorită rotirii aparatului cu unghiul η a fost determinată precum urmează.

Masa de aer care pleacă la timpul $t = 0$ de la rotor vertical în jos, ajunge la suprafața stabilizatoare după $t = \frac{l+s}{w}$ secunde. În acest timp suprafața stabilizatoare s-a înclinat cu unghiul $\dot{\eta} t = \frac{\dot{\eta}(l+s)}{w}$.

Suprafața stabilizatoare se mișcă însă cu viteza $\dot{\eta} l$ pe direcția axei z, prin suflul rotorului, astfel încît incidența rezultantă are valoarea $\frac{l+s}{w}\dot{\eta} + \frac{l}{w}\dot{\eta} = \frac{2l+s}{w}\dot{\eta}$. Pe suprafața stabilizatoare ia naștere din această cauză o forță aerodinamică

$$P_2 = \frac{\rho}{2} w^2 S_A c'_{za} n \frac{2l+s}{w} \dot{\eta}. \tag{15}$$

Momentele în raport cu centrul de greutate al acestor forțe vor fi

$$M_1 = -P_1 l; \qquad M_2 = -P_2 l \tag{16}$$

și deci

$$M_A = -l(P_1 + P_2). \tag{17}$$

4. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Dacă se notează

$$F_A = \frac{\rho}{2} w c'_{za} S_A n, \tag{18}$$

atunci ecuațiile de mișcare ale elicopterului se pot scrie

$$\begin{aligned} m\dot{v} - ms\ddot{\eta} - \eta G + \dot{\eta} S_{n\dot{\eta}} + v S_{nv} + F_A v - F_A(2l+s)\dot{\eta} &= 0, \\ \ddot{\eta} J + \dot{\eta} M_{\dot{\eta}} + v M_v - F_A l v + F_A l(2l+s)\dot{\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Făcînd substituțiile

$$v = v_o e^{rt} \text{ și } \eta = \eta_o e^{rt},$$

obținem pentru v_0 și η_0 două ecuații liniare omogene. Dacă vom scrie determinantul coeficienților și-l egalăm cu zero, căpătăm următoarea ecuație caracteristică :

$$\begin{gathered} mJr^3 + [m M_{\dot\eta} + J S_{nv} + M_v ms + F_A(J + 2ml^2)]r^2 + \\ + \{(S_{nv} M_{\dot\eta} - M_v S_{n\dot\eta}) + F_A[M_v s + M_{\dot\eta} + (S_{nv} s + S_{n\dot\eta} + 2M_v)l + \\ + 2S_{nv} l^2]\} r + (M_v - F_A l) G = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Dacă vom nota coeficientul lui r^3 din ecuația de mai sus cu A, coeficientul lui r^2 cu B, coeficientul lui r cu C și termenul liber cu D, atunci condițiile ca aerodina să fie stabilă, adică mișcările sau oscilațiile lui să se amortizeze, este ca toți coeficienții ecuației (20) să fie pozitivi și discriminantul lui Routh să fie de asemenea pozitiv, adică

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \quad D > 0 \text{ și } BC - AD > 0. \tag{21}$$

5. EXEMPLE NUMERICE

În această lucrare nu vom face deocamdată o discuție generală a condițiilor de mai sus și ne vom mulțumi să arătăm, într-un caz concret și anume în cazul elicopterului din exemplul numeric prezentat de K. Hohenmeser în lucrarea [37], că este posibil să se îndeplinească condițiile de stabilitate.

Elicopterul din exemplul numeric mai sus amintit, are următoarele date :

$$G = 900 \text{ kg}, \qquad S_{nv} = 3{,}45, \qquad M_{\dot\eta} = 115,$$
$$J = 150 \text{ kgms}^2, \qquad M_v = 6{,}80,$$
$$s = 1{,}2 \text{ m}, \qquad S_{n\dot\eta} = 56{,}5.$$

Efectuînd calculele K. Hohenmeser arată în [37] că condițiile de stabilitate nu sînt îndeplinite, discriminantul lui Routh fiind negativ. Acest elicopter efectuează oscilații cu amplitudine crescătoare, perioada de oscilație fiind $T = 10{,}4$ s. Amplitudinea oscilațiilor crește de 5,2 ori la fiecare oscilație.

Dacă acest elicopter se prevede cu suprafețe stabilizatoare cu c'_{za} mai mare, de felul celor menționate ceva mai înainte, în cazul exemplului nostru numeric, condițiile [21] sînt :

$$\begin{aligned} A &= 13\,750 > 0, \\ B &= 11\,810 + F(150 + 183{,}5\; l^2) > 0, \\ C &= 13 + F(123 + 74{,}25\; l + 6{,}9\; l^2) > 0, \\ D &= 900\;\; (6{,}80 - F_A\; l) > 0, \\ BC - AD &= F_A^2(1\,265\; l^4 + 13\,650\; l^3 + 22\,570\; l^2) + F_A(84\,080\; l^2 + \\ &\quad + 13\,255\,000\; l + 1\,459\,950) - 83\,996\,470 > 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Efectuîndu-se calculele pentru l negativ (centrul de presiune al suprafețelor stabilizatoare deasupra centrului de greutate al aerodinei) se constată că F_A necesare pentru asigurarea stabilității sînt foarte mari, practic inutilizabile, astfel că în acest studiu nu ne vom ocupa decît de valorile pozitive ale lui l (centrul de presiune al suprafețelor stabilizatoare situat sub centrul de greutate al aparatului).

Din condiția $D > 0$ rezultă

$$F_A < \frac{6,80}{l}. \tag{23}$$

Pentru $l = 0$ condiția aceasta poate fi totdeauna satisfăcută. Valoarea maximă a lui l este limitată din motive practice, suprafețele stabilizatoare ne putînd fi montate la distanță prea mare sub centrul de greutate al aerodinei. Această distanță poate fi aproximată de la caz la caz. În exemplul nostru limităm la 0,50 m valoarea maximă a lui l.

Vom trasa curba de variație a lui F_A în funcție de l astfel încît să fie satisfăcute condițiile de stabilitate (pentru l cuprins între 0 și 0,5 m).

Reprezentarea grafică a acestor curbe o facem luînd F_A pe ordonată și l pe abscisă.

Condiția $D > 0$ ne duce la curba D din figura 2. Această condiție arată că aerodina noastră va fi stabilă pentru toate valorile lui F_A situate sub curba D.

Din condiția $B > 0$ rezultă

$$F_A < \frac{11\,810}{150 + 183,5\, l^2}. \tag{24}$$

Pentru l variind între 0 și 0,5 această condiție ne duce la curba B (fig. 2). Aerodina va fi stabilă pentru toate valorile lui F_A situate sub curba B.

Din condiția $C > 0$ rezultă

$$F_A > \frac{-13}{123 + 74,25\, l + 6,9\, l^2}. \tag{25}$$

Pentru l variind între 0 și 0,5 rezultă o curbă situată sub axa absciselor. Pentru toate valorile mai mari decît cele corespunzătoare punctelor de pe curbă, condiția de stabilitate este îndeplinită. F_A neputînd avea decît valori pozitive, toată regiunea situată deasupra axei absciselor satisface această condiție și de aceea curba C nici nu am mai reprezentat-o în figura 2.

Condiția $BC - AD > 0$ ne duce, după cum am văzut mai sus, la un polinom de gradul doi în raport cu F_A. Coeficientul lui F_A^2 fiind pozitiv, acest polinom va fi pozitiv pentru toate valorile dinafara rădăcinilor ecuației $BC - AD = 0$. Efectuînd calculele se găsește că ecuația are o rădăcină negativă, care nu ne interesează F_A neputînd avea decît valori pozitive și o rădăcină pozitivă. Rădăcinile pozitive ne permit trasarea curbei $BC - AD$ (fig. 2). Condiția de stabilitate este îndeplinită pentru toate valorile lui F_A situate deasupra curbei $BC - AD$.

Din toate condițiile de stabilitate rezultă, prin urmare, că acest elicopter, este stabil pentru l variind între 0 și 0,5 m pentru toate valorile lui F_A cuprinse în zona hașurată din figura 2.

Avînd în vedere că viteza suflului rotorului elicopterului din exemplul de calcul prezentat în [37] este de 11,3 m/s și dacă alegem $n = 3{,}3$ valoarea care se poate ușor obține fie cu suprafețe stabilizatoare realizate pe principiul ampenajelor autoptere, fie cu suprafețe stabilizatoare cu c'_{za} mărit prin una din mijloacele cunoscute de control al circulației sau al stratului limită, calculele simple arătînd că în acest din urmă caz nu este nevoie decît de cîteva procente din puterea instalată, fie printr-o combinație dintre aceste mijloace și, presupunînd că $c'_{za} = 3{,}5$, rezultă că $F_A = 8{,}15$. Dacă vom alege pentru exemplificare $l = 0{,}5$ și $S_A = 1{,}445$ m² ($F_A = 11{,}777$), ecuația caracteristică va fi

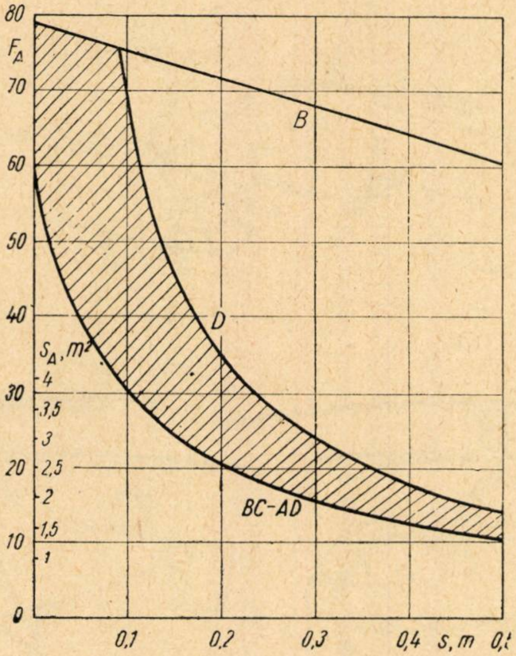


Fig. 2. — Domeniul de stabilitate în zbor la punct fix.

$$13\,750\, r^3 + 14\,120\, r^2 + 1\,913\, r + 820 = 0. \qquad (26)$$

Rădăcinile complexe ale acestei ecuații sînt

$$-\,0{,}0375 \pm 0{,}21\, i. \qquad (27)$$

Aparatul scos din poziția de echilibru de o mică perturbație va oscila cu frecvența

$$\nu = 0{,}210. \qquad (28)$$

Durata unei perioade va fi

$$T = \frac{2\pi}{0{,}21} = 30 \text{ s} \tag{29}$$

şi amortizarea

$$\delta = -\,0{,}0375 \text{ 1/s}. \tag{30}$$

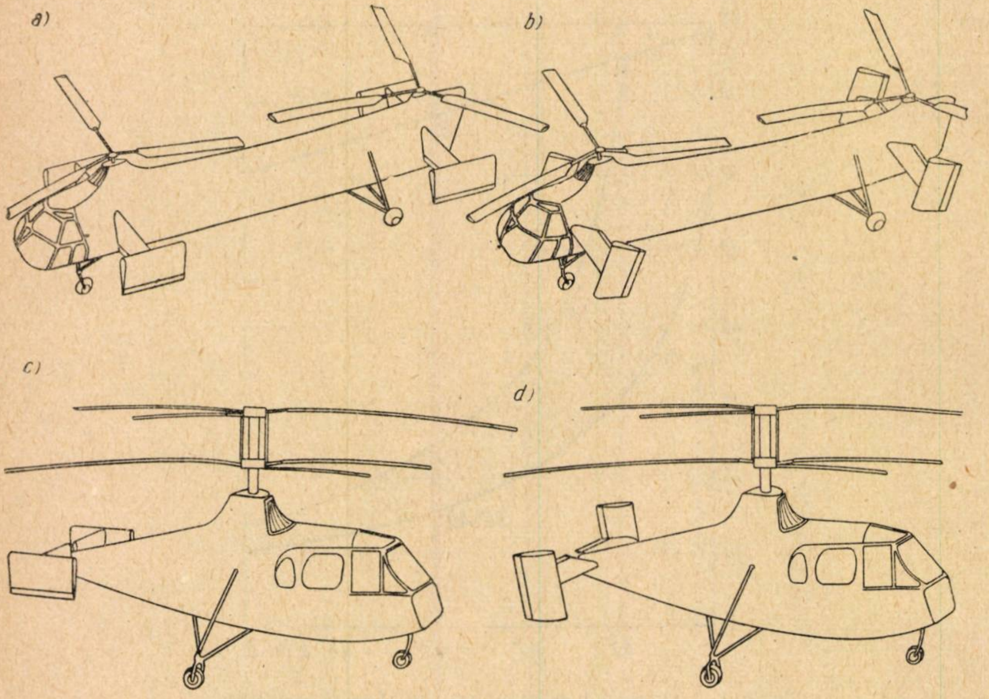


Fig. 3. — Modul de dispunere a suprafeţelor stabilizatoare în cazul unui elicopter cu două rotoare coaxiale contrarotative şi al unui elicopter cu două rotoare în tandem : *a* şi *c* în zbor la punct fix ; *b* şi *d* în zbor de translaţie.

Amplitudinea oscilaţiilor scade deci în timpul unei perioade de

$$e^{-0{,}0375\cdot 30} = e^{-1{,}12} \approx 0{,}32628 \text{ ori}. \tag{31}$$

Constanta semiamplitudinii este deci

$$t_h = \frac{\ln 2}{\delta} = 18{,}4 \text{ s}. \tag{32}$$

În concluzie rezultă că un elicopter, iniţial instabil, cu perioada de oscilaţie de 10,4 s, amplitudinea oscilaţiilor crescînd de 5,2 ori la fiecare oscilaţie, devine dinamic stabil în zbor la punct fix prin adaptarea unor ampenaje cu c'_{za} mărit. În cazul exemplului studiat perioada de oscilaţie creşte la 30 s, iar amplitudinea scade la jumătate în 18,4 s.

Ne-am ocupat pînă acum de stabilitatea longitudinală.

Relațiile găsite sînt valabile și în cazul cînd v este viteza orizontală laterală și η unghiul de înclinare laterală a elicopterului în jurul axului longitudinal al aparatului. În acest caz J va fi momentul de inerție al aparatului în raport cu axa longitudinală.

În cazul elicopterelor birotoare coaxiale contrarotative, momentul de inerție în raport cu axa longitudinală fiind cam 1/3 din cel față de axa transversală a aparatului, se poate vedea ușor că stabilitatea laterală se va obține chiar mai ușor decît cea longitudinală. Principial calculele făcîndu-se absolut la fel ca și în cazul stabilității longitudinale, nu vom insista asupra lor.

Menționăm că suprafețele stabilizatoare care asigură stabilitatea dinamică în zbor la punct fix și care ar putea stînjeni aparatul în alte evoluții decît zborul la punct fix, spre exemplu prin rezistența la înaintare în zbor de translație, pot fi rotite astfel încît întotdeauna axa lor de portanță nulă să fie paralelă (în poziția mediană) cu rezultanta dintre viteza suflului rotorului și viteza de înaintare. În acest fel ele pot asigura stabilitatea și în noua evoluție fără să opună la înaintare o rezistență mai mare decît ampenajele obișnuite ale avioanelor (fig. 3). Studiul acestor situații depășește cadrul prezentului articol și va fi făcut cu altă ocazie.

6. CONSIDERAȚII PRIVIND MANIABILITATEA

Într-o primă aproximație vom examina maniabilitatea unui elicopter prevăzut cu suprafețe stabilizatoare — așa cum s-a arătat mai sus — utilizînd ipotezele și metoda expusă în [37].

Ne vom ocupa mai întîi de problema maniabilității longitudinale.

Momentul exterior (de cabraj sau de picaj) M_c creat prin acționarea comenzii, trebuie să compenseze momentul de inerție $\ddot{\eta}\, J$ al aparatului și momentul $\dot{\eta} M_{\dot{\eta}}$ de amortizare. $M_{\dot{\eta}}$ este dat de relația (13).

Unghiul de rotire η al aparatului în jurul axei sale transversale, datorit momentului M_c introdus prin intermediul comenzii, se determină, în ipotezele admise, cu ajutorul ecuației

$$\ddot{\eta}J + \dot{\eta}M_{\dot{\eta}} = M_c. \tag{33}$$

După cum rezultă din exemplul numeric citat în [37] se vede că, în cazul elicopterelor cu pale articulate, momentul de amortizare, deci momentul care se opune rotirilor în jurul axei transversale (sau longitudinale), chiar în zbor la punct fix, este relativ mare. În cazul acestui exemplu numeric, se vede ușor din relația (33) că un moment de 115 kgm ar da aparatului o mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă și egală cu 1 rad/s.

Presupunem că aparatul se află în echilibru în zbor la punct fix și pilotul acționînd comanda aplică aparatului, instantaneu, momentul M_c. Vom căuta soluția ecuației diferențiale (33) în această ipoteză.

Ecuația caracteristică este

$$r^2 + rM_{\dot{\eta}} = 0. \tag{34}$$

Rădăcinile acestei ecuații sînt $r_1 = 0$ și $r_2 = -\frac{M_{\dot{\eta}}}{J}$. Soluția generală a ecuației diferențiale omogene este

$$\eta = C_1 + C_2\, e^{-\frac{M_{\dot{\eta}}}{J} t}.$$

Soluția particulară $\eta^\star$ a ecuației (33) este

$$\eta^\star = \frac{M_c}{M_{\dot{\eta}}} t - \frac{M_c J}{M_{\dot{\eta}}^2}$$

și deci soluția generală a ecuației neomogene (33) este

$$\eta = C_1 + C_2 e^{-\frac{M_{\dot{\eta}}}{J} t} + \frac{M_c}{M_{\dot{\eta}}} t - \frac{M_c J}{M_{\dot{\eta}}^2}. \tag{35}$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale $t = 0$, $\eta = 0$ și $\dot{\eta} = 0$.
Rezultă

$$C_1 + C_2 = \frac{M_c J}{M_{\dot{\eta}}^2}, \tag{36}$$

$$\dot{\eta} = -\frac{M_{\dot{\eta}}}{J} C_2 e^{-\frac{M_{\dot{\eta}}}{J} t} + \frac{M_c}{M_{\dot{\eta}}}, \tag{37}$$

sau

$$C_2 = \frac{M_c}{M_{\dot{\eta}}} \frac{J}{M_{\dot{\eta}}} e^{\frac{M_{\dot{\eta}}}{J} t}. \tag{38}$$

Pentru $t = 0$

$$C_2 = \frac{M_c J}{M_{\dot{\eta}}^2}. \tag{39}$$

Din (36) și (39) rezultă $C_1 = 0$. În acest caz, soluția ecuației (33) va fi

$$\eta = \frac{M_c}{M_{\dot{\eta}}} t - \frac{J M_c}{M_{\dot{\eta}}^2}\left(1 - e^{-\frac{M_{\dot{\eta}}}{J} t}\right). \tag{40}$$

Dacă se presupune că $M_c = 10$ kgm, cu datele exemplului de calcul amintit mai sus ($M_{\dot{\eta}} = 115$, $J = 150$) după o secundă elicopterul se rotește cu unghiul $\eta = 1{,}5°$, după două secunde cu unghiul $\eta = 4{,}9°$ [37].

Dacă se caută să se îmbunătățească stabilitatea unui elicopter normal, spre exemplu, prin mărirea masei palelor, perioada de oscilație crește, de asemenea și amortizarea. Spre a ne face o idee cantitativă asupra lor să presupunem că elicopterului, din exemplul de calcul amintit mai sus, i se mărește momentul de inerție al palelor de 3,5 ori, iar forța centrifugă, crește de 3 ori. Un calcul simplu arată că perioada de oscilație crește de la 10,4 s la 15,7 s, iar amplitudinile cresc în timpul unei oscilații numai de 1,3 ori (față de 5,2 ori) [37].

Maniabilitatea acestui al doilea elicopter ar deveni însă mai proastă, aparatul ar răspunde mai greu la comenzi, ar deveni mai leneș. Pentru un același M_c=10kgm, ($M_{\dot{\eta}}$ în acest caz este circa 740) relația (40) ne duce la concluzia că după o secundă $\eta = 0{,}8^\circ$ după două secunde 1,6°.

La elicopterele normale, îmbunătățirea pe această cale a stabilității duce la o mare inerție în acțiunea comenzilor.

Este clar că pe cale teoretică este greu de precizat care sînt condițiile pentru a avea calități de zbor mai bune și în acest scop sînt necesare încercări sistematice în zbor.

Comparativ cu aceste date se poate însă demonstra că un elicopter prevăzut cu suprafețe stabilizatoare cu c'_{za} mărit, așa cum s-a arătat mai înainte, cu toate că are stabilitate proprie în zbor la punct fix, oscilațiile cauzate de o perturbație oarecare amortizîndu-se, totuși poate avea o maniabilitate superioară elicopterelor de pînă acum.

Vom cerceta comportarea unui asemenea elicopter în două ipoteze :

1. Suprafețele stabilizatoare nu sînt în legătură cu comenzile;
2. Suprafețele stabilizatoare sînt legate de comenzi și servesc în același timp și ca suprafețe de comandă.

În ipoteza 1, la momentul $M_{\dot{\eta}}$ de amortizare, se adaugă și momentul de amortizare datorit suprafețelor stabilizatoare.

S-a arătat ceva mai înainte că momentul forțelor aerodinamice pe suprafețele stabilizatoare în raport cu centrul de greutate al aparatului, datorit rotirii aparatului în jurul axei transversale este

$$M_2 = \frac{\rho}{2} w^2 S_A . c'_{za} \frac{2l + s}{w} \dot{\eta} n l,$$

sau ținînd seama de (18)

$$M_2 = F_A \, l \, \frac{2l + s}{w} \dot{\eta}.$$

Ținînd seama și de acest moment, ecuația de momente va fi

$$\ddot{\eta} J + \dot{\eta}\left(M_{\dot{\eta}} + F_A l \frac{2l + s}{w}\right) = M_c . \tag{41}$$

În mod analog ca și în cazul elicopterului obișnuit după calcule simple, se găsește că soluția ecuației (41) este

$$\eta = \frac{M_c}{M_{\dot{\eta}} + F_A l \dfrac{2l + s}{w}} t - \frac{J M_c}{\left[M_{\dot{\eta}} + F_A l \dfrac{2l + s}{w}\right]^2} \cdot \left[1 - e^{-\frac{M_{\dot{\eta}} + F_A l \frac{2l+s}{w}}{J} t}\right]. \tag{42}$$

În cazul exemplului de calcul de mai sus avem

$$M_{\dot\eta} = 115, \qquad F_A = 11{,}777,$$
$$l = 0{,}5 \text{ m}, \qquad s = 1{,}2 \text{ m}.$$
$$w = 11{,}3 \text{ m/s},$$

Dacă $M_c = 10$ kgm, înlocuind în relația (42) se găsește că în acest caz elicopterul se rotește după o secundă cu unghiul de 1,42 grade, iar după două secunde cu un unghi de 4,64°.

După cum se vede, suprafețele stabilizatoare introduc un moment de amortizare în plus, însă efectul lor este relativ mic și în cazul unui aceluiași M_c unghiul cu care se rotește aparatul este ceva mai mic decît în cazul elicopterului normal. Un asemenea aparat ar fi prin urmare și mai puțin maniabil decît elicopterul fără suprafețe stabilizatoare.

În ipoteza a 2-a, presupunînd că suprafețele stabilizatoare sînt în legătură cu tijele de comandă și devin deci și suprafețe de comandă, în ipoteza că acestea se brachează brusc și neglijînd momentul necesar bracării, ecuația (33) devine

$$\ddot\eta J + \dot\eta M_{\dot\eta} = M_c + M'_A, \tag{43}$$

unde

$$M'_A = \frac{\rho}{2} S_A w^2 c'_{za} n l \beta, \tag{44}$$

β fiind unghiul dintre direcția vitezei w și axa de portanță nulă a stabilizatorului bracat.

Cu datele amintite mai sus, și $c'_{za} = 3{,}5$, $n = 3{,}3$ și $S_A = 1{,}445$ m², $M'_A = 6{,}75\ \beta$.

Soluția ecuației diferențiale (43) se găsește, după un calcul simplu, analog cu cele precedente

$$\eta = \frac{M_c + M'_A}{M_{\dot\eta}} t - \frac{J(M_c + M'_A)}{M^2_{\dot\eta}} \left(1 - e^{-\frac{M_{\dot\eta}}{J} t}\right). \tag{45}$$

Pentru $M_c = 10$ chiar și numai în cazul unui bracaj al suprafeței stabilizatoare de 2°, unghiul de rotire al aparatului este de 1,31 ori mai mare, iar la un bracaj de 14°, de 2,8 ori mai mare decît al elicopterului obișnuit.

Calculul de mai sus, deși nu este exact, totuși demonstrează, în primă aproximație, că și din punctul de vedere al maniabilității, calitățile de zbor ale elicopterului cu suprafețe stabilizatoare cu c'_{za} mărit utilizate și ca suprafețe de comandă sînt superioare celor ale elicopterului obișnuit.

ANEXA

O METODĂ APROXIMATIVĂ PENTRU CALCULUL AMPENAJELOR AUTOPTERE

După cum se ştie, [44], [45] ampenajele autoptere (fig. A—1) constau dintr-un plan mobil p prevăzut la bordul de fugă cu un volet p_1. Planul poate pivota în jurul unui ax O care, atunci cînd ampenajul se găseşte în poziţie neutră, se află în spatele centrului de presiune. Dacă în această situaţie un curent de aer loveşte ampenajul, datorită momentului forţei aerodinamice în raport cu axul, planul se roteşte, voletul legat cinematic de ampenaj se brachează mărind curbura profilului şi centrul de presiune se deplasează înspre înapoi. Cînd centrul de presiune al ampenajului ajunge în dreptul axului, momentul devine nul, iar dacă trece de ax, momentul schimbă de sens. După cîteva oscilaţii amortizate sau după o mişcare aperiodică amortizată ansamblul ampenajului rămîne într-o poziţie în care axa lui de portanţă nulă face cu direcţia curentului incident un unghi de n ori mai mare decît unghiul iniţial de incidenţă. Din această cauză reacţiunea aerodinamică dată de un ampenaj autopter este de acelaşi sens cu cea a unui ampenaj fix, însă de n ori mai mare. Datorită reacţiunii aerodinamice mai mari rezultă posibilitatea de a reduce suprafaţa ampenajelor.

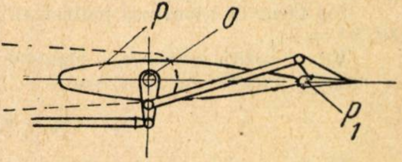


Fig. A—1. — Ampenaj tip ,,autopter".

Scopul acestei lucrări este stabilirea unei metode de calcul a acestor ampenaje în vederea folosirii lor la elicoptere ca suprafeţe stabilizatoare cu eficacitate mărită, plasate în suflul rotorului, în vederea asigurării stabilităţii dinamice în zbor la punct fix, aşa cum s-a arătat în studiul de mai sus.

Fie ampenajul autopter, cu profil simetric, reprezentat schematic în figura A— 1.

După cum se ştie, la profilele simetrice centrul de presiune se află la distanţa

$$d = \frac{c}{4} \tag{A.1}$$

de mijlocul profilului, c fiind coarda profilului.

Dacă un curent de aer loveşte ampenajul sub un unghi α_0, la începutul fenomenului, cînd planul nu s-a mişcat încă din poziţia mediană, centrul de presiune aflîndu-se în faţa axei în jurul căreia poate pivota planul, acesta se va roti cu un unghi α_1, astfel încît unghiul de atac devine

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1. \tag{A.2}$$

Cum însă voletul este astfel legat de plan încît el se brachează cu unghiul ϑ cînd planul se roteşte cu unghiul α_1, unghiul efectiv de atac creşte cu [48]

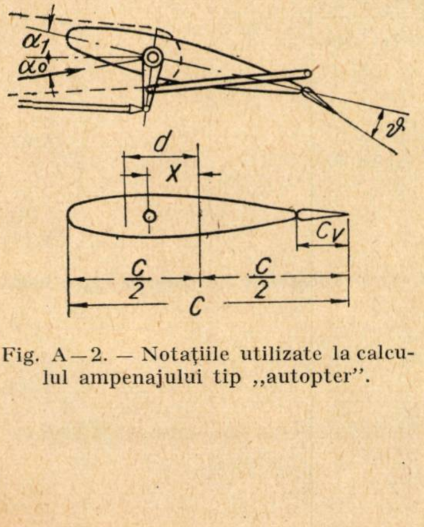


Fig. A—2. — Notaţiile utilizate la calculul ampenajului tip ,,autopter".

$$\beta^{*} = \frac{4\vartheta}{\pi}\sqrt{\tau}\left(1 - \frac{1}{6}\tau\right), \tag{A.3}$$

τ fiind raportul dintre coarda voletului c_v şi coarda profilului c.

Ţinînd seama de cele de mai sus, unghiul efectiv de atac (faţă de axa de portanţă nulă) va fi

$$\alpha_{ef} = \alpha_0 + \alpha_1 + \beta^{*} = \alpha + \beta^{*}. \tag{A.4}$$

Cu notaţiile din figura A—2, distanţa d_a a axului de rotaţie de centrul de presiune va fi

$$d_a = d - x. \tag{A.5}$$

Pentru ca după rotire, forţele aerodinamice să nu mai dea nici un moment în raport cu axa de rotaţie a planului, trebuie ca centrul de presiune să ajungă, după pivotarea planului, pînă la axa de rotaţie. În acest scop trebuie ca această axă să fie situată, faţă de poziţia iniţială a centrului de presiune, la o distanţă egală cu deplasarea înapoi a centrului de presiune.

Or, în funcţie de unghiurile α şi β^* distanţa centrului de presiune de mijlocul profilului este [48]

$$d_1 = \frac{c}{4}\,\frac{\alpha}{\alpha + \beta^*}. \qquad \text{(A.6)}$$

Pentru ca în momentul în care planul s-a rotit cu unghiul α_1, momentul forţei aerodinamice în raport cu axul să fie nul, trebuie deci ca axul să fie situat la distanţa $x = d_1$ de mijlocul profilului.

În primă aproximaţie, la funcţionarea ampenajului autopter este suficient să luăm în considerare doar forţa portantă, cu atît mai mult cu cît în prezentul calcul se face ipoteza că unghiurile α şi β^* sînt mici.

S-a făcut de asemenea ipoteza că legăturile cinematice ale voletului sînt astfel realizate încît $\beta^* = k\alpha_1$.

Într-o poziţie oarecare a planului, cînd acesta face cu poziţia iniţială mediană unghiul α_x, unghiul efectiv de atac va fi

$$\alpha_{ef} = \alpha_0 + \alpha_x + k\alpha_x = \alpha_0 + \alpha_x(1 + k). \qquad \text{(A.7)}$$

Forţa aerodinamică pe ampenaj în acest caz este

$$P\alpha x = \frac{c}{4}\, S_A\, w^2\, c'_{za}\, [\alpha_0 + \alpha_x(1 + k)]. \qquad \text{(A.8)}$$

Se vede uşor că distanţa centrului de presiune de axul ampenajului este dată de relaţia

$$d_{ax} = \frac{c}{4}\left[\frac{\alpha_0 + \alpha_x}{\alpha_0 + \alpha_x(1 + k)} - \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1(1 + k)}\right] \qquad \text{(A.9)}$$

sau, după calcule simple

$$d_{ax} = \frac{c}{4}\,\frac{\alpha_1 k(\alpha_1 - \alpha_x)}{[\alpha_0 + \alpha_x(1 + k)]\,[\alpha_0 + \alpha_1(1 + k)]}. \qquad \text{(A.10)}$$

Momentul forţei aerodinamice în raport cu axul ampenajului va fi dat în acest caz de relaţia

$$M_{ax} = P_{ax}\cdot d_{ax}, \qquad \text{(A.11)}$$

în care introducînd valorile date de relaţiile (A.8) şi (A.10) se capătă

$$M_{ax} = \frac{\rho}{8}\, S_A\, w^2 c'_{za}\, c\, \frac{\alpha_0 k(\alpha_1 - \alpha_x)}{\alpha_0 + \alpha_1(1 + k)}. \qquad \text{(A.12)}$$

Dacă se notează

$$K = \frac{\rho}{8}\, S_A\, w^2 c'_{za}\, c\, \frac{\alpha_0 k(\alpha_1 - \alpha_x)}{\alpha_0 + \alpha_1(1 + k)}, \qquad \text{(A.13)}$$

relaţia (A.12) devine

$$M_{ax} = K(\alpha_1 - \alpha_x). \qquad \text{(A.14)}$$

Dacă momentul de inerţie al ampenajului în raport cu axa de rotaţie se notează cu J_a, ecuaţia de mişcare va fi

$$J_a \frac{d^2\alpha_x}{dt^2} = M_{ax} = K(\alpha_1 - \alpha_x). \qquad \text{(A.15)}$$

Se vede uşor că soluţia acestei ecuaţii diferenţiale este

$$\alpha_x = C_1 \cos \sqrt{\frac{K}{J_a}}\, t + C_2 \sin \sqrt{\frac{K}{J_a}}\, t + \alpha_1 . \tag{A.16}$$

Viteza unghiulară va fi

$$\omega = \frac{d\alpha_x}{dt} = - C_1 \sqrt{\frac{K}{J_a}} \sin \sqrt{\frac{K}{J_a}}\, t + C_2 \sqrt{\frac{K}{J_a}} \cos \sqrt{\frac{K}{J_a}}\, t. \tag{A.17}$$

Pentru determinarea constantelor arbitrare C_1 şi C_2 vom considera condiţiile iniţiale

$$t = 0, \qquad \alpha_x = 0, \qquad \omega = 0. \tag{A.18}$$

Rezultă $C_1 = -\alpha_1$ şi $C_2 = 0$ şi deci

$$\alpha_x = \alpha_1 \left(1 - \cos \sqrt{\frac{K}{J_a}}\, t \right). \tag{A.19}$$

Relaţia (A.19) este valabilă numai în cazul cînd curentul loveşte ampenajul sub un unghi α_0 Să vedem ce se întîmplă însă în cazul cînd ampenajul este lovit de un curent de aer care face un alt unghi α_0'.

O dată ce prin construcţie s-a fixat poziţia axului în aşa fel încît în cazul cînd ampenajul lovit de un curent de aer sub unghiul α_0 se roteşte cu unghiul α_1, şi momentul forţei aerodinamice în raport cu axul este nul, pentru ca sub acţiunea unui alt curent de aer, făcînd cu ampenajul un unghi α_0' momentul forţei aerodinamice în raport cu axul să fie de asemenea nul, trebuie ca la o rotire a ampenajului cu un unghi α_1' centrul de presiune să se găsească chiar în dreptul axului. Dacă notăm cu d_1' distanţa de la mijlocul profilului pînă la centrul de presiune în acest din urmă caz, va trebui să avem

$$d_1' = d_1 \tag{A.20}$$

$$\frac{\alpha_0' + \alpha_1'}{\alpha_0' + \alpha_1'(1+k)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1(1+k)},$$

de unde rezultă uşor că

$$\alpha_1' = \frac{\alpha_0'}{\alpha_0} \alpha_1 . \tag{A.21}$$

Introducînd această valoare în relaţia (A.19) în locul lui α_1, căpătăm

$$\alpha_x = \frac{\alpha_0'}{\alpha_0} \alpha_1 \left(1 - \cos \sqrt{\frac{K}{J_a}}\, t \right). \tag{A.22}$$

Din consideraţiile expuse rezultă că, o dată ce poziţia axului a fost fixată în aşa fel încît α să fie egal cu $n\alpha_0$, pentru oricare alt unghi α_0' unghiul efectiv de atac al ampenajului autopter devine $n\alpha_0'$ şi prin urmare, dacă suprafaţa ampenajului rămîne aceeaşi, reacţiunea aerodinamică devine de n ori mai mare. La proiectarea unor asemenea ampenaje trebuie însă avut în vedere faptul că unghiul $n\alpha_0'$ nu poate în nici un caz depăşi unghiul de portanţă maximă.

Din relaţia (A.19) respectiv (A.22) se vede uşor că în ipotezele calculului ampenajul oscilează în jurul valorii medii $n\alpha_0$ respectiv $n\alpha_0'$.

În realitate, din cauza rotirii ampenajului cu viteza $\frac{d\alpha_x}{dt}$, a bracării voletului cu unghiul $\vartheta = f(\alpha_x)$ şi a frecării în lagăre, iau naştere forţe care se opun mişcării [46].

Se face ipoteza acoperitoare că amortizarea datorită ampenajului fără volet este neglijabilă, iar cuplul datorit frecării în lagăre este γ.

Deoarece $\beta^* = k\alpha_x = \frac{4\vartheta}{\pi}\sqrt{\tau}\left(1-\frac{\tau}{6}\right)$, rezultă că

$$\vartheta = \frac{\pi k}{4\sqrt{\tau}\left(1-\frac{\tau}{6}\right)}\,\alpha_x, \tag{A.23}$$

sau notînd

$$\sigma = \frac{\pi k}{4\sqrt{\tau}\left(1-\frac{\tau}{6}\right)}, \tag{A.24}$$

$$\vartheta = \sigma\,\alpha_x.$$

Dacă distanţa de la axa de rotaţie O pînă la centrul de presiune al voletului se notează cu l_v, viteza centrului de presiune al voletului, pe direcţia normală pe poziţia neutră a ampenajului se poate scrie :

$$v_v = l_v\frac{d\alpha_x}{dt}. \tag{A.25}$$

Dacă se presupune că distanţa centrului de presiune al voletului de articulaţia acestuia este egală cu 1/4 $c_v = \frac{1}{4}\tau c = \theta c$ şi ştiind că distanţa de la bordul de atac al ampenajului la axa lui de rotaţie este $\frac{c}{2} - \frac{c}{4}\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta^*} = \frac{c(2-\alpha)}{4(\alpha+\beta^*)}$ şi în consecinţă distanţa de la axa de rotaţie la articulaţia voletului este $\frac{c\,[1-(2-\alpha)-\tau]}{4(\alpha+\beta^*)} = \mu c$, se vede uşor că

$$l_v = \sqrt{\mu^2 c^2 + \theta^2 c^2 - 2\theta c^2\mu\cos(\pi - \sigma\alpha_x)},$$

sau

$$l_v = \sqrt{\mu^2 c^2 + \theta^2 c^2 - 2\theta\mu c^2\cos\sigma\alpha_x}, \tag{A.26}$$

şi în ipoteza că $\sigma\alpha_x$ este mic

$$l_v = c(\mu + \theta). \tag{A.27}$$

Variaţia incidenţei efective, presupusă de asemenea mică, rezultă imediat din

$$\Delta\alpha_{ef} = \frac{v_v}{w} = \frac{l_v}{w}\,\frac{d\alpha_x}{dt} = \frac{c(\mu+\theta)}{w}\,\frac{d\alpha_x}{dt} \tag{A.28}$$

şi deci forţa aerodinamică pe volet, care se opune mişcării

$$\Delta P_v = \frac{\rho}{2}\,S_v\,w\,c'_{za}\,c(\mu+\theta)\frac{d\alpha_x}{dt} = \varepsilon\,\frac{d\alpha_x}{dt}. \tag{A.29}$$

Momentul acestei forţe în raport cu axul O va fi

$$M_v = \Delta P_v\cdot l_v = \varepsilon c(\mu+\theta)\frac{d\alpha_x}{dt} = \xi\,\frac{d\alpha_x}{dt}. \tag{A.30}$$

Dacă momentul de inerție al ampenajului în raport cu axa de rotație se notează cu J_a și se neglijează momentul de inerție al voletului, ecuația de mișcare va fi

$$\frac{d^2\alpha_x}{dt^2} + \frac{\xi}{J_a}\frac{d\alpha_x}{dt} + \frac{K}{J_a}\alpha_x = \frac{K\alpha_1 - \gamma}{J_a}. \tag{A.31}$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2 + \frac{\xi}{J_a}r + \frac{K}{J_a} = 0 \tag{A.32}$$

și rădăcinile ei

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\xi}{J_a}\right)^2 - \frac{K}{J_a}}. \tag{A.33}$$

Dacă

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\xi}{J_a}\right)^2 > \frac{K}{J_a}$$

ecuația caracteristică are rădăcini reale diferite, iar soluția ecuației diferențiale (A.30) cu condițiile inițiale (A.18) este

$$\alpha_x = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\gamma}{K} - \alpha_1\right)\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a}}{\sqrt{\left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2 - \frac{K}{J_a}}}\right)e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2 - \frac{K}{J_a}}\right]t} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\gamma}{K} - \alpha_1\right)\left(\frac{\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a}}{\sqrt{\left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2 - \frac{K}{J_a}}}\right)e^{\left[-\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a} - \sqrt{\left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2 - \frac{K}{J_a}}\right]t}\right\} + \alpha_1 - \frac{\gamma}{K}. \tag{A.34}$$

Dacă

$$\left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2 = \frac{K}{J_a}$$

rădăcinile ecuației caracteristice sînt reale și egale iar soluția ecuației diferențiale (A.30) cu condițiile inițiale (A.18) rezultă după un calcul simplu

$$\alpha_x = e^{-\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a}t}\left[\left(\frac{\gamma}{K} - \alpha_1\right) + \frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a}\left(\frac{\gamma}{K} - \alpha_1\right)t\right] + \alpha_1 - \frac{\gamma}{K}. \tag{A.35}$$

Dacă

$$\left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2 < \frac{K}{J_a}$$

ecuaţia caracteristică are rădăcini imaginare conjugate şi se vede uşor că soluţia ecuaţiei diferenţiale (A.30), cu condiţiile iniţiale (A.18) este

$$\alpha_x = e^{-\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a}t}\left[\left(\frac{\gamma}{K} - \alpha_1\right)\cos\sqrt{\left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2 - \frac{K}{J_a}}\,t + \frac{\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a}\left(\frac{\gamma}{K} - \alpha_1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2 - \frac{K}{J_a}}}\sin\sqrt{\left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2 - \frac{K}{J_a}}\,t\right] +$$

$$+\alpha_1 - \frac{\gamma}{K}. \tag{A.36}$$

Se poate constata uşor]49] că în cazul soluţiilor (A.34) şi (A.35) mişcarea este aperiodică amortizată, iar în cazul soluţiei (A.36) mişcarea este oscilatorie amortizată. În acest din urmă caz durata unei perioade va fi

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{J_a} - \left(\frac{\xi}{2J_a}\right)^2}} \qquad \mathrm{s}$$

şi amortizarea

$$\delta = -\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a} \qquad 1/\mathrm{s}$$

iar constanta semiamplitudinei este deci

$$t_h = -\frac{\ln 2}{\frac{1}{2}\frac{\xi}{J_a}}.$$

Calculele efectuate pentru cazuri concrete arată că parametrii suprafeţelor stabilizatoare realizate pe principiul ampenajelor autoptere pot fi astfel aleşi ca mişcarea să fie aperiodică.

Primită la redacţie la 29 iulie 1961

ВЕРТОЛЕТ С СОБСТВЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ В ПОЛЕТЕ ПРИ ВИСЕНИИ

РЕЗЮМЕ

В работе дается обзор теоретических исследований в связи с решением для обеспечения теоретическим путем собственной устойчивости вертолетов при любом режиме движения, включая и случай висения.

Исходя из гипотез, обычно применяемых в расчете летательных аппаратов с вращающимися крыльями, доказывается, что, располагая подходящим образом в струе несущего винта стабилизирующие поверхности с уклоном кривой $c_z = f(\alpha)\left(\frac{dc_z}{d\alpha}\right)$ большим, чем уклон

обыкновенных стабилизирующих поверхностей, конструктивные параметры всегда можно выбрать так, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения, а также и дискриминант Рауса были положительны, следовательно, чтобы летательный аппарат был устойчив даже в полете при висении.

Уклон кривой $c_z = f(\alpha)$ стабилизирующих поверхностей можно увеличить применением приспособлений для контроля циркуляции или поверхностей, осуществленных по принципу оперений типа ,,автоптера'', причем для последних дается в приложении приближенный метод аэродинамического расчета.

Также доказывается, что применяя стабилизирующие поверхности и в качестве управляющих поверхностей, значительно улучшается и маневренность.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Принципиальная схема расположения стабилизирующей поверхности в струе несущего винта.

Рис. 2. — Область устойчивости в полете при висении.

Рис. 3. — Способ расположения стабилизирующих поверхностей в случае вертолета с двумя соосными несущими винтами, вращающимися в противоположных направлениях, и вертолета с двумя несущими тандем-винтами: *a*, *c*, — в полете при висении; *b*, *d* — в поступательном полете.

Рис. А—1. — Оперение типа ,автоптера''.

Рис. А—2. — Обозначения, применяемые для расчета оперения типа ,,автоптера''.

HUBSCHRAUBER MIT EIGENSTABILITÄT IM SCHWEBEFLUG

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit bildet eine Zusammenstellung der theoretischen Studiet des Verfassers über eine aerodynamische Lösung, welche die Eigenstabilität des Hubschraubers in jeder Fluglage einschließlich des Schwebeflugs gewährleistet.

Ausgehend von den bei der Berechnung von Drehflügelflugzeugen üblichen Hypothesen wird gezeigt, daß, wenn man in den Rotorstrahl in geeigneter Weise stabilisierende Flächen mit größerem Auftriebsgradienten $c_z = f(\alpha) \left(\frac{dc_z}{d\alpha}\right)$ als bei den üblichen stabilisierenden Flächne vorsieht, die Konstruktions parameter immer so gewählt werden können, da alle Koeffizienten der charakteristischen Gleichung sowie auch die

Routhsche Diskriminante positiv sind, das Flugzeug also auch im Schwebeflug stabil ist.

Der Auftriebsgradient $c_z = f(\alpha)$ der stabilisierenden Flächen kann vergrößert werden durch Einrichtungen für Zirkulationssteuerung oder Flächen nach dem Prinzip der Leitwerke des „Autopter" - Typs. Für letztere wird in einem Anhang eine aerodynamische Näherungsrechenmethode gegeben.

Ferner wird gezeigt, daß, wenn die stabilisierenden Flächen gleichzeitig auch als Steuerflächen benutzt werden, sich auch die Manöverfähigkeit verbessert.

ERKLÄRUNG DER BILDER

Bild 1. — Schema für die Anbringung einer stabilisierenden Fläche im Rotorstrahl

Bild 2. — Stabilitätsbereich im Schwebeflug.

Bild 3. — Anbringungsweise der stabilisierenden Flächen bei Hubschraubern mit zwei koaxial angeordneten gegenläufigen Rotoren und bei Hubschraubern mit zwei Rotoren in Tandemanordnung. *a* und *c* im Schwebeflug; *b* und *d* im Vorwärtsflug.

Bild A — 1. — Leitwerk Typ „Autopter".

Bild A — 2. — Bezeichnungen für die Berechnung des Leitwerks Typ „Autopter".

BIBLIOGRAFIE

1. GH. RADO, *Problemele elicopterului*, Revista Transporturilor, nr. 3, martie 1955.
2. — *Stabilitatea elicopterelor şi mijloace pentru îmbunătăţirea ei*, Revista Transporturilor, nr. 12, decembrie 1960.
3. F. N. PIASECKI, *Quelles sont les imperfections des helicoptères actueles?*, Technique et Science Aeronautique nr. 5, 1951.
4. R. VANUTELLI, *Aspetti paradossali dell'elicotero*, Aerotecnica nr. 1, februarie 1956.
5. G. DINI, *Sulla stabilita dell'elicotero*, Aerotecnica, nr. 5, 1949.
6. GERALD KLEIN, *Flugregelungen und Fernlenkung*, VDI, nr. 11, 1959.
7. W. JUST, *Hubschrauber und andere Vertikalstartflugzeuge*, VDI, nr. 12, 1960.
8. A. M. ZAGORDAN, *Elementarnaia teoria vertoleta*, Moscova, Oboronghiz, 1960.
9. W. JUST, *Einführung in die Aerodynamik und Flugmechanik des Hubschraubers*, D.S.H. Flugtechnik, Stuttgart, 1957.
10. W. JUST, *Steuerung und Stabilität von Drehflügelflugzeugen*, D.S.H. Flugtechnik, Stuttgart, 1957.
11. A. R. S. BRAMWELL, *Longitudinal Stability and Control of Single-Rotor Helicopter*, Reports and Memoranda, No. 3 104, London, 1959.
12. J. SHAPIRO, *Principles of Helicopter Engineering*, Temple Press, London, 1955.
13. P. R. PAYNE, *Helicopter Dynamics and Aerodynamics*, I. Pitman & Sons Ltd., London, 1959.
14. GESSOW A., MYERS G., *Aerodinamica vertoleta*, Oboronghiz, Moscova, 1954.
15. R. A. YOUNG, *Teoria i rasciot gelicoptera*, Moscova, Oboronghiz, 1951.
16. G. BRÜNING, *Zur Stabilität des Hubschraubers*, Zeitschrift für Flugwissenschaften, nr. 8, august 1955.
17. A. A. NIKOLSKY, *Helicopter Analysis*, Waley and Sohns, New York, 1951.
18. I. P. BRATUHIN, *Proiectirovanie i konstructii vertoletov*, Oboronghiz, Moscova, 1955.
19. H. COLLOMOSSE, *Automatic pilot for helicopters. Theoretical Considerations*. The Journal of the Helicopter Association of Great Britain, vol 11, nr. 2, april 1957.
20. M. C. CURTIES, *Automatic pilot for helicopters. Flight Developement*. The Journal of the Helicopter Association of Great Britain, vol. 11, nr. 2, april 1957.
21. P. A. HEARNE, *All Weather Operation on Helicopters. Engineering Aspects*. The Journal of the Helicopter Association of Great Britain, nr. 3, June 1957.

22. J. W. REID, *All Weather Operation on Helicopters. Piloting.*Aspects The Journal of the Helicopter Association of Great Britain, nr. 3, June 1957.
23. — *Vers l'hélicoptère ,,tous-temps''*, Interavia, nr. 12, 1959.
24. C. TAYLOR, *La stabilisation des hélicoptères*, Interavia, nr. 12, 1959.
25. I. K. ZBROZEK, *Stability and Control of single Rotor Helicopter with Hinged Blades*, Aircraft Engineering, februarie 1949.
26. K. HOHENEMSER, *A type of Lifting Rotor with Inherent Stability*, Journal Aeron. Sci. Septembrie 1950.
27. H. G. KÜSSNER, *Probleme des Hubschraubers*, Luftfahrt — Forschung. Band 14, Lfg 1, 20 Ianuarie 1937.
28. BORIS v. SCHLIPPE, R. DIETRICH, *Zur Stabilität der Hubschrauber*, Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrt — Forschung Heft 16, 1940.
29. R. N. LIPTROT, *Modern Developements in the Helicopter*, The Journal of the Royal Aeronautical Society, nr. 247, July 1931.
30. LT. COL. LAMÉ, *Le vol vertical*, Ed. Blondel la Rougery, Paris, 1934.
31. MAURICE VIKTOR, *30 heures de vol en hélicoptère*, Les Ailes, nr. 766—20.II.1936.
32. ASBOTH O., *Az elsö helicopter*, Népszava, Budapest, 1960.
33. ASBOTH O., *Géprepülés*, Zrinyi kiadó, Budapest, 1957.
34. A. M. IZAKSON, *Gelikoptera*, Oboronghiz, Moscova, 1947.
35. ASBOTH O., *Aircraft with rotary wing systems*, Britisch Patent nr.432245, London 18.X. 1933.
36. J. H. CROWE, *The Problem of Vertical Flight*, Aircraft Engineering, November 1934.
37. K. HOHENEMSER, *Über die dynamische Stabilität des Hubschraubers mit angekenkten Flügeln*, Ingenieur Archiv, IX, 1938.
38. K. HOHENEMSER, *Zur Frage der Flugleistungen von Drehflüglern*, Ingenieur Archiv, 8 (1937).
39. W. JUST, K. JAECKEL, *Aerodynamik der Hub- und Tragschrauber*, Berechnung des Rotors, D. S. H. Flugtechnik, Stuttgart, 1954.
40. W. JUST, *Flugverhalten der Hubschrauber beim Übergang in den Autorotationszustand und beim Abfangen*, D.S.H. Flugtechnik, 1955.
41. W. JUST, H. DATHE, *Studium der Autorotationseigenschaften bei Hubschraubern mit verschiedenen Strahlantrieben*, D.S.H. Flugtechnik, Stuttgart, 1955.
42. GH. RADO, *O nouă formulă de aparat cu aripi rotative cu stabilitate proprie în zbor la punct fix*, Comunicare prezentată la Sesiunea Generală Ştiinţifică a Academiei R.P.R., iunie 1956 (nepublicată).
43. GH. RADO, *Asupra stabilităţii elicopterelor birotoare coaxiale, cu pale articulate, în zbor la punct fix*, Comunicare prezentată la Sesiunea Generală Ştiinţifică a Academiei R.P.R., septembrie 1957 (nepublicată).
44. GUY DE MERLE, *Construction des avions*, Ed. Dunod, Paris, 1947 (p. 1.442.2, pag. 53).
45. MAURICE VIKTOR, *Les gouvernes autoptères*, Les Ailes, no. 941, 29.VI.1939.
46. GH. RADO, *O metodă aproximativă pentru calculul ampenajelor autoptere*, Comunicare prezentată la Sesiunea Generală Ştiinţifică a Academiei R.P.R., iunie 1956 (nepublicată).
47. GH. RADO, *Asupra maniabilităţii unui stabilicopter în zbor la punct fix.* Comunicare prezentată la şedinţa lunară de comunicări a I.M.A. din 20.III.1958 (nepublicată).
48. R. FUCHS, L. HOPF, FR. SEEWALD, *Aerodynamik*, vol. I şi II, Ed. Springer, Berlin, 1935.
49. A. I. NECRASOV, *Curs de mecanică teoretică*, vol. I și II. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.

HIDROMECANICĂ

STUDIUL UNITAR AL MIŞCĂRII FLUIDELOR GRELE CU SUPRAFAŢA LIBERĂ

DE

D. DUMITRESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.
V. IONESCU şi C. CRĂCIUN

INTRODUCERE

În prezenta lucrare ne vom ocupa de mişcarea fluidelor grele cu suprafaţă liberă, problemă care a preocupat în mod deosebit numeroşi cercetători din ultima vreme. În afara lui H. Villat [1] care a fundamentat studiul mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă citām pe H. Poncin [2] care l-a aprofundat şi R. Gerber [3] care s-a ocupat de existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiilor mişcării. Rezultate fundamentale au fost obţinute numai în condiţii restrictive pentru funcţiile şi parametrii ce intervin. Astfel panta vitezei pe suprafaţa solidă de mişcare trebuie să satisfacă o condiţie Hölder şi să fie monotonă, crescătoare sau descrescătoare.

Prezintă deci interes abordarea problemei dintr-un alt punct de vedere, care să lărgească condiţiile restrictive amintite şi care să includă atît mişcările pe suprafeţe indefinite în amonte şi aval cît şi mişcările cu lame libere. Mişcarea fluidelor perfecte trebuie privită ca un caz particular în care gravitatea nu intervine.

Punctul de plecare în lucrarea de faţă îl constituie aplicarea, adaptarea şi dezvoltarea raţionamentelor folosite în studiul problemelor la limită inverse de care s-au ocupat în special Riabusinski [4], Demcenko [5], Ciorănescu [6] şi alţii. Problema la limită inversă ce apare în cazul studiat este o problemă inversă de tip special aşa cum se va vedea în dezvoltările ulterioare.

PROBLEMA LA LIMITĂ

Să considerăm domeniul de mişcare reprezentat în figura 1 unde elementele notate sînt cunoscute. Problema matematică ce se pune este determinarea funcţiei de curent armonice $\psi(x, y)$, în domeniul necunoscut (D) care să satisfacă următoarele condiţii la limită:

$$\psi(x, y) = 0 \quad \text{pe } (S) \tag{1}$$

$$\psi(x, y) = Q \quad \text{pe } (L) \tag{2}$$

$$V^2 + 2gy = 0 \quad \text{pe } (L) \tag{3}$$

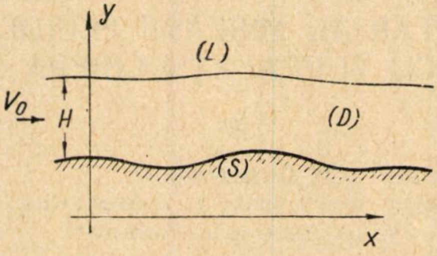


Fig. 1

Ultima relaţie reprezintă ecuaţia lui Bernoulli în cazul unei alegeri convenabile a originii axelor de coordonate.

Pe frontiera domeniului (D) sînt date valorile funcţiei necunoscute $\psi(x, y)$. Porţiunea necunoscută a frontierei, adică suprafaţa liberă, trebuie determinată tocmai din condiţia suplimentară (3).

În problemele la limită inverse obişnuite frontiera domeniului este în întregime necunoscută. Aici avem o problemă de tip special, în care o parte a frontierei, suprafaţa solidă de mişcare, este cunoscută, iar cealaltă parte, suprafaţa liberă (L), trebuie determinată.

Pentru determinarea funcţiei necunoscute $\psi(x, y)$ şi a liniei libere (L), care să satisfacă condiţiile la limită (1), (2), (3), vom reprezenta conform domeniului necunoscut (D) din planul $z = x + iy$ pe un domeniu convenabil dintr-un plan auxiliar $Z = X + iY$. Acest nou domeniu poate fi cerc, semicerc, semiplan etc., alegerea făcîndu-se numai din consideraţii de natură practică, variabile de la caz la caz. Notăm funcţia de transformare necunoscută

$$z = z(Z) \tag{4}$$

şi inversa ei

$$Z = Z(z). \tag{5}$$

Să presupunem de exemplu că domeniul din planul Z este cercul unitar C din figura 2 cu corespondenţa indicată a frontierelor. Potenţialul complex $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ devine în planul $Z = X + iY$

$$F(Z) = f[z(Z)].$$

În particular funcția $\psi(x, y)$ trece în $\Psi(X, Y)$ de asemenea armonică, în C care trebuie să satisfacă condițiile la limită

$$\Psi(X, Y) = 0 \qquad \text{pe } (S') , \tag{1'}$$

$$\Psi(X, Y) = Q \qquad \text{pe } (L') . \tag{2'}$$

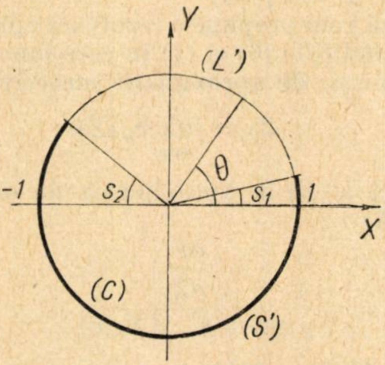


Fig. 2

Pe arcul (L') trebuie să fie satisfăcută o condiție suplimentară ce rezultă din ecuația lui Bernoulli dacă ținem seama de transformarea conformă efectuată. Pentru a o deduce vom scrie ecuația (3) sub forma

$$\left|\frac{df}{dz}\right|^2 + 2\,gy = 0.$$

Dacă ținem seama de transformarea conformă (4) avem :

$$\left|\frac{df}{dz}\right| = \left|\frac{dF}{dZ}\right| \left|\frac{dZ}{dz}\right| = \left|\frac{dF}{dZ}\right| \frac{1}{\left|\frac{dz}{dZ}\right|} .$$

Dar deoarece

$$\left|\frac{dz}{dZ}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial X} + i\,\frac{\partial y}{\partial X}\right| = \left|\frac{\partial y}{\partial Y} + i\,\frac{\partial y}{\partial X}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2} = \left|\operatorname{grad}\, y\right|$$

se obține pe arcul (L') relația

$$\left|\frac{dF}{dZ}\right|^2 + 2gy(X, Y)\operatorname{grad}^2 y(X, Y) = 0. \tag{3'}$$

Primele două condiții (1′), (2′) determină complet funcția olomorfă $F(Z)$. Urmează a fi determinată funcția de reprezentare conformă $z = z(Z)$

din condiţia la limită (3′) pe porţiunea (L') şi condiţia ca restul frontierei (S') să se reprezinte pe (S), peretele solid al mişcării. Acestea se pot scrie

$$y\,(X,\,Y)\ \mathrm{grad}^2\,y\,(X,\,Y) = -\frac{1}{2g}\left|\frac{dF}{dZ}\right|^2 \qquad \text{pe } (L') \qquad (6)$$

$$y\,(X,Y) = f_1(\theta) \qquad \text{pe } (S') \qquad (7)$$

În cele ce urmează vom propune o rezolvare aproximativă a problemei la limită definită de condiţiile (6) şi (7) în care funcţia $z = z(Z)$ este considerată ca limită a unui şir de aproximaţii succesive

$$z(Z) = \lim_{n\to\infty} z_n\,(Z).$$

Funcţia olomorfă $z_n(Z)$ în aproximaţia de ordinul n se determină cu condiţiile la limită

$$y_n\,(X,\,Y) = \frac{-1}{2\,g}\,\frac{\left|\dfrac{dF}{dZ}\right|^2}{\mathrm{grad}^2\,y_{n-1}(X,Y)} \qquad \text{pe } (L') \qquad (6')$$

$$y_n\,(X,Y) = f_1(\theta) \qquad \text{pe } (S') \qquad (7')$$

unde funcţia $f_1(\theta)$, necunoscută apriori, trebuie determinată astfel încît suprafaţa (S_n) determinată prin reprezentarea conformă a arcului (S') prin funcţia $z_n(Z)$, să coincidă cu suprafaţa dată (S) în fiecare aproximaţie.

Vom considera ca primă aproximaţie mişcarea fluidului fără greutate. Deoarece studiul primei aproximaţii constituie o problemă în sine şi ca importanţă (pentru mişcarea fluidului perfect cu suprafeţe de discontinuitate) şi ca mod de rezolvare matematică, ne vom ocupa de ea în paragraful următor. O dată determinată funcţia $z_1(Z)$ cu partea sa imaginară $y_1(X,\,Y)$, aproximaţiile succesive se obţin ca soluţii ale unei probleme la limită de tip Dirichlet, cum rezultă din condiţiile (6′) şi (7′).

PRIMA APROXIMAŢIE

În cazul fluidului fără greutate, problema la limită (6′), (7′) îşi schimbă caracterul, deoarece relaţia lui Bernoulli în acest caz se simplifică. Avem pe contur, în planul mişcării z:

$$\psi\,(x,\,y) = 0\ , \qquad \text{pe } (S) \qquad (8)$$

$$\psi\,(x,\,y) = Q, \qquad \text{pe } (L) \qquad (9)$$

$$V = V_0 \qquad \text{pe } (L)\ . \qquad (10)$$

Primele două condiţii (8) şi (9) conduc în planul Z la condiţii identice cu (1′) şi (2′)

$$\Psi\,(X,\,Y) = 0, \qquad \text{pe } (S') \qquad (1'')$$

$$\Psi\,(X,\,Y) = Q \qquad \text{pe } (L') \qquad (2'')$$

Condiţia (10) considerată ca un caz particular al relaţiei (3), se transformă în planul Z folosind acelaşi raţionament care a fost folosit pentru deducerea ecuaţiei (6) din (3). Obţinem în acest caz

$$\left|\operatorname{grad} y_1(X, Y)\right| = \frac{1}{V_0}\left|\frac{dF}{dZ}\right| \qquad \text{pe } (L') \qquad (11)$$

Pe arcul (S') vom impune funcţiei $z_1(Z)$ condiţia

$$z_1(Z) = f(\zeta) \qquad \text{pe } (S') \quad (12)$$

unde $\zeta = e^{i\theta}$ este un punct variabil pe (S'). Funcţia $f(\zeta)$ este deocamdată arbitrară şi va trebui să fie determinată din condiţia ca prin reprezentare conformă arcul (S') să se transforme în curba (S) cunoscută.

Condiţiile $(1'')$ şi $(2'')$ scrise mai sus determină complet funcţia $F(Z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$ aşa încît membrul drept al relaţiei (11) este o funcţie bine determinată pe arcul (L'). În concluzie, studiul primei aproximaţii revine la determinarea funcţiei complexe $z\,(Z)$ în interiorul cercului (C) şi a funcţiei necunoscute $f(\zeta)$ pe (S') care satisfac pe contur condiţiile

$$\left|\operatorname{grad}\, y_1(X, Y)\right| = g(\theta) \qquad \text{pe } (L') \qquad (13)$$

$$z_1(Z) = f(\zeta) \qquad \text{pe } (S') \qquad (14)$$

în aşa fel încît arcul (S') să se reprezinte pe curba (S).

Înainte de a rezolva această problemă la limită, vom face o scurtă observaţie care ne va fi utilă în cele ce urmează. Să presupunem că pe frontiera (Γ) a unui domeniu oarecare (Δ) se dă valoarea modulului gradientului părţii imaginare a unei funcţii olomorfe $\gamma(Z) = l(X, Y) + ih(X, Y)$ în (Δ). Se arată [6] că în acest caz se poate determina funcţia $\gamma(Z)$ în tot domeniul (Δ) prin rezolvarea unei probleme Dirichlet. Observînd în adevăr că putem scrie

$$\left|\operatorname{grad}\, h(X, Y)\right| = \mathcal{R}e \log \gamma'(Z),$$

se vede că totul se reduce la determinarea funcţiei

$$H(Z) = \log \gamma'(Z),$$

cînd se cunoaşte variaţia părţii sale reale pe (Γ).

Revenind la problema la limită definită de condiţiile (13) şi (14) vom propune pentru rezolvarea ei un algoritm similar celui folosit de Schwartz în rezolvarea problemei Dirichlet pentru intersecţia a două domenii cu soluţii cunoscute. Vom presupune pentru început că funcţia $f(\zeta)$ este cunoscută şi vom rezolva problema formal în această ipoteză. Determinarea ei va fi făcută ulterior ţinînd seamă de condiţia de reprezentare conformă amintită.

Prima etapă. Cunoscînd valoarea expresiei $\left|\operatorname{grad}\, y_1(X, Y)\right| = g(\theta)$ pe (L') vom prelungi arbitrar valorile ei şi pe arcul (S'). Avem cu aceasta următoarele condiţii pe cercul (C) :

$$\operatorname{grad}\, y_1^{(1)}(X, Y) = g(\theta) \qquad \text{pe } (L') \qquad (15)$$

$$\operatorname{grad}\, y_1^{(1)}(X, Y) = g_1^{(1)}(\theta) \qquad \text{pe } (S') \qquad (16)$$

Conform observației făcute anterior, condițiile (15) și (16) sînt suficiente pentru definirea funcției $z^{(1)}{}_1(Z)$ în tot domeniul cercului (C). Aceasta este prima determinare a funcției $z_1(Z)$ căutată.

Etapa a doua. Funcția $z^{(1)}{}_1(Z)$ determină pe conturul (C) o distribuție de valori $z^{(1)}{}_1(e^{i\theta})$. În general $z^{(1)}{}_1(e^{i\theta}) \neq f(\zeta)$ pe arcul (S'); valorile sale pe arcul (L') împreună cu relația (14) definesc condițiile pe contur pentru funcția olomorfă în cerc $z_1^{(2)}(Z)$

$$z_1^{(2)}(Z) = z_1^{(1)}(e^{i\theta}) \qquad \text{pe } (L') \tag{17}$$

$$z_1^{(2)}(Z) = f(\zeta) \qquad \text{pe } (S'). \tag{18}$$

Etapa a treia. Din expresia funcției $z_1^{(2)}$ (Z) soluția problemei la limită anterioară, se deduce valoarea lui $|\operatorname{grad} y_1^{(2)}, (X, Y)|$ pe frontieră. În general $|\operatorname{grad} y_1^{(2)}(X, Y)|$ nu satisface condiția (13) pe arcul (L'). Aceasta, împreună cu valorile $|\operatorname{grad} y_1^{(2)}, (X, Y)| = g_1^{(2)}(\theta)$ pe arcul (S') deduse din $z_1^{(2)}(Z)$ conduc la următoarea problemă la limită: să se determine funcția $z_1^{(3)}(Z)$ în cercul (C) cînd se cunosc pe contur relațiile

$$|\operatorname{grad} y_1^{(3)}(X, Y)| = g(\theta) \qquad \text{pe } (L') \tag{19}$$

$$|\operatorname{grad} y_1^{(3)}(X, Y)| = g_1^{(2)}(\theta) \qquad \text{pe } (S') \tag{20}$$

Soluția similară cu cea din prima etapă constituie a treia determinare a funcției z_1 (Z).

Etapa a patra. Din expresia lui $z_1^{(3)}(Z)$ obținem pe arcul (L') distribuția de valori $z_1^{(3)}$ $(e^{i\theta})$, care împreună cu condiția (14) conduc la o nouă problemă Dirichlet pentru funcția $z_1^{(4)}(Z)$

$$z_1^{(4)}(Z) = z_1^{(3)}(e^{i\theta}) \qquad \text{pe } (L'), \tag{21}$$

$$z_1^{(4)}(Z) = f(\zeta) \qquad \text{pe } (S'). \tag{22}$$

Funcția $z_1^{(4)}(Z)$ este a patra determinare a primei aproximații.

Algoritmul expus mai sus poate fi continuat în mod analog oricît de mult dorim; fiecare determinare de ordin par conduce la rezolvarea unei probleme Cauchy iar cele de ordin impar pot fi reduse la probleme Dirichlet prin procedeul arătat.

DETERMINAREA FUNCȚIEI $f(\zeta)$

Procedeul alternativ de determinare a funcției $z_1(Z)$ descris mai sus a fost stabilit în ipoteza că funcția $f(\zeta)$ este cunoscută. Ne punem acum problema determinării ei în funcție de datele problemei în fiecare etapă în parte.

În etapele de ordin par funcția $z_1^{(2n)}(Z)$ are forma generală

$$z_1^{(2n)}(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S'} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - Z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L'} z_1^{(2n-1)}(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - Z}\,. \tag{23}$$

A doua integrală din membrul drept este o funcție cunoscută de Z pe care o vom nota

$$G(Z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L'} z_1^{(2n-1)}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - Z} \tag{24}$$

Dacă Z tinde către un punct ζ_0 de pe contur avem

$$z_1^{(2n)}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S'} f(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} + G(\zeta_0). \tag{25}$$

Prin reprezentarea conformă a cercului pe domeniul mișcării, între parametrii de pe curbele (S') și (S) vom avea relațiile

$$\zeta = \zeta(s) \quad \text{sau} \quad s = s(\zeta) \tag{26}$$

și corespunzător

$$\zeta_0 = \zeta(s_0) \tag{27}$$

pe care le vom determina în cele ce urmează.

Dacă ținem seama de prima relație (26) și (27) obținem din (25)

$$z_1^{(2n)}[\zeta(s_0)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{S} f[\zeta(s)]\,\frac{\zeta'(s)\,ds}{\zeta(s) - \zeta(s_0)} + G[\zeta(s_0)]. \tag{28}$$

Această formulă poate fi scrisă

$$z_1^{(2n)}(s_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S} z_1^{(2n)}(s)\,\frac{\zeta'(s)\,ds}{\zeta(s) - \zeta(s_0)} + G[\zeta(s_0)]. \tag{29}$$

Ecuația (29) determină funcția necunoscută $\zeta = \zeta(s)$. Inversa acestei funcții introdusă în ecuația suprafeței (S) conduce la determinarea funcției $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = z_1^{(2n)}[s(\zeta)]. \tag{30}$$

Această expresie odată determinată, formula (23) ne dă transformarea conformă în determinarea de ordinul $2n$ pentru mișcarea fluidului fără greutate.

Expresia funcției $z_1(Z)$ care soluționează problema mișcării fluidului fără greutate, permite studiul celorlalte aproximații în care intervine greutatea. Procedeul de calcul al lor a fost arătat mai sus; totul revine la rezolvarea unei probleme Dirichlet așa cum arată formulele (6′) și (7′).

Din cele arătate mai sus se vede cum poate fi studiată mișcarea fluidului perfect cu suprafețe de discontinuitate prin altă metodă decît cele cunoscute. Analiza diferitelor determinări ale algoritmului propus permite stabilirea condițiilor de existență ale soluției. În cazuri particulare, cum ar fi acela al suprafețelor de mișcare formate din linii poligonale cu unghiuri drepte (deversoare cu prag lat, praguri de fund etc.) problema se simplifică considerabil, după cum se poate constata cu ușurință.

Trecerea de la fluidul perfect fără greutate la fluidul cu greutate este destul de uşoară iar obţinerea soluţiei prin diferite aproximaţii se face rezolvînd probleme la limită cunoscute din teoria funcţiilor armonice, aşa cum am arătat mai sus.

Primită la redacţie la 21 decembrie 1961

КОМПЛЕКСНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ЖИДКОСТЕЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается движение тяжелых жидкостей со свободной поверхностью с той точки зрения, которая охватила бы движение на поверхностях, не ограниченных вниз и вверх по течению, а также и движения со свободными струями. Идеальную жидкость рассматривают как частный случай, когда вес не учитывается. Появляется обратная граничная задача специального типа для функции конформного отображения между областью движения (D) с частично не известной границей и произвольно выбранной известной областью (например, единичным кругом C). Для решения граничной задачи предлагается метод последовательных приближений, а для определения решения в первом приближении используется чередующийся алгорифм расчета.

ÉTUDE UNITAIRE DU MOUVEMENT DES FLUIDES PESANTS À SURFACE LIBRE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, les auteurs se proposent d'étudier le mouvement des fluides pesants à surface libre à un nouveau point de vue, comprenant le mouvement sur des surfaces indéfinies en amont et en aval, ainsi que les mouvements à lames libres. Le fluide parfait est considéré comme un cas particulier, où la pesanteur n'intervient pas. La fonction de représentation conforme entre le domaine de mouvement (D) à frontière partiellement inconnue et un domaine connu, arbitrairement choisi (par exemple, le cercle C de rayon 1), conduit à un problème à la limite inverse, d'un type spécial. Afin de le résoudre, les auteurs proposent l'emploi d'une méthode par approximations successives. Pour déterminer la solution en première approximation, ils ont utilisé un algorithme de calcul alternatif.

BIBLIOGRAFIE

1. H. VILLAT, *Sur l'écoulement des fluides pesants.* Ann. Ec. Norm. Sup., **32**, 177–214 (1915).
2. H. PONCIN, *Recherches sur le mouvement d'un fluide pesant dans un plan vertical.* Paris, 1932.
3. R. GERBER, *Sur les solutions exactes des équations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant.* Journal des mathématiques pures et appliquées, *3* (1955).
4. D. RIABUŞINSKI, *Sur la détermination d'une surface d'après les données qu'elle porte.* Comptes Rendus de l'Acad. des Sci., Paris., **189**, 629 (1929).
5. B. DEMTCENKO, *Sur un problème inverse au problème de Dirichlet.* Comptes Rendus de l'Acad. des Sci., Paris, **189**, 725 (1929).
6. N. CIORĂNESCU, *Sur certains problèmes aux limites, directs ou inverses, pour les fonctions harmoniques.* Bull. de la Section Scientifique. Acad. Roumaine, *6* (1930).

ASUPRA DEZLOCUIRII PETROLULUI DE CĂTRE APĂ ÎN MEDII POROASE FISURATE

DE

T. OROVEANU

1. *Introducere.* Studiul scurgerii fluidelor prin medii poroase care prezintă fisuri macroscopice a căpătat în ultimul timp o însemnătate destul de mare datorită existenței zăcămintelor de petrol de acest gen. Una din problemele principale care se pune în legătură cu exploatarea zăcămintelor fisurate este aceea a dezlocuirii petrolului de către apă, în cazul în care există o avansare substanțială a acesteia din urmă. Într-adevăr, într-un astfel de zăcămînt, alcătuit din blocuri poroase separate prin macrofisuri, principala rezervă de petrol este aceea conținută în blocuri. La începutul exploatării, se produce o avansare mai rapidă a apei în macrofisuri, datorită rezistenței mai reduse la scurgerea prin acestea, dar pentru a se evita inundarea totală trebuie să se regleze ritmul de exploatare astfel ca să se producă și dezlocuirea petrolului din porii blocurilor.

Tratarea matematică a acestui fenomen de dezlocuire este destul de dificilă, chiar atunci cînd admitem valabilitatea legii liniare de filtrare, așa cum vom face în cele ce urmează. Într-adevăr, într-un studiu riguros ar trebui să se țină seama atît de viscozitățile diferite ale fluidelor cît și de faptul că în zona invadată de apă permeabilitatea pentru petrol este diferită de zero. Dat fiind însă că scurgerea nu este unidimensională, nu este în prezent posibil să se dezvolte o teorie în care să nu se recurgă la unele aproximații. Astfel, în primul rînd sîntem siliți să admitem că în zona în care a pătruns apa saturația în petrol este egală cu acea reziduală, singurul fluid care curge fiind deci apa. Ajungem astfel la aplicarea metodei de studiu propusă de M. Muskat, dar și în cadrul acesteia este necesar să adoptăm încă o aproximație, deoarece geometria sistemului de scurgere nu permite să se cunoască *a priori* forma suprafeței de contact dintre cele două fluide. Se știe că în acest caz se neglijează diferența de viscozitate dintre fluidul dezlocuit și acela care dezlocuiește, studiindu-se de fapt un sistem cu mobilitate uniformă.

Simplificările introduse afectează valoarea cantitativă a rezultatelor dar acestea vor fi totuși utile în special pentru punerea în evidență a unor parametri care au o influență importantă asupra fenomenului.

2. *Punerea problemei. Condiții la limite.* Admițînd că fenomenul este plan, s-a adoptat pentru studiu o schemă în care se consideră un singur bloc poros, de secțiune transversală dreptunghiulară, în contact pe una din fețele sale cu o fisură verticală. Contactul dintre apă și petrol se găsește situat inițial la nivelul care corespunde feței orizontale inferioare a blocului. Celelalte fețe sînt considerate cu frontiere impermeabile[1]), extracția petrolului făcîndu-se numai prin fisură.

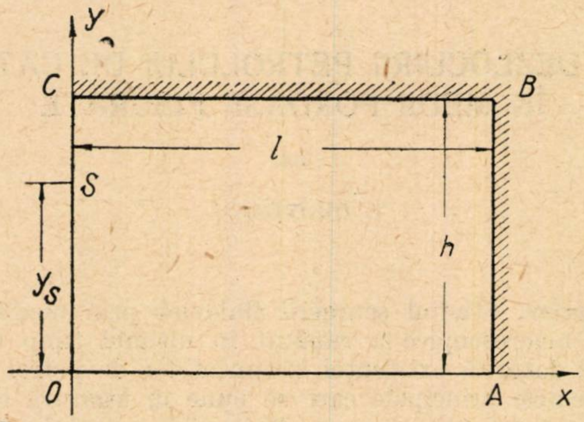


Fig. 1

Fenomenul considerat în această schemă este deci acela al avansării apei de talpă.

În ipoteza valabilității legii lui Darcy, putem introduce funcțiile

$$\varphi_t = -\frac{k_t}{\mu_t}(p_t + \gamma_t y) \tag{1}$$

și

$$\varphi_a = -\frac{k_a}{\mu_a}(p_a + \gamma_a y), \tag{2}$$

în care k este permeabilitatea, μ viscozitatea dinamică, p presiunea și γ greutatea specifică; indicele t se referă la petrol, iar indicele a la apă. Obținem astfel pentru vitezele de filtrare expresiile

$$\bar{v}_t = \nabla \varphi_t , \quad \bar{v}_a = \nabla \varphi_a , \tag{3}$$

funcțiile φ_t și φ_a fiind armonice.

---

[1]) Această schemă corespunde dispozitivului care a fost experimentat în laboratorul de hidraulică al Institutului de petrol, gaze și geologie din București.

În tratarea problemei prin metoda simplificată propusă de M. Muskat [3], se consideră o singură funcție

$$\varphi = -\frac{k}{\mu}(p + \gamma y), \tag{4}$$

admițîndu-se deci că în mediul poros curge un singur fluid omogen. Introducerea efectului gravitațional ne obligă și la aproximația de a neglija diferența de greutate specifică a celor două lichide; în scrierea condițiilor la limite, vom renunța însă la această simplificare.

După începerea extracției, apa se va ridica mai repede în fisură, iar dacă se reglează în mod convenabil debitul, la o valoare practic constantă, se poate ajunge ca nivelul apei din fisură să se mențină constant la înălțimea y_s (fig. 1). În tot acest timp, debitul extras este provenit din dezlocuirea petrolului de către apă în mediul poros. Fenomenul avînd însă un caracter nestaționar, valoarea aleasă a debitului nu se poate menține decît dacă după un anumit interval de timp nivelul apei din fisură crește 1). Faptul că în mediul poros neglijăm diferența de greutate specifică dintre cele două lichide nu permite însă să se pună în evidență, în calcule, concluzia că menținerea unui debit constant implică o creștere a nivelului apei din fisură. În cele ce urmează, vom admite deci că nivelul y_s nu se schimbă.

Funcția φ definită prin (4) fiind armonică, introducem funcția de curent ψ, armonic conjugată cu φ. Trecînd apoi la stabilirea condițiilor la limite, vom observa în primul rînd că frontiera impermeabilă *ABC* (fig. 1) este o linie de curent pe care putem pune

$$\psi = 0. \tag{5}$$

Dacă neglijăm efectul pe care scurgerea în fisură îl are asupra variației presiunii, pe frontiera *CS* avem

$$p = p_c + \gamma_t(h - y), \tag{6}$$

p_c fiind presiunea din *C* iar y_s ordonata punctului curent. În aceleași condiții, pe *SO* putem scrie

$$p = p_c + \gamma_t(h - y_s) + \gamma_a(y_s - y). \tag{7}$$

Ținînd seama de (4), găsim imediat

$$\varphi = -\frac{k}{\mu}(p_c + \gamma_t h) \tag{8}$$

pe *CS* și

$$\varphi = -\frac{k}{\mu}[p_c + \gamma_t h + (\gamma_a - \gamma_t)y_s], \tag{9}$$

pe *SO*.

---

1) Această descriere a fenomenului corespunde observațiilor efectuate în cursul experiențelor pe modelul construit în laboratorul de hidraulică al Institutului de petrol, gaze și geologie din București și se referă la perioada în care se extrage numai petrol, fără apă.

Presiunea p_c fiind constantă, putem considera condițiile mai simple

$$\varphi = 0, \tag{9a}$$

pe *CS* și

$$\varphi = -\frac{k}{\mu}(\gamma_a - \gamma_t)y_s \tag{10}$$

pe *SO*.

Mai departe, neglijarea efectului scurgerii ne dă pentru frontiera *OA* condiția

$$\varphi = -\frac{k}{\mu}(\gamma_a - \gamma_t)y_s. \tag{11}$$

După cum se observă, deși pentru mediul poros am considerat o singură funcție φ, în condițiile la limită am ținut seama de diferența dintre greutățile specifice ale celor două lichide, așa cum de altfel am menționat mai înainte.

3. *Rezolvarea problemei.* Ne găsim în fața unei probleme la limită mixtă pentru a cărei rezolvare este necesar să recurgem la reprezentarea conformă a domeniului din interiorul dreptunghiului *OABC* pe un semiplan. Lucrul acesta se realizează cu ajutorul formulei Schwarz-Christoffel. Dacă introducem în planul *Oxy* variabila complexă

$$z = x + iy \tag{12}$$

și în planul $O\xi\eta$ variabila complexă

$$\zeta = \xi + i\eta \tag{13}$$

funcția [2]

$$z = \frac{l}{2K}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa^2\zeta)}}, \tag{14}$$

în care $\varkappa$ este modulul integralelor eliptice scrise sub forma normală a lui Legendre [1]) și K integrala eliptică de specia întîia completă, relativă la acest modul, reprezintă conform interiorul dreptunghiului *OABC* din planul z pe semiplanul superior din planul ζ. Originile axelor din cele două plane se corespund, punctul $A(z = l)$ corespunde cu $\zeta = 1$, punctul $B(z = l + ih)$ cu $\zeta = \frac{1}{\varkappa^2}$, iar punctul $C(z = ih)$ cu punctul de la infinit (fig. 2). Modulul $\varkappa$ trebuie să fie astfel ales încît să avem

$$\frac{K}{K'} = \frac{l}{h}, \tag{15}$$

K' fiind integrala eliptică de specia întîia completă relativă la modulul complementar

$$\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}. \tag{16}$$

---

[1]) Am adoptat pentru modul notația $\varkappa$ pentru a evita confuzia cu permeabilitatea k.

Inversiunea formulei (14) ne dă

$$\zeta = \mathrm{sn}^2\left(K\frac{z}{l}, \varkappa\right), \tag{17}$$

astfel încît punctul $S\,(z = iy_s)$ corespunde cu

$$\zeta = -\frac{\mathrm{sn}^2\left(K\dfrac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}{\mathrm{cn}^2\left(K\dfrac{y_s}{l}, \varkappa'\right)} = -\xi_s, \tag{18}$$

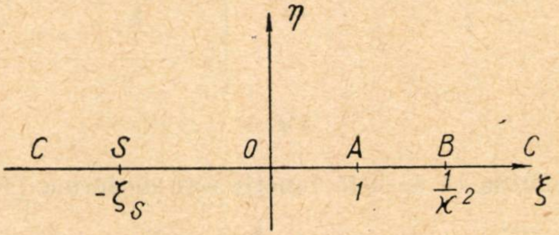


Fig. 2

rezultat la care se ajunge prin utilizarea formulei

$$\mathrm{sn}\left(K\frac{iy_s}{l}, \varkappa\right) = i\,\frac{\mathrm{sn}\left(K\dfrac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}{\mathrm{cn}\left(K\dfrac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}. \tag{19}$$

Problema s-ar putea rezolva şi în acest plan, însă o soluţie elementară se găseşte dacă reprezentăm semiplanul superior din planul ζ pe semiplanul superior din planul variabilei

$$Z = X + iY, \tag{20}$$

cu ajutorul funcţiei

$$Z = \frac{\zeta - (2 + \xi_s)}{\zeta + \xi_s}, \tag{21}$$

corespondenţa punctelor de pe frontieră fiind $\zeta = -\xi_s$ cu $Z = \infty$, $\zeta = +1$ cu $Z = -1$ şi $\zeta = \infty$ cu $Z = +1$ (fig. 3).

Dacă în acest ultim plan considerăm funcţia de variabilă complexă

$$F(Z) = \Phi + i\Psi \tag{22}$$

şi observăm că trebuie să avem

$$\Phi = -\frac{k}{\mu}(\gamma_a - \gamma)\, y_s \text{ pe } (-\infty, -1),$$

$$\Psi = 0 \quad \text{pe} \quad (-1, +1),$$

$$\Phi = 0 \quad \text{pe} \quad (+1, +\infty),$$

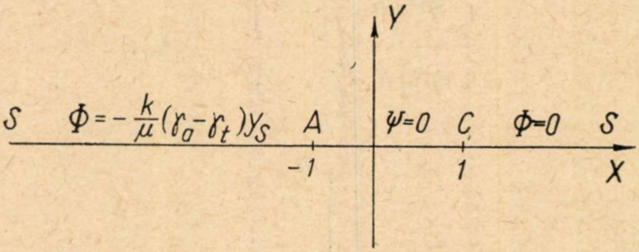


Fig. 3

ajungem la concluzia că această funcţie este de forma [1]

$$F(Z) = -\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\, y_s \arccos Z = i\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\, y_s \log\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right) \tag{23}$$

Revenind la planul z obţinem

$$f(z) = -\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\, y_s \arccos \frac{\mathrm{cn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\left[\mathrm{sn}^2\left(K\frac{z}{l}, \varkappa\right) - 2\right] - sn^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}{\mathrm{cn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\mathrm{sn}^2\left(K\frac{z}{l}, \varkappa\right) + \mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)} \tag{24}$$

rezultat la care se ajunge uşor cu ajutorul formulelor (17) şi (21).

Reamintim că expresia (24) a fost stabilită plecînd de la condiţii la limite simplificate pentru funcţia φ; cu condiţiile (8) şi (9), ultima fiind valabilă şi pe OA, avem

$$f(z) = -\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\, y_s \arccos \frac{\mathrm{cn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\left[\mathrm{sn}^2\left(K\frac{z}{l}, \varkappa\right) - 2\right] - \mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}{\mathrm{cn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\mathrm{sn}^2\left(K\frac{z}{l}, \varkappa\right) + \mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)} - \frac{k}{\mu}(p_c + \gamma_t h). \tag{25}$$

Din examinarea acestei soluţii se observă imediat că fenomenul de dezlocuire nu se produce dacă apa nu a pătruns în fisură deoarece în acest caz $y_s = 0$. De asemenea, problema, sub forma în care a fost pusă, nu are soluție atunci cînd fisura este complet invadată de apă ($y_s = h$). Această ultimă constatare rezultă din forma pe care o iau condițiile la limite pentru funcția φ în situația respectivă. În sfîrșit, atunci cînd dezlocuirea se produce, ea depinde în mod esențial de diferența de greutate specifică între cele două fluide, avînd deci un caracter pur gravitațional. Într-adevăr, în expresia (25) a funcției $f(z)$, presiunea apare numai într-o constantă aditivă.

Viteza de filtrare, sub formă complexă se poate determina destul de ușor; în acest scop, ne vom referi la planul ζ în care avem

$$f(\zeta) = -\frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi} y_s \arccos\left[\frac{\zeta - (2 + \xi_s)}{\zeta + \xi_s}\right] \tag{26}$$

expresie obținută cu ajutorul formulelor (23) și (21). De aici, deducem, după calcule simple

$$\frac{df}{d\zeta} = -i\frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi} y_s \frac{1}{\zeta + \xi_s}\sqrt{\frac{1 + \xi_s}{1 - \zeta}}, \tag{27}$$

iar din (14) obținem

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{l}{2K\sqrt{\zeta(1 - \zeta)(1 - \varkappa^2\zeta)}}, \tag{28}$$

astfel că în planul z putem scrie

$$\frac{df}{dz} = v_x - iv_y = \frac{df}{d\zeta}, \frac{1}{\frac{dz}{d\zeta}} = -i\frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\frac{y_s}{l}\frac{2K}{\zeta + \xi_s}\sqrt{(1 + \xi_s)\zeta(1 - \varkappa^2\zeta)}. \tag{29}$$

Dacă înlocuim în acest rezultat pe ζ și pe ξ_s cu expresiile lor (17) și (18), găsim forma definitivă a vitezei complexe în planul z și anume

$$v_x - iv_y = -i\frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\frac{y_s}{l}\frac{2K\,\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\mathrm{sn}\left(K\frac{z}{l}, \varkappa\right)}{\mathrm{cn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\mathrm{sn}^2\left(K\frac{z}{l}, \varkappa\right) + \mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)} \times$$
$$\times\sqrt{1 - \varkappa^2\,\mathrm{sn}^2\left(K\frac{z}{l}, \varkappa\right)}. \tag{30}$$

Se observă că pe axa reală ($0 \leqslant x \leqslant l$, $y = 0$), componenta v_x este nulă iar v_y are expresia

$$v_y = \frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\frac{y_s}{l}\frac{2K\,\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\mathrm{sn}\left(K\frac{x}{l}, \varkappa\right)}{1 - \mathrm{cn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\mathrm{cn}^2\left(K\frac{x}{l}, \varkappa\right)} \times \sqrt{1 - \varkappa^2\,\mathrm{sn}^2\left(K\frac{x}{l}, \varkappa\right)}. \tag{31}$$

Deoarece pentru $0 \leqslant x \leqslant l$, $\operatorname{cn}\left(K\frac{x}{l}, \varkappa\right)$ este cuprins între 1 şi 0, iar $0 < \operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right) < 1$, rezultă că v_y este pozitivă, aşa cum cer ecuaţiile fizice ale problemei. În particular, pentru $x = 0$ avem $v_y = 0$, în timp ce pentru $x = l$, v_y are valoarea

$$v_y\big|_{x=l} = 2\frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\frac{y_s}{l}\varkappa' K \operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right). \tag{32}$$

De asemenea, pe axa imaginară ($x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant h$) numai componenta v_x a vitezei este diferită de zero şi are expresia

$$v_x = \frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\frac{y_s}{l}\frac{2K\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\operatorname{sn}\left(K\frac{y}{l}, \varkappa'\right)}{\operatorname{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right) - \operatorname{sn}^2\left(K\frac{y}{l}, \varkappa'\right)} \times \sqrt{1 - \varkappa'^2\operatorname{sn}^2\left(K\frac{y}{l}, \varkappa'\right)}. \tag{33}$$

Se observă că atunci cînd $y < y_s$, v_x este pozitivă, iar dacă $y > y_s$, v_x este negativă, ceea ce corespunde cu schema fizică adoptată. Pentru $y = 0$, rezultă $v_x = 0$, iar pentru $y = h$, se găseşte

$$v_x\big|_{y=h} = -2\frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\frac{y_s}{l}\frac{\varkappa K}{\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)} \tag{34}$$

Mai remarcăm că în punctul $y = y_s$ viteza v_x devine infinită. Această situaţie care nu poate corespunde cu realitatea se datoreşte aproximaţiilor introduse în metoda de tratare a problemei.

Trecînd acum la calculul debitului, vom utiliza în acest scop expresia funcţiei de curent. Din examinarea formulei (25) rezultă însă că această funcţie prezintă o singularitate în punctul $z = iy_s$, astfel că nu putem determina cu ajutorul ei debitul total. În schimb, putem găsi cu destulă uşurinţă debitul de lichid care pătrunde prin faţa inferioară a blocului poros. În acest scop, este suficient să cunoaştem valorile pe care le ia funcţia de curent în punctele O şi A (fig. 1). Deoarece în A avem $\psi = 0$, fapt care se verifică imediat punînd în (25) $z = l$ şi corespunde altfel condiţiilor la limite ale problemei, rămîne să calculăm valoarea funcţiei de curent în punctul O ($z = 0$). Acestui punct îi corespunde în planul Z punctul

$$Z = -\frac{2 + \xi_s}{\xi_s}, \tag{35}$$

sau, dacă utilizăm relaţia (18)

$$Z = -\frac{2 - \operatorname{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}{\operatorname{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}. \tag{36}$$

Pe de altă parte, avem pe axa reală

$$F(Z)|_{Z=X} = i\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,y_s \log\left(X+\sqrt{X^2-1}\right) \tag{37}$$

și deoarece punctele de pe segmentul OA din planul z, pentru care avem $0 < x < l$, $y = 0$, corespund în planul Z cu punctele de pe segmentul $-\frac{2+\xi_s}{\xi_s} < X < -1$, $Y = 0$, putem scrie

$$\log\left(X+\sqrt{X^2-1}\right)=\log\left(-|X|+\sqrt{X^2-1}\right)=i\pi+\log\left(|X|-\sqrt{X^2-1}\right), \tag{38}$$

de unde rezultă, după înlocuirea în (37),

$$\Psi = \frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,y_s \log\left(|X|-\sqrt{X^2-1}\right). \tag{39}$$

Pentru punctul din planul Z care corespunde cu punctul O din planul z, găsim însă din (36)

$$|X| = \frac{2-\mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)}{\mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)} \tag{40}$$

și prin urmare

$$\psi|_{z=0} = \frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,y_s \log\left\{\frac{2-\mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)}{\mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)}-\sqrt{\left[\frac{2-\mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)}{\mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)}\right]^2-1}\right\}. \tag{41}$$

Această expresie se scrie succesiv, dacă utilizăm unele proprietăți cunoscute ale funcțiilor eliptice,

$$\begin{aligned}\psi|_{z=0} &= \frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,y_s \log\frac{2-\mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)-2\,\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)}{\mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)} = \\ &= \frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,y_s \log\frac{\left[1-\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)\right]^2}{\mathrm{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)} = \\ &= \frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,y_s \log\frac{1-\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)}{1+\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)}.\end{aligned} \tag{42}$$

Notînd cu Q_i debitul, acesta are deci expresia

$$Q_i = \frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\, l\, \frac{y_s}{l} \log \frac{1 + \operatorname{cn}\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}{1 - \operatorname{cn}\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)} \tag{43}$$

care se mai poate scrie

$$Q_i = \frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\, l g_i\left(\frac{y_s}{l}\right) \tag{44}$$

funcția $g_i\left(\frac{y_s}{l}\right)$, avînd expresia

$$g_i\left(\frac{y_s}{l}\right) = \frac{y_s}{l} \log \frac{1 + \operatorname{cn}\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}{1 - \operatorname{cn}\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)}. \tag{45}$$

Din examinarea formulei (44) rezultă că debitul Q_i este proporțional cu diferența de greutate specifică dintre cele două lichide, cu aria suprafeței inițiale de contact dintre apă și blocul poros și cu o funcție de raportul $\frac{y_s}{l}$.

Atunci cînd y_s devine egal cu zero, funcția $g_i\left(\frac{y_s}{l}\right)$ are ca limită o formă nedeterminată; prin aplicarea regulei lui l'Hospital, se poate arăta că limita către care tinde $g_i\left(\frac{y_s}{l}\right)$ în acest caz este zero. Prin urmare, debitul este nul fapt care concordă cu constatarea făcută anterior.

Mai sus, am observat că funcția (25) nu poate fi utilizată pentru calculul debitului de lichid care pătrunde în mediul poros prin fisură. Pentru justificare, vom determina expresia funcției de curent pe segmentul OS ($x = 0$, $0 < y < y_s$). În acest scop, vom pleca tot de la formula (39), în care vom pune

$$X = \frac{\xi - (2 + \xi_s)}{\xi + \xi_s}, \quad |X| = \frac{2 + \xi_s - \xi}{\xi + \xi_s} \tag{46}$$

și

$$\xi = -\frac{\operatorname{sn}^2\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right)}{\operatorname{cn}^2\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right)}, \tag{47}$$

în timp ce pentru ξ_s vom utiliza expresia (18). După calcule simple, asupra cărora nu insistăm, găsim

$$\psi = \frac{k}{\mu} \frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi} y_s \log \frac{\left[\mathrm{cn}\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right) - \mathrm{cn}\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right)\right]^2}{\mathrm{sn}^2\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right) - \mathrm{sn}^2\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right)}, \tag{48}$$

expresie care pentru $y = 0$ coincide cu (42), așa cum este firesc.

Pentru $y = y_s$, funcția de sub logaritm are ca limită o formă nedeterminată; aplicînd și aici regula lui l'Hospital, ajungem la concluzia că această limită este zero, ceea ce înseamnă că funcția de curent devine infinită.

Putem indica însă un mod cu totul aproximativ de a estima debitul în cauză, bazat pe unele considerații asupra modului în care trebuie să varieze viteza pe segmentul OS. În punctele situate pe acest segment în apropiere de O, expresia (33) a vitezei v_x trebuie să dea valori destul de apropiate de acelea reale. În ceea ce privește cealaltă extremitate a segmentului și anume punctul S, vom admite că v_x este acolo nulă, ipoteză care ni se pare în concordanță cu aspectul fizic al fenomenului de dezlocuire. În acest caz, v_x va avea un maxim între O și S; vom presupune că acest maxim se află în punctul $\left(x = 0,\ y = \frac{y_s}{2}\right)$ și că variația vitezei v_x pe segmentul OS este simetrică în raport cu acest punct. Ca urmare a acestor ipoteze, debitul căutat este dat de formula

$$Q_f = 2 \int_0^{\frac{y_s}{2}} v_x \, dy. \tag{49}$$

Admitem că între punctele O și $\left(x = 0,\ y = \frac{y_s}{2}\right)$ variația vitezei este aceea dată de (33), ipoteză pe care o considerăm apropiată de situația reală, așa cum am mai spus de altfel. Observînd mai departe că (33) se mai scrie

$$v_x = \frac{k}{\mu} \frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi} \frac{y_s}{l} \frac{2K \,\mathrm{cn}\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right) \mathrm{sn}\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right) \mathrm{dn}\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right)}{\mathrm{sn}^2\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right) - \mathrm{sn}^2\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right)} \tag{50}$$

rezultă

$$Q_f = 4K \frac{k}{\mu} \frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi} \frac{y_s}{l} \mathrm{cn}\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right) \int_0^{\frac{y_s}{2}} \frac{\mathrm{sn}\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right) \mathrm{dn}\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right)}{\mathrm{sn}^2\left(K \frac{y_s}{l}, \varkappa'\right) - \mathrm{sn}^2\left(K \frac{y}{l}, \varkappa'\right)} dy. \tag{51}$$

Avem însă

$$\int \frac{\operatorname{sn}\left(K\frac{y}{l},\varkappa'\right)\operatorname{dn}\left(K\frac{y}{l},\varkappa'\right)}{\operatorname{sn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)-\operatorname{sn}^2\left(K\frac{y}{l},\varkappa'\right)}dy=-\frac{l}{K}\int\frac{d\left[\operatorname{cn}\left(K\frac{y}{l},\varkappa'\right)\right]}{\operatorname{cn}^2\left(K\frac{y}{l},\varkappa'\right)-\operatorname{cn}^2\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)}=$$

$$=\frac{l}{K}\,\frac{1}{2\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)}\log\frac{\operatorname{cn}\left(K\frac{y}{l},\varkappa'\right)+\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)}{\operatorname{cn}\left(K\frac{y}{l},\varkappa'\right)-\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)} \tag{52}$$

prin urmare

$$Q_f=2\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,l\,\frac{y_s}{l}\log\frac{\left[\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{2l},\varkappa'\right)+\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]\left[1-\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]}{\left[\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{2l},\varkappa'\right)-\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]\left[1+\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]}. \tag{53}$$

Dacă ţinem seama de relaţia

$$\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{2l},\varkappa'\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)+\operatorname{dn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)}{1+\operatorname{dn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)}}, \tag{54}$$

expresia (53) a debitului se mai poate scrie

$$Q_f=\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,l g_f\left(\frac{y_s}{l}\right), \tag{55}$$

cu

$$g_f\left(\frac{y_s}{l}\right)=2\frac{y_s}{l}\log\frac{\left[\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{2l},\varkappa'\right)+\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]\left[1-\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]}{\left[\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{2l},\varkappa'\right)-\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]\left[1+\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]}. \tag{56}$$

Debitul total este deci

$$Q=Q_i+Q_f=\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,l g\left(\frac{y_s}{l}\right), \tag{57}$$

cu

$$g\left(\frac{y_s}{l}\right)=g_i\left(\frac{y_s}{l}\right)+g_f\left(\frac{y_s}{l}\right). \tag{58}$$

4. *Concluzii*. Formula (57) a debitului are un caracter aproximativ, datorită nu numai simplificărilor utilizate în metoda de tratare a problemei ci şi felului în care a fost determinat debitul Q_f, respectiv funcţia

$g_t\left(\frac{y_s}{l}\right)$. Ea conduce însă la unele concluzii de aceeaşi natură cu cele semnalate în legătură cu expresia debitului Q_i şi care par interesante. Se constată anume că debitul total de lichid Q dezlocuit din mediul poros este proporţional cu diferenţa de greutate specifică dintre cele două lichide şi cu aria suprafeţei de contact iniţial dintre blocul poros şi apă. De asemenea acest debit mai este proporţional şi cu o funcţie de raportul $\frac{y_s}{l}$. Ceea ce se poate afirma cu precizie în legătură cu această ultimă dependenţă este numai faptul că deslocuirea nu se produce atunci cînd acest raport are valorile extreme şi anume zero şi $\frac{h}{l}$. Pentru o valoare intermediară a raportului $\frac{y_s}{l}$, formula (57) dă debitul cu o aproximaţie necunoscută, despre care putem însă presupune că se găseşte în limite admisibile. De altfel, acest lucru nu prezintă o importanţă practică deosebită deoarece la o exploatare cu debit constant experienţele despre care am amintit au arătat că raportul $\frac{y_s}{l}$ trebuie să crească. Într-adevăr, pe măsură ce apa invadează blocul poros, diferenţa de nivel efectivă dintre apa din fisură şi aceea din bloc scade, ceea ce ar conduce la o scădere a debitului, dacă nivelul apei din fisură nu s-ar ridica.

Metoda pe care am utilizat-o poate servi şi la determinarea avansării suprafeţei de contact dintre apă şi petrol în mediul poros. Calculele sînt însă destul de greoaie iar ipotezele ce stau la baza metodei fac ca interesul practic al rezultatului să fie relativ redus, aşa că nu am socotit necesar ca să ne ocupăm, în momentul de faţă, de acest aspect al problemei.

Primită la redacţie la 28 decembrie 1961

О ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ВОДОЙ В ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается, на основании упрощенной физической схемы, механизм вытеснения нефти водой в трещиноватой пористой среде. Предполагая справедливость линейного закона фильтрации, приходят к смешанной граничной задаче для уравнения Лапласа.

Дается решение этой задачи, в котором выявляются физические параметры, влияющие на процесс вытеснения.

SUR LE DÉPLACEMENT PAR L'EAU, DU PÉTROLE, DANS LES MILIEUX POREUX FISSURÉS

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur, prenant comme point de départ un schéma physique simplifié, étudie le mécanisme par lequel l'eau déplace le pétrole dans un milieu poreux fissuré. Dans l'hypothèse que la loi de filtration serait linéaire, il aboutit à un problème aux limites mixte en ce qui concerne l'équation de Laplace. Il donne à ce problème une solution où apparaissent les paramètres physiques qui influencent le processus de déplacement.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor*. **II**. Ed. Acad. R.P.R., București, 1955, 163–164.
2. PH. M. MORSE, H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics*. Mc. Graw-Hill Book Company New York, Toronto, London, 1953, 1251–1252.
3. M. MUSKAT, *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, Mc. Graw-Hill Book Company, New York and London, 1937, 466–468.

STUDII

HIDROMECANICĂ

ASUPRA APLICĂRII TEORIEI FUNCȚIILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ ÎN HIDRODINAMICA FLUIDELOR VÎSCOASE

IV. SOLUȚIA PENTRU DOMENII MULTIPLU CONEXE

DE

DAN GH. IONESCU

1. În continuarea notelor [2], [3], [4], considerăm că fluidul vîscos, în mișcare plană, lentă și permanentă, ocupă domeniul multiplu conex mărginit D, limitat de o curbă exterioară L_0 și de curbele $L_1, \ldots, L_m$, interioare lui L_0, toate aceste curbe fiind închise, simple, disjuncte, în întregime situate la distanță finită și de clasă C^3 în sensul definit în nota III. Fie D_k domeniul finit simplu conex limitat de curba L_k, $(k = 1, \ldots, m)$, D_0 domeniul exterior curbei L_0, iar $L = L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_m$ frontiera domeniului D. În acest caz, [2], funcțiile lui Goursat sînt de forma

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi^\circ(z), \tag{1}$$

$$\psi(z) = -\sum_{k=1}^{m} \bar{\gamma} \ln(z - z_k) + \psi^\circ(z), \tag{2}$$

unde $\varphi^\circ(z)$ și $\psi^\circ(z)$ sînt funcții olomorfe în D, γ_k constante complexe arbitrare, iar z_k puncte fixe arbitrare situate în domeniile D_k. Vom lua

$$\varphi^\circ(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t - z} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{z - z_k}, \tag{3}$$

$$\psi^\circ(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\,\omega(t)\,dt}{(t - z)^2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k}{z - z_k}, \tag{4}$$

$$\beta_k = i\int_{L_k} [\omega(t)\,d\bar{t} + \overline{\omega(t)}\,dt], \qquad (k = 1, \ldots, m), \tag{5}$$

$$\gamma_k = \int_{L_k} \omega(t)\,ds, \qquad (k = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

$\omega(t)$ fiind o funcție necunoscută și care urmează a fi determinată pe conturul L, iar ds fiind elementul de arc al curbei L_k. Vom presupune că $\omega(t)$ are în orice punct al lui L o derivată hölderiană. Introducînd expresiile (1) — (6) în expresia $F(z) = \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}$, apoi făcînd ca punctul $z \in D$ să tindă către punctul $t_0 \in L$ și aplicînd formulele lui Plemelj, se obține pentru $\omega(t)$ ecuația integrală

$$\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\, d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\, d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \\ + \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\beta_k}{t_0-z_k} - \frac{\bar{\beta}_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\right)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k\left[\ln(t_0-z_k) + \ln(\bar{t}_0-\bar{z}_k)\right] - t_0\sum_{k=1}^{m}\frac{\bar{\gamma}_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_k} = g(t_0), \tag{7}$$

unde $g(t_0) = u(t_0) + iv(t_0)$. Punînd $t - t_0 = r\, e^{i\vartheta(t_0,\, t)}$, unde $r = |t-t_0|$, iar $\vartheta(t_0, t)$ este unghiul format de vectorul $\overrightarrow{t_0 t}$ cu direcția pozitivă a axei Ox, apoi însemnînd $\partial\vartheta(t_0, t)/\partial t = \vartheta'(t_0, t)$, (7) devine

$$\omega(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \omega(t)\,\vartheta'(t_0, t)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_L \overline{\omega(t)}\, e^{2i\vartheta(t_0,\, t)}\,\vartheta'(t_0, t)\, dt + \\ + \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\beta_k}{t_0-z_k} - \frac{\bar{\beta}_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\left(1-\frac{t_0}{\bar{t}_0-\bar{z}_k}\right)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k\left[\ln(t_0-z_k) + \ln(\bar{t}_0-\bar{z}_k)\right] - t_0\sum_{k=1}^{m}\frac{\bar{\gamma}_k}{\bar{t}_0-\bar{z}_k} = g(t_0), \tag{8}$$

ecuație analogă celor obținute în teoria elasticității de G. Lauricella și în special de D. I. Șerman.

2. Dacă domeniul D este exterior curbelor L_k, $(k = 1, \ldots, m)$, simple, închise, disjuncte, de clasă C^3 și situate în întregime la distanță finită, funcțiile lui Goursat sînt de forma

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{m}\gamma_k \ln(z - z_k) + \Gamma_1 z + \Gamma_0 + \mathring{\varphi}(z), \tag{9}$$

$$\psi(z) = -\sum_{k=1}^{m}\bar{\gamma}_k \ln(z - z_k) + \Gamma_2 z + \mathring{\psi}(z), \tag{10}$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{m}\gamma_k = 0, \tag{11}$$

unde $\mathring{\varphi}(z)$ și $\mathring{\psi}(z)$ sînt funcții olomorfe în D și nule la infinit, Γ_0 și γ_k sînt constante complexe urmînd a fi determinate, z_k sînt puncte fixe alese arbitrar în interiorul conturelor L_k, iar Γ_1 și Γ_2 sînt constante complexe date funcție de distribuția de viteze la mari distanțe. Vom lua funcțiile $\overset{\circ}{\varphi}(z)$ și $\overset{\circ}{\psi}(z)$ de forma (3) – (5), iar constantele γ_k și Γ_0 de forma

$$\gamma_k = \int_{L_k} \omega(t)\, ds, \qquad (k = 1, \ldots, m-1), \tag{12}$$

$$\gamma_m = -\sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k = -\int_{L_1 \cup \ldots \cup L_{m-1}} \omega(t)\, ds, \qquad \Gamma_0 = \int_{L_m} \omega(t)\, ds. \tag{13}$$

Funcția $\omega(t)$, presupusă a avea în orice punct al conturului $L = L_1 \cup \ldots \cup L_m$ o derivată hölderiană, este dată de ecuația integrală

$$\omega(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \omega(t)\, \vartheta'(t_0, t)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_L \overline{\omega(t)}\, e^{2i\vartheta(t_0, t)}\, \vartheta'(t_0, t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\beta_k}{t_0 - z_k} - \frac{\bar{\beta}_k}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k}\left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k}\right)\right] + \Gamma_0 + \tag{14}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1}\left[\gamma_k\left(\ln\frac{t_0 - z_k}{t_0 - z_m} + \ln\frac{\bar{t}_0 - \bar{z}_k}{\bar{t}_0 - \bar{z}_m}\right) - \bar{\gamma}_k \frac{t_0(\bar{z}_k - \bar{z}_m)}{(\bar{t}_0 - \bar{z}_k)(\bar{t}_0 - \bar{z}_m)}\right] = \mathring{g}(t_0),$$

unde

$$\mathring{g}(t_0) = u(t_0) + iv(t_0) + (\bar{\Gamma}_1 - \Gamma_1)\, t_0 + \bar{\Gamma}_2\, \bar{t}_0,$$

iar

$$\vartheta(t_0, t) = \arg(t - t_0).$$

3. Frontiera domeniului D fie formată de curbele L_k, $(k=1, \ldots, m)$, simple, închise, de clasă C^3 și situate în întregime la distanță finită, precum și de curba infinită L_0, simplă și de clasă C^3, iar originea axelor de coordonate fie situată în exteriorul atît al domeniului $D + L$, $(L = L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_m)$, cît și al domeniilor D_k limitate de curbele L_k, $(k = 1, \ldots, m)$. Funcțiile lui Goursat sînt în acest caz de forma

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right) + \Gamma_1 z + \Gamma_0 + \overset{\circ}{\varphi}(z), \tag{15}$$

$$\psi(z) = -\sum_{k=1}^{m} \bar{\gamma}_k \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right) + \Gamma_2 z + \overset{\circ}{\psi}(z), \tag{16}$$

unde $\overset{\circ}{\varphi}(z)$ și $\overset{\circ}{\psi}(z)$ sînt funcții olomorfe în D, γ_k constante complexe urmînd a fi determinate, z_k puncte fixe situate în interiorul domeniilor D_k, iar Γ_0, Γ_1, Γ_2 constante complexe date funcție de distribuția de viteze la mari distanțe. Vom presupune că, pentru z mare, funcția $\overset{\circ}{F}(z) = \overset{\circ}{\varphi}(z) - z\,\overline{\overset{\circ}{\varphi}{}'(z)} - \overline{\overset{\circ}{\psi}(z)}$ este mărginită, iar $\overset{\circ}{\varphi}{}'(z) = 0\,(1/z)$. Vom lua funcțiile $\overset{\circ}{\varphi}(z)$ și $\overset{\circ}{\psi}(z)$ de forma (3)–(5), iar constantele γ_k de forma (6), $\omega(t)$ fiind o funcție necunoscută dată de ecuația integrală

$$\begin{aligned}\omega(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \omega(t)\, d\vartheta(t_0, t) + \frac{1}{\pi}\int_L \overline{\omega(t)}\, e^{2i\vartheta(t_0, t)}\, d\vartheta(t_0, t) + \\ + \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\beta}{t_0 - z_k} - \frac{\overline{\beta}_k}{\overline{t}_0 - z_k}\left(1 - \frac{t}{\overline{t}_0 - \overline{z}_k}\right)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{m}\gamma_k\left[\ln\left(1 - \frac{z_k}{t_0}\right) + \ln\left(1 - \frac{\overline{z}_k}{\overline{t}_0}\right)\right] - \frac{t}{\overline{t}_0}\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{\gamma}_k\,\overline{z}_k}{\overline{t}_0 - \overline{z}_k} = \overset{\circ}{g}(t_0),\end{aligned} \tag{17}$$

unde

$$\overset{\circ}{g}(t_0) = u(t_0) + iv(t_0) - \Gamma_0 + (\overline{\Gamma}_1 - \Gamma_1)\, t_0 + \overline{\Gamma}_2\, \overline{t}_0,$$

$$\vartheta(t_0, t) = \arg(t - t_0), \quad d\vartheta(t_0, t) = \vartheta'(t_0, t)\, dt.$$

4. Demonstrația existenței soluției ecuațiilor (8), (14), (17) poate fi efectuată aplicînd alternativa lui Fredholm.

5. Considerațiile precedente permit obținerea unor rezultate privind rezolvarea aproximativă a cazurilor concrete. Anume, presupunînd că frontierele L_k sînt suficient de depărtate una de alta, se poate demonstra convergența unui algoritm care generalizează cunoscutul algoritm al lui Schwarz pentru problema lui Dirichlet.

Primită la redacție la 27 octombrie 1961

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ГИДРОДИНАМИКЕ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

IV. РЕШЕНИЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

РЕЗЮМЕ

В настоящей заметке, являющейся продолжением работ [2], [3], [4], рассматривается установившееся медленное плоское движение вязкой жидкости, занимающей конечную или бесконечную многосвязную область. Дается общее решение, причем задача сводится к интегральным уравнениям типа уравнений, полученных в теории упругости Г. Лауричелла и особенно Д. И. Шерманом.

SUR L'APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE DANS L'HYDRODYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX

IV. SOLUTION POUR LES DOMAINES MULTIPLEMENT CONNEXES

RÉSUMÉ

Dans cette note, où sont continués les travaux [2], [3], [4], on considère le mouvement plan, lent et permanent d'un fluide visqueux occupant un domaine multiplement connexe, fini ou infini. On donne la solution générale, en réduisant le problème à des équations intégrales du type de celles que G. Lauricelle et surtout D. I. Sherman ont obtenues dans la théorie de l'élasticité.

BIBLIOGRAFIE

1. I. BABUŠKA, K. REKTORYS, FR. VYČICHLO, *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme*. Akademie-Verlag, Berlin, 1960.
2. DAN GH. IONESCU, *Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. I. Formulele fundamentale*. Comunicările Acad. R.P.R., 981–984, **6** (1956).
3. — *Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. II. Rezolvarea primei probleme la limită pentru cerc şi coroana circulară, cu ajutorul seriilor de puteri*. Comunicările Acad. R.P.R., 1059–1061, **6** (1956).
4. — *Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. III. Soluţia pentru domenii simplu conexe*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **13**, 47–51 (1962).
5. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1954.

ASUPRA SCURGERII GAZELOR CU VITEZE MARI ÎN STRATURI SUBȚIRI

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Într-o lucrare anterioară [1] am examinat unele aspecte legate de mişcarea cu viteze mari a unui gaz vîscos în straturi subțiri datorită unui gradient de presiune. Să considerăm acum un caz mai general şi anume scurgerea cu frecare a unui gaz printr-un ajutaj de dimensiuni transversale reduse (fig. 1), astfel încît stratul limită care se dezvoltă în apropierea pereților să cuprindă întreaga secțiune. Să presupunem în plus că suprafața mediană $y = 0$ se deplasează cu o viteză tangențială V. În consecință scurgerea prin ajutaj se datoreşte în egală măsură unui gradient de presiune şi antrenării prin intermediul frecării.

O asemenea problemă poate avea aplicații diferite la scurgerea gazelor prin ajutaje speciale, injectoare, scurgerea locală în anumite instalații în zonele în care se produc strangulări puternice etc., la sfîrşit aplicația cea mai importantă o constituie studiul lubrificației cu gaze ținînd seama de efectul forțelor de inerție ale gazului lubrifiant. În condiții obişnuite forțele de inerție au o influență neglijabilă asupra mişcării din toate acestea la viteze tangențiale mari sau cînd diferențele de presiune sînt mari pot apare deosebiri calitative de care trebuie să se țină seama. Cazul particular examinat în lucrarea [1] corespunde lagărelor axiale alimentate sub presiune cu viteze tangențiale neglijabile. În cele ce urmează vom considera în special efectul vitezei tangențiale V şi al variației grosimii h cu x, elemente caracteristice funcționării lagărelor cu aer în regim hidrodinamic.

Să considerăm pentru simplificare că mişcarea este bidimensională şi staționară, cu axa y dirijată după normala la suprafața mobilă. Ecuațiile mișcării gazului în stratul format între cele două suprafețe se scriu sub forma

$$\left.\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

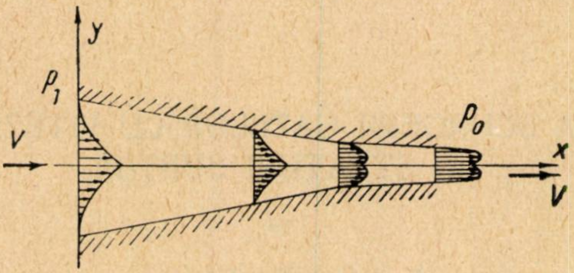


Fig. 1

la care se asociază ecuația de continuitate

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

și ecuația de stare sub forma aproximativă a unei evoluții politropice a gazului lubrifiant

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const.} \tag{3}$$

În sfîrșit, condițiile la limită pentru viteze sînt

$$\begin{aligned} \text{la } y = 0\,; \quad u = V\,; \quad v = 0, \\ y = h\,; \quad u = 0\,; \quad v = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

iar pentru presiuni se indică de obicei valorile presiunilor la $x = 0$ și $x = l$, funcție de tipul de lagăr și de existența unei alimentări sub presiune.

Pentru integrarea ecuației (1) se poate introduce funcția de curent [1] definită prin relațiile

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial W}{\partial y}\,; \quad v = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial W}{\partial x}, \tag{5}$$

în care caz ecuația de continuitate se scrie

$$(W)_{y=h} - (W)_{y=0} = -\frac{\mathcal{M}_x}{\rho_0} = \text{const.} \tag{6}$$

unde $\mathcal{M}_x$ este debitul masic de lubrifiant iar ρ_0 este o densitate de referință (de exemplu densitatea mediului înconjurător).

Dacă forțele de inerție au o influență redusă, funcția W poate fi pusă sub forma

$$W = W_0 + \frac{\rho_0}{\mu} W_1 + \frac{\rho_0^2}{\mu^2} W_2 + \ldots \tag{7}$$

unde W este valoarea funcției de curent în absența forțelor de inerție, a cărei expresie poate fi dedusă cu ușurință

$$W_0 = \frac{\rho}{2\mu\, \rho_0} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2 h}{2} \right) + \frac{\rho V}{\rho_0} \left(y - \frac{1}{2} \frac{y^2}{h} \right). \tag{8}$$

Reținînd numai primii doi termeni ai dezvoltării (7) și procedînd analog cazului simplificat anterior [1] se deduce din (1) și (6) ecuația diferențială a presiunilor sub forma

$$\frac{\rho h^3}{12\mu\, \rho_0} \frac{dp}{dx} + \frac{\rho V h}{2\rho_0} + \frac{\rho_0}{\mu} \left[\int dy \int dy \int f_1(x, y)\, dy - \frac{h}{2} \int dy \int f_1(x, y)\, dy \right]_{y=h} = \\ = \frac{\mathcal{M}_x}{\rho_0} = \text{const.} \tag{9}$$

unde

$$\frac{\rho_0}{\rho} f_1(x, y) = \frac{\partial W_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial W_0}{\partial y} \right) - \frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial^3 W_1}{\partial y^3}. \tag{10}$$

Pentru restul funcțiilor W_2, $W_3 \ldots$ acesta rezultă sub o formă analoagă cu (10) iar efectul lor apare prin adăugarea unor termeni suplimentari în ecuația (9), proporționali respectiv $\frac{\rho_0^2}{\mu^2}$, $\frac{\rho_0^3}{\mu^3}$ etc.

Se constată că dacă se neglijează termenul proporțional cu $\frac{\rho_0}{\mu}$ în ecuația (9) se regăsește ecuația presiunilor în cazul cînd nu se iau în considerare forțele de inerție.

Ecuația (9) este greu de integrat sub forma de mai sus. De aceea pentru a obține cel puțin calitativ influența forțelor de inerție, ca și în lucrarea [1] vom căuta să o simplificăm prin asimilarea mișcării cu una cvasiunidimensională. În acest scop vom înlocui distribuția reală de viteze cu o valoare medie, bineînțeles păstrînd pentru tensiunile de frecare variația reală corespunzătoare.

Astfel ținînd seama de condițiile la limită (4), ecuația de continuitate se poate scrie sub forma integrală

$$\int_0^h \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} dy = 0\,; \quad \varphi u_m h = \varphi h \left(U + \frac{V}{2} \right) = \mathcal{M}_x = \text{const.} \tag{11}$$

unde U_m este viteza medie în secțiune, presupusă ca fiind egală cu suma dintre viteza medie constantă $\frac{V}{2}$ care rezultă dacă $\frac{dp}{dx} = 0$ și diferența corespunzătoare $U(x)$ care este o funcție de x.

Apoi, ținînd seama de ecuația (2) ecuația (1) se mai poate scrie

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{12}$$

sau, integrînd termen cu termen și ținînd seama de condițiile (4)

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho \int_0^h u^2\, dy\right] = -\frac{h}{\mu}\frac{dp}{dx} + \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}\right]\cdot \tag{13}$$

Să considerăm că într-o primă aproximație, distribuția vitezelor nu diferă de o distribuție parabolică în regim laminar. După cum se va arăta mai jos, profilul distribuției vitezelor influențează în special ultimul termen al ecuației (13) care reprezintă tensiunile de frecare și are o influență calitativ redusă asupra primului termen ce reprezintă influența forțelor de inerție.

În aceste condiții rezultă imediat

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{12U}{h} \tag{14}$$

și

$$\int_0^h u^2\, dy = h\left(\frac{6}{5}U^2 + UV + \frac{V^3}{3}\right)\cdot \tag{15}$$

Expresia (15) are o formă greu utilizabilă în calculele ulterioare. O simplificare importantă poate fi obținută dacă se observă că paranteza din relația (15) diferă destul de puțin ca valoare de U_m^2. În consecință o putem înlocui cu U_m^2 sau mai precis, se poate pune

$$\frac{6}{5}U^2 + UV + \frac{V^2}{3} = \alpha U_m^2 = \alpha\left(U^2 + UV + \frac{V^2}{4}\right), \tag{16}$$

unde pentru coeficientul $\alpha > 1$ se poate lua o valoare medie constantă. Ipoteza de mai sus nu este riguroasă dacă $V = 0$, cînd $\alpha = \frac{6}{5}$ dacă distribuția de viteze este parabolică și $\alpha \cong 1$ în regim turbulent. În realitate, coeficientul α variază cu x, respectiv cu $\frac{U}{V}$, după cum se constată din figura 2. Dar deoarece întotdeauna $\frac{U}{V} > 0{,}5$, coeficientul de mai sus este cuprins între $1,2 \leqslant \alpha \leqslant 1,4$ și se poate considera ca o valoare medie de exemplu $\alpha = 1{,}3$. În aceste condiții, ecuația (13) se poate scrie

$$\alpha U_m\, dU_m + \frac{dp}{\rho} + \frac{12 U}{\rho h^2}\, dx = 0. \tag{17}$$

Utilizînd apoi ecuațiile de continuitate și de stare, de asemenea sub formă diferențială

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU_m}{U_m} + \frac{dh}{h} = 0\,; \qquad \frac{dp}{p} - n\frac{d\rho}{\rho} = 0. \tag{18}$$

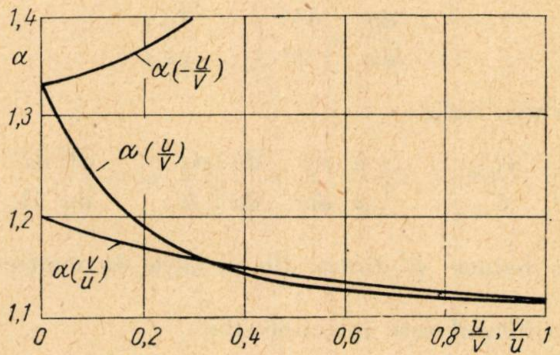


Fig. 2

Definind apoi o viteză critică

$$a_*^2 = n\,\frac{p}{\rho} = nRT \tag{19}$$

egală cu viteza sunetului dacă $n = \dfrac{C_p}{C_u}$ (evoluție izentropică) și un număr Mach corespunzător

$$M_* = \frac{U_m}{a_m} \tag{20}$$

ecuația (17) se scrie în cele din urmă sub forma

$$(1 - \alpha M_*^2)\,\frac{dU_m}{U_m} = \left(\frac{12\,\mu U}{\alpha p h} - \frac{dh}{dx}\right)\frac{dx}{h}\,. \tag{21}$$

Pentru $\alpha = 1$ și $\mu \to 0$ se regăsește ecuația cunoscută din studiul scurgerilor unidimensionale ale gazelor [2].

Înainte de a analiza comportarea ecuației de mai sus în diferite cazuri, să observăm mai întîi că pentru cazurile în care forțele de inerție sînt neglijabile, $M_*^2 \to 0$ și

$$\frac{dU_m}{U_m} = \left(\frac{12\,\mu U}{xph} - \frac{dh}{dx}\right)\frac{dx}{h}\,. \tag{22}$$

Fie de exemplu $n = 1$. Dacă se notează cu

$$\Pi = ph \tag{23}$$

și se ține seama că în acest caz [3]

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\mu V}{h^2}\left(1 - \frac{C_1}{ph}\right) \tag{24}$$

ecuația (22) se mai scrie

$$\frac{dU_m}{U_m} = -\left(\frac{h}{p}\frac{dp}{dx} + \frac{dh}{dx}\right)\frac{dx}{h} = -\frac{d\Pi}{dx}\frac{dx}{\Pi} \tag{25}$$

formă care se deduce și direct din ecuația de continuitate, deoarece $\Pi U_m = \text{const.}$

Dacă lubrifiantul este incompresibil

$$\frac{dU_m}{U_m} = -\frac{dh}{dx}\frac{dx}{h}\,. \tag{26}$$

Cu alte cuvinte viteza variază întotdeauna în sens invers grosimii h $\left(\text{crește cînd } \frac{dh}{dx} < 0 \text{ și scade cînd } \frac{dh}{dx} > 0\right)$.

Ecuația (25) prezintă o proprietate analoagă dacă se consideră funcția Π în locul grosimii h. Dacă se examinează comportarea față de funcția h, atunci, ținînd seama de (24), (25) se deduce

$$\frac{dU_m}{U_m} = -\frac{dh}{dx}\frac{dx}{h}\left[1 - \frac{6\mu N}{\nu\Pi}\left(1 - \frac{C_1}{\Pi}\right)\right] \tag{27}$$

unde $C_1 = p_{max}\, h_0$ și $\nu = -\dfrac{dh}{dx}$.

Semnul termenului $\dfrac{dU_m}{U_m}$ va depinde în plus față de cazul incompresibil, de semnul parantezei din (27) respectiv de semnul derivatei $\dfrac{d\Pi}{dx}$, deoarece întotdeauna $h > 0$, $\Pi > 0$. Dar se constată că paranteza de mai sus este pozitivă, nulă sau negativă în funcție de valoarea funcției Π, respectiv de rădăcinile

$$\Pi_{1,2} = \frac{3\mu V}{\nu}(1 \pm \delta); \quad \delta^2 = 1 - \frac{2\nu C_1}{3\mu V}. \tag{28}$$

Aceste rădăcini sînt imaginare, confundate sau reale după cum respectiv $\delta^2 < 0$, $\delta^2 = 0$ sau $\delta^2 > 0$. Este interesant de remarcat că dacă $\frac{dh}{dx} > 0$, $\nu < 0$ și întotdeauna $\delta^2 > 0$. Există deci întotdeauna posibilitatea ca variația vitezei să schimbe de semn, fenomen care nu se produce în cazul incompresibil și care prezintă unele analogii cu modificarea vitezelor la trecerea de la regimul subsonic la cel supersonic. Într-adevăr în ecuația (22) primul termen conține efectul frecării care accelerează gazul, în timp ce al doilea arată că creșterea secțiunii tinde să-l frîneze. După cum unul sau altul dintre efecte este preponderent, variația vitezei va fi pozitivă sau negativă.

Dacă însă $\nu > 0$, $\frac{dh}{dy} < 0$, s-ar părea că ambele efecte sînt de același sens, dar viteza va crește întotdeauna, așa cum se întîmplă în domeniul incompresibil (26). Acesta este într-adevăr cazul la viteze mici ($V \to 0$), cînd compresibilitatea are un efect redus, iar (28) $\delta^2 < 0$; rădăcinile (28) sînt imaginare și paranteza (27) este tot timpul pozitivă. Dacă însă viteza crește sau ν respectiv $\frac{dh}{dx}$ scade în valoare absolută, atunci $\delta^2 \geqslant 0$ și apare iarăși posibilitatea inversării sensului de variație al vitezei. Vor corespunde domenii de mișcare calitativ diferite iar apariția și zona de extindere a acestora este determinată de viteza V. Acesta este deci sensul fizic al formelor analitice diferite pe care le ia distribuția presiunilor la diferite viteze V, fenomen relevat în unele lucrări anterioare [3], [4], [5].

Dacă termenul $\frac{2\nu C_1}{3\mu V}$ este mic ($V \to \infty$ sau $\nu \to 0$), dezvoltînd în serie radicalul, cele două rădăcini (28) se scriu

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= C_1\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\nu C_1}{3\mu V} + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu C_1}{3\mu V}\right)^2 + \dots\right] \\ \Pi_2 &= \frac{6\mu V}{\nu} - C_1\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\nu C_1}{3\mu \nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu C_1}{3\mu \nu}\right)^3 + \dots\right] \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

de unde se vede că pentru $\frac{2\nu C_1}{3\mu V} \to 0$, una din rădăcini tinde către C_1 iar cealaltă către $+\infty$ dacă $\nu > 0$ și către $-\infty$ dacă $\nu < 0$.

În cazul lagărelor circulare de exemplu, $\nu = -\frac{dh}{dx} = 0$ pentru $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$, iar curba $\Pi(x)$ va avea aspectul din figura 3. Variaţia vitezei medii va avea aspectul invers, deoarece $U_m = \frac{\mathcal{M}_x}{\Pi}$. Curba π creşte pînă la punctul F unde întîlneşte curba (28), apoi scade, trece prin punctul D unde $\frac{dp}{d\theta} = 0$ şi scade în continuare pînă la punctul G, deşi pe zona BG, $\frac{dh}{dx}$ are semnul schimbat; în continuare Π creşte pînă la valoarea iniţială, trecînd prin punctul E unde $\frac{dp}{dx} = 0$ (punctul de minim). Dacă viteza este redusă, punctul F se apropie de punctul A, iar punctul G se apropie de punctul B. Cînd viteza V creşte, deplasarea punctelor F şi G are loc în sens invers, iar pentru $V \to \infty$ curba Π se suprapune peste curba AFG, ambele confundîndu-se cu dreapta $\Pi = C_1$.

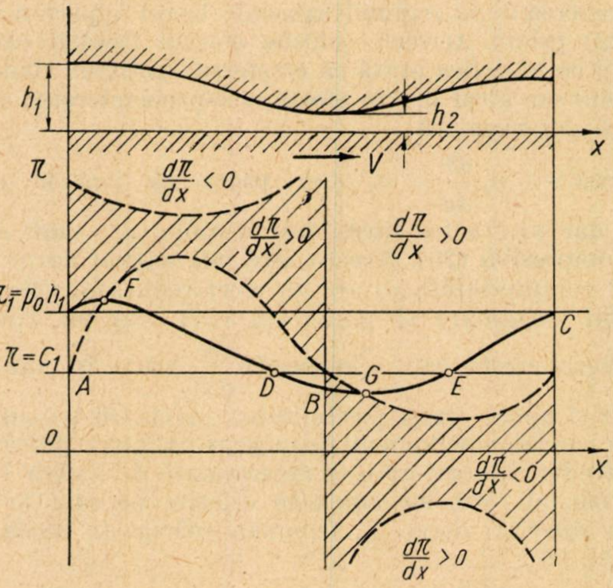
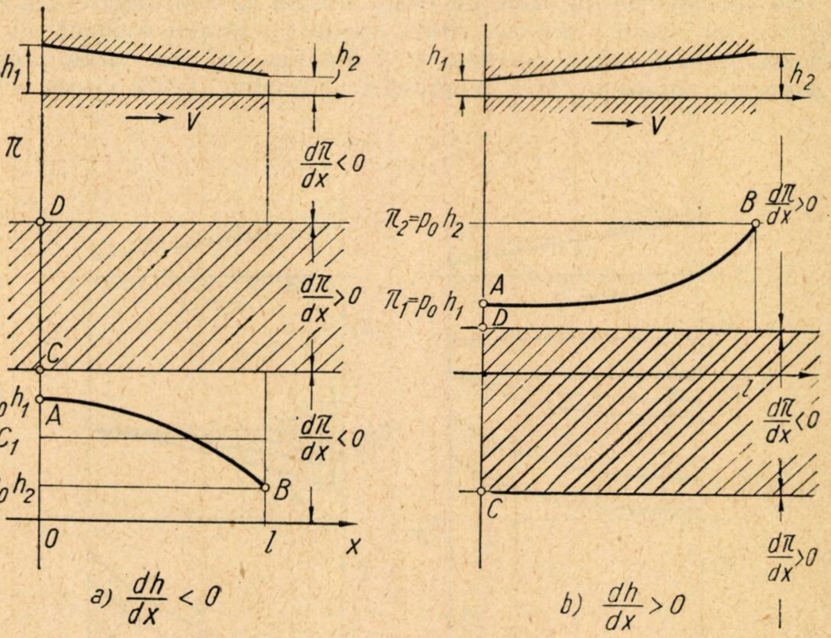


Fig. 3

Problema este ceva mai simplă dacă $\nu = \text{const.}$, deoarece în acest caz se poate verifica că $\frac{d\Pi}{dx} \neq 0$ în intervalul $0 \leqslant x \leqslant l$ care reprezintă lagărul. Cu alte cuvinte, punctele de tipul F sau G din figura 3 se găsesc în afara lagărului. După cum $\nu \gtrless 0$ curba $\Pi(x)$ va avea alura descrescătoare sau crescătoare, prezentată calitativ în figura 4*a*, *b*. Dacă $\delta^2 < 0$ domeniul hașurat dispare din figura 4*a* sau se reduce la o dreaptă



h_1
h_2
V
π
$\frac{d\pi}{dx} < 0$
D
$\frac{d\pi}{dx} > 0$
C
$\pi_1 = p_0 h_1$
A
$\pi = C_1$
$\frac{d\pi}{dx} < 0$
$\pi_2 = p_0 h_2$
B
0
l
x
a) $\frac{dh}{dx} < 0$
h_1
h_2
V
B
$\frac{d\pi}{dx} > 0$
$\pi_2 = p_0 h_2$
A
$\pi_1 = p_0 h_1$
D
l
$\frac{d\pi}{dx} < 0$
C
$\frac{d\pi}{dx} > 0$
b) $\frac{dh}{dx} > 0$

Fig. 4

în cazul în care $\delta^2 = 0$. Dacă viteza V crește, punctul D se deplasează către $+\infty$ iar punctul C către punctul A.

★

Revenind acum la ecuația (21) se constată că față de rezultatele precedente, obținute în ipoteza absenței forțelor de inerție, apar deosebiri în comportare, după semnul parantezei $(1 - \alpha M_*^2)$. În particular va apare o modificare calitativă la atingerea vitezei critice (19).

$$M_{*e} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}; \quad U_{me} = \frac{a_*}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{np}{\alpha\rho}} \tag{30}$$

egală cu viteza sunetului dacă $\alpha = 1$ și $n = \frac{C_p}{C_v}$.

În cazurile curente termenul αM_*^2 este neglijabil. Totuși la viteze mari și foarte mari, valoarea termenului αM_*^2 poate deveni importantă. Vor apare atunci o serie de particularități, care pînă la un punct sînt similare cu cele relevate în lucrarea [1]. Există însă unele deosebiri față de cazul examinat anterior [1] în care $V = 0$, deoarece acum $V \neq 0$ și prin urmare mişcarea nu mai este datorită energiei interne a gazului, ci se produce prin introducerea unei energii din exterior, prin intermediul tensiunilor de frecare.

Să considerăm de exemplu cazul simplu al unui lagăr plan (fig. 4*a* şi fig. 5). La viteze V reduse, viteza medie U_m rămîne evident tot timpul inferioară vitezei critice (curbele *1*, *2* din fig. 5*a*), iar curba presiunilor are aspectul cunoscut, fără modificări calitative. Dacă viteza V creşte

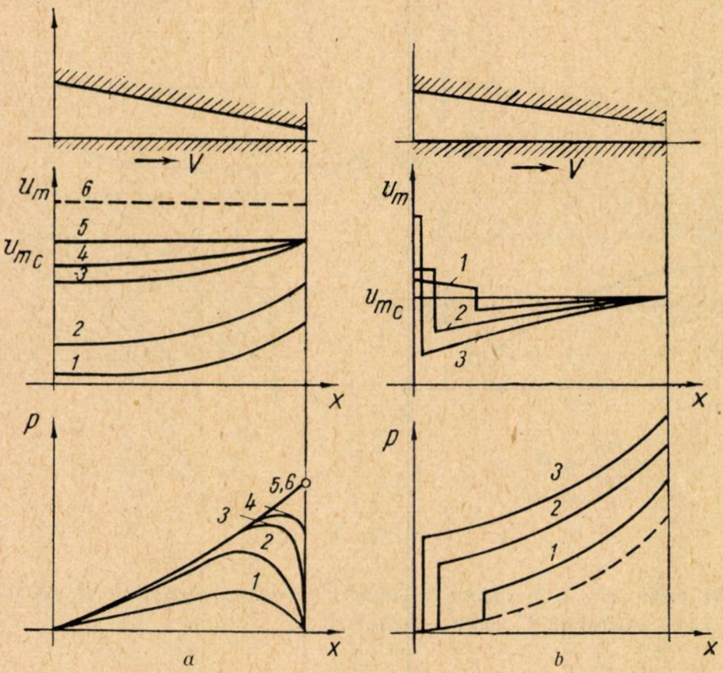


Fig. 5

este posibil ca la un moment dat să se atingă viteza critică. Pentru exemplul considerat viteza critică nu poate fi atinsă decît în secţiunea de ieşire. Într-adevăr viteza U_m nu poate atinge valoarea critică a_* decît în secţiunea în care paranteza din membrul secund (21) se anulează, astfel rezultînd $dU_m = \infty$ în secţiunea respectivă. Cum pentru exemplul de mai sus paranteza menţionată un se anulează în interiorul lagărului, viteza critică poate fi atinsă numai în secţiunea de ieşire. Fizic fenomenul este uşor explicabil deoarece este analog unui ajutaj convergent, unde de asemenea viteza critică nu apare decît în secţiunea minimă [2]. Pentru aceste motive, dacă viteza U_m la intrare este inferioară vitezei critice, ea rămîne inferioară în toate secţiunile lagărului. În situaţia de mai sus însă este necesar ca presiunea în secţiunea de ieşire să crească (curbele *4*, *5* din fig. 5*b*) peste valoarea atmosferică. Existînd o contrapresiune debitul masic creşte mai lent iar viteza U_m variază într-un interval mai restrîns. Pe măsură ce viteza V crește, viteza U_m la intrare va crește iar curba $U_m(x)$ se apropie de dreapta orizontală $U_m = U_{m_c} = a_*$. La un moment dat în secțiunea de intrare $U_m = U_{m_c}$ și atunci în mod necesar $dU_m = 0$ în tot intervalul, rezultînd atunci $\Pi = ph = \text{const}$. În consecință soluția asimptotică stabilită în absența forțelor de inerție pentru cazul limită $V \rightarrow \infty$ este în realitate atinsă pentru o viteză finită și anume viteza critică (egală în primă aproximație cu viteza sunetului).

Dacă viteza V crește mai departe, fenomenul devine mai complex. Din simpla examinare a ecuației (21) apare ca posibilă și probabilă funcționarea în continuare cu $\Pi = \text{const.}$, $dU_m \cong 0$. În consecință, soluția asimptotică rămîne în continuare valabilă iar vitezele U_m devin neglijabile față de $\frac{V}{2}$ astfel încît $U_m \cong \frac{V}{2} = \text{const.}$ (curba 6 din fig. 5 *a*). În sprijinul acestei concluzii mai intervine și faptul că soluția asimptotică este practic atinsă la viteze inferioare celei critice. Există totuși, cel puțin teoretic, posibilitatea ca la regimuri la care $U_m = \frac{a_*}{\sqrt{\alpha}}$ să apară unde de șoc în interiorul stratului de lubrifiant (fig. 5 *b*). Într-un asemenea caz, presiunea va suferi un salt iar apoi crește după o curbă cu o alură asemănătoare. Cu alte cuvinte, atît înainte de unda de șoc cît și după aceasta $p = \frac{C_1}{h}$ dar constanta C_1 va lua valori diferite. La creșterea vitezei, poziția undei de șoc se va deplasa către secțiunea de intrare, presiunea după unda de șoc crescînd continuu cu viteza. Pentru a preciza comportarea reală a fenomenului sînt necesare cercetări experimentale la viteze V foarte mari.

Concluzii asemănătoare se pot deduce și pentru celelalte tipuri de lagăre. Astfel pentru lagărul din fig. 4 *b* viteza critică poate fi atinsă cel mult în secțiunea de intrare. În continuare fenomenul poate evolua cu $\Pi = \text{const.}$ sau poate prezenta o detentă supersonică urmată de o undă de șoc. De asemenea, pentru un lagăr circular, viteza critică poate fi atinsă, numai în punctul G (fig. 3) în care $\frac{d\Pi}{dx} = 0$. În continuare, fenomenul prezintă caracteristici similare cu cele deduse în cele două cazuri prezentate mai sus.

Domeniul în care vitezele medii U_m rezultă supersonice corespunde unor viteze relative mult superioare celor atinse astăzi în tehnică. Astfel considerînd acoperitor $a_* \cong 300$ m/s. și o viteză medie $U_m \cong \frac{V}{2}$ rezultă că viteza critică va fi atinsă pentru

$$V = V_c = 2a_* \cong 600 \text{ m/s}. \qquad (31)$$

În cazul unui lagăr circular de exemplu care ar avea un diametru de 2 cm, ar rezulta o turație critică de circa 600 000 rot/min. În plus, la asemenea viteze regimul de mișcare este turbulent. Se poate arăta însă că și în regimul turbulent concluziile de mai sus rămîn valabile în mare măsură.

La o turație de 100 000 rot/min de exemplu (turație utilizată astăzi în unele mașini), influența forțelor de inerție este neglijabilă, deoarece rezultă $\alpha M_*^2 \cong 0{,}02$, valoare neglijabilă față de unitate.

★

Să analizăm acum cazul curent $\alpha M_*^2 \ll 1$ și să examinăm influența cantitativă a forțelor de inerție asupra presiunilor din stratul de lubrifiant. Plecînd de la ecuația (21) ori ținînd seama de ecuația de continuitate (11) se poate înlocui numărul Mach M_* cu debitul masic $\mathcal{M}_x$. Rezultă astfel

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{1}{h} \frac{\Pi \frac{dh}{ax} + 6\mu V \left(1 - \frac{2a_*^2 \mathcal{M}_x}{V\Pi}\right)}{1 - \frac{\alpha a_*^2 \mathcal{M}_x^2}{\Pi^2}}, \tag{32}$$

unde

$$\mathcal{M}_x = \rho U_m h = \frac{U_m \Pi}{a_*^2} = \frac{V}{2} \frac{C_1}{a_*^2} \,. \tag{33}$$

Dacă forțele de inerție sînt neglijabile, ecuația (32) devine identică cu ecuația presiunilor în cazul obișnuit cu $n = 1$[3]. Dacă se dorește să se pună în evidență numărul Mach mediu $\overline{\mathrm{M}}_*$, observînd că

$$\alpha a_* \mathcal{M}_x^2 = \alpha \overline{\mathrm{M}}_*^2 C_1^2 ; \ \overline{\mathrm{M}}_* = \frac{V}{2 a_*} \tag{34}$$

ecuația (32) se mai scrie

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{1}{h} \frac{\Pi \frac{dh}{dx} + 6\mu V \left(1 - \frac{C_1}{\Pi}\right)}{1 - \alpha \overline{\mathrm{M}}_*^2 \frac{C_1^2}{\Pi^2}} \tag{35}$$

Se constată că presiunile vor depinde calitativ nu numai de μ, V, p_0, h ci și de numărul Mach mediu $\overline{\mathrm{M}}_*$, definit ca raportul dinte viteza $\frac{V}{2}$ și viteza critică a_*.

Ecuația (35) are aceeași structură ca și în cazul absenței forțelor de inerție (avînd numitorul $1 - \alpha \overline{\mathrm{M}}_* \frac{C_1^2}{\Pi^2}$ în locul unității). De aceea, ecuația de mai sus poate fi integrată urmînd metode asemănătoare. În particular se vor putea obține soluții riguroase pentru aceleași cazuri [3], [4] respectiv pentru lagăre compuse din suprafețe plane.

Astfel, pentru cazul suprafețelor paralele ($h =$ const. $\frac{dh}{dx} = 0$) ținînd seamă că $p = \frac{\Pi}{h}$ se obține din (35)

$$\frac{p\,dp}{p - C_1} - \alpha\,\mathrm{M}_*^2\,C_1^2 \frac{dp}{p\,(p - C_1)} = \frac{6\,\mu \mathrm{V}}{h^2} dx \tag{36}$$

unde cu C_1 s-a notat acum C_1/h din expresia precedentă. Soluția ecuației de mai sus se scrie

$$p + (1 - \alpha\,\overline{\mathrm{M}}_*^2)\,C_1 \ln (C_1 - p) + \alpha\,\overline{\mathrm{M}}_*^2 C_1 \ln p = \frac{6\mu\,\mathrm{V}}{h^2}\,x + C_2, \tag{37}$$

dacă $\frac{dp}{dx} < 0$ ($p < C_1$) și

$$p + (1 - \alpha\overline{\mathrm{M}}_*^2)\,C_1 \ln (p - C_1) + \alpha\overline{\mathrm{M}}_*^2\,C_1 \ln p = \frac{6\mu V}{h^2}\,x + C_2 \tag{38}$$

dacă $\frac{dp}{dx} > 0$ ($p > C_1$). Dacă în formulele de mai sus se pune $\overline{\mathrm{M}}_* = 0$ se regăsesc soluțiile obținute anterior [4] fără considerarea forțelor de inerție.

În figurile 6 și 7 s-au trasat distribuțiile de presiuni pentru un exemplu numeric cu $\frac{p_1}{p_0} = 4$, $H = \frac{\mu V l}{p_0\,h^2} = 5$ și $\overline{\mathrm{M}}_* = 0$ respectiv $\overline{\mathrm{M}}_* = 0{,}5$. Se constată din figura 6 că apare un fenomen analog celui relevat în lucrarea [1]. Astfel, datorită accelerării gazului cauzată simultan de viteza V și diferența de presiune $p_1 - p_0$, se atinge pentru $\overline{\mathrm{M}}_* = 0{,}5$ viteza critică în secțiunea de ieșire. Conform celor spuse presiunea în secțiunea de ieșire va fi în acest caz mai mare decît presiunea din mediul înconjurător (de pe figură $p_0' = 2{,}3\,p_0$). Pe aceeași figură s-a trasat și cazul fără forțe de inerție, dar cu $\frac{p_1}{p_0} = 4$, $\frac{p_0'}{p_0} = 2{,}3$ $\left(\frac{p_1}{p_0'} = 1{,}74\right)$. Această curbă este după cum se vede foarte apropiată de curba obținută de soluția $\overline{\mathrm{M}}_* = 0{,}5$. În figura 7, scurgerea datorită gradientului de presiune se opune vitezei V, astfel încît influența forțelor de inerție este mai redusă.

În cazul în care grosimea h variază liniar cu x

$$h = h_1 - \nu x, \tag{39}$$

ecuația (35) se scrie

$$\frac{\Pi d\Pi}{\Pi^2 - \frac{6\mu V}{\nu}\,\Pi + \frac{6\mu V}{\nu}\,C_1} - \alpha\,\overline{\mathrm{M}}_*^2\,C_1 \frac{d\Pi}{\Pi\left(\Pi^2 - \frac{6\mu V}{\nu}\,\Pi + \frac{6\mu V}{\nu}\,C_1\right)} = \frac{dh}{h} \tag{40}$$

unde influența forțelor de inerție se manifestă prin apariția celui de-al doilea termen din primul membru al ecuației (40). Soluția va avea o structură asemănătoare cazului forțelor de inerție neglijabile [3]. Cele trei forme calitativ diferite ale soluției relevate în lucrarea [3] vor avea în continuare și corespund semnului discriminantului (28).

Soluția ecuației (40) se poate scrie sub o formă unică

$$\Pi^2 - \frac{6\mu V}{\nu}\Pi + \frac{6\mu V}{\nu} C_1 = C_2 h^{\frac{2}{1-\alpha^*}} \chi \tag{41}$$

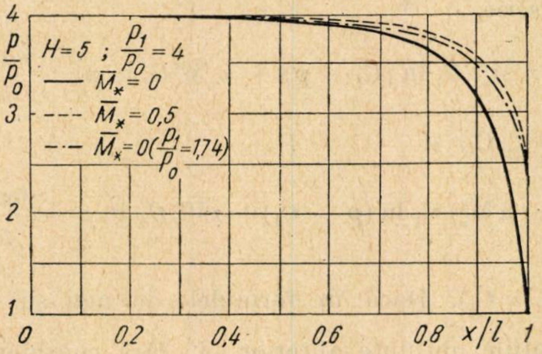


Fig. 6

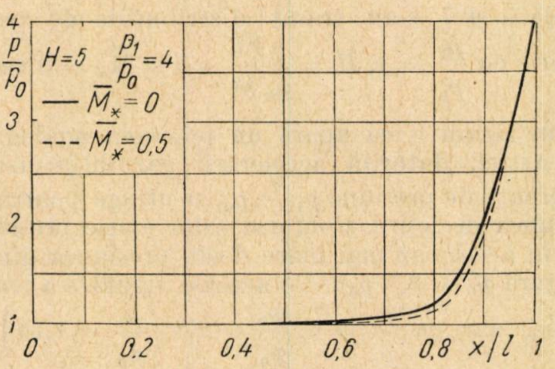


Fig. 7

unde

$$\alpha^* = \frac{\alpha \overline{M}_*^2}{4} \frac{2\nu C_1}{3\mu V} \tag{42}$$

și

$$\chi = \Pi^{\frac{2\alpha^*}{1+\alpha^*}} \exp\left\{ -\frac{2}{|\delta|}\frac{1-\alpha^*}{1+\alpha^*}\operatorname{arctg}\frac{\Pi - \frac{3\mu V}{\nu}}{\frac{3\mu V}{\nu}|\delta|}\right\}, \tag{43}$$

pentru $\delta^2 < 0$ (28),

$$\chi = \Pi^{\frac{2\alpha^*}{1+\alpha^*}} \exp\left\{2\,\frac{1-\alpha^*}{1+\alpha^*}\,\frac{\dfrac{3\mu V}{\nu}}{\Pi - \dfrac{3\mu V}{\nu}}\right\}, \tag{44}$$

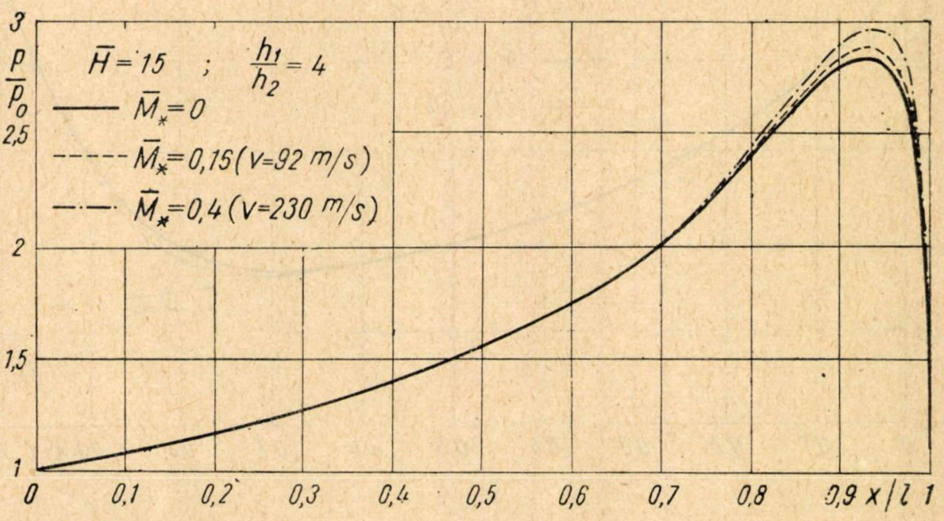


Fig. 8

pentru $\delta = 0$ şi, în sfîrşit

$$\chi = \Pi^{\frac{2\alpha^*}{1+\alpha^*}} \left\{\frac{\Pi - \dfrac{3\mu V}{\nu}(1-\delta)}{\Pi - \dfrac{3\mu V}{\nu}(1+\delta)}\right\}^{\frac{1}{\delta}\frac{1-\alpha^*}{1+\alpha^*}}, \tag{45}$$

pentru $\delta^2 > 0$.

Pentru $\overline{M}_* = 0$ ($\alpha^* = 0$) se regăsesc evident soluţiile date în lucrarea [3].

Ca exemple, în figurile 8 şi 9 s-a considerat un lagăr compus din două suprafeţe înclinate la care raportul dintre grosimea maximă h_1 şi minimă h_2 a fost $\dfrac{h_1}{h_2} = 4$ iar $\overline{H} = \dfrac{pVl}{p_0\,h_2^2} = 15$ şi $\overline{M}_* = 0$ respectiv $\overline{M}_* = 0{,}4$ (dacă de exemplu $\dfrac{h_1 + h_2}{2l} = 1/1000$ şi $l = 10$ cm, cu centrul de rotaţie plasat la 7 cm corespunde o turaţie de circa 33 000 rot/min la $\overline{M}_* = 0{,}4$).

Se constată că influenţa forţelor de inerţie este redusă şi anume tinde să apropie curba presiunilor de soluţia asimptotică $V \to \infty$. Într-o primă aproximaţie totul se petrece ca şi cum viteza lagărului ar creşte cu

$$V' \cong (1 + \alpha^{\star})^2 \, V \, ; \, \overline{H}' \cong (1 + \alpha^{\star})^2 \, \overline{H} . \tag{46}$$

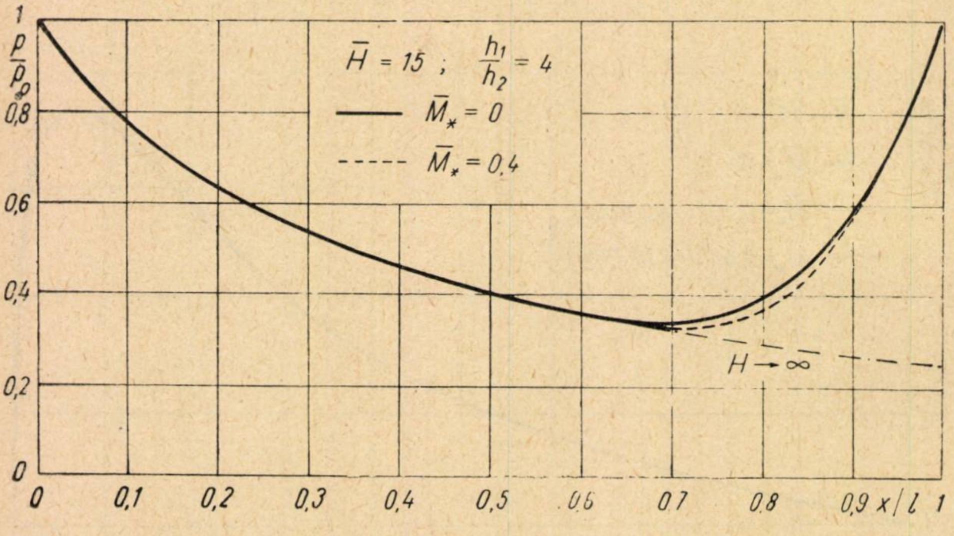


Fig. 9

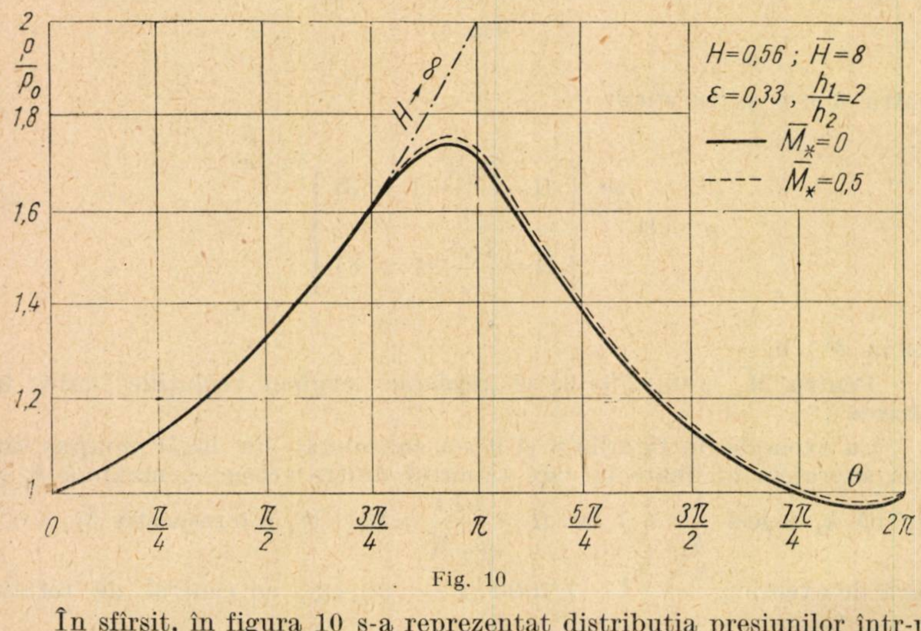


Fig. 10

În sfîrşit, în figura 10 s-a reprezentat distribuţia presiunilor într-un lagăr compus din două suprafeţe plane înclinate care corespunde într-o primă aproximație cazul lagărelor circulare [5] $\left(\frac{h_1}{h_2} = 2, \overline{H} = \frac{\mu V l}{p_0 h_2^2} = 8,\right.$ respectiv o excentricitate relativă $\varepsilon = \frac{\frac{h_1}{h_2} - 1}{h_1 + 1} = 033$ și $H = \frac{\mu \omega}{p_0 \psi^2} = 056,$ unde ψ este jocul relativ$\left.\right)$.Numărul Mach considerat $\overline{\mathrm{M}}_* = 0,5$ corespunde aproximativ la o turație $n = 100\,000$ rot/min în cazul unei raze a fusului de 3 cm. Se constată, de asemenea, influența redusă a forțelor de inerție.

În concluzie rezultă că atît timp cît nu se atinge viteza critică a_* în interiorul stratului de lubrifiant, forțele de inerție au o influență neglijabilă. La viteze foarte mari pot apare însă unele deosebiri calitative în funcționarea lagărelor.

Primită la redacție la 19 decembrie 1961

О ТЕЧЕНИИ ГАЗОВ В ТОНКИХ СЛОЯХ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается течение вязкого газа в тонких слоях применительно к случаю газовой смазки с учетом сил инерции. Таким образом, выводятся уравнения задачи и выявляются некоторые качественные различия, появляющиеся в том случае, когда скорости в газовом слое превышают критическое значение, равное в первом приближении скорости звука. В последней части работы выводится дифференциальное уравнение давлений и распределение давлений для подшипников, состоящих из плоских поверхностей, причем отмечается то, что при достигнутых до сих пор в технике скоростях влияние сил инерции пренебрежимо мало.

ON THE FLOW OF HIGH-SPEED GASES IN THIN LAYERS

ABSTRACT

This paper examines the flow of a viscous fluid within thin layers with applications to the case of gas lubrication, taking into consideration the forces of inertia. The equations of the problem are deduced and some

qualitative differences occurring if the velocities in the gas layer exceed a critical value, equal in a first approximation to the speed of sound, are emphasized. Finally, the pressure differential equation and the pressure distribution are deduced for bearings consisting of plane surfaces; it is shown that for the velocities reached to-day in technique, the influence of the forces of inertia is negligible.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Asupra scurgerii cu frecare a unui gaz intre două plăci paralele.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, 809—826 (1961).
2. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari.* Ed. Acad. R.P.R., 1957.
3. V. N. Constantinescu, *Repartiția de presiuni in lagărele de alungire infinită lubrificate cu gaze.* Comunicările Academiei R.P.R., **V**, 377—383 (1955).
4. — *Considerații asupra calculului lagărelor de alungire infinită lubrificate cu gaze, compuse din suprafețe plane.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, 2, *3*, 741—771 (1956).
5. — *Sur la théorie des paliers à gaz.* Revue de Mécanique Appliquée, **I**, *1*, 141—155 (1956).
6. — *Asupra unor proprietăți și soluții la limită ale ecuațiilor lubrificației cu gaze.* Comunicările Academiei R.P.R., **V**, 9, 1317—1321, (1955).
7. — *Asupra soluțiilor asimptotice ale ecuațiilor lubrificației cu gaze.* Comunicările Academiei R.P.R., **X**, *11*, 941—945 (1960).

STUDIUL COMPARATIV AL MATERIALELOR ANTIFRICȚIUNE

DE

AL. NICA

Utilizînd instalația experimentală și metoda pentru determinarea proprietăților funcționale ale materialelor antifricțiune, prezentate în lucrări anterioare ([1], [2], [3]), s-au obținut caracteristicile funcționale (presiunea medie p_m, produsul $p_m \cdot V$ dintre p_m și viteza de funcționare V, debitul de scăpări laterale Q_s și coeficientul de frecare f) în cazul unor regimuri termice convenabile, pentru un număr mare de materiale.

După scopul propus, materialele antifricțiune studiate se pot împărți în mai multe categorii :

a) materiale antifricțiune destinate să înlocuiască metalele în cazul lagărelor lucrînd în condiții ușoare de lucru (sarcini și viteze reduse) eventual avînd ungere cu apă ; din această categorie fac parte masele plastice [4] ;

b) materiale antifricțiune de înlocuire pentru lagăre lucrînd cu sarcini și viteze ridicate ; din această categorie fac parte diversele aliaje ușoare : zinc cu aluminiu [5], aluminiu cu staniu etc., precum și aliaje pe bază de plumb, unele în curs de experimentare ;

c) materiale antifricțiune consacrate (bronzuri, aliaje pe bază de staniu [5], [6]), pentru a se putea stabili prin comparație domeniul și posibilitățile de utilizare a materialelor de înlocuire.

S-au putut întrevedea astfel posibilitățile de înlocuire a unora dintre cele mai bune materiale antifricțiune cu aliaje ușoare nou elaborate, mai ieftine și cu proprietăți funcționale favorabile.

Materialele au fost încercate sub formă de cuzineți cilindrici cu pereți groși, strunjiți din bare turnate, avînd dimensiunile :

– diametrul interior $d_i = 36$ mm ;

– diametrul exterior $d_e = 48{,}5$ mm ;

– lățimea $b = 25{,}5$ mm (deci alungirea $\lambda = \frac{25{,}2}{36} = 0{,}7$) ;

— jocul relativ $\psi = 1{,}25...1{,}5^0/_{00}$; în condiții de lucru caracterizate prin :

— viteza relativă $V = 0{,}5...7$ m/s ;

— încărcarea medie în lagăr $p_m = 10...330$ kg/cm^2 ;

— alimentarea cu lubrifiant sub presiune (presiunea de alimentare $p_i = 1{,}5$ kg/cm^2, ulei 305 — conform Stas — diametrul orificiului de alimentare $b_i = 4$ mm) ;

— temperatura de lucru a cuzinetului t_c, constantă ($t_c = 45$; 60 ; 80°C).

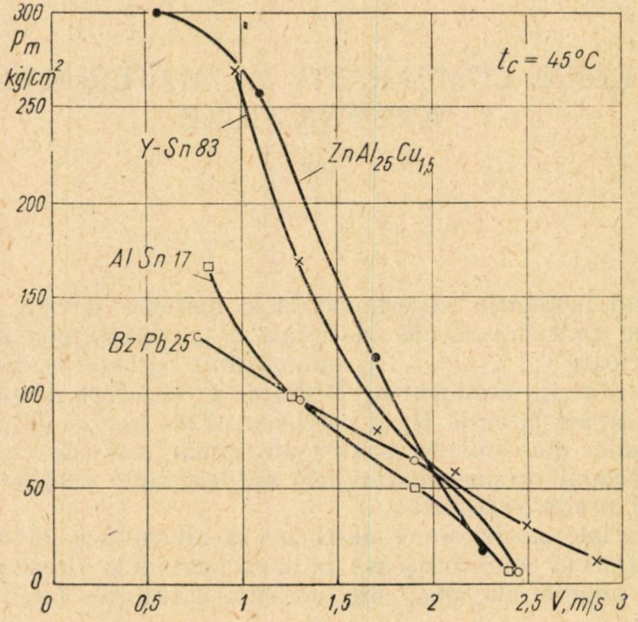


Fig. 1

În figurile 1 și 2 se prezintă presiunea specifică din lagăr p_m, în funcție de viteza relativă V, pentru un material antifricțiune consacrat, folosit pentru lagăre lucrînd în condiții grele de lucru (Y-Sn83, [6]), un aliaj de înlocuire zinc-aluminiu (Zn Al_{25} Cu_1, $_5$, [5]), un aliaj de aluminiu cu staniu (Al Sn 17) și un bronz cu plumb (Bz Pb 25).

Din examinarea caracteristicilor $p_m = p_m(V)$ prezentate, se poate constata că în cazul unor regimuri termice similare, aliajul zinc-aluminiu suportă sarcini considerabile (pentru regimul de lucru $t_c = 80°C$ mai ridicate chiar decît ale aliajului pe bază de staniu, datorită unei conductibilități termice mai mari) iar aliajul aluminiu-staniu este comparabil cu Bz Pb 25.

Linia întreruptă de pe diagrame indică imposibilitatea atingerii temperaturii propuse, chiar pentru încărcarea maximă posibilă la mașina de lagăre experimentală.

În figurile 3 şi 4 se prezintă pentru aceleaşi materiale produsul $p_m \cdot V$ în funcţie de viteza de lucru.

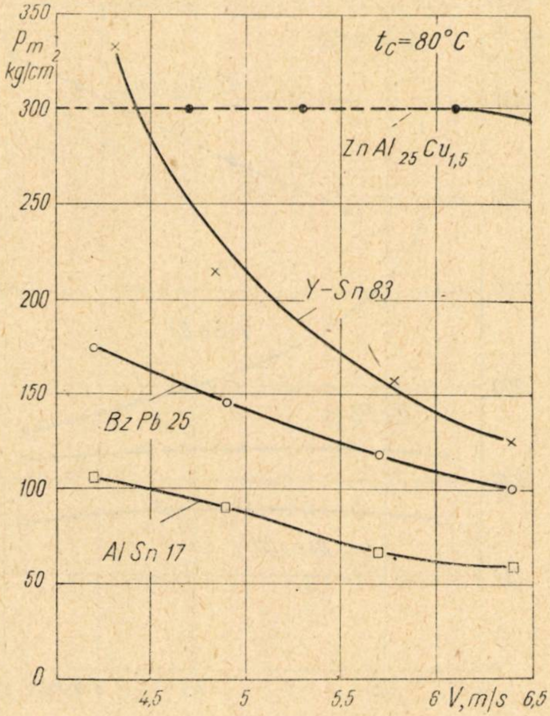


Fig. 2

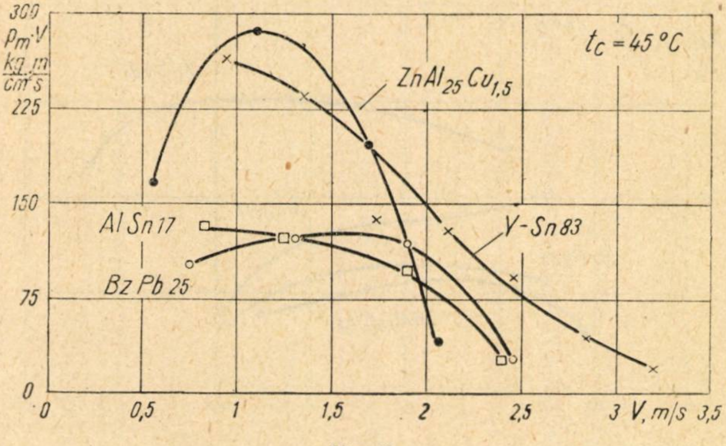


Fig. 3

Concluziile trase pentru caracteristica $p_m = p_n(V)$ se păstrează şi în acest caz.

În figurile 5 şi 6 se prezintă valorile debitului de scăpări laterale Q_s, de asemenea în funcţie de viteza de lucru.

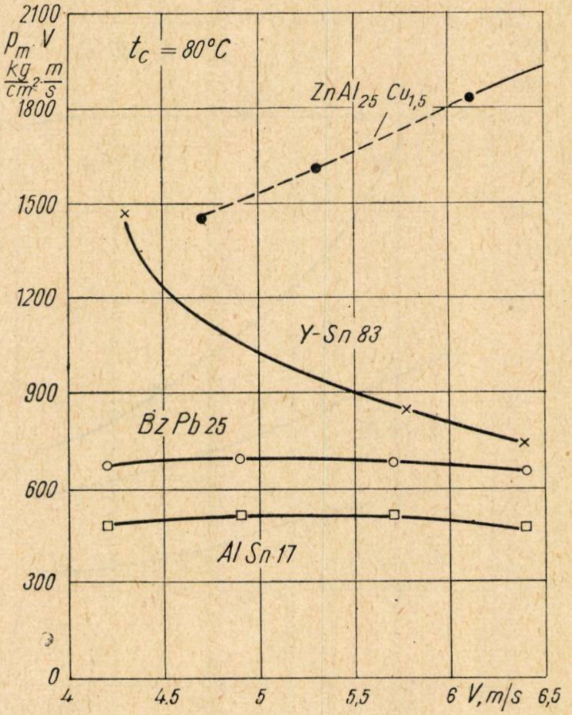


Fig. 4

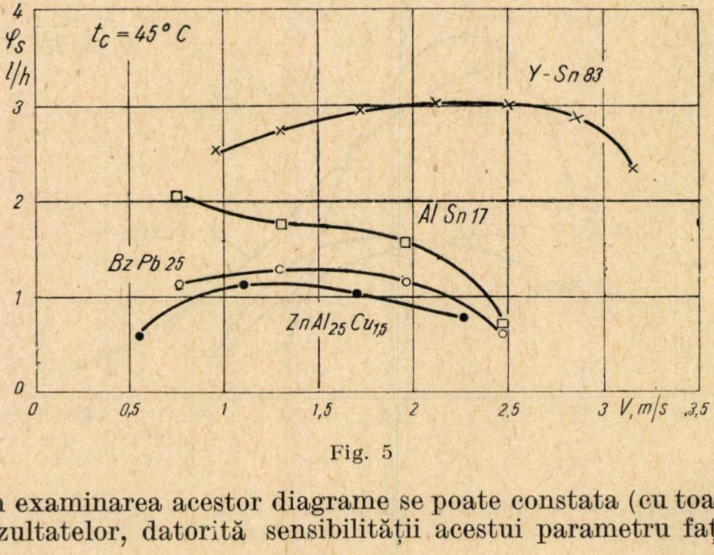


Fig. 5

Din examinarea acestor diagrame se poate constata (cu toată împrăştierea rezultatelor, datorită sensibilităţii acestui parametru faţă de con-

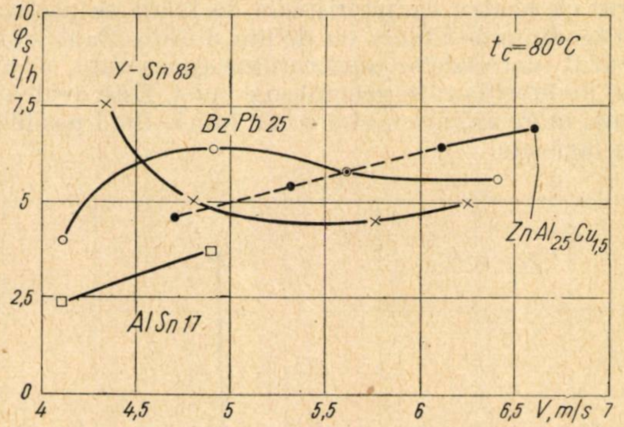

10
φs
l/h
7,5
5
2,5
0
4
4,5
5
5,5
6
6,5 V,m/s 7
tc=80°C
Y-Sn 83
Bz Pb 25
ZnAl25Cu1,5
Al Sn 17

Fig. 6

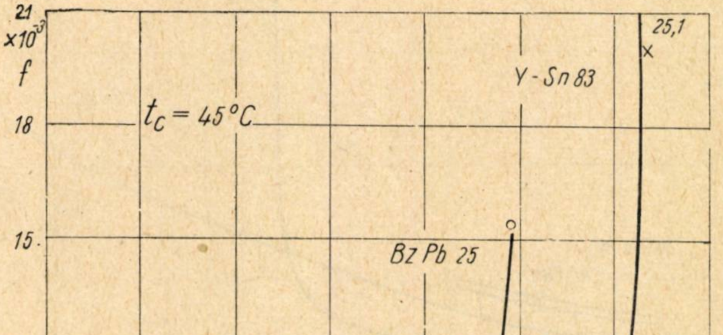

21
×10-3
f
18
15
12
9
6
3
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3 V,m/s 3,5
tc = 45°C
25,1
Y-Sn 83
Bz Pb 25
Al Sn 17
Zn Al25 Cu1,5

Fig. 7

dițiile de lucru) că pentru caracteristicile de lucru respective materialele noi nu au avut tendința de a lucra cu debite de lubrifiant superioare celor rezultate în cazul materialelor antifricțiune consacrate, ci au funcționat chiar cu debite de lubrifiant în general mai mici. Este evident că un debit de lubrifiant mai mare asigură o răcire mai bună, fiind posibilă o încărcare mai ridicată a lagărului.

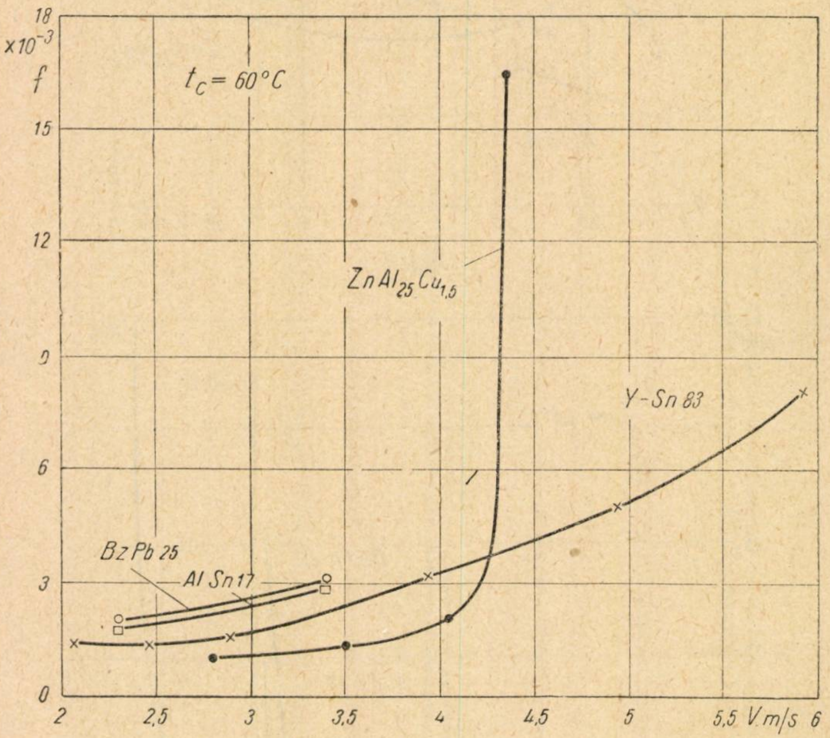


Fig. 8

În figurile 7 și 8 se prezintă coeficientul de frecare *f*, pentru regimurile termice de 45 și 60°C (nu s-a putut obține temperatura de 80°C, deoarece în cazul determinării coeficientului de frecare sînt necesare precauții speciale, în care caz nu se poate încărca lagărul la sarcinile maxime [3]).

Se poate constata că în regim de lucru hidrodinamic (valori reduse ale lui *f*) nu sînt deosebiri sensibile între materiale; deosebirile apar o dată cu creșterea turației și se poate constata că aliajele ușoare permit funcționarea la aceeași temperatură, chiar cu valori ale lui *f* mai ridicate.

Aspectul suprafețelor active după funcționare au arătat că aliajele ușoare au proprietăți superioare de înglobare a particulelor abrazive prezentînd un luciu metalic foarte bine format.

De asemenea, axul a suferit mult mai puține rizuri atunci cînd a lucrat cu cuzineți din aliaje pe bază de zinc sau aluminiu, decît în cazul bronzurilor.

Cu ajutorul unei mașini de încercat lagăre, cu porniri și opriri intermitente sub sarcină [7], s-a putut stabili rezistența la uzură a materialelor considerate. În tabela 1 se prezintă uzura absolută U în grame, după 80 de ore de funcționare (ceea ce corespunde la 1 200 cicluri) și uzura relativă U_{sc}, raportată la suprafața totală de lucru a cuzinetului și numărul de cicluri c, în grame/cm^2 $\cdot$ 10^3 c.

Tabela 1

Materialul / Uzura	Y—Sn 83	Bz Pb 25	$ZnAl_{25}$, $Cu_{1,5}$	AlSn 17
Uzura absolută U(g)	0,0577	0,0219	0,0023	0,0093
Uzura relativă $U_{sc} = \dfrac{U}{\pi\, d_1\, b \times 10^3 c}$ (g/cm^2 × 10^3 c)	$1{,}69 \times 10^{-3}$	$0{,}650 \times 10^{-3}$	$0{,}0662 \times 10^{-3}$	$0{,}273 \times 10^{-3}$

Din examinarea acestor date reiese că cele mai reduse uzuri au rezultat pentru aliajele ușoare.

Concluzii. Încercările experimentale avînd ca scop determinarea caracteristicilor funcționale ale diverselor materiale antifricțiune, atît consacrate cît și nou elaborate, permit să se afirme că există foarte mari posibilități de înlocuire a materialelor deficitare (bronzuri, aliaje pe bază de staniu), prin aliaje pe bază de zinc sau aluminiu.

Pe lîngă avantajele de ordin economic, aliajele ușoare prezintă, după cum s-a văzut, și o serie de avantaje funcționale.

Pentru introducerea pe scară cît mai largă a materialelor de înlocuire, este necesar să se continue studiile și în direcția stabilirii structurii metalurgice și a rugozității optime, precum și posibilitatea folosirii aliajelor antifricțiune în straturi subțiri.

Primită la redacție la 19 decembrie 1961

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АНТИФРИКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

РЕЗЮМЕ

В работе излагаются функциональные характеристики и износостойкость нескольких антифрикционных материалов, как обычно применяемых в машиностроении, (Bz Pb 25 и Y — Sn 83), так и вновь изготовленных (Zn Al_{30} $Cu_{1,5}$ и Al Sn 17). Из рассмотрения полученных результатов оказывается, что имеется возможность замены обычно применяемых подшипниковых материалов вновь изготовленными, что является преимуществом как с точки зрения экономического, так и функционального характера.

COMPARATIVE STUDY OF ANTI-FRICTION MATERIALS

ABSTRACT

This paper presents the operating characteristics and the wear resistance of several anti-friction materials well known in the construction of machines (Bz Pb 25 and Y-Sn 83), as well as new materials ($Zn\ Al_{30}\ Cu_{1.5}$ and Al Sn 17). An examination of the results obtained proves the possibility of replacing the known bearing materials by the new ones, a fact which is advantageous both from the economic point of view and from the operating one.

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VASILCA, *Asupra utilității caracteristicii* $p = f(V)$ *la lagărele circulare cu alunecare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *2*, 449—503 (1956).
2. — *Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor* $p = g(V)$. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 75—84 (1957).
3. GH. VASILCA, AL. NICA, *Asupra preciziei de măsurare a momentului de frecare la lagărele circulare, cu ajutorul sistemelor mecanice tip paralelogram.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *1*, 229—238 (1958).
4. D. ISĂCESCU, GH. VASILCA, V. CALCAN, AL. NICA, *Unele proprietăți funcționale ale unui material plastic pe bază de furfurol-fenol, ca material pentru lagăre.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4*, 983—986 (1958).
5. AL. NICA, C. BARBU, *Studiul unor materiale antifricțiune de înlocuire pentru lagărele cu alunecare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *4*, 827—839 (1961).
6. GH. VASILCA, AL. NICA, *Cercetări asupra caracteristicilor de funcționare a lagărelor construite din materiale diferite.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *2*, 377—390 (1958).
7. P. FREUND și colab., *Banc experimental pentru studiul rezistenței fusurilor la uzură în regim nepermanent.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *4*, 1275—1278 (1957),

STUDII

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

ASPECTE ALE INFLUENȚEI NATURII SUPRAFEȚELOR ÎN FRECARE ASUPRA REZISTENȚEI LA ABRAZIUNE

DE

OLGA BIȚĂ și I. DINCĂ

1. GENERALITĂȚI

Într-o lucrare anterioară [1], s-a arătat că fenomenele care intervin în procesele de uzură se pot încadra în trei clase fundamentale, și anume : clasa fenomenelor fizice, clasa fenomenelor chimice și clasa fenomenelor mecanice.

Atît datele de laborator cît și cele obținute în exploatare, indicate de literatura de specialitate [2], [3], [4], și confirmate și de cercetările efectuate de colectiv [1], [5], demonstrează că fenomenele mecanice sînt acelea care contribuie cu ponderea cea mai mare la uzura rapidă a suprafețelor în frecare.

Tipul de uzură caracteristic acestei clase de fenomene este uzura abrazivă.

Uzura abrazivă apare la frecarea de alunecare și este un rezultat al acțiunii mediului abraziv asupra suprafețelor în frecare, fiind produsă prin acțiuni obișnuite de așchiere sau tăiere, la care participă fie asperitățile dure din masa eterogenă a materialului, fie particulele de material rezultate în urma altor procese de uzură sau în același proces și, bineînțeles, cele provenite din afară.

Asupra uzurii abrazive acționează în mod specific : natura materialelor suprafețelor în frecare, caracteristicile particulei abrazive, grosimea peliculei de lubrifiant dintre cele două suprafețe și sarcina specifică.

Influența naturii materialelor asupra acestui proces de uzură, prezintă două aspecte : influența durității suprafețelor asupra rezistenței lor la acțiunea abrazivului și posibilitatea încrustării particulei abrazive în materialul mai puțin dur.

În primul caz, dacă duritatea materialelor este superioară durității particulelor abrazive, uzura abrazivă nu poate avea loc sau chiar dacă apare efectul ei este de scurtă durată și cu consecințe mai puțin grave.

În cazul încrustării particulei abrazive într-una din suprafețele de frecare (în compoziția lagărelor de exemplu), aceasta va acționa ca o sculă tăietoare asupra celeilalte suprafețe cu care vine în contact, cu consecințe mai mult sau mai puțin grave în funcție de duritatea ei.

Caracteristicile abrazivului intervin sub trei aspecte : formă, dimensiuni și duritate, caracteristici care, împreună cu proprietățile suprafețelor, determină severitatea procesului de uzură și calitatea suprafețelor nou formate.

Dacă la uzura abrazivă predomină procesul de alunecare și deformare datorat particulelor abrazive a suprafețelor în contact, atunci capătă mare importanță și fenomenele care însoțesc interacțiunea metalului cu oxigenul din aer, umiditatea și compoziția chimică a mediului de ungere [4].

Pelicula de lubrifiant dintre suprafețele în frecare prezintă mare importanță în procesul de abraziune. Dacă dimensiunile abrazivului sînt mai mici decît grosimea peliculei lubrifiante, acesta va circula nestingherit printre suprafețe fără ca să vină în contact cu acestea. Dacă, dimpotrivă, dimensiunile abrazivului depășesc grosimea minimă a peliculei de lubrifiant, acesta va acționa direct asupra suprafețelor cu care vine în contact, cu efecte mai mult sau mai puțin distrugătoare, funcție de raportul dintre duritățile materialelor și abrazivului.

Efectele sarcinii sînt, în general, de scurtă durată aducînd însă o notă foarte violentă în desfășurarea procesului de uzură.

Intensitatea uzurii la abraziune la organele de mașini depășește cu mult valorile intensității celorlalte tipuri de uzură întîlnite de obicei în practică (contact, coroziune) [5].

2. CRITERII DE EXPRIMARE

În general, este greu de găsit un criteriu care să exprime eficacitatea unei clase de fenomene care determină un anumit tip de uzură.

M. M. Hrușciov propune o expresie analitică a dependenței intensității sau vitezei de uzură liniară, de sarcina specifică și de viteza de alunecare, de condițiile pe de suprafața de frecare (condițiile de contact ale suprafețelor, ungerea, dimensiunile și proprietățile particulelor abrazive, rugozitatea suprafețelor), de duritatea și alte proprietăți ale suprafețelor în frecare etc. [6].

Pentru cazul frecării suprafeței metalice pe o suprafață abrazivă, același autor propune o expresie de forma [6] :

$$\frac{dh}{ds} = c \cdot P, \tag{1}$$

unde $\frac{dh}{ds}$ — intensitatea uzurii liniare,
P — sarcina specifică,
c — un coeficient care depinde de proprietățile materialului și de capacitatea abrazivă a suprafeței.

Pentru exprimarea dependenței intensității uzurii abrazive de sarcina specifică ținînd seama de duritatea (H) a materialului, se propune relația

$$\frac{dh}{ds} = \frac{c \cdot P}{H} \tag{2}$$

pentru metalele pure și oțelurile revenite, iar pentru oțelurile tratate termic (călire normală, revenire)

$$\frac{dh}{ds} = \frac{c \cdot P}{(1 - \beta) H_0 + \beta H} \tag{3}$$

unde H_0 — duritatea oțelului revenit,
β — coeficient adimensional, care depinde de compoziția oțelului, putînd avea valori cuprinse între 0 și 1,0.

Cercetările experimentale au demonstrat că aceste relații nu sînt valabile decît în cazul că duritatea abrazivului este mai mare decît duritatea suprafețelor în frecare.

Cu toate dificultățile practice pe care le ridică, considerații de ordin teoretic au făcut ca criteriul energetic să pară totuși cel mai convenabil. Acest criteriu a fost expus într-o lucrare anterioară [1]

$$\eta_u = \frac{1}{\tilde{a}\frac{A}{\sigma}\cdot\frac{Q}{V} + 1} \tag{4}$$

unde η_u — randamentul energetic al procesului,
A — echivalentul mecanic al căldurii,
Q — căldura degajată în proces,
σ — tensiunea superficială a suprafeței nou formate,
V — uzura suprafeței exprimată ca volum,
$\tilde{a}$ — un factor avînd dimensiunea unei lungimi și care exprimă raportul dintre volumul și suprafața particulelor de uzură $\left(\tilde{a} = \frac{V}{S}\right)$.

Raportul $\frac{A}{\sigma}$ este constant pentru un sistem dat, deoarece σ este constant pentru un același material iar A este o constantă universală a cărei valoare este bine cunoscută.

În utilizarea acestei relații, principala eroare se poate face la evaluarea lui $\tilde{a}$.

Dacă se ține seama de faptul că dimensional $\tilde{a}$ reprezintă o lungime iar V reprezintă o lungime la cub și că V se deduce destul de riguros, cunoscînd greutatea și densitatea materialului uzat, se ajunge totuși la concluzia că eventualele erori făcute la determinarea lui $\tilde{a}$ sînt de ordin inferior celor făcute la determinarea lui V și că există o mare probabilitate ca rezultatul final să nu fie apreciabil influențat.

Factorul $\tilde{a}$ exprimă violența procesului de uzură, variind proporțional cu intensitatea acestuia.

În cazul uzurii abrazive, cînd procesul este mult mai violent față de alte procese de uzură, particulele de uzură au dimensiuni mai mari, ceea ce face ca să crească mai mult volumul particulelor de uzură rezultate decît suprafața lor și implicit valoarea lui $\tilde{a}$.

Raportarea intensității uzurii abrazive la întreaga perioadă a procesului de uzură prezintă o imagine falsă a fenomenului, deoarece acest proces de mare intensitate durează efectiv cîteva secunde, după care peste acest proces de uzură mecanică se suprapune în proporții din ce în ce mai mari uzura de contact.

3. DATE EXPERIMENTALE

Încercările efectuate în scopul determinării rezistenței la uzura abrazivă a mterialelor în funcție de duritatea lor s-au făcut pe aparatul pentru calorimetrarea proceselor de uzură tip IMA [7].

S-au folosit în acest scop tamburi (fig. 1*a*) confecționați dintr-o piatră abrazivă iar saboții (fig. 1*b*) confecționați din oțel de diferite durități și calități.

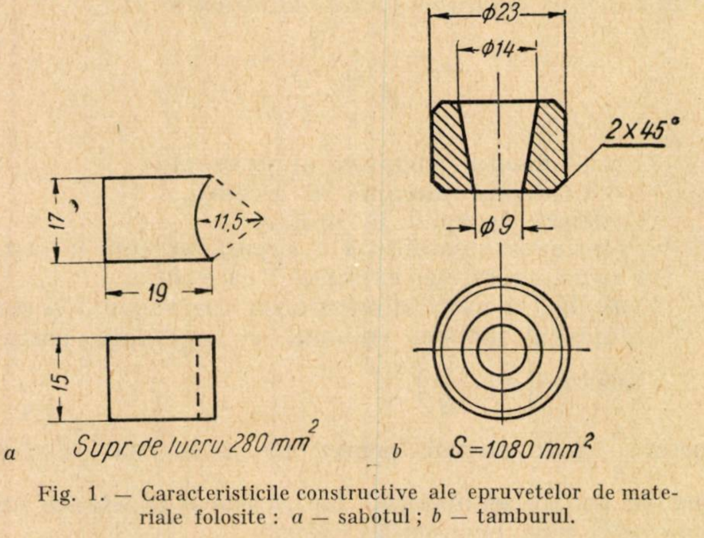


Fig. 1. — Caracteristicile constructive ale epruvetelor de materiale folosite : *a* — sabotul ; *b* — tamburul.

Parametrii experimentali, turația, sarcina și temperatura s-au menținut constanți.

Deoarece datele experimentale obținute atît asupra căldurii generate în proces cît și a uzurilor în unitatea de timp (1 minut), nu permit decît verificarea globală a dependenței uzurii de abraziune de duritatea materialelor și al rolului preponderent al sarcinii, fără a putea ilustra dinamica procesului de uzură, s-a modificat tehnica experimentală după cum urmează:

S-a măsurat în fiecare moment al experienței cuplul rezistent (unghiul de torsiune α°) [7] și turația, înregistrînd unghiul α° prin filmare, cu ajutorul unui oscilograf cu bucle, cu circa 25 imagini pe minut.

În figura 2 este prezentată imaginea unei astfel de înregistrări.

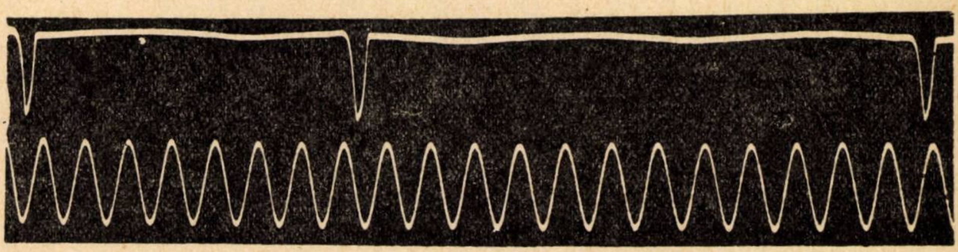


Fig. 2. — Exemplu de înregistrare prin filmare a cuplului rezistent (∡ de torsiune α^0) într-un moment oarecare al experimentării.

Determinările calorimetrice s-au făcut în gol ($Q_{gol} = 312$ cal.) și sub sarcină constantă (5,7 kg/cm^2).

Reprezentarea rezultatelor s-a făcut în așa fel, încît să se obțină — pe cît posibil — o imagine mai sugestivă a evoluției fenomenului.

Pentru comparație, în paralel, s-au executat și cîteva experiențe cu tambur din oțel cromat în locul pietrei abrazive.

Cîteva din rezultatele obținute sînt prezentate în tabela 1 și figurile 3 (*a*, *b*, *c*,*d*).

Experimentările efectuate au demonstrat:

1. Dependența uzurii abrazive de duritatea materialului și anume, uzura scade cu creșterea acesteia (tabela 1).

2. Dependența uzurii abrazive de natura materialului; pentru aproximativ aceiași duritate pierderea în greutate a oțelului OL 60 este mult mai mare decît cea a oțelului OL 35 (tabela 1).

3. Căldura generată în procesul abraziv este mult mai mică decît în cazul proceselor de contact; pentru același material (OL 35) cu aproximativ aceeași duritate căldura generată este aproximativ de 3 ori mai mică.

4. Raportarea procesului de abraziune la un timp standard de 1 minut conduce la o imagine falsă a fenomenului. Raportarea trebuie să se facă la timpul cît durează efectiv procesul de mare intensitate și anume, cîteva secunde (fig. 3, *a*, *b*, *c* și *d*).

5. Alura curbelor de uzură abrazivă funcție de timp are un caracter oarecum parabolic, în timp ce la uzura de contact are un caracter exponențial cu panta negativă.

6. Dacă se admite o proporționalitate directă între fluxul de energie și căldura generată și se reprezintă acesta în funcție de timp, se poate evalua partea de energie cheltuită în procesul de abraziune deosebit de energia cheltuită pentru frecare (contact).

Tabela J

Nr. exp.	Natura materialelor sabot/tambur	Sarcina kg/cm²	Căldura generată Q, cal/min	Turaţia rot/min	Cuplul rezist. kgm	Uzura		Raportul Q/V
						g/min	m³/min	
1	OL 35 (H_B251)/OL cromat	5,7	1 150,0	1 480	0,040	$0{,}17.10^{-3}$	$0{,}022.10^{-3}$	$5{,}2.10^{7}$
2	OL 35 (H_B420) /abraziv	5,7	522,0	1 495	0,0141	$34{,}0.10^{-3}$	$4{,}35.10^{-3}$	$1{,}2.10^{5}$
3	OL 45 (H_B383) /abraziv	5,7	570,0	1 495	0,0141	$155{,}0.10^{-3}$	$20{,}0.10^{-3}$	$2{,}85.10^{4}$
4	OL 60 H_B383) /abraziv	5,7	680,0	1 495	0,0145	408,0	$52{,}0.10^{-3}$	$1{,}3.10^{4}$
5	OL 35 (H_B210) /abraziv	5,7	350,0	1 495	0,0141	$93{,}0.10^{-3}$	$11{,}9.10^{-3}$	$2{,}96.10^{4}$
6	OL 45 (H_B244) /abraziv	5,7	830,0	1 495	0,0141	$397{,}0.10^{-3}$	$51{,}0.10^{-3}$	$1{,}6.10^{4}$

7. În urma măsurătorilor efectuate, diametrul mediu al particulelor de uzură rezultate prin abraziune a fost evaluat ~ la 50μ, ceea ce dă pentru $\tilde{a}$ valoarea $\tilde{a} \cong 1.10^{-4}$. În acest caz, randamentul procesului de uzură prin abraziune variază aproximativ de 100 ori în intervalul

$$\eta_u = 10^{-5} \; . \; . \; . \; 10^{-7} \tag{5}$$

fiind în medie de ~ 10 000 ori mai mare decît la uzura de contact ($\eta_u = 10^{-9} \; . \; . \; . \; 10^{-11}$), (cazul OL 35/OL cromat).

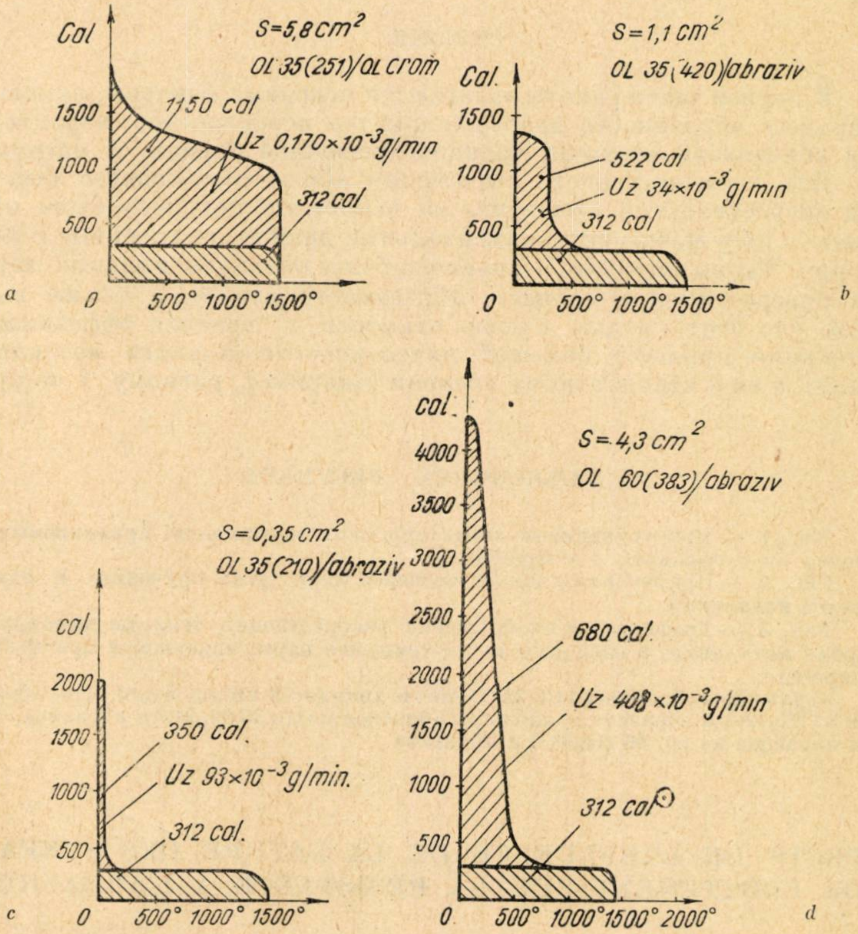


Fig. 3. — Reprezentarea grafică a repartiției căldurii generate în timpul încercării în funcție de cuplul rezistent măsurat pentru un parcurs constant.
a — pentru cuplul de epruvete OL 35 (H_B 250)/OL cromat
b — pentru cuplul de epruvete OL 35 (H_B 420)/abraziv
c — pentru cuplul de epruvete OL 35 (H_B 210)/abraziv
d — pentru cuplul de epruvete OL 60 (H_B 383)/abraziv.

Primită la redacție la 19 decembrie 1961

АСПЕКТЫ ВЛИЯНИЯ ХАРАКТЕРА ТРУЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА АБРАЗИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ

РЕЗЮМЕ

В первой части работы излагаются основные факторы, влияющие на процесс абразивного износа (характер поверхностей, характеристики абразивной частицы, толщина смазочной пленки и нагрузка).

Для количественного выражения абразивного износа был выбран энергетический критерий, на основании которого были обработаны и обсуждены экспериментальные данные, полученные в лаборатории. Таким образом, становится более очевидно влияние характера поверхностей в процессе абразивного износа, а также вывод о том, что этот процесс нужно относить к времени эффективного протекания процесса большой интенсивности (порядка нескольких секунд), а не к стандартному времени (например, равному 1 минуте).

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Конструктивные характеристики материалов, применяемых для образцов: *a* — колодка: *b* — барабан.

Рис. 2. — Пример киносъемки трущейся пары (угол кручения) в один из моментов испытания.

Рис. 3. — Графическое изображение распределения теплоты, порождаемой во время испытания, в зависимости от трущейся пары, измеряемой при постоянном пробеге.

a) для пары образцов из OL 35 (H_B250) и хромистой стали, *b*) для пары образцов из OL 35 (H_B420) и абразива, *c*) для пары образцов из OL 35 (H_B210) и абразива, *d*) для пары образцов из OL 60 (H_B383) и абразива.

ASPECTS DE L'INFLUENCE DE LA NATURE DES SURFACES DE FROTTEMENT SUR LA RÉSISTANCE À L'ABRASION

RÉSUMÉ

Dans la première partie du travail, les auteurs décrivent les facteurs les plus importants influençant le processus d'usure par abrasion (nature des surfaces, caractéristiques des particules abrasives, épaisseur du film lubrifiant, charge).

Afin d'exprimer quantitativement l'usure par abrasion, ils ont choisi un critère énergétique, qui a servi de base à l'étude et à la discussion des données expérimentales obtenues en laboratoire. Ceci fait mieux ressortir l'influence de la nature des surfaces dans le processus de l'usure par abrasion, ainsi que la conclusion que le processus doit être rapporté à la durée effective du processus de grande intensité (de l'ordre de quelques secondes) et non à une durée standard (1 min. par exemple).

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Caractéristiques constructives des éprouvettes des matériaux employés. *a*) Le sabot ; *b*) le tambour.

Fig. 2. — Exemple d'enregistrement sur film du couple résistant ($\measuredangle$ de torsion α°) à un moment quelconque de l'expérience.

Fig. 3. — Représentation graphique de la répartition de la chaleur engendrée durant l'essai en fonction du couple résistant mesuré sur un parcours constant.

a) pour la paire d'éprouvettes OL 35 (H_B 250)/OL chromé ; *b*) pour la paire d'éprouvettes OL 35 (H_B 420)/abrasif ; *c*) pour la paire d'éprouvettes OL 35 (H_B 210)/abrasif ; *d*) pour la paire d'éprouvettes OL 60 (H_B 383)/abrasif.

BIBLIOGRAFIE

1. O. PREOTESCU și colab., *Cîteva aspecte fundamentale ale proceselor de uzură*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, IX, 1, 169 (1958)
2. M. M. HRUȘCIOV, M. A. BABICEV, *Rezistența la uzura abrazivă a aliajelor și metalelor ecruisate*. Bul. constr. de mașini, *12* (1958).
3. M. M. HRUȘCIOV, *„Resistance to wear by abrasion as related to hardness*. Paper 46. Proc. of the Conference on lubr. and wear, London, 1—3 oct. 1957, London 1958, The Inst. of Mech. Engrs., 635—639.
4. B. I. KOSTETKI, *Probleme fundamentale în domeniul rezistenței la uzură a pieselor de mașini*. Lucrările Consf. asupra teoriei frecării și uzurii (15—17 nov. 1954), Ed. Acad. de Șt. a U.R.S.S., 1957 (trad. pt. uz intern).
5. O. BIȚĂ și colab. *Aspectul geometric al uzurii*. Metalurgia și construcția de mașini, XI, *10*, 864 (1959).
6. M. M. HRUȘCIOV, *Problemele fundamentale ale dezvoltării teoriei uzurii*. Lucrările Consf. asupra teoriei frecării și uzurii (15—17 nov. 1954). Ed. Acad. de Șt. a U.R.S.S., 1957 (trad. pt. uz intern).
7. GH. MARIN, *Aparat pentru calorimetrarea proceselor de uzură*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, XI, *2*, 523 (1960).

STUDII

ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR

EFICIENŢA ÎNCLINĂRII TĂLPII DE FUNDAŢIE LA BARAJELE DE GREUTATE

DE

RADU PRIŞCU 1) şi GHEORGHE OLTEANU 2)

1. INTRODUCERE

Profilul unui baraj de greutate, dimensionat raţional, reflectă capacitatea de rezistenţă a terenului pe care este fundat. Astfel, este cunoscut că cel mai obişnuit profil — profilul triunghiular cu paramentul amonte vertical (fig. 1*a*) — este adecvat pentru terenuri cu rezistenţă mare la alunecare. Această rezistenţă, destul de complexă ca fenomen fizic, se introduce în calcule prin coeficientul de frecare statică realizabil între teren şi talpa barajului. În cazurile în care acest coeficient, determinat prin încercări pe teren, are valori situate aproximativ sub 0,80—0,75,

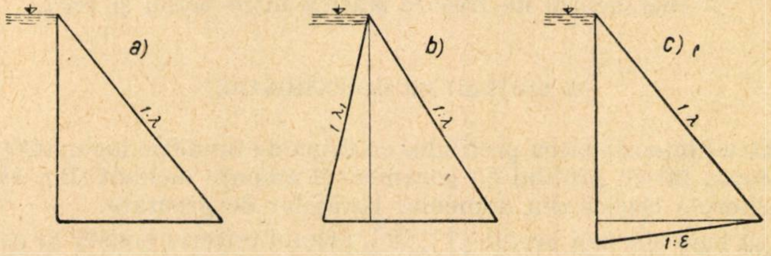


Fig. 1. — *a*) profil cu paramentul amonte vertical, *b*) profil cu paramentul amonte înclinat, *c*) profil cu talpa înclinată.

profilul amintit necesită cantităţi mai mari de beton decît cel cu paramentul amonte înclinat, spre exemplu. Acesta din urmă (fig. 1*b*), purtînd în amonte o prizmă de apă cu efect stabilizator, realizează faţă de primul

---

1) şi 2) Institutul de construcţii, Bucureşti.

economii cu atît mai însemnate cu cît coeficientul de frecare este mai redus. Acest lucru s-a demonstrat în două lucrări anterioare [1], [2].

Dar după cum stabilitatea la alunecare a unui profil triunghiular poate fi mărită prin înclinarea paramentului amonte, un efect similar se poate obţine înclinînd talpa barajului spre amonte (fig. 1*c*). Prin această dispoziţie rezultanta generală a forţelor care acţionează asupra profilului atacă suprafaţa de fundaţie sub un unghi mai puţin ascuţit şi în consecinţă componenta ei tangenţială se reduce. Se pune întrebarea dacă un asemenea profil nu necesită, în condiţii de teren egale, un volum de beton mai redus decît cel cu paramentul amonte înclinat, recomandat mai înainte [2]. Sau cu alte cuvinte, care este dispoziţia cea mai avantajoasă pentru mărirea stabilităţii la alunecare a unui profil triunghiular : înclinarea paramentului amonte sau înclinarea suprafeţei de fundaţie. În lucrarea de faţă se analizează această problemă.

NOTAŢII

H — înălţimea barajului (m),
λ — tangenta unghiului pe care îl face paramentul aval cu verticala,
λ_1 — tangenta unghiului pe care îl face paramentul amonte cu verticala,
ε — tangenta unghiului pe care îl face suprafaţa de fundaţie cu verticala,
γ — greutatea specifică a apei (t/m^3),
γ_b — greutatea specifică a betonului (t/m^3),
γ_b' — $\gamma_b - m\,\gamma$
m — coeficientul de reducere a subpresiunilor,
σ — efort normal (t/m^2),
f — coeficientul de frecare statică între beton şi rocă.

2. CRITERII DE DIMENSIONARE

Pentru dimensionarea profilului cu talpa de fundaţie înclinată (fig.1*c*) şi compararea lui cu profilul cu paramentul amonte înclinat (fig. 1*b*) s-au aplicat criteriile clasice din domeniul barajelor de greutate.

După cum s-a mai arătat [1], [2], primul criteriu constă în condiţia ca, ţinînd seama de acţiunea subpresiunilor, efortul normal pe fundaţie de la piciorul amonte al barajului să fie mai mare sau la limită egal cu zero. Prin această condiţie se exclud deci eforturile de tensiune în acest punct. În ipoteza repartiţiei liniare a eforturilor, acest lucru se scrie sub forma

$$\sigma_{am} = \frac{\Sigma N}{\Omega} + \frac{\Sigma M}{W} \geqslant 0. \qquad (1)$$

Al doilea criteriu constă în condiția de stabilitate la alunecare a barajului în secțiunea de fundație. În mod obișnuit acest lucru se exprimă punînd condiția ca coeficientul de alunecare, definit prin raportul între suma forțelor tangențiale ΣT și suma forțelor normale pe fundație ΣN, să fie mai mic sau la limită egal cu coeficientul de frecare statică f al betonului cu roca de fundație

$$\frac{\Sigma T}{\Sigma N} \leqslant f. \tag{2}$$

Introducerea unui anumit coeficient de siguranță la alunecare sau luarea în considerare a coeziunii dintre beton și rocă se pot realiza implicit prin modificarea corespunzătoare a cifrei f.

3. EXPRESII CARACTERISTICE PENTRU PROFILUL CU TALPĂ ÎNCLINATĂ

Luînd în considerare greutatea proprie a barajului G, presiunea hidrostatică P și subpresiunea S (care se admite că variază liniar din amonte spre aval), s-au dedus expresiile solicitărilor și eforturilor care acționează în suprafața de fundație a unui baraj cu talpa înclinată (fig. 2)

— suma forțelor normale pe fundație

$$\Sigma N = N_p + N_G - S = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon + \lambda}{\varepsilon^2\sqrt{1 + \varepsilon^2}}\{\gamma\varepsilon + [\gamma(1 - m) + \gamma_b'\varepsilon]\lambda\}\,H^2;$$

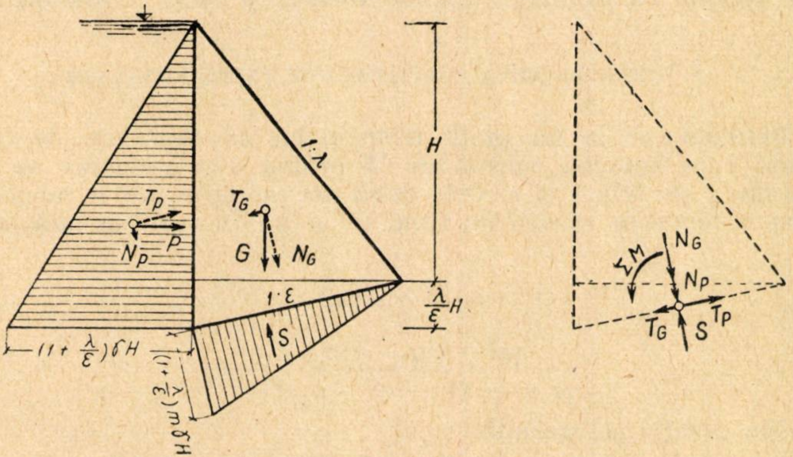

1:λ
H
T_p
P
N_p
T_G
G
N_G
$1\cdot\varepsilon$
$\frac{\lambda}{\varepsilon}H$
S
$(1+\frac{\lambda}{\varepsilon})\gamma H$
$H\gamma m(1+\frac{\lambda}{\varepsilon})$
N_G
λ
N_P
T_P
T_G
S

Fig. 2. — Forțele care acționează asupra unui profil cu talpa înclinată.

— suma forțelor tangențiale la fundație

$$\Sigma T = T_P - T_G = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon + \lambda}{\varepsilon\sqrt{1 + \varepsilon^2}}[\gamma\varepsilon - (\gamma_b - \gamma)\lambda]\,H^2;$$

— suma momentelor față de centrul secțiunii

$$\Sigma M = \frac{1}{12}\,\frac{\varepsilon+\lambda}{\varepsilon^3}\{[\gamma_b'\varepsilon^2 + \gamma(1-m)]\,\lambda^2 - \gamma\varepsilon\lambda - 2\gamma\varepsilon^2\}\,H^3.$$

Făcînd înlocuirile corespunzătoare în formula eforturilor normale

$$\sigma_{av}^{am} = \frac{\Sigma N}{\Omega} \pm \frac{\Sigma M}{W},$$

s-a obținut:

— efortul amonte

$$\sigma_{am} = \frac{\varepsilon+\lambda}{\varepsilon(1+\varepsilon^2)\lambda^2}\{[\gamma(1-m) + \gamma_b'\varepsilon^2]\,\lambda^2 - \gamma\varepsilon^2\}\,H; \tag{3}$$

— efortul aval

$$\sigma_{av} = \frac{(\varepsilon+\lambda)^2}{(1+\varepsilon^2)\lambda^2}\gamma H. \tag{4}$$

Pentru coeficientul de alunecare al profilului a rezultat

$$\frac{\Sigma T}{\Sigma N} = \frac{\gamma\varepsilon^2 - (\gamma_b - \gamma)\,\varepsilon\lambda}{\gamma\varepsilon + [\gamma(1-m) + \gamma_b'\varepsilon^2]\lambda}. \tag{5}$$

Remarcăm că făcînd pe ε să tindă către infinit, limitele expresiilor (3), (4) și (5) sînt identice cu expresiile care au fost deduse anterior [1] pentru profilul cu parament amonte vertical și talpa orizontală.

4. DIMENSIONAREA PROFILULUI CU TALPĂ ÎNCLINATĂ

Referindu-ne la un profil triunghiular cu suprafața de fundație înclinată spre amonte, constatăm că pentru dimensionarea sa trebuie determinate pantele λ și ε. Cele două necunoscute pot fi calculate rezolvînd sistemul de ecuații de tipul (1) și (2). În cazul de față ecuațiile sînt

$$[\gamma(1-m) + \gamma_b'\varepsilon^2]\,\lambda^2 - \gamma\varepsilon^2 = 0, \tag{1'}$$

$$\frac{\gamma\varepsilon^2 - (\gamma_b - \gamma)\,\varepsilon\,\lambda}{\gamma\varepsilon + [\gamma(1-m) + \gamma_b'\varepsilon^2]\lambda} = f. \tag{2'}$$

Din ecuația (1)′ rezultă

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma\varepsilon^2}{\gamma_b'\varepsilon^2 + \gamma(1-m)}}, \tag{6}$$

iar din (2)′

$$\lambda = \frac{\gamma\varepsilon(\varepsilon - f)}{f\gamma_h'\varepsilon^2 + (\gamma_b - \gamma)\,\varepsilon + f\gamma(1-m)}. \tag{7}$$

Egalînd expresiile (6) și (7) ridicate la patrat, rezultă ecuația care îl furnizează pe ε :

$$\begin{aligned}\gamma_b'(f^2\gamma_b'-\gamma)\,\varepsilon^4+2f\,\gamma_b\,\gamma_b'\,\varepsilon^3+(\gamma_b^2-2\gamma\,\gamma_b+f^2\gamma\gamma_b'-2\,mf^2\gamma\gamma_b'+m\gamma^2)\,\varepsilon^2+\\+2f\,\gamma\gamma_b(1-m)\,\varepsilon-mf^2\gamma^2(1-m)=0.\end{aligned}\tag{8}$$

Cunoscînd pe ε, necunoscuta λ se poate determina prin oricare din relațiile (6) sau (7).

Din studiul asupra rădăcinilor ecuației (8), efectuat pentru valori curente ale coeficienților γ, γ_b, f și m, rezultă că :

— ecuația are în general două rădăcini imaginare și două rădăcini reale pozitive; dintre acestea din urmă, una are valori subunitare foarte reduse, ceeace ar conduce la înclinări inadmisibil de mari ale tălpii de fundație și alta are valori de ordinul unităților sau zecilor de unități, care pot fi luate în considerare din punct de vedere practic;

— pentru valoarea limită $m = 1$ gradul ecuației se reduce la doi, fapt care permite determinarea directă a celor două rădăcini.

Asupra relațiilor (6) și (7) se pot face următoarele observații :

— pentru valori $0 < m < 1$, care se admit în calcule în modul cel mai frecvent, mărimea lui λ este cu atît mai puțin influențată de ε cu cît acesta are valori mai mari (talpa mai apropiată de orizontală); cînd ε tinde către infinit (talpa orizontală), limita lui λ este $\lim\limits_{\varepsilon \to \infty} \lambda = \sqrt{\gamma/\gamma_b'}$, expresie cunoscută cu care se dimensionează profilele cu talpa orizontală;

— pentru valoarea limită $m = 1$, mărimea lui λ este tot $\lambda = \sqrt{\gamma/\gamma_b'}$, indiferent de valoarea lui ε calculată din ecuația (8).

Cu ajutorul relațiilor (6), (7) și (8) s-au efectuat o serie de calcule numerice, admițînd $\gamma = 1$ t/m³, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m³ și făcînd să varieze parametric coeficientul de reducere a subpresiunilor m și coeficientul de frecare f. Rezultatele, care ne dau o imagine mai precisă asupra modului cum influențează înclinarea tălpii de fundație (ε) proporțiile barajului (λ), sînt trecute în tabelă și reprezentate în figura 3.

Valori ε și λ funcție de m și f

	ε			λ		
f \ m	1,00	0,75	0,50	1,00	0,75	0,50
0,30	2,18889	2,13911	2,11972	0,87705	0,78942	0,72333
0,40	2,83157	2,88372	2,97532	0,87705	0,79554	0,73325
0,50	3,81514	4,11133	4,50516	0,87705	0,79941	0,74031
0,60	5,50872	6,52816	8,10057	0,87705	0,80170	0,74378
0,70	9,11532	13,60140	27,55332	0,87705	0,80286	0,74522
0,80	22,08266	475,49911	∞	0,87705	0 80321	0,74536

În conformitate cu cele arătate mai înainte, se constată că :

— înclinarea tălpii de fundaţie (ε) este puternic influenţată de coeficientul de frecare (f) şi de coeficientul de reducere a subpresiunilor (m) ; după cum era de aşteptat, talpa trebuie înclinată cu atît mai mult faţă de orizontală, cu cît f este mai redus şi m mai mare ;

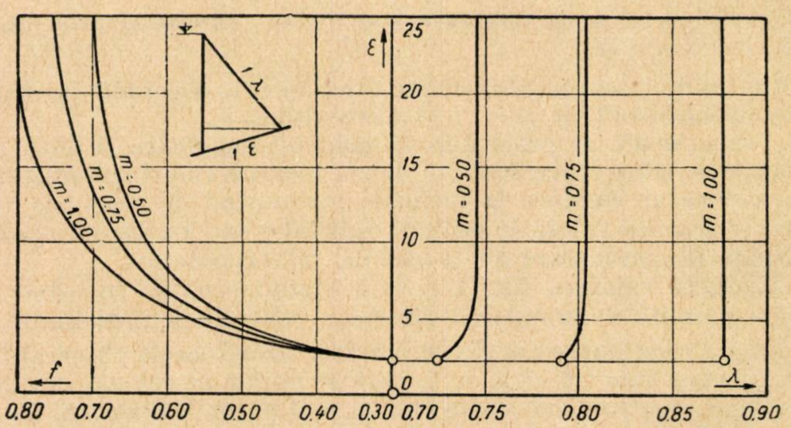


Fig. 3. — Variaţia pantelor ε şi λ cu coeficienţii m şi f.

— înclinarea paramentului aval (λ) nu este practic influenţată de mărimea lui (ε) ; cifrele care au rezultat, pentru o gamă destul de largă de valori ε, sînt foarte apropiate de valorile limită care rezultă din formula $\lambda = \sqrt{\gamma/\gamma'_b}$.

5. COMPARAŢIE CU PROFILUL CU PARAMENT AMONTE ÎNCLINAT

În vederea comparării profilului studiat cu profilul cu parament amonte înclinat s-au calculat numeric eforturile normale specifice $\sigma_{av\,(\varepsilon,\,\lambda)}/H$ (formula (4)) care acţionează la piciorul aval şi volumele de beton specifice $V_{(\varepsilon,\,\lambda)}/H^2$. Cifrele obţinute s-au raportat apoi la cifrele care corespund profilului cu parament amonte înclinat. Rezultatele sînt reprezentate în figurile 4 şi 5.

Se constată că :

— eforturile aval sînt cu atît mai mari cu cît coeficienţii m şi f sînt mai reduşi (fig. 4 stînga) ;

— pentru o gamă largă de valori ale parametrilor m şi f eforturile care acţionează la picioarele aval ale profilelor care se compară sînt practic egale, raportul între ele fiind sensibil egal cu unitatea (fig. 4 dreapta) ;

— volumele de beton pe metru liniar de baraj sînt cu atît mai mari cu cît m este mai mare şi f mai redus (fig. 5 stînga) ;

— pentru valori ale lui *f* $< 0{,}50$, raportul volumelor $V_{(\varepsilon,\lambda)}/V_{(\lambda_1,\lambda)}$ este subunitar, iar pentru valori $0{,}50 < f < 0{,}80$ acest raport este supraunitar (fig. 5 dreapta); ori, conform figurii 3, tocmai în domeniul în care profilul cu talpa înclinată ar aduce unele economii de volum ($f < 0{,}50$) panta fundației rezultă neobișnuit de înclinată față de orizontală.

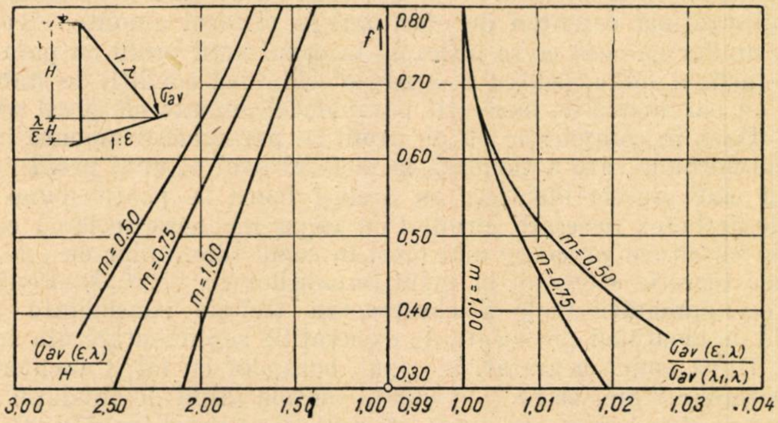


Fig. 4. — Variaţia eforturilor specifice σ_{av} $_{(\varepsilon,\lambda)}/H$ şi a raportului $\sigma_{av(\varepsilon,\lambda)}/\sigma_{av(\lambda_1,\lambda)}$ cu coeficienţii *m* şi *f*.

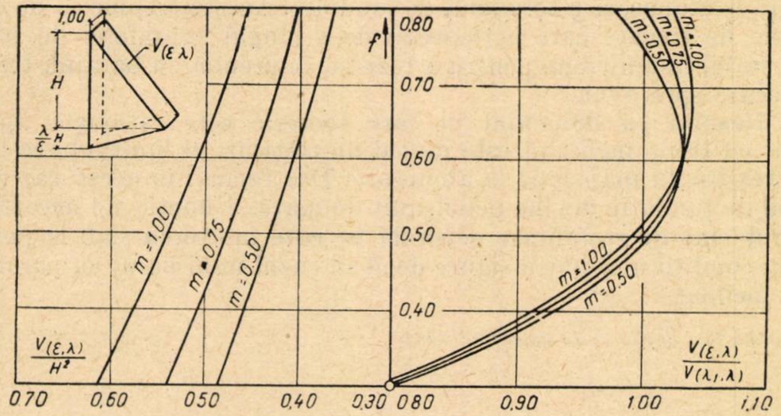


Fig. 5. — Variaţia volumelor specifice $V_{(\varepsilon,\lambda)}/H^2$ şi a raportului $V_{(\varepsilon,\lambda)}/V_{(\lambda_1,\lambda)}$ cu coeficienţii *m* şi *f*.

6. CONCLUZII

Față de cele arătate mai înainte se pot trage următoarele concluzii:

1. La dimensionarea unui profil cu talpa înclinată coeficientul de reducere a subpresiunilor *m* și coeficientul de frecare statică *f* joacă un rol important. Acești coeficienți influențează cu deosebire orientarea tălpii de fundație care rezultă cu atît mai înclinată față de orizontală cu cît *f* este mai redus și *m* este mai mare.

2. La rîndul său, înclinarea tălpii de fundaţie rezultată (ε) are o influenţă redusă asupra orientării paramentului aval (λ). Pentru o gamă largă de valori ale lui ε, panta acestui parament rezultă foarte apropiată de aceea care se deduce din condiţia de efort nul la piciorul amonte al unui profil cu talpa orizontală. Acest lucru arată că înclinarea tălpii de fundaţie ameliorează stabilitatea la alunecare a unui baraj, fără a aduce o contribuţie substanţială condiţiei de efort nul la piciorul amonte. Acest fapt nu este similar cu ceea ce se întîmplă în cazul unui profil cu paramentul amonte înclinat unde, pentru a satisface cele două condiţii de stabilitate, variază cu parametrii de bază atît paramentul amonte cît şi cel aval [2].

3. Dacă în comparaţie cu un profil cu paramentul amonte înclinat, eforturile normale care acţionează la piciorul aval al unui profil cu talpa înclinată sînt practic identice, nu acelaşi lucru se poate spune despre volumele de beton necesare. Profilul cu talpa înclinată reclamă cantităţi de beton cu cîteva procente mai mari în cazul terenurilor cu $f > 0,50$ şi realizează teoretic economii în cazul terenurilor cu $f < 0,50$. Pentru stabilirea economicităţii reale a construcţiei trebuie considerate însă şi sporurile de cheltuieli provocate de excavaţiile suplimentare din fundaţii.

4. După cum s-a arătat, în cazul barajelor cu talpa înclinată fundate pe terenuri mai slabe ($f < 0,50$), pantele tălpii de fundaţie rezultă foarte mari. Acest fapt, pe lîngă că are un caracter neobişnuit, aduce unele complicaţii constructive de care trebuie să se ţină seama. La adoptarea unui baraj de acest tip mai trebuie verificată apoi capacitatea de rezistenţă la alunecare a terenului de fundaţie. Acesta trebuie să fie capabil de forţele de frecare care acţionează de-a lungul suprafeţei de fundaţie şi să fie stabil în adîncime pentru a rezista, împreună cu barajul, tendinţei de alunecare spre aval.

5. Rezultă că domeniul în care teoretic este raţională aplicarea barajelor cu talpa înclinată este destul de restrîns, el limitîndu-se la terenuri cu rezistenţă mai slabă la alunecare. Dar tocmai în acest caz înclinarea tălpii de fundaţie devine neobişnuit de mare. Funcţie de aceasta apar unele probleme de stabilitate generală pe care un teren slab le poate satisface în condiţii mai puţin sigure decît în cazul unui baraj cu paramentul amonte înclinat.

Primită la redacţie la 12 decembrie 1961

ЭФФЕКТИВНОСТЬ НАКЛОНА ПОДОШВЫ ФУНДАМЕНТА ГРАВИТАЦИОННЫХ ПЛОТИН

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается влияние, оказываемое наклоном подошвы фундамента на размеры и экономичность гравитационных плотин. После установления характерных уравнений для профилей с наклонной подошвой указывается на то, что путем наклона поверхности фундамента улучшается устойчивость на сдвиг, однако

без влияния на условие нулевого усилия верховой пяты. Следовательно, независимо от величины наклона фундамента, уклон низовой грани получается очень близким к профилю с горизонтальной подошвой. Из сравнения с профилем с наклонной верховой гранью вытекает, что область рационального применения исследуемого профиля очень ограничена и притом обусловлена другими задачами устойчивости основания.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — *a*) профиль с вертикальной верховой гранью, *b*) профиль с наклонной верховой гранью, *c*) профиль с наклонной подошвой.

Рис. 2. — Силы, действующие на профиль с наклонной подошвой.

Рис. 3. — Изменение точек ε и λ в зависимости от коэффициентов m и f.

Рис. 4. — Изменение удельных напряжений $\sigma_{av\,(\varepsilon,\lambda)}/H$ и отношения $\sigma_{av\,(\varepsilon,\lambda)}/\sigma_{av(\lambda_1,\lambda)}$ в зависимости от коэффициентов m и f.

Рис. 5. — Изменение удельных объемов $V_{(\varepsilon,\lambda)}/H^2$ и отношения $V_{(\varepsilon,\lambda)}/V_{(\lambda_1,\lambda)}$ в зависимости от коэффициентов m и f.

EFFICACITÉ DE L'INCLINAISON DE LA SURFACE DE FONDATION DANS LE CAS DES BARRAGES-POIDS

RÉSUMÉ

Dans ce travail, les auteurs étudient l'influence que l'inclinaison de la surface de fondation exerce sur les dimensions et l'économie des barrages-poids. Après avoir établi les relations caractéristiques pour les profils à fondation inclinée, ils montrent que cette inclinaison a pour effet une amélioration de la stabilité au glissement, tout en n'influençant pas la condition d'effort nul au pied amont. Par conséquent, quelle que soit la valeur de l'inclinaison de la fondation, la pente du parement aval sera très voisine de celle d'un profil à fondation horizontale. La comparaison avec un profil à parement amont incliné montre que le domaine d'application rationnelle du profil étudié est très restreint et conditionné par d'autres problèmes de stabilité du terrain de fondation.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — *a*) profil à parement amont vertical ; *b*) profil à parement amont incliné ; *c*) profil à fondation inclinée.

Fig. 2. — Forces agissant sur un profil à fondation inclinée.

Fig. 3. — Variation des pentes ε et λ avec les coefficients m et f.

Fig. 4. — Variation des efforts spécifiques $\sigma_{av\,(\varepsilon,\lambda)}/H$ et du rapport $\sigma_{av\,(\varepsilon,\lambda)}/\sigma_{av\,(\lambda_1,\lambda)}$ avec les coefficients m et f.

Fig. 5. — Variation des volumes spécifiques $V_{(\varepsilon,\lambda)}/H^2$ et du rapport $V_{(\varepsilon,\lambda)}/V_{(\lambda_1,\lambda)}$ avec les coefficients m et f.

BIBLIOGRAFIE

1. RADU PRIȘCU, *Asupra profilului optim al barajelor de greutate.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, **IV** (1953).
2. — *Considérations sur le calcul des barrages en béton pour larges vallées.* Rapport nr. 46 — Septième congrès des grands barrages, Rome, 1961.

CONTRIBUȚII LA TEORIA ÎNCOVOIERII PARABOLOIDULUI HIPERBOLIC ÎN ȘA

DE

MIRCEA SOARE [1]

§ 1. INTRODUCERE. ECUAȚIILE GENERALE

Scopul studiului de față este de a stabili o soluție în teoria încovoierii pentru paraboloidul hiperbolic în șa, simplu rezemat pe contur, acoperind în plan o suprafață dreptunghiulară.

Elementele geometrice sînt reprezentate în figura 1 ; corespunzător acestora, ecuația suprafeței mediane se scrie

$$z = \frac{4f_1}{a^2}\, x(x-a) - \frac{4f_2}{b^2}\, y(y-b). \tag{1.1}$$

Derivatele secunde, scrise cu notațiile lui Monge, au particularitatea importantă că sînt constante

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8f_1}{a^2} > 0\,; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \equiv 0\,; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{8f_2}{b^2} < 0. \tag{1.2}$$

Ca punct de plecare, vom alege ecuațiile lui V. Z. Vlasov, stabilite în ipoteza că placa curbă subțire este pleoștită, adică $f_1/a < 5$ și $f_2/b < 5$.

Utilizînd metoda mixtă și introducînd ca funcții necunoscute săgețile w și funcțiunea de eforturi (de tip Airy) F, ecuațiile de bază se scriu

$$\left.\begin{aligned} K\cdot\Delta\Delta w - \quad \Delta_1 F &= Z, \qquad (1.3a)\\ \Delta\Delta F + E\delta\cdot\Delta_1 w &= 0, \qquad (1.3b)\end{aligned}\right\}$$

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

în care

$\Delta(\ldots) = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ldots)$ operatorul laplacean,

$\Delta_1(\ldots) = \left(t\,\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - 2s\,\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + r\,\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ldots)$ operator mixt de ordinul al doilea,

E — modulul de elasticitate al materialului.

μ — coeficientul lui Poisson,

δ — grosimea plăcii (presupusă constantă),

$K = \dfrac{E\delta^3}{12\,(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii.

Eforturile şi momentele sînt reprezentate în figura 2, cu sensul pozitiv de acţiune.

Ţinînd seama de ipoteza de placă pleoştită, eforturile şi momentele din suprafaţa reală concordă cu cele din planul xoy, iar componentele X şi Y ale încărcării exterioare au putut fi neglijate în sistemul (1.3).

Presupunînd cunoscute funcţiile F şi w, restul mărimilor statice se deduce cu ajutorul formulelor

— eforturi normale

$$N_x \approx N_x^* = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad N_y \approx N_y^* = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \tag{1.4a}$$

— eforturi de lunecare

$$N_{xy} = N_{yx} = N_{xy}^* = N_{yx}^* = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}; \tag{1.4b}$$

— momente încovoietoare

$$M_x = M_x^* \approx -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = M_y^* \approx -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \tag{1.4c}$$

— momente de răsucire

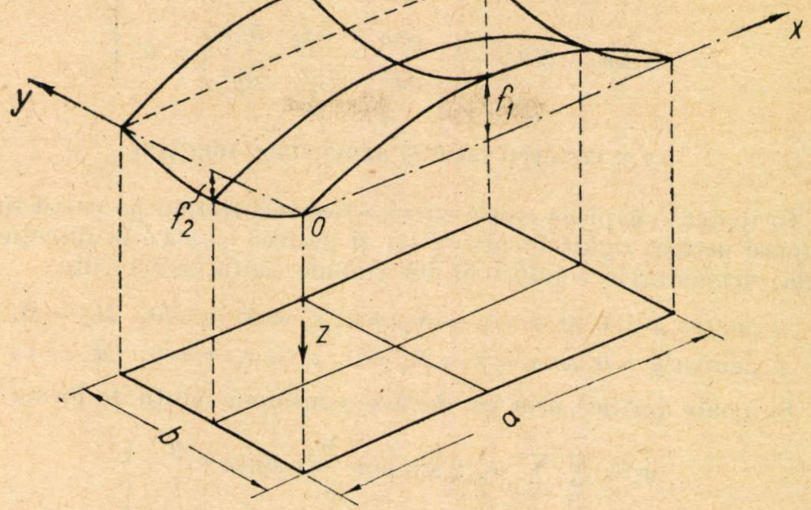
$$M_{xy} = M_{yx} \approx M_{xy}^* = M_{yx}^* \approx -K(1-\mu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}; \tag{1.4d}$$

— forţe tăietoare

$$Q_x \approx Q_x^* \approx -K\,\frac{\partial}{\partial x}\,\Delta w, \qquad Q_y \approx Q_y^* \approx -K\,\frac{\partial}{\partial y}\,\Delta w; \tag{1.4e}$$

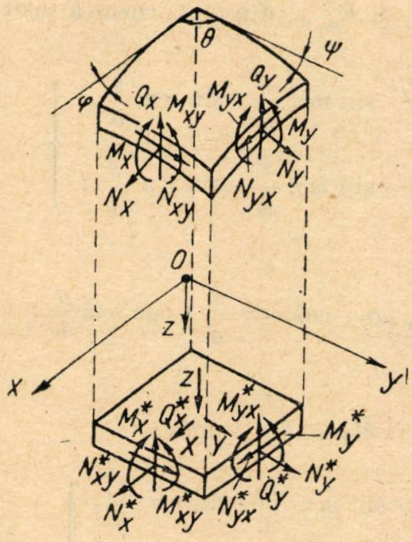
— forţe tăietoare generalizate

$$\begin{aligned} R_x &\approx R_x^* = -K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y^2}\right], \\ R_y &\approx R_y^* = -K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\,\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right]. \end{aligned} \tag{1.4f}$$



y
x
f1
f2
O
z
b
a

Fig. 1. — Elementele geometrice ale paraboloidului hiperbolic în șa.



θ
ψ
φ
Qx
Mxy
Myx
Qy
My
Mx
Ny
Nx
Nxy
Nyx
O
z
x
y
Z
Mx*
Qx*
Myx*
X
Y
My*
Nxy*
Ny*
Qy*
Nx*
Mxy*
Nyx*

Fig. 2. — Eforturile și momentele reale și proiectate.

Ținînd seama de (1.2), ecuațiile (1.3) se scriu

$$\left.\begin{aligned} &K\cdot\Delta\Delta w+\left(\frac{8f_2}{b^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial x^2}-\frac{8f_1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right)=Z, && (1.5a)\\ &\Delta\Delta F-E\delta\left(\frac{8f_2}{b^2}\cdot\frac{\partial^2w}{\partial x^2}-\frac{8f_1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)=0. && (1.5b)\end{aligned}\right\}$$

§ 2. CONDIȚII LIMITĂ. STRUCTURA SOLUȚIEI

În ipoteza că, placa curbă subțire reazemă simplu pe patru timpane, presupuse perfect rigide în planul lor și perfect elastice în direcție transversală, următoarele condiții limită trebuie să fie satisfăcute :

$$\left.\begin{aligned} &-\text{ pentru } x=0 \text{ și } x=a\rightarrow N_x=0,\ \varepsilon_y=0,\ w=0,\ M_x=0,\\ &-\text{ pentru } y=0 \text{ și } y=b\rightarrow N_y=0,\ \varepsilon_x=0,\ w=0,\ M_y=0.\end{aligned}\right\}\quad(2.1)$$

Se poate verifica ușor că, dacă se consideră soluții de forma

$$\left.\begin{aligned} &w=\sum_m\sum_n w_{m.n}\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b}, && (2.2)\\ &F=\sum_m\sum_n F_{m.n}\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b}, && (2.3)\end{aligned}\right\}$$

acestea satisfac toate condițiile limită.

Presupunînd cunoscuți pe $w_{m.n}$ și $F_{m.n}$, din (1.4) rezultă ușor :

— eforturile normale

$$\left.\begin{aligned} &N_x=-\frac{\pi^2}{b^2}\sum_m\sum_n F_{m.n}n^2\cdot\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b},\\ &N_y=-\frac{\pi^2}{a^2}\sum_m\sum_n F_{m.n}m^2\cdot\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b};\end{aligned}\right\}\quad(2.4a)$$

— eforturile de lunecare

$$N_{xy}=N_{yx}=-\frac{\pi^2}{ab}\sum_m\sum_n F_{m.n}mn\cdot\cos m\pi\frac{x}{a}\cdot\cos n\pi\frac{y}{b};\quad(2.4b)$$

— momentele încovoietoare

$$M_x=m_x+\mu m_y,\qquad M_y=m_y+\mu m_x,\quad(2.4c)$$

unde

$$\left.\begin{aligned} &m_x=\frac{K\pi^2}{a^2}\sum_m\sum_n w_{m.n}\cdot m^2\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b},\\ &m_y=\frac{K\pi^2}{b^2}\sum_m\sum_n w_{m.n}\cdot n^2\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b};\end{aligned}\right\}\quad(2.4d)$$

— momentele de răsucire

$$M_{xy} = M_{yx} = -\frac{K(1-\mu)\pi^2}{ab}\sum_m\sum_n w_{m,n}\cdot mn\cos m\pi\frac{x}{a}\cdot\cos n\pi\frac{y}{b}\,; \tag{2.4e}$$

— forţele tăietoare

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= K\pi^3\sum_m\sum_n w_{m,n}\left(\frac{m^3}{a^3}+\frac{mn^2}{ab^2}\right)\cos m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b}\,,\\ Q_y &= K\pi^3\sum_m\sum_n w_{m,n}\left(\frac{mn^2}{a^2b}+\frac{n^3}{b^3}\right)\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\cos n\pi\frac{y}{b}\,;\end{aligned}\right\} \tag{2.4f}$$

— forţele tăietoare generalizate

$$\left.\begin{aligned} R_x &= K\pi^3\sum_m\sum_n w_{m,n}\left[\frac{m^3}{a^3}+(2-\mu)\frac{mn^2}{ab^2}\right]\cos m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b}\,,\\ R_y &= K\pi^3\sum_m\sum_n w_{m,n}\left[\frac{n^3}{b^3}+(2-\mu)\frac{m^2n}{a^2b}\right]\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\cos n\pi\frac{y}{b}\,.\end{aligned}\right\} \tag{2.4g}$$

§ 3. DETERMINAREA COEFICIENŢILOR $w_{m,n}$ ŞI $F_{m,n}$

Pentru precizarea coeficienţilor dimensionali $w_{m,n}$ şi $F_{m,n}$, vom presupune în prealabil că şi expresia încărcării exterioare poate fi dezvoltată într-o serie dublă trigonometrică

$$Z(x, y) = \sum_m\sum_n Z_{m,n}\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b} \tag{3.1}$$

(factorii $Z_{m,n}$ fiind cunoscuţi pentru o încărcare dată); mai departe, vom introduce expresiile (2.2), (2.3) în ecuaţiile (1.5).

Grupînd convenabil termenii, rezultă două serii, ai căror coeficienţi sînt variabili o dată cu x şi y; ele vor fi identităţi, doar dacă pentru fiecare pereche de valori m, n, factorul lui $\sin m\pi\frac{x}{a}\sin n\pi\frac{y}{b}$ va fi nul.

Limitîndu-ne la termenul general de rang m, n din fiecare relaţie, rezultă sistemul

$$\left.\begin{aligned} &K\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 w_{m,n}-\frac{8\pi^2}{a^2b^2}(f_2m^2-f_1n^2)\,F_{m,n}=Z_{m,n}\,,\\ &\frac{8\pi^2E\delta}{a^2b^2}(f_2m^2-f_1n^2)\,w_{m,n}+\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2F_{m,n}=0.\end{aligned}\right\}$$

Introducînd încă, pentru simplificare, notaţiile

$$\alpha = \frac{a}{b} \qquad \text{— raportul laturilor,} \tag{3.2a}$$

$$\lambda = \frac{f_1}{f_2} \qquad \text{— raportul săgeţilor,} \tag{3.2b}$$

$$\beta = \frac{768\,(1-\mu^2)}{\pi^4}\left(\frac{f_2}{\delta}\right)^2 \qquad \text{— coeficientul de amortizare al plăcii curbe}$$

subţiri, (3.2c)

din rezolvarea sistemului precedent rezultă

$$\left.\begin{aligned} w_{m,n} &= \frac{Z_{m,n}\,a^4}{K\pi^4}\cdot\frac{(m^2+\alpha^2 n^2)^2}{(m^2+\alpha^2 n^2)^4+\beta\alpha^4\,(m^2-\lambda n^2)^2}, && (3.3)\\ F_{m,n} &= -\frac{Z_{m,n}a^2b^2}{8\,\pi^2 f_2}\cdot\frac{\beta\alpha^4\,(m^2-\lambda n^2)}{(m^2+\alpha^2 n^2)^4+\beta\alpha^4\,(m^2-\lambda n^2)^2}. && (3.4)\end{aligned}\right\}$$

O dată cunoscute valorile $w_{m,n}$ şi $F_{m,n}$, celelalte mărimi statice rezultă direct din formulele (2.4).

§ 4. DISCUŢIA STĂRII DE EFORTURI

Seriile duble utilizate precedent sînt destul de slab convergente, ceea ce reprezintă un desavantaj pentru calculul numeric; de aceea este indicat să căutăm un procedeu de mărire a convergenţei, prin separarea seriei în alte două serii, dintre care una să aibă suma cunoscută (eventual să se exprime, sub formă finită), iar cealaltă serie să fie rapid convergentă. Acest procedeu are totodată avantajul de a scoate în evidenţă anumite semnificaţii fizice ale comportării plăcii.

Fiind vorba de o stare de efort de tip mixt a plăcii, vom examina succesiv mărimile statice caracterizînd încovoierea, respectiv comportarea de şaibă.

4.1. Starea de încovoiere a plăcii curbe subţiri

Să considerăm fracţia care înmulţeşte termenul dimensional din expresia (3.3) pentru $w_{m,n}$ şi să folosim identitatea

$$\begin{aligned}\frac{(m^2+\alpha^2 n^2)^2}{(m^2+\alpha^2n^2)^4+\beta\alpha^4\,(m^2-\lambda n^2)^2} &= \frac{1}{(m^2+\alpha^2n^2)^2} - \\ &- \frac{\beta\alpha^4\,(m^2-\lambda n^2)^2}{(m^2+\alpha^2n^2)^6+\beta\alpha^4\,(m^2-\lambda n^2)^2\,(m^2+\alpha^2n^2)^2}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

În baza acestei identităţi, expresia săgeţilor se pune sub forma

$$w = \sum_m \sum_n \frac{Z_{m.n}\, a^4}{K\pi^4} \cdot \frac{1}{(m^2+\alpha^2 n^2)^2} \sin m\pi \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \frac{y}{b} -$$

$$- \sum_m \sum_n \frac{Z_{m.n}\, a^4}{K\pi^4} \cdot \qquad (4.2)$$

$$\cdot \frac{\beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2}{(m^2+\alpha^2 n^2)^6 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2 (m^2+\alpha^2 n^2)^2} \sin m\pi \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \frac{y}{b}.$$

Prima serie dublă din membrul al doilea reprezintă însă săgeata plăcii plane care acoperă acelaşi contur $a \times b$ ca şi paraboloidul hiperbolic de care ne ocupăm. Notînd această săgeată cu $w_{\text{placă}}$ şi cu $\Delta w_{\text{curbură}}$, seria complementară, avem

$$w = w_{\text{placă}} - \Delta w_{\text{curbură}}, \qquad (4.3)$$

$$\Delta w_{\text{curbură}} = \sum_m \sum_n \frac{Z_{m.n}\, a^4}{K\pi^4} \cdot \qquad (4.4)$$

$$\cdot \frac{\beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2}{(m^2+\alpha^2 n^2)^6 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2 (m^2+\alpha^2 n^2)^2} \sin m\pi \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \frac{y}{b}.$$

A doua serie are termenii de ordinul $1/m^8$ şi este mai rapid convergentă decît prima (pentru placa plană), al cărei termen general este de ordinul $1/m^4$.

Săgeata $w_{\text{placă}}$ poate fi însă dedusă şi prin alte metode decît cea a seriilor duble trigonometrice, de exemplu prin metoda seriilor simple trigonometrice. Pentru tipuri de încărcări cunoscute, valorile $w_{\text{placă}}$ se vor lua din manuale şi tabele uzuale.

Relaţia (4.3) poate fi încă prelucrată pentru a scoate mai bine în evidenţă comportarea unei plăci curbe subţiri.

Este ştiut că, utilizînd de exemplu metoda seriilor simple trigonometrice, săgeata plăcii plane poate fi scrisă ca diferenţa a două săgeţi

$$w_{\text{placă}} = w_{\text{grindă}} - \Delta w_{\text{placă}},$$

în care $w_{\text{grindă}}$ reprezintă săgeata grinzii de deschidere a (sau b),
$\Delta w_{\text{placă}}$ – reducerea săgeţii datorită comportării plane.

Ţinînd seama de această observaţie, relaţia (4.3) devine

$$w = w_{\text{grindă}} - \Delta w_{\text{placă}} - \Delta w_{\text{curbură}}. \qquad (4.5)$$

Aceste consideraţii sînt valabile şi pentru celelalte mărimi statice care se deduc din w. Notînd mai departe cu indicele $_{\text{placă}}$ mărimile statice care corespund soluţiei de placă plană, din relaţiile (2.4c), (2.4d), (2.4e), (2.4f), (2.4g) şi (4.4), putem scrie

— momentele încovoietoare

$$m_x = m_{x,\,\text{placă}} - \frac{a^2}{\pi^2}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m,n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2\,m^2}{(m^2+\alpha^2 n^2)^6+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2(m^2+\alpha^2 n^2)^2}\times$$

$$\times \sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b},$$

$$m_y = m_{y,\,\text{placă}} - \frac{\alpha^2 a^2}{\pi^2}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m,n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2\,n^2}{(m^2+\alpha^2 n^2)^6+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2(m^2+\alpha^2 n^2)^2}\times \tag{4.6a}$$

$$\times \sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b};$$

— momentele de răsucire

$$M_{xy} = M_{yx} = M_{xy,\,\text{placă}} +$$

$$+\frac{(1-\mu)\,\alpha a^2}{\pi^2}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m,n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2\,mn}{(m^2+\alpha^2 n^2)^6+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2(m^2+\alpha^2 n^2)^2}\times \tag{4.6b}$$

$$\times \cos m\pi\frac{x}{a}\cdot\cos n\pi\frac{y}{b};$$

— forțele tăietoare

$$Q_x = Q_{x,\,\text{placă}} - \frac{a}{\pi}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m,n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2\,m}{(m^2+\alpha^2 n^2)^5+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2(m^2+\alpha^2 n^2)}\times$$

$$\times \cos m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b},$$

$$Q_y = Q_{y,\,\text{placă}} - \frac{\alpha a}{\pi}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m,n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2\,n}{(m^2+\alpha^2 n^2)^5+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2(m^2+\alpha^2 n^2)}\times \tag{4.6c}$$

$$\times \sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\cos n\pi\frac{y}{b};$$

— forțele tăietoare generalizate

$$R_x = R_{x,\,\text{placă}} - \frac{a}{\pi}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m,n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2\,m\,[m^2+(2-\mu)\,\alpha^2 n^2]}{(m^2+\alpha^2 n^2)^6+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2(m^2+\alpha^2 n^2)^2}\times$$

$$\times \cos m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b},$$

$$R_y = R_{y,\,\text{placă}} - \frac{\alpha a}{\pi}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m,n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2\,n\,[\alpha^2 n^2+(2-\mu)\,m^2]}{(m^2+\alpha^2 n^2)^6+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2(m^2+\alpha^2 n^2)^2}\times \tag{4.6d}$$

$$\times \sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\cos n\pi\frac{y}{b}.$$

Interesant de semnalat mai este faptul următor. Fie raportul săgeţilor un număr întreg, patrat perfect, de exemplu

$$\frac{f_1}{f_2} = \lambda = \gamma^2. \tag{4.7}$$

Pentru o încărcare sinusoidală de forma

$$Z_{m,n}(x, y) = Z_0 \sin \gamma n\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \qquad (m = \gamma n) \tag{4.8}$$

factorul $(m^2 - \lambda n^2)$ se anulează şi efectul favorabil al curburii dispare; paraboloidul hiperbolic se comportă ca o placă plană de laturi $a \times b$.

4.2. Comportarea de şaibă a plăcii curbe subţiri

Înainte de a examina soluţia obţinută prin teoria încovoierii, ne vom opri la examinarea aplicării teoriei fără momente. Este cunoscut din literatura de specialitate că, în cazul plăcilor curbe subţiri avînd curbura lui Gauss negativă, teoria fără momente are un domeniu de aplicabilitate restrîns sau chiar este inaplicabilă. Paraboloidul hiperbolic fiind un caz tipic şi prezentînd un mare interes practic, am considerat necesar să comparăm rezultatele obţinute prin cele două teorii.

Ecuaţia diferenţială a problemei se deduce din (1.5a) dacă se anulează termenul $K \cdot \Delta\Delta w$. Ţinînd seama de notaţiile (3.2a), (3.2b), această ecuaţie se scrie

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{Za^2}{8 f_2}. \tag{4.9}$$

Introducînd seriile duble trigonometrice conform (2.3) şi (3.1), rezultă

$$F^M_{m,n} = - \frac{Z_{m,n}\, a^2 b^2}{8\pi^2 f_2} \cdot \frac{1}{m^2 - \lambda n^2}; \tag{4.10}$$

soluţia precedentă răspunde problemei, în limitele ipotezei de membrană, atîta timp cît numitorul este diferit de zero.

În ipoteza însă, că raportul săgeţilor f_1/f_2 satisface o relaţie de forma (4.7) şi că încărcarea exterioară cuprinde armonice m, n astfel încît să fie satisfăcută relaţia

$$m^2 - \lambda n^2 = 0, \tag{4.11}$$

termenii corespunzători $F^M_{m,n}$ vor fi infiniţi.

Aceasta denotă însă că ipoteza de membrană nu se poate realiza practic şi că preluarea sarcinilor se produce exclusiv prin eforturi de încovoiere.

Am ajuns astfel la teoria încovoierii. Ținînd seama de (3.4), eforturile se exprimă prin formulele
— eforturile normale

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \frac{a^2}{8f_2}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m.n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)\,n^2}{(m^2+\alpha^2 n^2)^4+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2}\cdot\sin m\pi\frac{x}{a}\sin n\pi\frac{y}{b}, \\ N_y &= \frac{b^2}{8f_2}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m.n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)\,m^2}{(m^2+\alpha^2 n^2)^4+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2}\cdot\sin m\pi\frac{x}{a}\sin n\pi\frac{y}{b}; \end{aligned}\right\} \quad (4.12a)$$

— eforturile de lunecare

$$\begin{aligned} N_{xy} = N_{yx} &= \frac{ab}{8f_2}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m.n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)\,mn}{(m^2+\alpha^2 n^2)^4+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2}\times \\ &\times\cos m\pi\frac{x}{a}\cdot\cos n\pi\frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (4.12b)$$

Pentru perechi de valori m, n care satisfac relația (4.11) eforturile care caracterizează comportarea de șaibă a plăcii curbe subțiri sînt nule, ceea ce justifică afirmația precedentă.

Pentru celelalte cazuri însă, se poate face o apropiere între expresiile (4.10) și (3.4). Anume expresia (3.4), în care am introdus indicele superior B (pentru a caracteriza teoria încovoierii), se poate aduce la forma

$$F^B_{m,n} = -\frac{Z_{m.n}\,a^2 b^2}{8\pi^2 f_2}\cdot\frac{1}{m^2-\lambda n^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{(m^2+\alpha^2 n^2)^4}{\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2}} = F^M_{m,n}\cdot\Theta_{m.n} \quad (4.13a)$$

unde factorul de corecție are expresia

$$\Theta_{m.n} = \frac{1}{1+\dfrac{(m^2+\alpha^2 n^2)^4}{\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2}}. \quad (4.13b)$$

Pentru primele armonice, factorul Θ are valori foarte apropiate de unitate, ceea ce arată că soluția exactă pentru eforturi diferă foarte puțin de aceea fără momente.

La colțuri, eforturile de lunecare păstrează valori finite, contrar celor ce se deduc din teoria de membrană.

De exemplu, în origine, valoarea lunecării este

$$N_{xy.c} = N_{yx.c} = \frac{ab}{8f_2}\sum_m\sum_n \frac{Z_{m.n}\,\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)\,mn}{(m^2+\alpha^2 n^2)^4+\beta\alpha^4(m^2-\lambda n^2)^2}. \quad (4.14)$$

4.3. Aplicaţie pentru Z = const.

Un caz interesant şi suficient de general, îl reprezintă *sarcina uniformă distribuită parţial pe un dreptunghi* ale cărui laturi sînt paralele cu conturul paraboloidului hiperbolic. Cu notaţiile din figura 3 *a*, coeficientul $Z_{m,n}$ se scrie

$$Z_{m,n} = \frac{16p}{\pi^2} \cdot \frac{1}{mn} \sin m\pi \frac{\xi}{a} \sin m\pi \frac{c}{a} \sin n\pi \frac{\zeta}{b} \sin n\pi \frac{d}{b}.$$

Din acest caz se pot deduce numeroase alte cazuri interesante.

Astfel pentru *sarcina uniformă distribuită liniar, paralel cu una din laturi* (de exemplu axa Oy), cu notaţiile din figura 3 *b*, rezultă

$$d = \zeta = \frac{b}{2}, \quad c \to 0, \quad \lim_{c \to 0} 2pc = P,$$

$$Z_{m,n} = \frac{8P}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin mn \frac{\xi}{a}.$$

$$(m = 1, 2, 3, 4, \ldots ; \; n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Cazul *sarcinii concentrate* este util pentru construirea suprafeţelor de influenţă; cu notaţiile din figura 3 *c*, rezultă

$$c = d \to 0, \quad \lim_{c, d \to 0} 4pcd = P,$$

$$Z_{m,n} = \frac{4P}{ab} \sin m\pi \frac{\xi}{a} \sin n\pi \frac{\zeta}{b}.$$

Se observă că seria încărcării este divergentă, însă seriile deduse pentru solicitări sînt convergente.

Cu ajutorul integralelor duble se pot deduce, din cazul sarcinii concentrate, expresiile încărcării distribuite în interiorul unui contur de formă oarecare dată şi a cărei intensitate variază după o lege dată.

În particular, pentru sarcina uniform distribuită pe toată suprafaţa $a \times b$ (fig. 3 *d*) corespunde

$$\xi = c = \frac{a}{2}, \qquad \zeta = d = \frac{b}{2}, \qquad (4.15)$$

$$Z_{m,n} = \frac{16p}{\pi^2 mn} \qquad (m, n = 1, 3, 5, \ldots).$$

De acest caz ne vom ocupa mai de aproape, deoarece el reprezintă încărcarea din zăpadă şi, în ipoteza de placă pleoştită, încărcarea din greutate proprie şi al unei presiuni constante.

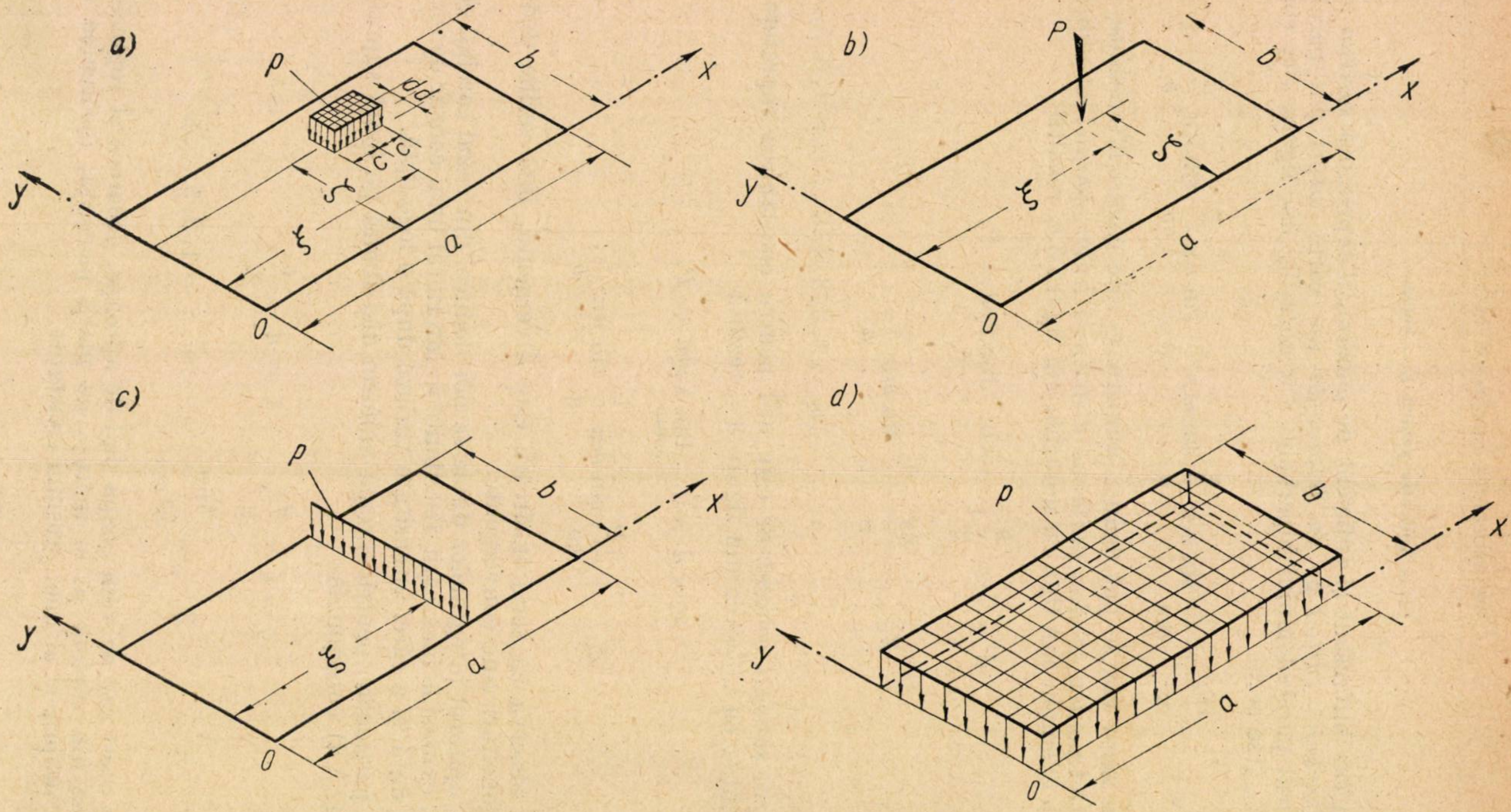

a)
p
d
d
c
c
ζ
ξ
a
b
x
y
0
b)
P
ζ
ξ
a
b
x
y
0
c)
p
ξ
a
b
x
y
0
d)
p
a
b
x
y
0

Fig. 3. — Diferite scheme de încărcare : *a*) Sarcină uniformă, distribuită parţial ; *b*) sarcină liniară ; *c*) sarcină concentrată ; *d*) sarcină uniform distribuită pe toată suprafaţa.

Ţinînd seama de (4.15), grupele de formule (4.6) şi (4.12) devin

— momentele încovoietoare

$$m_x = m_{x,\,\text{placă}} - \frac{16\,pa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2\, m}{n\,[(m^2+\alpha^2 n^2)^6 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2 (m^2+\alpha^2 n^2)^2]} \times$$

$$\times \sin m\pi \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \frac{y}{b},$$

$$m_y = m_{y,\,\text{placă}} - \frac{16\,pa^2\alpha^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2\, n}{m\,[(m^2+\alpha^2 n^2)^6 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2 (m^2+\alpha^2 n^2)^2]} \times$$

$$\times \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b},$$

$$M_x = m_x + \mu m_y, \quad M_y = m_y + \mu m_x; \tag{4.16a}$$

— momentele de răsucire

$$M_{xy} = M_{yx} = M_{xy,\,\text{placă}} -$$

$$- \frac{16\,(1-\mu)\,pa^2\alpha}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2}{(m^2+\alpha^2 n^2)^6 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2 (m^2+\alpha^2 n^2)^2} \times$$

$$\times \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}; \tag{4.16b}$$

— forţele tăietoare

$$Q_x = Q_{x,\,\text{placă}} - \frac{16\,pa}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2}{n\,[(m^2+\alpha^2 n^2)^5 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2 (m^2+\alpha^2 n^2)]} \times$$

$$\times \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \tag{4.16c}$$

$$Q_y = Q_{y,\,\text{placă}} - \frac{16\,pa\alpha}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2}{m\,[(m^2+\alpha^2 n^2)^5 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2 (m^2+\alpha^2 n^2)]} \times$$

$$\times \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b};$$

— forţele tăietoare generalizate

$$R_x = R_{x,\,\text{placă}} - \frac{16\,pa}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2\, [m^2 + (2-\mu)\,\alpha^2 n^2]}{n\,(m^2+\alpha^2 n^2)^2\, [(m^2+\alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2]} \times$$

$$\times \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \tag{4.16d}$$

$$R_y = R_{y,\,\text{placă}} - \frac{16\,pa\alpha}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2\, [(2-\mu)\,m^2 + \alpha^2 n^2]}{m\,(m^2+\alpha^2 n^2)^2\, [(m^2+\alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2]} \times$$

$$\times \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b};$$

— eforturile normale

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \frac{2pa^2}{\pi^2 f_2} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)\, n}{m\,[(m^2+\alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2]} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \\ N_y &= \frac{2pb^2}{\pi^2 f_2} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)\, m}{n\,[(m^2+\alpha^2 n^2) + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2]} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}; \end{aligned}\right\} \quad (4.16e)$$

— eforturile de lunecare

$$\begin{aligned} N_{xy} = N_{yx} &= \frac{2pab}{\pi^2 f_2} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2} \times \\ &\times \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (4.16f)$$

Ținînd seama de simetria de încărcare și rezemare față de planele $x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{b}{2}$, starea de eforturi va prezenta simetrii sau antisimetrii față de aceleași plane, fapt care simplifică mult calculele numerice.

4.4. Condiții de echilibru global. Particularități ale stării de eforturi

După obținerea tuturor mărimilor statice, de multe ori este util și necesar să se facă controlul rezultatelor, din condiții de echilibru global. Asemenea procedee servesc de asemenea pentru scoaterea în evidență a unor aspecte care altfel scapă examenului echilibrului local (diferențial).

În cele ce urmează ne vom limita la cazul încărcării din greutatea proprie.

Să considerăm de exemplu porțiunea finită de placă mărginită de planele $x = 0$, $y = 0$, $x = x_0$ și $y = y_0$ și să-i exprimăm *echilibrul în sensul axei Ox.*

În conformitate cu ipoteza de placă curbă subțire pleoștită și ținînd seama de condițiile limită (2.1), va subsista următoarea ecuație de echilibru global :

$$\int_0^{y_0} (N_x)_{x=x_0} \cdot dy - \int_0^{x_0} (N_{yx})_{y=0} \cdot dx + \int_0^{x_0} (N_{yx})_{y=y_0} \cdot dx = 0.$$

Înlocuind eforturile prin intermediul funcției de eforturi, conform (1.4a) și (1.4b), integralele precedente se efectuează imediat și rezultă o identitate. O relație similară rezultă din direcția axei Oy.

Din relația precedentă rezultă modul de scriere al rezultantei eforturilor N_x la mijlocul deschiderii $\left(x = \frac{a}{2}\right)$. Fie C această rezultantă :

$$C = \int_0^b (N_x)_{x=\frac{a}{2}} \cdot dy = \int_0^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{x=\frac{a}{2}} \cdot dy = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\frac{a}{2},\, b} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\frac{a}{2},\, 0}.$$

Ţinînd seama că

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_m \sum_n \frac{n\pi}{b} F_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \cdot \cos n\pi \frac{y}{b},$$

apoi introducînd limitele de integrare şi observînd că cei doi termeni $\frac{\partial F}{\partial y}$ din expresia lui C sînt egali şi de semne contrare, rezultă în cele din urmă

$$C = \frac{4pa^3}{\pi^3 \alpha f_2} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)}{m\left[(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2\right]}. \qquad (4.17)$$

Dacă în secţiunile $y = 0$ şi $y = b$, paraboloidul hiperbolic îşi transmite lunecările unor arce cu tirant, efortul în fiecare tirant va fi 1)

$$I_1 = -\frac{C}{2}. \qquad (4.18)$$

Sarcina exterioară se descarcă la reazeme prin eforturile de lunecare şi forţele tăietoare generalizate (care înglobează efectul forţelor tăietoare şi al momentelor de răsucire).

Fiind vorba de simplă rezemare pe contur, este de aşteptat existenţa unor *forţe concentrate la colţuri* 2), care împiedică ridicarea plăcii. Mărimea lor se poate determina din condiţia de echilibru pe verticală (în lungul axei Oz).

Fie $\mathcal{P}$ rezultanta încărcării plăcii

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= 4 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} \sum_m \sum_n Z_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}\, dx\, dy = \\ &= \frac{4ab}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{Z_{m,n}}{mn} = pab. \end{aligned} \qquad (4.19a)$$

Eforturile de lunecare pe contur, proiectate pe verticală, dau o rezultantă

$$\begin{aligned} I_2 &= 4 \int_0^{\frac{a}{2}} (N_{yx})_{y=0} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot dx + 4 \int_0^{\frac{b}{2}} (N_{xy})_{x=0} \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot dy = \\ &= \frac{64\, pab}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2}{m^2 n^2 \left[(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2 - \lambda n^2)^2\right]}. \end{aligned} \qquad (4.19b)$$

---

1) Se neglijează deformaţiile arcului.

2) În realitate, aşa cum arată teoria lui E. Reissner pentru plăcile plane, forţele concentrate de la colţuri reprezintă o concentrare puternică de eforturi tangenţiale.

Forțele tăietoare generalizate pe contur dau o rezultantă

$$I_3 = 4\int_0^{\frac{a}{2}} (R_y)_{y=0} \cdot dx + 4\int_0^{\frac{b}{2}} (R_x)_{x=0} \cdot dy =$$

$$= \frac{64\,pab}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(m^2+\alpha^2 n^2)^4}{m^2 n^2 \left[(m^2+\alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2\right]} + \tag{4.19c}$$

$$+ \frac{512\,(1-\mu)\,pab\,\alpha^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{(m^2+\alpha^2 n^2)^2}{mn \left[(m^2+\alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2\right]}.$$

În ultimul membru, primul termen (I_3') reprezintă suma forțelor tăietoare Q_x și Q_y pe contur; termenul al doilea (I_3''), ținînd seama de (4.6b) și (4.16b), se scrie

$$I_3'' = 8\,M_{xy\,.\,c}$$

în care $M_{xy\,.\,c}$ reprezintă valoarea momentelor de răsucire la colț.

Se constată că

$$I_2 + I_3' = \mathcal{P},$$

adică eforturile de lunecare și forțele tăietoare pe contur echilibrează sarcina exterioară.

Suplimentul de forțe tăietoare generalizate pe contur reprezentat prin variația momentelor de răsucire este preluat de forțele concentrate de la colțuri V (egale din motive de simetrie)

$$V = \frac{I_3''}{4} = 2\,M_{xy\,.\,c}\,. \tag{4.19d}$$

Se regăsește astfel rezultatul cunoscut în teoria plăcilor plane, cu mențiunea că valorile sînt mult mai mici din cauza curburii.

★

O ultimă problemă pe care o vom atinge este aceea a eforturilor de lunecare pe contur. Din relațiile (4.16f) rezultă

$$\left.\begin{aligned}
(N_{xy})_{x=0} &= \frac{2pab}{\pi^2 f_2} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)}{(m^2+\alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2} \cos n\pi \frac{y}{b},\\
(N_{yx})_{y=0} &= \frac{2pab}{\pi^2 f_2} \sum_m \sum_n \frac{\beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)}{(m^2+\alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4 (m^2-\lambda n^2)^2} \cos m\pi \frac{x}{a}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Spre deosebire de teoria de membrană în care eforturile de lunecare sînt infinite la colțuri, în teoria încovoierii, din expresia (4.20) rezultă o valoare finită.

În paragraful următor este tratat un exemplu numeric.

§ 5. EXEMPLU NUMERIC

Ne propunem să trasăm diagramele stării de eforturi pentru un paraboloid hiperbolic în şa, avînd următoarele date numerice :

— deschiderile $a = 24$ m ; $b = 12$ m $\left(\alpha = \frac{a}{b} = 2\right)$,

— săgeţile timpanelor $f_1 = 3{,}6$ m ; $f_2 = 1{,}8$ m,

$$\left(\lambda = \frac{f_1}{f_2} = 2\right); \quad \left(\frac{f_1}{a} = \frac{f_2}{b} = \frac{3}{20} < \frac{1}{5}\right),$$

— grosimea plăcii $\delta = 0{,}06$ m,

— coeficientul lui Poisson $\mu = \frac{1}{6}$.

Încărcarea din greutate proprie, izolaţii şi zăpadă, se consideră distribuită uniform în proiecţie orizontală şi are intensitatea $p = 300$ kg/m^2. Cu elementele geometrice precedente se calculează coeficientul de amortizare

$$\beta = \frac{768\,(1 - 1/6^2)}{\pi^4}\left(\frac{1{,}80}{0{,}06}\right)^2 \approx 6898{,}74,$$

$$\beta\alpha^4 = 110\,379{,}84.$$

Ne vom ocupa mai de aproape de eforturile N_x, N_y şi N_{xy}. Pentru calculul numeric este cel mai comod să se evalueze mai întîi termenii

$$N_{m,n} = \frac{\beta\alpha^4\,(m^2 - \lambda n^2)}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta\alpha^4\,(m^2 - \lambda n^2)^2} = \frac{1}{m^2 - \lambda n^2 + \dfrac{(m^2 + \alpha^2 n^2)^2}{\beta\alpha^4\,(m^2 - \lambda n^2)}} =$$

$$= \frac{1}{m^2 - 2n^2 + \dfrac{(m^2 + 4n^2)^4}{110\,379{,}84\,(m^2 - 2n^2)}},$$

cu care, expresiile celor 3 eforturi se scriu

$$\left.\begin{aligned}
N_{xy} &= N_{yx} = \frac{2pab}{\pi^2 f_2}\sum_m\sum_n N_{m,n}\cos m\pi\frac{x}{a}\cos n\pi\frac{y}{b},\\
N_x &= \frac{2pa^2}{\pi^2 f_2}\sum_m\sum_n \frac{n}{m}\,N_{m,n}\sin m\pi\frac{x}{a}\sin n\pi\frac{y}{b},\\
N_y &= \frac{2pb^2}{\pi^2 f_2}\sum_m\sum_n \frac{m}{n}\,N_{m,n}\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b},\\
&(m, n = 1, 3, 5, \ldots)
\end{aligned}\right\}$$

Seriile sînt slab convergente, iar pentru calculul valorilor eforturilor s-au luat în considerare 59 termeni, respectiv 52 și 82 termeni.

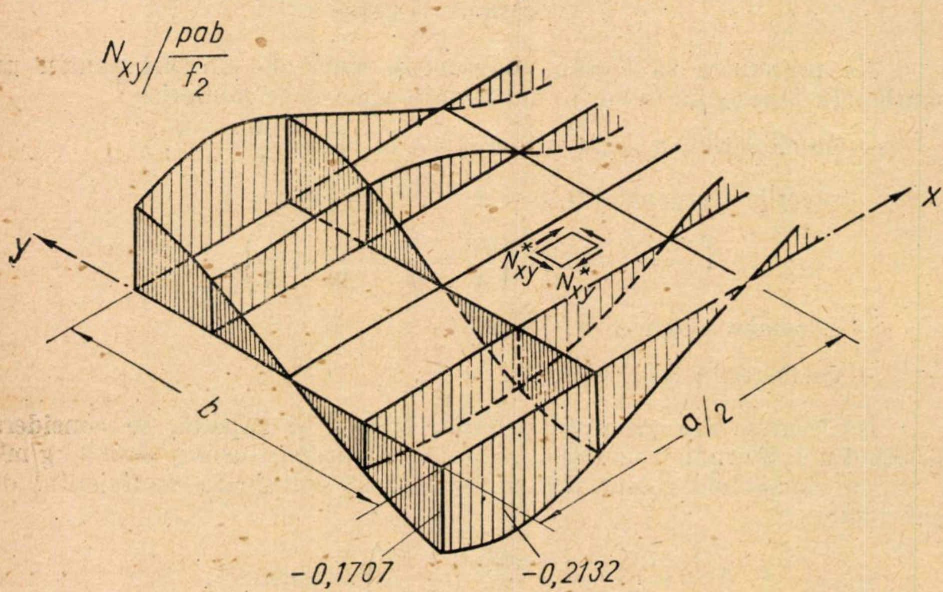

$N_{xy}/\frac{pab}{f_2}$
y
x
N_{xy}^*
N_{xy}^*
b
a/2
-0,1707
-0,2132

Fig. 4. — Diagrama eforturilor de lunecare $N_{xy} = N_{yx}$.

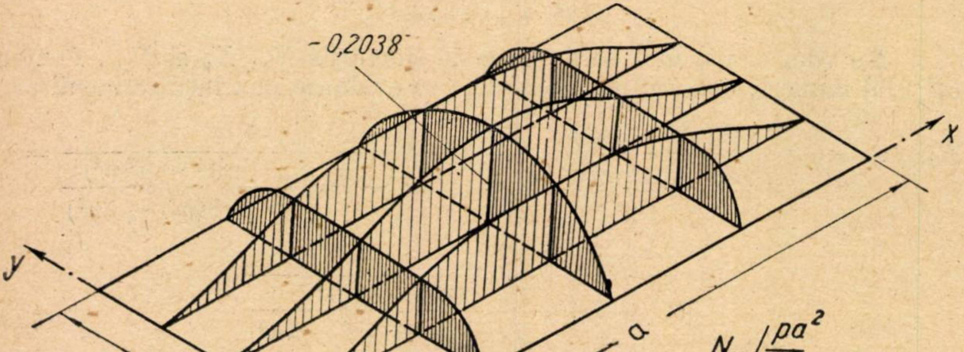

-0,2038
y
x
a
b
$N_x/\frac{pa^2}{f_2}$
N_x^*
N_x^*
0

Fig. 5. — Diagrama eforturilor normale N_x.

Diagramele de variație ale lui $N_{xy} = N_{yx}$ și N_x sînt reprezentate în figurile 4 și 5; variația lui N_y în secțiunile $x = \frac{a}{4}$ și $x = \frac{a}{2}$ este redată în figura 6.

Ţinînd seama de factorii dimensionali

$$\frac{pa^2}{f_2} = \frac{300 \times 24^2}{1,8} = 96\,000 \text{ kg/m},$$

$$\frac{pab}{f_2} = 48\,000 \text{ kg/m și } \frac{pb^2}{f_2} = 24\,000 \text{ kg/m},$$

rezultă următoarele valori maxime :

$$N_{yx,\,\max} = \pm\, 0,2132 \times 48\,000 = \pm\, 10\,233,6 \text{ kg/m},$$

$$\tau = \frac{N_{yx}}{\delta} = \frac{102,336}{6} = 17,1 \text{ kg/m}^2$$

$\left(\text{în punctul } x = \frac{a}{10};\ y = 0 \text{ și analoagele, situate pe laturile lungi}\right);$

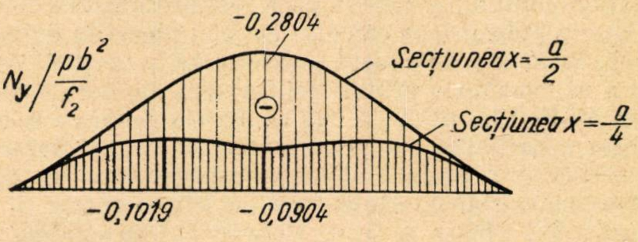


Fig. 6. — Variaţia efortului normal N_y în secţiunile $x = \frac{a}{2}$ şi $x = \frac{a}{4}$.

$$N_{x,\,\max} = -\, 0,2038 \times 96\,000 = -\, 19\,564,8 \text{ kg/m},$$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{\delta} = -\, \frac{195,648}{6} = -\, 32,6 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune)};$$

$$N_{y,\,\max} = -\, 0,2804 \times 24\,000 = -\, 6\,729,6 \text{ kg/m},$$

$$\sigma_y = \frac{N_y}{\delta} = -11,2 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune)},$$

$\left(\text{eforturile normale sînt maxime la centru } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{2}\right).$

Mai trebuie observat că pe laturile lungi $y = 0$ şi $y = b$, efortul N_x rezultă nul, datorită structurii trigonometrice a soluţiei, cînd în realitate este diferit de zero. Un calcul mult mai detaliat ar arăta că în imediata vecinătate a marginilor, efortul N_x are o valoare mult diferită de zero (aceasta se reflectă în parte şi în fig. 5). În teoria fără momente ar rezulta pe contur

$$N_x = -\,\frac{pa^2}{8f_1} = -\,\frac{f_2}{8f_1} \cdot \frac{pa^2}{f_2} = -\,\frac{pa^2}{16f_2} = -\,6\,000 \text{ kg/m}.$$

Rezultanta eforturilor de compresiune se evaluează cu ajutorul formulei dedusă din (4.17)

$$C = \frac{4\,pa^2\,b^2}{\pi^3 f_2} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\overline{\frac{m-1}{2}}}}{m} N_{m,n} = -\,0{,}141\,\frac{pab^2}{f_2} = -\,164\;432 \text{ kg.}$$

Calculul momentelor încovoietoare este mult mai delicat, întrucît acestea rezultă ca diferențe a doi termeni de valori foarte apropiate.

Momentele rezultate sînt de cîteva zeci de ori mai mici decît acelea ale plăcii plane corespunzătoare, de aceea nu mai dăm rezultatele obținute.

§ 6. OBSERVAȚII FINALE

Metoda utilizată în prezentul studiu, pentru determinarea stării de eforturi în paraboloidul hiperbolic în șa, a fost preconizată de S. A. Ambartumian [1], care a aplicat-o la calculul cupolei pleoștite avînd curbura lui Gauss pozitivă, acționată de o forță concentrată la creștet. Pentru calculul eforturilor el a utilizat doar primii trei termeni din seriile duble.

Ulterior, V. Z. Vlasov [2] a dat formulele generale relative la cazul sarcinii uniform distribuite, tot pentru plăci curbe subțiri avînd curbura lui Gauss pozitivă și a amintit doar pseudosfera, ca un caz particular de suprafață avînd curburile egale, însă de semn contrar ($t = -r$).

Mai recent, W. Flügge și D. A. Conrad [3] au studiat, într-o scurtă notă, paraboloidul hiperbolic acționat la centru de o forță concentrată, prin aceeași metodă a seriilor duble trigonometrice.

Elementele geometrice au fost alese astfel încît curburile să fie egale și de semn contrar. Utilizînd doar trei termeni ai seriilor, ei ajung la concluzia că rigiditatea paraboloidului hiperbolic este apropiată de aceea a plăcii plane.

Rezultatul se explică prin faptul că cazul studiat de ei corespunde tocmai cazului special amintit de noi (vezi § 4.1, formula (4.7)) ; acest rezultat nu este general, așa cum reiese și din exemplul numeric dat în prezenta lucrare.

Ca o observație generală, vom menționa că metoda seriilor duble trigonometrice nu este prea convenabilă pentru calculele numerice, în lipsa unei mașini de calculat electronice. Considerarea unui număr redus de termeni este absolut insuficientă, datorită convergenței slabe a seriilor, chiar în cazul sarcinilor distribuite. Aceeași constatare este semnalată și de I. Doganoff [8] care pentru calculul unui paraboloid eliptic a luat în considerare 2 304 termeni.

Convergența depinde de coeficientul β și anume : cu cît placa este mai pleoștită, cu atîta convergența este mai bună.

Recent A. L. Bouma [5] și K. Apeland și E. P. Popov [6], [7] au aplicat metoda seriilor simple trigonometrice, ajungînd pînă la rezultate numerice.

Primită la redacție la 10 noiembrie 1961

К ТЕОРИИ ИЗГИБА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО СЕДЛОВИДНОГО ПАРАБОЛОИДА

РЕЗЮМЕ

Целью работы является вывод решения в теории изгиба для гиперболического седловидного параболоида, свободно опертого по контуру, покрывая в плоскости прямоугольную поверхность.

Применяя гипотезу пологой тонкостенной оболочки, рассматривается решение в виде двойных тригонометрических рядов для основных неизвестных: прогибы w и функция напряжений F (вида Эйри).

Величины, характеризующие состояние изгиба определяются как разности двух членов; первый член представляет собой эффект плоской пластинки с тем же контуром, из которого вычитывается эффект кривизны.

Дается детальное описание решения для равномерно распределенной нагрузки в горизонтальной плоскости.

В конце работы рассматриваются условия общего равновесия и особенности напряженного состояния.

Численный пример определяет порядок величины усилий N_x, N_y и N_{xy}.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Геометрические элементы гиперболического седловидного параболоида.

Рис. 2. — Эффективные и расчетные усилия и моменты.

Рис. 3. — Различные схемы нагружения: *a* — равномерная частично распределенная нагрузка; *b* — линейная нагрузка; *c* — сосредоточенная нагрузка; *d* — нагрузка, равномерно распределенная по всей поверхности.

Рис. 4. — Диаграмма усилий сдвига $N_{xy} = N_{yx}$.

Рис. 5. — Диаграмма нормальных усилий N_x.

Рис. 6. — Изменение нормального усилия N_y в сечениях $x = \frac{a}{2}$ и $x = \frac{a}{4}$.

CONTRIBUTIONS TO THE BENDING THEORY OF THE SADDLE HYPAR

ABSTRACT

The purpose of this paper is to establish a solution in the bending theory for the saddle hypar with rectangular planform, simply supported on its boundary.

By using the hypothesis of shallow shell, the solution is looked for under the form of double trigonometrical series for the basic unknowns : the deflections w and the stress function F (of Airy type).

The stress resultants characterizing the bending state are determined as the difference between two terms : the first term representing the plate effect having the same boundary, from which the effect of curvature is subtracted.

The solution is detailed for the uniformly distributed load in the horizontal plane.

Finally, the over-all equilibrium conditions and the particularities of the stress state are examined.

A numerical example determines the order of magnitude of the N_x, N_y and N_{xy} forces.

CAPTIONS

Fig. 1. — Geometric elements of the saddle hypar.

Fig. 2. — Real and projected forces and moments.

Fig. 3. — Various loading schemes : *a*) Partially distributed uniform load ; *b*) linear load ; *c*) concentrated load ; *d*) uniformly distributed load over the whole surface.

Fig. 4. — Variation of the shear forces $N_{xy} = N_{yx}$.

Fig. 5. — Variation of normal forces N_x.

Fig. 6. — Variation of the normal forces N_y in sections $x = \frac{a}{2}$ and $x = \frac{a}{4}$.

BIBLIOGRAFIE

1. С. А. АМБАРЦУМЯН, *К расчету пологих оболочек.* Прикладная математика и механика, XI, 5, (1947).
2. В. З. ВЛАСОВ, *Общая теория оболочек и ее приложение в технике.* Гостехиздат, Москва, 1949.
3. W. FLÜGGE, D. A. CONRAD. *A Note on the Calculation of Shallow Shells.* Transactions of the A.S.M.E., Series E., Journal of Applied Mechanics, 683—5, December 1959.
4. M. SOARE, *Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri.* Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1959.
5. A. L. BOUMA, *Some Applications of the Bending Theory Regarding Doubly Curved Shells.* Proceedings of the I.U.T.A.M. Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, August 1959, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960, 202—234.
6. K. APELAND, *Strees Analysis of Translational Shells.* Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the A.S.C.E., 87, No.E.M.1, 111—139, February 1961.
7. K. APELAND, E.P. POPOV, *Analysis of Bending Stresses in Translational Shells.* International Colloquium on Simplified Calculation Methods, Report I/2, Brussels, September 4—6, 1961.
8. I. DOGANOFF, *Betrachtungen über die Berechnungsverfahren rechteckiger Kugelcalotten.* International Colloquium on Simplified Calculation Methods, Vortrag II/2, Brussels, September 4—6, 1961.

O METODĂ DE CALCUL AL DIAFRAGMELOR DE RIGIDIZARE CU UN ŞIR DE GOLURI

DE

M. ARCAN [1]

Realizarea în țara noastră a unui vast program de construcții de locuințe, este legată de alegerea unor soluții de structuri capabile să preia încărcările orizontale (din vînt, sau seismice). Printre aceste soluții, se află utilizarea diafragmelor de rigidizare care, de cele mai multe ori, prezintă unul sau două şiruri de goluri (pentru uşi sau ferestre) rezultate din necesități de arhitectură.

Calculul unor asemenea diafragme nu este încă pus la punct, în literatura de specialitate. Discuțiile purtate în revista „Der Bauingenieur" (vol. 35, nr. 12, 1960 şi vol. 36 nr. 1, 1961) în jurul articolelor lui H. Beck [1], [2] şi R. Rosman [3] au scos în evidență faptul că marea majoritate a lucrărilor ce se ocupă cu această problemă nu folosesc pentru justificarea ipotezelor adoptate sau pentru verificarea rezultatelor obținute date experimentale; pe de altă parte aplicarea metodelor preconizate necesită multe calcule; în aceeaşi situație sînt şi lucrările lui A. S. Kalmanok [4], [5] şi M. Albiges [6].

În lucrarea [7] prof. Dan Mateescu (Institutul politehnic Timişoara) generalizează metoda lui H. Beck pentru cazul cînd şirul de goluri nu este axial, efectuînd şi verificări experimentale corespunzătoare.

În cele ce urmează, se prezintă o metodă de calcul al diafragmelor de rigidizare cu un şir de goluri stabilită în cadrul INCERC; metoda permite obținerea unor formule ce se pot uşor pune sub formă de abace sau tabele, ceea ce uşurează munca în proiectare. Într-unul din numerele următoare vom prezenta şi cazul unui număr mai mare de şiruri de goluri.

Să considerăm grinda cu goluri avînd dimensiunile din figura 1 *a*.

Datorită rigidității mari la eforturi axiale a montanților (buiandrugilor, în cazul diafragmei) în raport cu rigiditatea la încovoiere a tălpilor,

---

[1] Institutul de cercetări în construcții şi economia construcțiilor (INCERC), Bucureşti.

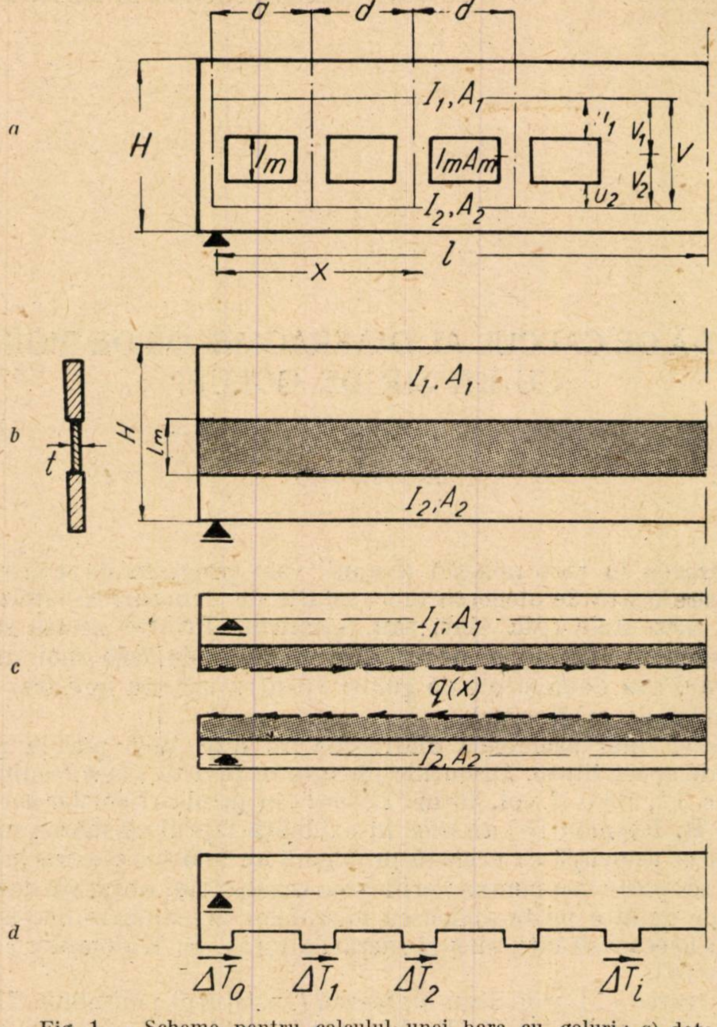

a
a
d
d
H
I1,A1
Im
ImAm
I2,A2
v1
u2
V1
V2
V
l
x
b
t
H
lm
I1.A1
I2,A2
c
I1,A1
q(x)
I2,A2
d
ΔT0
ΔT1
ΔT2
ΔTi

Fig. 1. — Scheme pentru calculul unei bare cu goluri : *a*) date geometrice ; *b*) schema continuă în care s-au înlocuit montanţii cu o fîşie continuă ; *c*) schema secţionată prin axul fîşiei ; *d*) schema secţionată prin axul montanţilor.

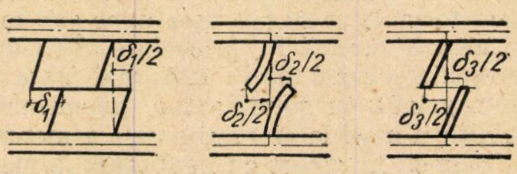

δ1/2
δ1
δ2/2
δ2/2
δ3/2
δ3/2

Fig. 2. — Scheme de deformaţie ale fîşiei (*a*) ; ale unui montant din încovoiere (*b*) ; ale unui montant din forfecare (*c*).

se poate aprecia că deformațiile celor două tălpi sînt practic identice, chiar în cazul cînd încărcările acționează numai pe una din ele.

Principiul metodei aproximative, utilizate în cele ce urmează, pe baza necesităților problemei noastre, este cuprinderea într-o singură funcție a mai multor necunoscute static-nedeterminate (funcția eforturilor de lunecare în axul montanților, de-a lungul grinzii). Aceste eforturi se pot considera ca acționînd singure în secțiunile aflate la mijlocul montanților, nu numai în cazul șirului simetric de goluri, dar și în cazul unui șir de goluri nesimetric [7]. Cercetările fotoelastice arată că valorile eforturilor axiale și ale momentelor încovoietoare, în această secțiune a montanților, sînt neglijabile.

În metoda de calcul pe care o propunem în cele ce urmează [8] se face ipoteza că zona șirului de goluri poate fi înlocuită cu o fîșie avînd un modul de elasticitate redus și deci un modul de elasticitate transversal echivalent, G_{ech}, care corespunde rigidității la încovoiere și lunecare a montanților : se obține astfel o grindă fără goluri cu o structură neomogenă (formată din două materiale cu moduli de elasticitate, diferiți).

Se stabilește apoi ecuația diferențială a efortului de lunecare în axa longitudinală a fîșiei echivalente introduse, utilizîndu-se și generalizîndu-se metodele *Teoriei grinzilor compuse* publicate în 1948 de A. R. Rjanițîn [9]. Soluțiile acestei ecuații diferențiale sînt apoi studiate și puse sub forme simple utilizabile în proiectare pentru diferitele cazuri practice.

Să stabilim mai întîi o relație între valoarea modulului de elasticitate transversal al fîșiei echivalente G_{ech} și dimensiunile montanților.

Deformația la forfecare a fîșiei datorită lunecării, pe porțiunea aferentă unui montant (deformația din încovoiere fiind neglijabilă) este

$$\delta_1(x) = \frac{q(x)\, dl_m}{dt\, G_{\text{ech}}}. \tag{1}$$

(a se vedea pentru notații fig. 1 și 2).

Deformația la încovoiere a unui montant datorită lunecării este

$$\delta_2(x) = \frac{q(x)\, dl_m^3}{12\, E I_m}. \tag{2}$$

Deformația la forfecare a unui montant datorită lunecării este

$$\delta_3(x) = \frac{q(x)\, dl_m}{A'_m\, G} \tag{3}$$

unde

$$A'_m = \frac{5}{6} A_m = 0{,}834\, A_m$$ (în cazul forfecării unei secțiuni rectangulare de beton armat);

de unde egalînd deformația fîșiei cu suma deformațiilor unui montant, obținem

$$\frac{1}{G_{\text{ech}}\, dt} = \frac{l_m^2}{12\, E I_m} + \frac{1}{A'_m G}$$

şi deci

$$G_{\text{ech}} = \frac{1}{dt\left(\frac{l_m^2}{12\,E\,I_m} + \frac{1}{A'_m G}\right)} = \frac{G}{dt\left(\frac{l_m^2}{24\,(1+\mu)\,I_m} + \frac{1}{A'_m}\right)}$$

sau (4)

$$G_{\text{ech}} = \frac{24\,(1+\mu)\,I_m\,A'_m\,G}{dt\,[l_m^2\,A'_m + 24\,(1+\mu)\,I_m]},$$

unde μ este coeficientul lui Poisson; în cazul betonului armat, $\mu = 0{,}15$ şi deci

$$G_{\text{ech}} = \frac{27{,}6\,I_m\,A'_m\,G}{dt\,[\,l_m^2\,A'_m + 27{,}6\,I_m]} = \frac{23\;I_m\,A_m\,G}{dt\,[0{,}834\,l_m^2\,A_m + 27{,}6\,I_m\,]}. \qquad (5)$$

Să trecem acum la stabilirea ecuaţiei diferenţiale a efortului de lunecare în axa longitudinală a fîşiei echivalente.

Fie două tălpi puse în condiţia de a conlucra la încovoiere cu forţe tăietoare prin intermediul unei legături continui (fîşie) de-a lungul lor. Această legătură este solicitată de eforturile de lunecare de-a lungul axei fîşiei. Mărimea acestor eforturi pe unitatea de lungime este $q\,(x)$ kg/cm. Lunecările relative locale între două puncte corespunzătoare de pe fibrele extreme ale celor două tălpi (spre fîşia de contact) sînt de asemenea funcţii de x şi le vom nota cu $\delta\,(x)$ cm.

În condiţiile proporţionalităţii dintre deformaţii şi eforturi, vom avea

$$q(x) = \delta(x)\cdot\varepsilon, \qquad (6)$$

unde ε este coeficientul de proporţionalitate, care aşa cum rezultă din relaţia (1) are expresia

$$\varepsilon = \frac{t\,G_{\text{ech}}}{l_m}.$$

Să notăm acum tensiunea în talpa superioară (în fibra extremă, de contact) cu σ_s şi tensiunea în talpa inferioară (tot în fibra extremă, de contact) cu σ_i, iar cu EI_1 şi EI_2 rigidităţile la încovoiere ale tălpii superioare şi inferioare, respectiv.

Variaţia de lunecare pe lungimea dx, va fi

$$d\delta = \frac{\sigma_i - \sigma_s}{E}\,dx,$$

sau

$$\delta' = \frac{\sigma_i - \sigma_s}{E}. \qquad (7)$$

Să determinăm pe δ', ținînd seama atît de încărcările exterioare cît și de cele date de eforturile de lunecare; avem:

$$\delta' = \Delta_1 T + \Delta_0 \tag{8}$$

unde Δ_1 este variația de lunecare datorită efortului-unitate de lunecare însumat pe lungimea grinzii, adică

$$T = \int_{x_0}^{x} q(x)\,dx, \tag{9}$$

iar Δ_0 este variația de lunecare datorită încărcărilor exterioare.

Să determinăm mai întîi pe Δ_0. Încărcările exterioare pot fi forțe axiale (N_1 și N_2 pentru cele două tălpi respectiv) și produc o creștere a lunecării care conform formulei (7) este:

$$\delta' = \frac{N_2}{A_2 E} - \frac{N_1}{A_1 E},$$

unde A_1 și A_2 sînt secțiunile celor două tălpi.

Cum relația dintre momentul exterior și curbură este

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\sum EI}$$

rezultă că

$$\sigma_s = \frac{Eu_1}{\rho} = \frac{M_0 E u_1}{\sum EI} \quad \text{și} \quad \sigma_i = -\frac{M_0 E u_2}{\sum EI},$$

unde u_1 și u_2 sînt distanțele de la axele tălpilor la fibrele extreme respective.

Folosind formula (7), obținem

$$\delta' = -\frac{M_0 u_1}{\sum EI} - \frac{M_0 u_2}{\sum EI} = -\frac{M_0 u}{\sum EI},$$

unde

$$u = u_1 + u_2$$

și deci

$$\Delta_0 = \frac{N_2}{A_2 E} - \frac{N_1}{A_1 E} - \frac{M_0 u}{\sum EI}. \tag{10}$$

Să trecem acum la determinarea lui Δ_1, variația de lunecare datorită lui T (unitate). În cazul unui moment de încovoiere pozitiv de ansamblu, T tinde să comprime talpa superioară (1) și să întindă talpa inferioară (2). De asemenea, T dă momente încovoietoare negative în cele două tălpi, $-1.v_1$ și $-1.v_2$ respectiv, adică în total $-1.v$; rezultă înlocuind în (10)

$$\Delta_1 = \frac{1}{A_2 E} + \frac{1}{A_1 E} + \frac{u.v}{\sum EI}. \tag{11}$$

Cum relația (6) se poate scrie

$q'(x) = \delta'(x) . \varepsilon$, rezultă din (8) că

$\dfrac{q'(x)}{\varepsilon} = \Delta_1 T + \Delta_0$ sau avînd în vedere (9)

$$\frac{T''}{\varepsilon} = \Delta_1 T + \Delta_0, \tag{12}$$

care reprezintă ecuația diferențială căutată a efortului de lunecare însumat T, ecuație diferențială de ordinul 2 cu coeficienții constanți și cu membrul 2. Ecuația obținută reprezintă o generalizare a ecuației lui A. R. Rjanițîn pentru grinzi compuse [9] la care distanța între cele două tălpi este relativ mică și la care avem deci de-a face cu cazul particular cînd $u \approx v$.

Soluția ecuației diferențiale (12) are forma :

$$\left.\begin{aligned} T &= C_1 \operatorname{sh}\lambda x + C_2 \operatorname{ch}\lambda x + \frac{\varepsilon}{\lambda}\int_0^x \Delta_0 \operatorname{sh}\lambda(x-\xi)\, d\xi, \\ q &= \lambda C_1 \operatorname{ch}\lambda x + \lambda C_2 \operatorname{sh}\lambda x + \varepsilon \int_0^x \Delta_0 \operatorname{ch}\lambda(x-\xi)\, d\xi, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

unde

$$\lambda = \sqrt{\varepsilon \Delta_1} = \sqrt{\frac{t\, G_{ech}}{l_m}\left(\frac{1}{A_1 E} + \frac{1}{A_2 E} + \frac{uv}{\sum EI}\right)}. \tag{14}$$

În cazul studiat în lucrarea de față, al grinzilor supuse la încovoiere cu forță tăietoare, forțele axiale exterioare lipsesc ; există numai cele interioare provocate de eforturile T. De aceea,

$$\Delta_0 = -\frac{Mu}{\sum EI}. \tag{15}$$

În cazul limită al grinzii pline, se poate considera $\varepsilon = \infty$ și deci ecuația (12) devine

$$\Delta_1 T = \frac{Mu}{\sum EI} \qquad \text{sau} \qquad T = \frac{M_0 u}{\Delta_1 \sum EI}, \tag{16}$$

ceea ce exprimă că efortul însumat de lunecare variază proporțional cu momentul încovoietor, iar $q(x)$ cu forța tăietoare în acest caz limită).

Pe de altă parte, conform formulei lui Jurawski

$$T = \frac{M_0 S_p}{I_p}, \tag{17}$$

unde I_p este momentul de inerție al secțiunii pline, în raport cu axa neutră, iar S_p este momentul static al secțiunii pînă la axa fîșiei echivalente, în raport cu axa neutră. Comparînd expresiile (16) și (17), rezultă

$$\frac{S_p}{I_p} = \frac{u}{\Delta_1 \sum EI}. \tag{18}$$

Putem acum trece la studierea soluției (13) a ecuației diferențiale (12) pentru diferite cazuri particulare de rezemare și încărcare. Să studiem mai întîi cazul unei console de lungime l cu încărcare uniform repartizată p Kg/cm.

În soluția (13) înlocuim constantele C_1 și C_2 în funcție de valorile lui T și q la vîrful consolei ($x = 0$), T_0 și q_0 (metoda parametrilor inițiali); obținem $T_0 = C_2$ și $q_0 = C_1\lambda$ și deci

$$\left.\begin{aligned} T &= T_0 \operatorname{ch}\lambda x + \frac{q_0}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda x + \frac{\varepsilon}{\lambda}\int_0^x \Delta_0(\xi)\operatorname{sh}\lambda(x-\xi)\,d\xi, \\ q &= q_0 \operatorname{ch}\lambda x + T_0\lambda\operatorname{sh}\lambda x + \varepsilon\int_0^x \Delta_0(\xi)\operatorname{ch}\lambda(x-\xi)\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

În cazul studiat, cunoaștem $T_0 = 0$ și $q(l) = 0$; din a doua relație (19) vom putea determina pe q_0

$$q(l) = 0 = q_0\operatorname{ch}\lambda l + \varepsilon\int_0^l \Delta_0(\xi)\operatorname{ch}\lambda(l-\xi)\,d\xi, \tag{20}$$

unde

$$\Delta_0(x) = -\frac{M_0 u}{\sum EI} = \frac{px^2 u}{2\sum EI}, \tag{21}$$

iar integrala:

$$\begin{aligned} \varepsilon\int_0^l \Delta_0(\xi)\operatorname{ch}\lambda(l-\xi)\,d\xi &= \frac{pu\varepsilon}{2\sum EI}\int_0^l \xi^2\operatorname{ch}\lambda(l-\xi)\,d\xi = \\ &= -\frac{pu\varepsilon}{\Delta_1\sum EI}\cdot\frac{\lambda l - \operatorname{sh}\lambda l}{\lambda}. \end{aligned} \tag{22}$$

Rezultă

$$q_0 = \frac{pu}{\Delta_1\sum EI}\cdot\frac{\lambda l - \operatorname{sh}\lambda l}{\lambda\operatorname{ch}\lambda l} \tag{23}$$

și deci

$$q(x) = \frac{pu}{\Delta_1\sum EI}\cdot\frac{\lambda l - \operatorname{sh}\lambda l}{\lambda\operatorname{ch}\lambda l}\operatorname{ch}\lambda x + \varepsilon\int_0^x \Delta_0(\xi)\operatorname{ch}\lambda(x-\xi)\,d\xi.$$

Observăm că:

$$\varepsilon\int_0^x \Delta_0(\xi)\operatorname{ch}\lambda(x-\xi)\,d\xi = -\frac{pu}{\Delta_1\sum EI}\cdot\frac{\lambda x - \operatorname{sh}\lambda x}{\lambda}.$$

Deci

$$q(x) = \frac{pu}{\Delta_1\sum EI}\left(\frac{\lambda l - \operatorname{sh}\lambda l}{\lambda\operatorname{ch}\lambda l}\operatorname{ch}\lambda x - \frac{\lambda x - \operatorname{sh}\lambda x}{\lambda}\right)$$

şi ţinînd seama de relaţia (18), obţinem :

$$q(x) = -\frac{p.l.S_p}{I_p}\cdot\left[1 - \frac{\lambda l \operatorname{ch}\lambda x - \operatorname{sh}\lambda(l-x)}{\lambda x \operatorname{ch}\lambda l}\right]\frac{x}{l}. \qquad (24)$$

Am obţinut aşadar, expresia căutată a lui $q\,(x)$, funcţie fie de efortul de lunecare din secţiune fie, ceea ce e mai comod în aplicaţii, de efortul de lunecare din incastrare : $\frac{p.l.S_p}{I_p}$ şi de un coeficient ψ_1 subunitar care înmulţeşte acest efort de lunecare; avem

$$q(x) = -\frac{\psi_1\cdot p\cdot l\cdot S_p}{I_p} = \frac{Q_\psi\cdot S_p}{I_p}. \qquad (25)$$

Aşadar, am redus calculul lui $q\,(x)$ la aplicarea formulei lui Jurawski, în care forţa tăietoare este Q_ψ, iar coeficientul ψ_1 poate fi calculat din formula (24), funcţie de λl şi λx.

★

Să considerăm acum cazul încărcării triunghiulare cu valoarea maximă la vîrful consolei; expresia lui $\Delta_0\,(x)$ este

$$\Delta_0(x) = -\frac{M_0 u}{\sum EI} = \left(\frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{6l}\right)\frac{u}{\sum EI}. \qquad (26)$$

Se observă că $\Delta_0\,(x)$ se descompune în două părţi din care prima provine din momentul încovoietor dat de încărcarea uniform repartizată, iar a doua dintr-una triunghiulară cu maximum la încastrare. Pentru a obţine încărcarea de tip seismic, vom calcula deci mai întîi cu

$$\Delta_0(x) = \frac{px^3u}{6\,l\sum EI} \qquad (27)$$

care corespunde unei grinzi în consolă cu sarcina triunghiulară avînd maximul la încastrare. Apoi vom putea face combinaţii ale soluţiei obţinute cu cea corespunzătoare sarcinei uniform repartizate.

Vom obţine, pentru acest din urmă caz calculînd ca mai sus cu $\Delta_0\,(x)$ din (27), soluţia

$$q(x) = \frac{p\cdot l\cdot S_p}{2\,I_p}\left[\frac{x^2\lambda^2 + 2\,(1 - \operatorname{ch}\lambda x)}{\lambda^2 l^2} - A\operatorname{ch}\lambda x\right],$$

unde (28)

$$A = \frac{l^2\lambda^2 + 2(1 - \operatorname{ch}\lambda l)}{\lambda^2 l^2 \operatorname{ch}\lambda l}$$

Şi în acest caz, $q(x)$ este funcţie de efortul de lunecare din încastrare : $\frac{p \cdot l \cdot S_p}{2\,I_p}$ şi de un coeficient ψ_2 subunitar care înmulţeşte acest efort de lunecare ; avem

$$q(x) = -\frac{\psi_2\, p \cdot l \cdot S_p}{2\,I_p} = \frac{Q_\psi \cdot S_p}{I_p}. \tag{29}$$

Pentru a obţine cazul încărcării triunghiulare cu maximul la vîrful consolei se face diferenţa dintre valorile date de formulele (24) şi (28) în modul următor

$$\psi_1 \cdot p \cdot l - \psi_2 \cdot \frac{pl}{2} = \left(\psi_1 - \frac{1}{2}\,\psi_2\right) p \cdot l = \psi_3' pl = 2\,\psi_3' \frac{pl}{2} = \psi_3 \frac{pl}{2},$$

de unde (30)

$$\psi_3 = 2\left(\psi_1 - \frac{1}{2}\,\psi_2\right),$$

în care am notat cu ψ_3 coeficienţii căutaţi corespunzători încărcării de tip seismic.

Folosind formulele (24), (28) şi (30) au fost calculaţi coeficienţii ψ_1, ψ_2 şi ψ_3 funcţie de parametrul λl şi λx, construindu-se abacele prezentate în lucrare. În figura 3 se dă un exemplu de calcul al parametrului λl cu ajutorul căruia se pot utiliza formulele (24) şi (28), sau se poate intra în abace.

Folosind aceeaşi metodă de calcul, a fost stabilită expresia lui $q(x)$ şi în cazul grinzii în consolă acţionată de o forţă concentrată la vîrf

$$q(x) = -\frac{P \cdot S_p}{I_p}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l}\right)$$

sau (31)

$$q(x) = -\frac{\psi_4 \cdot P \cdot S_p}{I_p} = \frac{Q_\psi \cdot S_p}{I_p}$$

alcătuindu-se abaca respectivă.

Studiind evoluţia curbelor ce constituie abacele obţinute, se pot face unele observaţii de ansamblu :

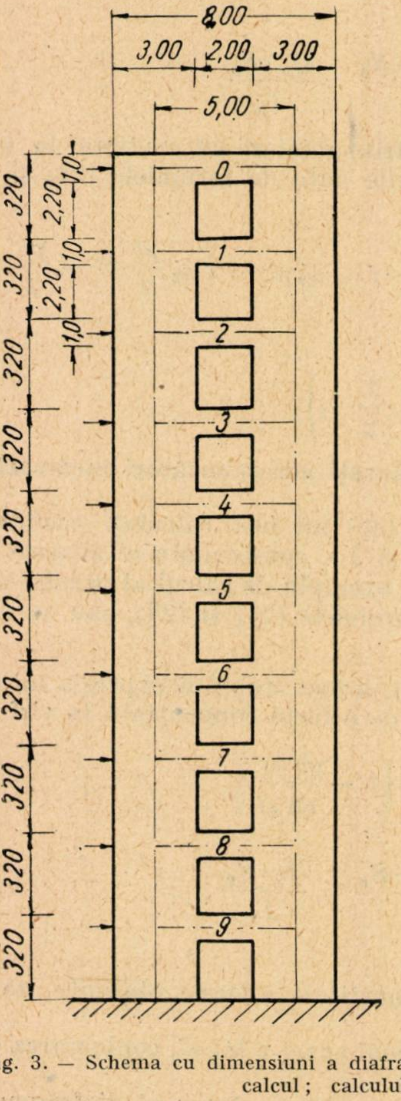
— o dată cu creşterea lui G_{ech}, şi mai exact a lui λl, conlucrarea celor două tălpi se accentuează ;

— pentru valori ale lui $\lambda l > 15$, modul de lucru al diafragmei cu goluri este foarte apropiat de cel al unei diafragme pline ;

— pentru valori ale lui $1 < \lambda l < 4$ există tendinţa de uniformizare a distribuţiei eforturilor de lunecare ceea ce face ca diafragma să lucreze încă destul de bine ca ansamblu ;

— pentru valori ale lui $\lambda l < 1$ conlucrarea celor două tălpi este neglijabilă.

În cele ce urmează, vom da cîteva detalii asupra etapelor de calcul ale grinzii cu goluri.



$$\lambda = \sqrt{\varepsilon \Delta_1} = \sqrt{\frac{t\, G_{\text{ech}}\, \Delta_1}{l_m}},$$

$$\Delta = \frac{2}{AE} + \frac{u \cdot V}{\Sigma EI} = \frac{1}{7^5 \times 10^7} +$$

$$+ \frac{5 \times 3 \times 10^4}{2 \times 25 \times 0{,}45 \times 10^{12}} = \frac{0{,}0132}{10^7} +$$

$$+ \frac{0{,}067}{10^7} = \frac{0{,}0802}{10^7}\ 1/\text{kg},$$

$$G_{\text{ech}} = \frac{23\, I_m A_m G}{d \cdot t\,[0{,}834\, l^2_m A_m + 27{,}6\, I_m]} =$$

$$= \frac{23 \times 1 \times 1^3/12 \times 1 \times 1 \times 10^7}{3{,}2 \times 1\ [0{,}832 \times 2^2 \times 1 + 27{,}6 \times 1^3/12] \times 10^7} =$$

$$= 0{,}107\, G \approx 13.500\ \text{kg/cm}^2$$

unde am luat pentru beton armat

$$G = \frac{E}{2} = 125\,000\ \text{kg/cm}^2;\ \mu = 0{,}15$$

$$t = 1$$

$$\lambda = 0{,}5 \sqrt{\frac{20 \times 1{,}35 \times 10^4 \times 802}{10^8 \times 2 \times 10^2}} =$$

$$= 0{,}5 \times 0{,}0053$$

$$\lambda l = 5{,}3.$$

Fig. 3. — Schema cu dimensiuni a diafragmei de beton armat folosită ca exemplu de calcul ; calculul parametrului λl.

Se calculează valorile $q\,(x)$, în dreptul fiecărui montant, se înmulțesc cu d (zona aferentă unui montant) și se obțin astfel forțele ce acționează asupra fiecărei jumătăți de montant (ΔT_i).

Separînd apoi fiecare talpă a diafragmei (fig. 1 *c* și *d*) este necesar să calculăm momentele încovoietoare ce acționează asupra ei.

În cazul cînd şirul de goluri este simetric, calculul acestora este uşor deoarece asupra unei tălpi acţionează jumătate din încărcarea exterioară şi forţele ΔT_i.

În cazul cînd şirul de goluri este nesimetric, trebuie să calculăm şi distribuţia încărcării exterioare între cele două tălpi.

Scriem ecuaţia de egalitate a săgeţilor la vîrful consolei pentru cele două tălpi (indicii 1 şi 2 corespund celor două tălpi) :

$$(\delta_{P-X})_1 + (\delta_L)_1 = (\delta_X)_2 + (\delta_L)_2, \tag{32}$$

unde $(\delta_{P-X})_1$ şi $(\delta_X)_2$ sînt săgeţile date de încărcarea exterioară, a căror distribuţie este căutată, celor două tălpi considerate că lucrează separat, şi se exprimă în funcţie de o necunoscută (de ex. $P - x$ şi x sau $p - px$ şi px) ; iar $(\delta_L)_i$ sînt săgeţile date de momentele provenite din eforturile de lunecare ce se pot calcula (după cum am văzut) independent de distribuţia între tălpi a încărcărilor exterioare. Aceste săgeţi se introduc în ecuaţia (32) cu valorile lor numerice. Săgeţile se pot calcula foarte uşor prin metoda încărcării cu suprafeţe de momente fictive. Relaţia (32) devine deci o ecuaţie de gradul (1) cu o singură necunoscută ; prin rezolvarea ei se obţine distribuţia căutată şi deci imediat şi momentele încovoietoare în tălpi.

Menţionăm că în cazul diafragmelor de beton armat, valoarea rezultată din calcul a lui G_{ech} se reduce datorită fisurilor ce apar în montanţi, la colţurile golurilor, chiar pentru încărcări mai mici decît sarcina de calcul a diafragmelor. Reducerea lui G_{ech} ar putea fi considerată în calcul, utilizîndu-se rigiditatea buiandrugului în stadiul de fisurare.

Încercările efectuate pe modele de beton armat de către I. Brînzan (INCERC) în colaborare cu autorul studiului de faţă au arătat o reducere a lui G_{ech} de circa patru ori, ceea ce micşorează la jumătate valoarea calculată a lui λ (valori informative) ; dar aceste încercări nu epuizează problema şi ele urmează a fi continuate. Pentru a preveni o scădere şi mai mare a lui G_{ech}, se recomandă armătură la 45°, în dreptul colţurilor golurilor.

Verificarea experimentală a soluţiei date (pentru domeniul elastic) a fost efectuată pe modele fotoelastice în modul următor :

S-au executat şi încercat modele în paralel pentru grinzi cu goluri şi grinzi cu fîşii avînd un modul de elasticitate redus, faţă de cel al ansamblului diafragmei.

În figura 4 *a* şi *b* se dau tablourile de izocromate pentru două grinzi în consolă din care una cu şir de goluri şi alta cu fîşie echivalentă, solicitate de o forţă concentrată la capăt. Atît din aceste tablouri cît şi din diagramele de eforturi unitare în fibra extremă (fig. 4 *c*) rezultă că cele două structuri sînt echivalente.

Analizînd mai departe un număr de modele echivalente, examinate în paralel, au putut fi construite două diagrame de comparaţie în modul următor : notăm cu $\dfrac{\sigma}{\sigma_p}$ raportul valorilor efortului unitar într-un punct în fibra extremă a grinzii reale slăbite şi într-o grindă plină avînd aceleaşi

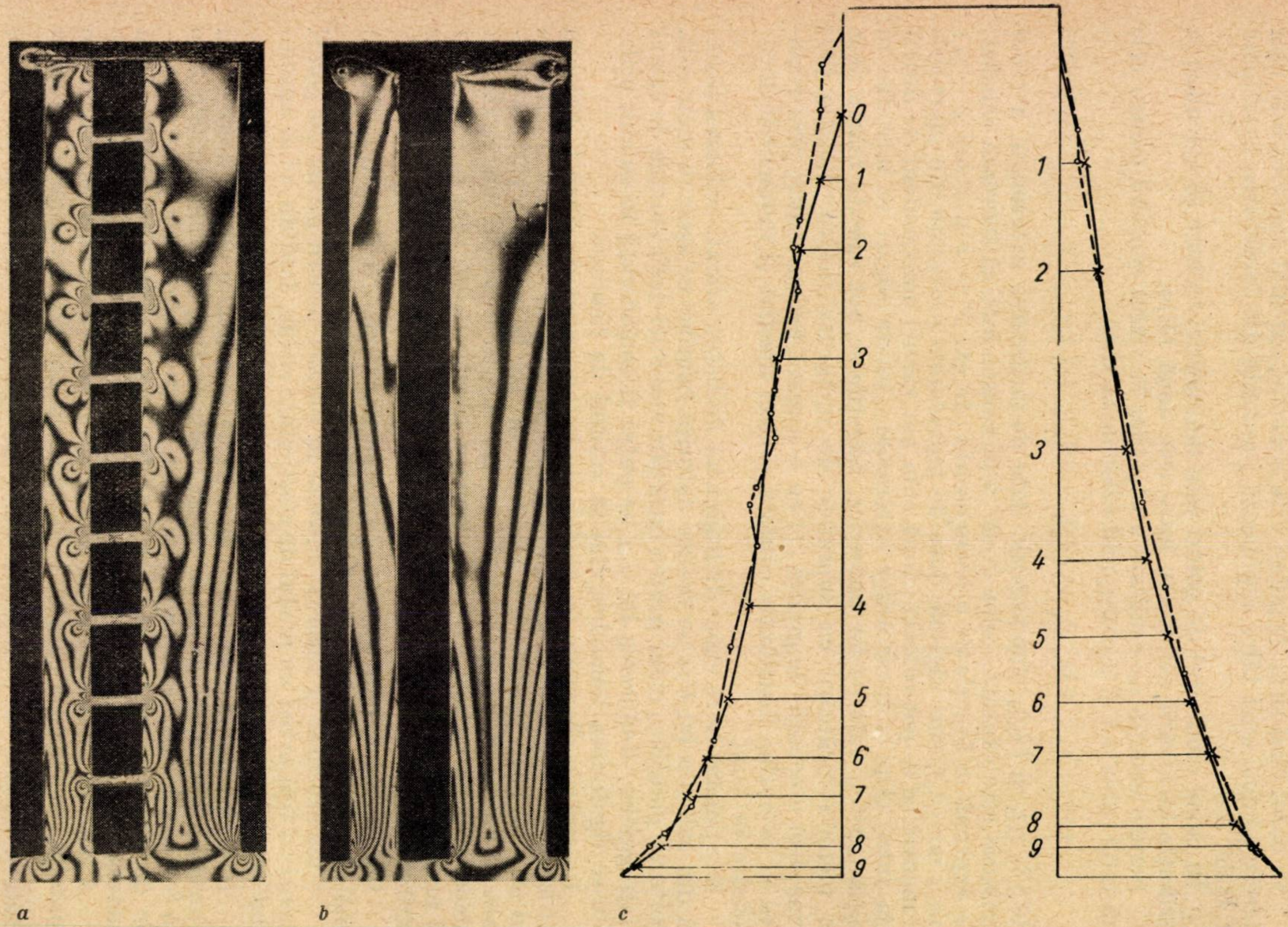


Fig. 4 — Tablouri izocromate pentru două grinzi în consolă, din care una cu un şir de goluri nesimetrice (*a*) şi alta cu fişie echivalentă (*b*) solicitate de o forţă concentrată la capăt ; diagramele corespunzătoare de eforturi unitare în fibrele extreme (*c*). Modelul (*a*) — — —○— — — modelul (*b*) — — —×— — —

dimensiuni; acest raport a fost stabilit experimental pentru diferite valori ale lui G_{ech} calculate în cazul grinzii cu goluri din figura 4 *a*, la care dimensiunea transversală a montanților a fost modificată succesiv; în figura 5 *b* se dă diagrama lui $\frac{\sigma}{\sigma_p}$ funcție de G_{ech}. De asemenea, în figura 5 *a* se dă

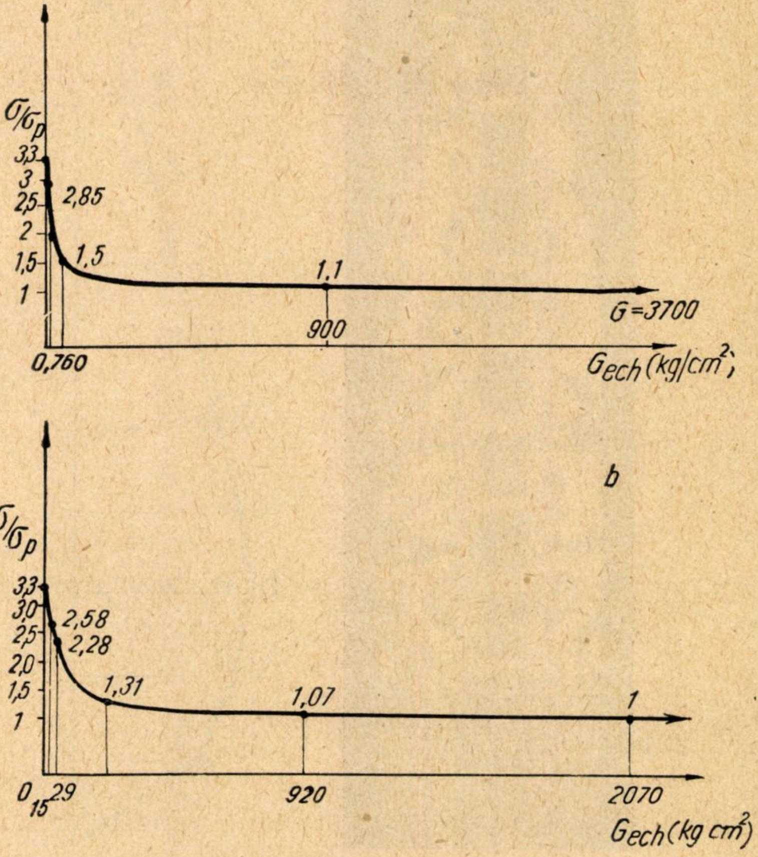


Fig. 5. — Diagrama de $\frac{\sigma}{\sigma_p}$ într-un punct, pe fibra extremă a grinzii funcție de G (*a*), respectiv de G_{ech} (*b*), pentru grinzi în consolă de tipul celor din figura 6.

aceeași diagramă funcție de G, în cazul unei fîșii de rigiditate redusă echivalentă. Se observă că cele două diagrame sînt în mod practic identice; aceasta dovedește valabilitatea metodei simplificatoare admise (introducerea fîșiei de rigiditate echivalentă).

A doua categorie de verificări experimentale se referă la o comparație între variația efortului de lunecare în montanți obținută prin fotoelasticitate şi cea obţinută prin calcul, aplicînd formulele stabilite anterior. Modelul folosit în aceste verificări are dimensiunile diafragmei din figura 3, reduse la scara 1/200, la care secţiunea buiandrugilor a fost micşorată, dimensiunea sa în planul diafragmei fiind de 70 în loc de 100 cm. Materialul utilizat pentru modele, ca şi pentru cele prezentate anterior, este *Dinox F 110*.

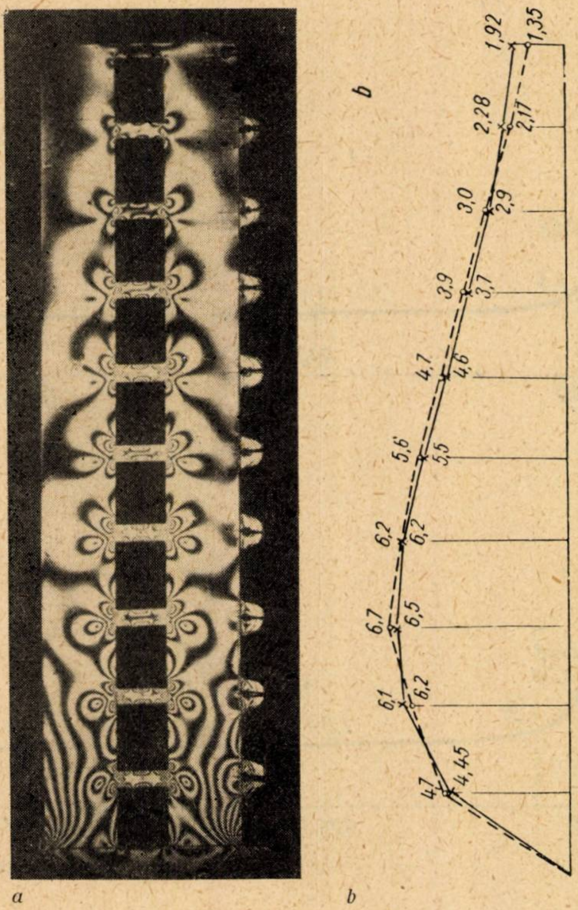


Fig. 6. — *a*) Tablouri de izocromate la un model solicitat de o sarcină uniform repartizată : 2 kg la fiecare nivel ; *b*) diagramele ΔT, în kg obţinute prin calcul — — —×— — — şi prin fotoelasticitate — — —○— — —.

În figura 6 ***b***, se dau diagramele ΔT în kg, obţinute prin calcul şi prin fotoelasticitate pentru modelul (fig. 6 *a*) solicitat de o sarcină uniform repartizată de 2 kg la fiecare nivel. În figura 7 ***b***, se dau aceleaşi diagrame ΔT pentru cazul încărcării triunghiulare cu maximul la capătul consolei. Se observă, în ambele cazuri de încărcare, o apropiere foarte mare între rezultatele obținute prin cele două metode, ceea ce confirmă și pe această cale valabilitatea formulelor propuse.

Trebuie însă menționat că această valabilitate a fost verificată experimental numai pentru cazurile cînd șirul de goluri (simetric sau nesimetric) se află într-o fîșie centrală a diafragmei de cel mult jumătate din lățimea sa, ceea ce corespunde problemelor practice. Urmează ca cercetările ulterioare să precizeze în ce măsură formulele stabilite sînt valabile și pentru cazurile cînd șirul de goluri se află într-o fîșie centrală mai largă.

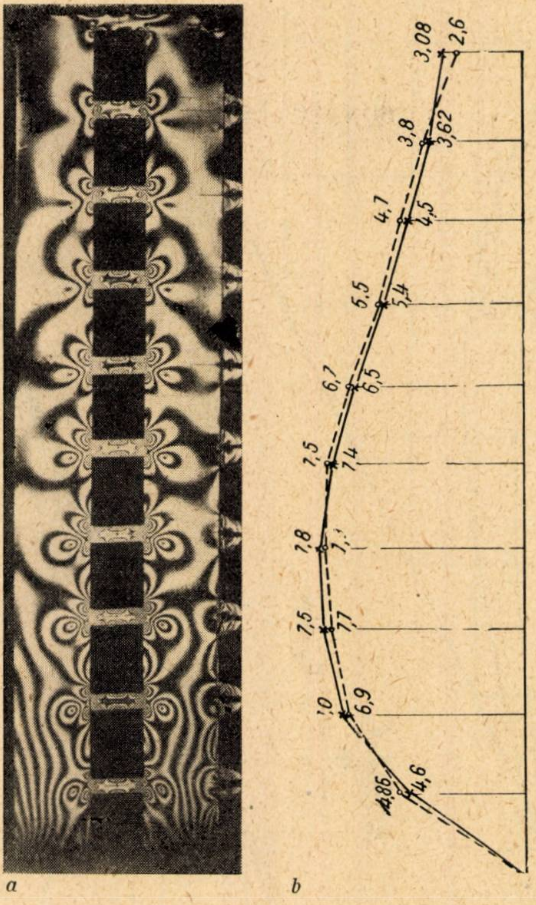


Fig. 7. — *a*) Tablouri de izocromate la un model solicitat de o sarcină triunghiulară cu maximul la *vîrful* consolei (0,330—3,330 kg). *b*) Diagramele ΔT, în kg obținute prin calcul — — — × — — — și prin fotoelasticitate — — — ○ — — —

Pentru a permite o utilizare imediată în proiectare a metodei preconizate se prezintă în figurile 8, 9 și 10, trei abace corespunzătoare încăr-

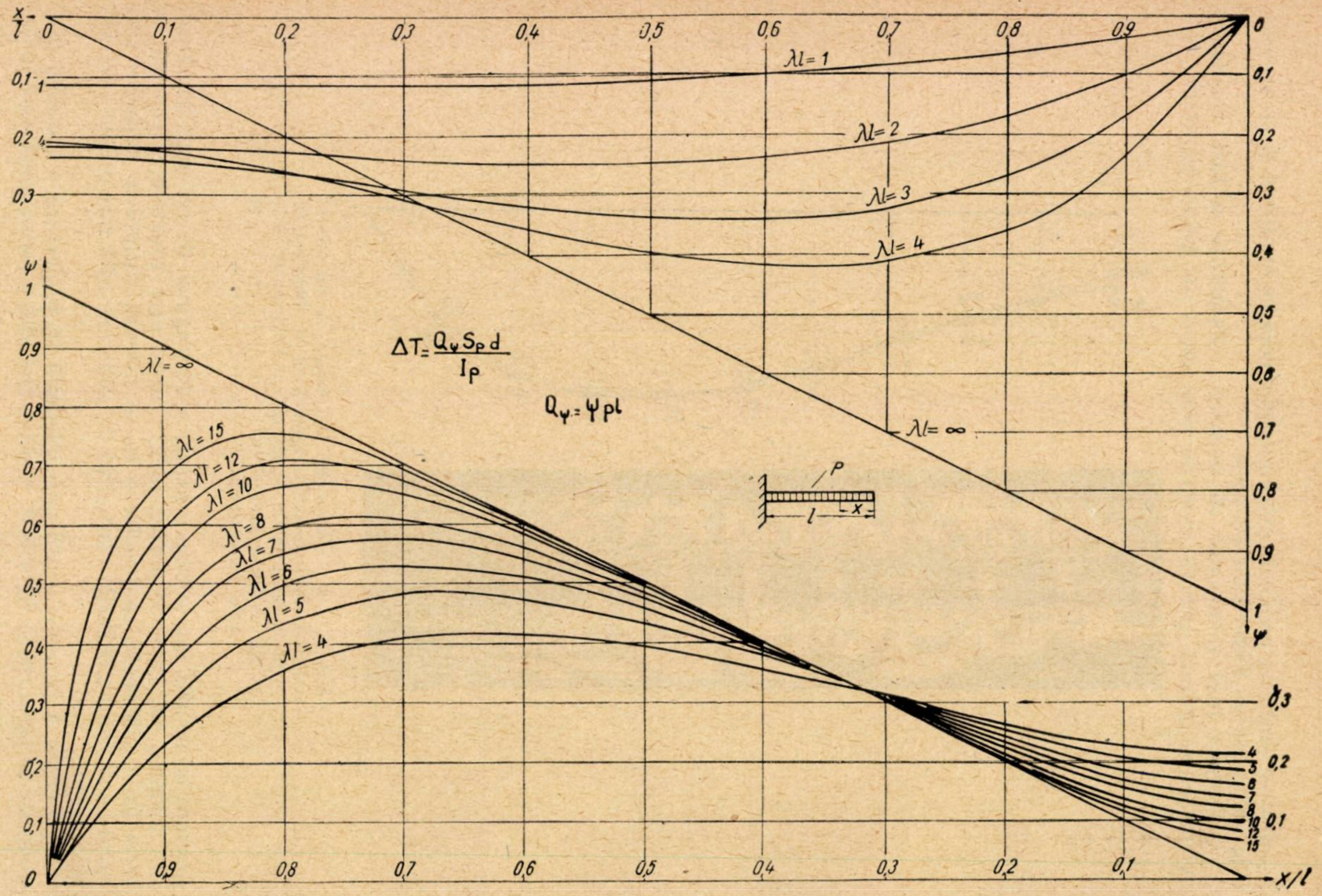

x/l
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
λl = 1
λl = 2
λl = 3
λl = 4
λl = ∞
ψ
$\Delta T = \frac{Q_\psi S_p d}{I_p}$
$Q_\psi = \psi p l$
P
l
x
λl = 15
λl = 12
λl = 10
λl = 8
λl = 7
λl = 6
λl = 5
λl = 4
0,3
4
5
6
7
8
10
12
15
x/l

Fig. 8

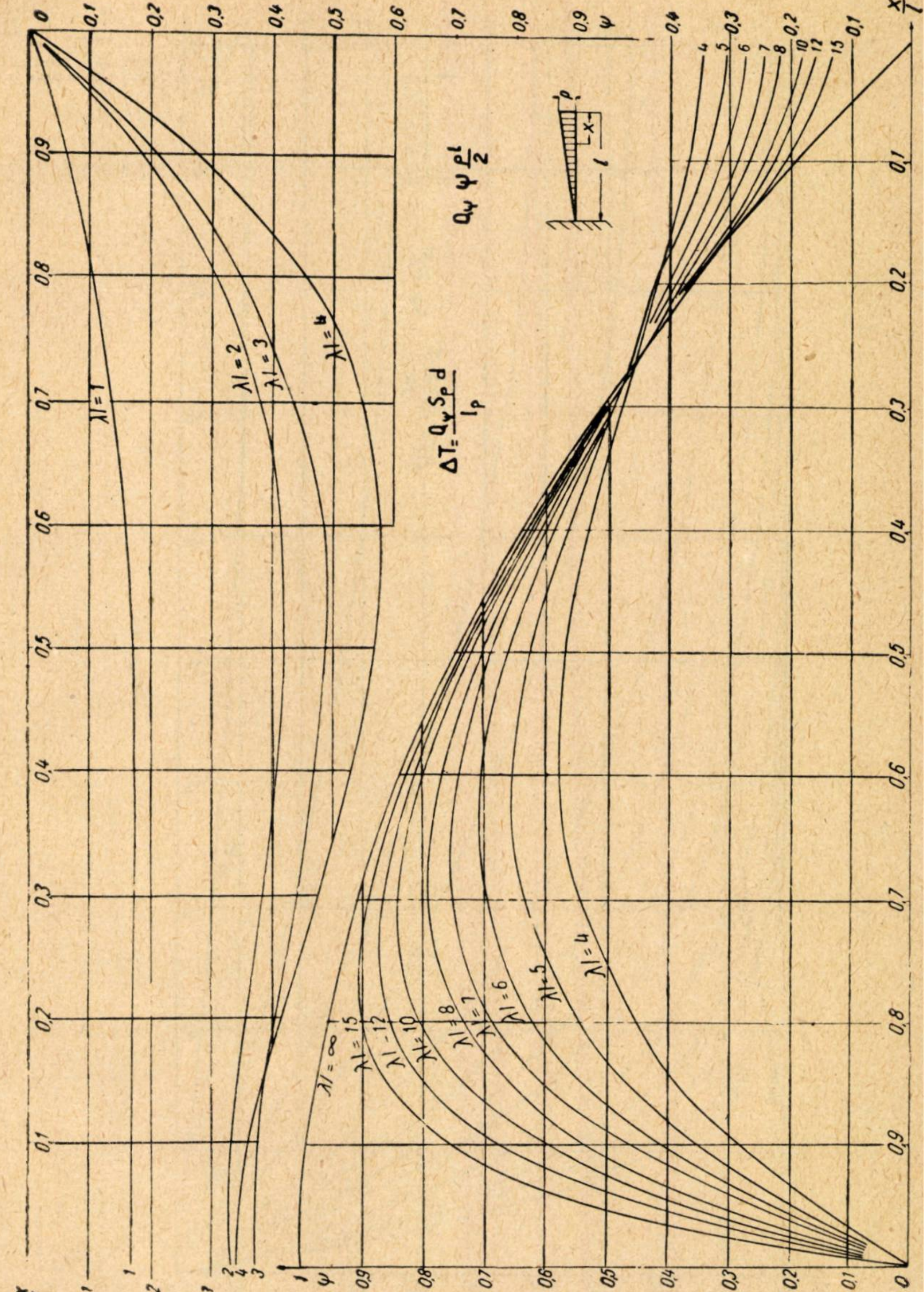
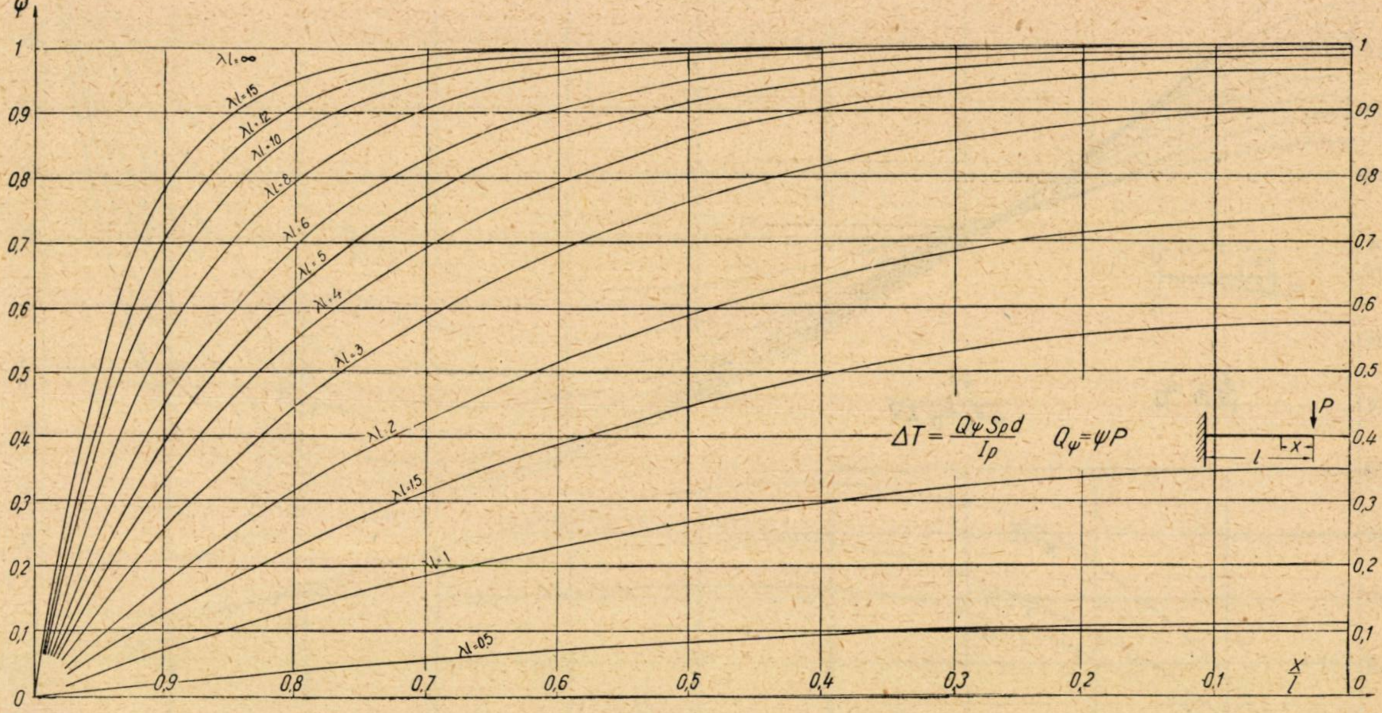

x/l
ψ
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
λl = 1
λl = 2
λl = 3
λl = 4
λl = 5
λl = 6
λl = 7
λl = 8
λl = 10
λl = 12
λl = 15
λl = ∞
1
2
3
4
5
6
7
8
10
12
15
ΔT = Q_ψ S_p d / I_p
Q_ψ ψ pl/2
p
x
l

Fig. 9



ψ
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
λl=∞
λl=15
λl=12
λl=10
λl=8
λl=6
λl=5
λl=4
λl=3
λl=2
λl=1,5
λl=1
λl=0,5
$\Delta T = \frac{Q_\psi S_\rho d}{I_\rho}$
$Q_\psi = \psi P$
P
l
x
$\frac{x}{l}$

Fig. 10

cării uniforme, celei triunghiulare de tip seismic şi sarcinii concentrate la capăt.

МЕТОД РАСЧЕТА ДИАФРАГМ ЖЕСТКОСТИ С ОДНИМ РЯДОМ ПРОЕМОВ

РЕЗЮМЕ

Излагается метод расчета балок с рядом проемов применительно к расчету диафрагм жесткости зданий при горизонтальных нагрузках. Устанавливается дифференциальное уравнение сдвигающего усилия в стойках (перемычках) и даются решения для различных случаев нагружения: равномерно распределенная (ветровая) нагрузка, треугольная нагрузка с максимумом в конце диафрагмы (сейсмическое воздействие) и нагрузка, сосредоточенная в конце диафрагмы. Результаты проверены на фотоупругих моделях.

Полученные формулы приведены в виде графиков, дающих возможность применения метода при проектировании.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схема для расчета балки с рядом проемов: *a* — геометрические данные; *b* — сплошная схема, в которой стойки заменяются сплошной полосой; *c* — схема, разрезанная по оси полосы; *d* — схема, разрезанная по оси стоек.

Рис. 2. — Схемы деформации: *a* — полосы: *b* — стойки от изгиба; *c* — стойки от среза.

Рис. 3. — Размерная схема железобетонной диафрагмы, применяемая для расчетного примера; вычисление параметра λl.

Рис. 4. — Картины полос для двух балок, одна из которых имеет один ряд несимметрических проемов (*a*), а другая — эквивалентную полосу (*b*), нагруженных сосредоточенной силой в конце; соответствующие диаграммы напряжений в крайних волокнах (*c*). Модель (*a*) — — – ○ – – –; модель (*b*)– – – × – – – –.

Рис. 5. — Диаграмма $\frac{\sigma}{\sigma_p}$ в одной точке, на крайнем волокне балки, в зависимости от G (*a*), соответственно от $G_{\text{экв}}$ (*c*), для консольных балок типа, указанного на рис. 6.

Рис. 6. — *a*) Картины полос для модели, подверженной равномерно распределенной нагрузке: 2 кг на каждом этаже; *б*) Диаграммы ΔT в кг, полученные расчетным путем (– – – × – – –) и фотоупругим способом (– – – ○ – – –).

Рис. 7. — *a*) Картины полос для модели, подверженной треугольной нагрузке с максимумом у вершины консоли (0,330—3,330 кг); *б*) Диаграммы ΔT в кг, полученные расчетным путем (– – – × – – –) и фотоупругим способом (– – – ○ – – –).

A METHOD FOR CALCULATING RIGIDITY DIAPHRAGMS WITH A ROW OF HOLES

ABSTRACT

This paper presents a method for calculating the beams with a row of holes, applicable to the calculation of rigidity diaphragms of structures subjected to horizontal loadings. The differential equation of the shear force in upright beams (dcor lintel) is established and solutions are given for various cases of loadings, e.g. uniformly distributed load (due to wind), triangular load with its maximum at the diaphragm extremity (due to seismic action) and concentrated loads at the diaphragm extremity. The conclusions are verified by photoelastic models.

The results obtained are plotted in diagrams in order to be easier used by designers.

CAPTIONS

Fig. 1. — Schemes for calculating a beam with holes : *a*) geometrical data ; *b*) continuous scheme in which the upright beams are replaced by a continuous strip ; *c*) longitudinal section through the strip axis ; *d*) longitudinal section through the upright beam axis.

Fig. 2. — Deformation schemes of the strip (*a*) ; of an upright beam due to bending (*b*) ; of an upright beam due to shear (*c*).

Fig. 3. — Scheme showing the dimensions of the reinforced concrete diaphragm, used as example of calculation ; calculation of the parameter λl.

Fig. 4. — Fringe patterns for two cantilever beams, of which one has a row of unsymmetrical holes (*a*), while the other has an equivalent strip (*b*), acted upon by a concentrated load at the end ; corresponding extreme fibre stress diagrams (*c*).

Model (*a*) – – – ○ – – –
Model (*b*) – – – × – – –

Fig. 5. — Diagrams of $\frac{\sigma}{\sigma_p}$ at a point, on the extreme fibre of the beam, function of $G(a)$ and G_{ech} (*b*), respectively for cantilever beams of the type shown in Fig. 6.

Fig. 6. — a) Fringe patterns for a model subjected to a uniformly distributed load i.e., 2 kg at each level ; b) Diagrams ΔT in kg obtained analytically– – – × – – –and by photoelasticity – – – ○ – – –

Fig. 7. — *a*) Fringe pattern for a model subjected to a triangular load with the maximum at the cantilever free end (0.330–3.330 kg). *b*) Diagrams of ΔT in kg obtained analytically (– – – × – – –) and by photoelasticity (– – – ○ – – –).

BIBLIOGRAFIE

1. H. BECK, *Ein neues Berechnungsverfahren für gegliederte Scheiben, dargestelt am Beispiel des Vierendeeltragers.* Der Bauingenieur, **31**, *12* (1956).
2. — *Ein Beitrag zur Berücksichtigung de Dehnungsverformungen bei Rahmen mit schlanken und gedrungenen Konstruktionsgliedern.* Die Bautechnik, **36**, *5*, Mai (1959).
3. R. ROSMAN, *Beitrag zur statischen Berechnung waagerecht belasteter Querwände bei Hochbauten.* Der Bauingenieur, **35**, *4*(1960).

4. А. С. Калманок, *Пространственная работа сборных многоэтажных зданий* Госстройиздат, Москва, 1956.
5. — *Практические методы расчета многоэтажных зданий на горизонтальные нагрузки*, din Вопросы расчета конструкций жилых и общественных зданий со сборными элементами, Госстройиздат, Москва,1958.
6. M. Albiges, J. Goulet, *Contreventement des bâtiments*. Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, Mai 1960.
7. D. Mateescu, L. Gădeanu, *Calculul şi dimensionarea unui timpan rigid cu un rînd de goluri*. Comunicare la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic, Timişoara, 1961.
8. M. Arcan, *Cercetări pe modele de structuri neomogene*. Sesiunea ştiinţifică a Institutului de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor, 1961.
9. А. Р. Ржаницын, *Теория составных стержней строительных конструкций*. Стройиздат, Москва, 1948.

STUDII

ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR

CERCETĂRI FOTOELASTICE ASUPRA UNUI PROCEDEU CORECT DE ÎNCERCARE LA FORFECARE PURĂ A MATERIALELOR

DE

N. IOSIPESCU [1]

Scopul studiului de față este acela de a stabili un nou procedeu de încercare la forfecare pură a diferitelor materiale întrebuințate în construcții : oțel, lemn, beton etc., în vederea completării cunoștințelor asupra caracteristicilor mecanice ale acestor materiale. Pentru aceasta este necesar a se realiza o stare de eforturi tangențiale pure, maxime și uniform distribuite într-o secțiune de rupere, produsă numai sub acțiunea acestei categorii de eforturi, a unei epruvete de încercare de o formă cît mai potrivită. În acest scop trebuie ca o asemenea piesă să fie încercată cu ajutorul unui dispozitiv de solicitare adecuat, astfel încît să fie supusă numai la acțiunea unei forțe tăietoare simple în secțiunea respectivă, fără nici un moment încovoietor sau forță axială, dînd naștere deci la eforturi tangențiale pure în acea secțiune. Aceste condiții rezultă, conform unei definiții clasice date de către Morlay în tratatul său de *Rezistența materialelor* [1], din necesitatea determinării rezistenței la forfecare într-un mod analog ca pentru aceea de întindere, adică prin împărțirea forței tăietoare maxime din momentul producerii ruperii prin suprafața secțiunii respective.

Se știe însă că nici unul din procedeele de încercare a materialelor la forfecare, existente pînă în prezent în tehnică și aplicate în mod curent în laboratoarele de încercări, nu corespunde scopului urmărit, așa cum este el enunțat mai sus, prin satisfacerea celor trei condiții esențiale arătate, pe care trebuie să le îndeplinească o astfel de încercare. Acest lucru este arătat de către aproape toate tratatele de Rezistența materialelor, ca : Timoshenko [2], Filipescu [3], Beliaev [4], Filonenko [5] etc., la capitolele respective despre forțele tăietoare și despre forfecare, cum și de către tratatele speciale de încercarea sau de tehnologia materialelor de construcții.

---

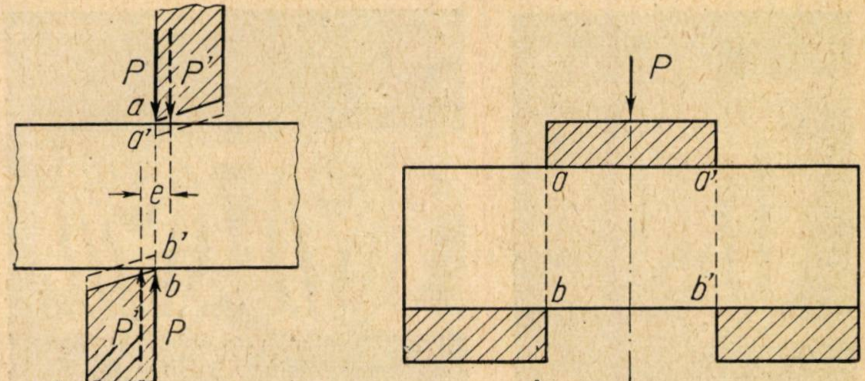
[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

Pe de o parte, obținerea unei solicitări produse de către o forță tăietoare simplă, care să dezvolte numai eforturi tangențiale pure τ într-o secțiune, fără nici un fel de eforturi normale σ nu a putut fi realizată pînă acum pentru nici unul din procedeele cunoscute și folosite anterior la încercările de forfecare. Această anomalie rezultă în primul rînd din cauză că solicitarea de forfecare dată de către forța tăietoare este însoțită întotdeauna și de către una de încovoiere, de care este strîns legată, după cum se constată din însăși relația analitică existentă între forța tăietoare (T) și momentul încovoietor (M) al unei grinzi : $T = \frac{dM}{dx}$.

Din acest motiv, în orice secțiune a unei piese supusă la o solicitare dată de către o forță tăietoare (T), iau naștere, în afară de eforturile tangențiale (τ) produse de către ea, și eforturile normale (σ) rezultate din solicitarea dată de momentul încovoietor (M) corespunzător, din aceeași secțiune. Acest fapt este de asemenea semnalat în numeroase tratate de specialitate, în capitolele privitoare la executarea încercărilor asupra diferitelor materiale : oțel, lemn, beton etc., cum sînt de exemplu acele ale lui Davis, Troxell și Wiskocil [6], Kolmann [7], Stolearov [8], V. Nicolau [9] și alții, pentru a nu cita decît aceste cîteva dintre ele. Unii din acești autori afirmă categoric că forfecarea fără încovoiere nu se poate obține și că încercarea la forfecare pură este o problemă de viitor, nerezolvată încă și nerezolvabilă în prezent.

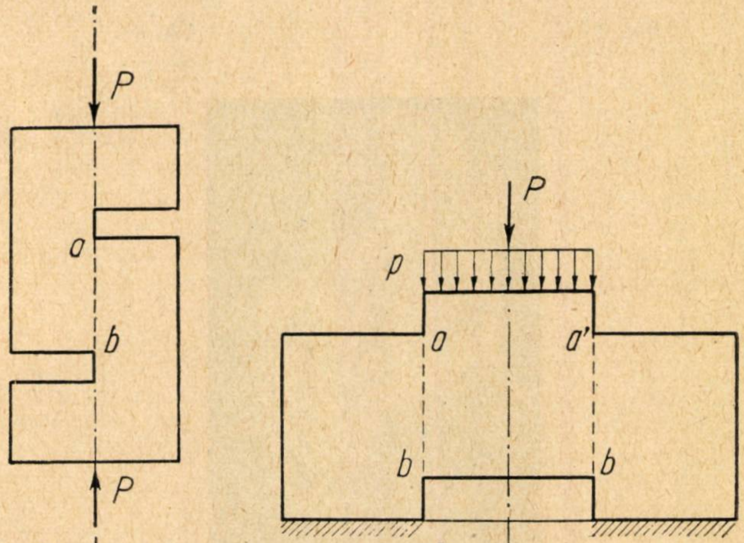
Pe de altă parte, la toate procedeele de încercare la forfecare folosite pînă în momentul de față, repartiția eforturilor tangențiale τ nu este niciodată uniformă pe secțiune, ci ea prezintă întotdeauna o variație foarte pronunțată, avînd de obicei valori foarte mari la extremitățile secțiunii. Aceste valori sînt date de către concentrările de eforturi produse în punctele de acțiune ale muchiilor vii ale unor fălci sau piese de solicitare prin tăiere, acționînd în una sau în două secțiuni transversale, pentru unele procedee de încercare folosite asupra diferitelor feluri de materiale, de tipul acelora din figurile 1 *a* și 1 *b*. Asemenea concentrări puternice de eforturi se produc iarăși și în dreptul vîrfurilor unghiurilor intrînde de la capetele secțiunii sau secțiunilor de forfecare ale unor alte forme de epruvete, de tipul acelora din figurile 2 *a* și 2 *b*. Acest lucru se poate constata ușor și s-a stabilit prin studiile fotoelastice efectuate de către diferiți autori, după cum este cazul acelora care fac obiectul lucrării lui Beliankin [10], pentru studiul fotoelastic al formelor de epruvete și procedeelor de încercare a lemnului la forfecare, cum și acele citate în lucrarea *Introducere în fotoelasticitate* [11], pentru studiul unor forme de epruvete folosite pentru încercarea betonului la forfecare.

Se poate constata, de asemenea, din rezultatele obținute prin studiul fotoelastic informativ efectuat cu ocazia cercetărilor de față, asupra încercărilor de forfecare produse într-o singură secțiune, executate prin acțiunea de tăiere a unor muchii vii ale unor fălci de tăiere și realizate experimental ca în figura 1 *a*, ale căror izocromatice sînt reproduse în figura 3, că aspectul acestei solicitări este absolut asemănător aceluia al unei compresiuni concentrate bilaterale, cu concentrări mari de tensiuni în dreptul punctelor de aplicare ale forțelor de solicitare. Secțiunea de așa-zisă forfecare fiind o secțiune de simetrie a solicitării respective, după cum se constată și din aspectul izocromaticelor, va fi lipsită de eforturi tangențiale τ, care au, prin însăși natura lor, caracterul de antisimetrie.



a b

Fig. 1



a b

Fig. 2

De asemenea, din studiul fotoelastic al unor solicitări de forfecare produse în două secțiuni paralele, realizate experimental ca în figura 1 *b*, anume din aspectul izocromaticelor respective din figura 4, se constată concentrările mari de tensiuni rezultate, în special la muchiile pieselor de rezemare de la partea inferioară a modelului, probabil din cauza unei ușoare încovoieri a acestuia prin solicitare.

Pentru cazul existenței unghiurilor intrînde de la capetele secțiunii de forfecare, deci al unui model de forma din figura 2 *a*, se dă aci ca exemplu studiul unei epruvete de încercare a betonului la forfecare, efectuat pe un model cercetat fotoelastic, cum și pe epruvete din beton cercetate tensometric. Acest studiu a fost publicat în colaborare cu ing. I. Făcăoaru în revista Construcțiilor și materialelor de construcții [12], constatîndu-se prezența acelorași concentrări mari de tensiuni din dreptul vîrfurilor unghiurilor intrînde de la capetele secțiunii de rupere, după cum rezultă din aspectul izocromaticelor obținute, care au fost acele din figura 5.

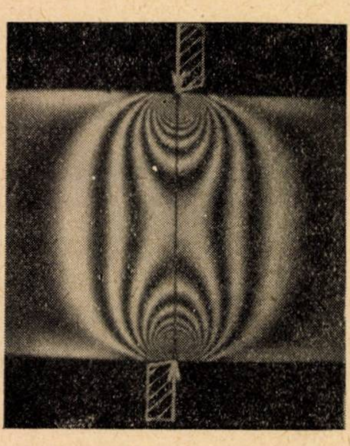


Fig. 3

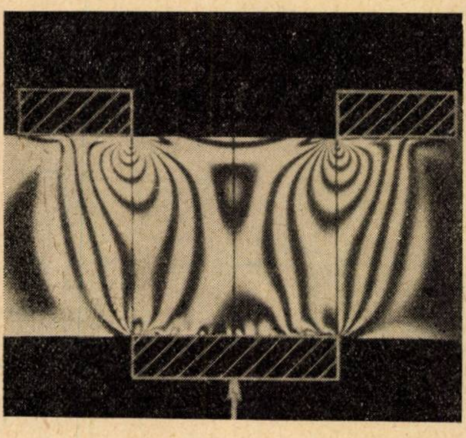


Fig. 4

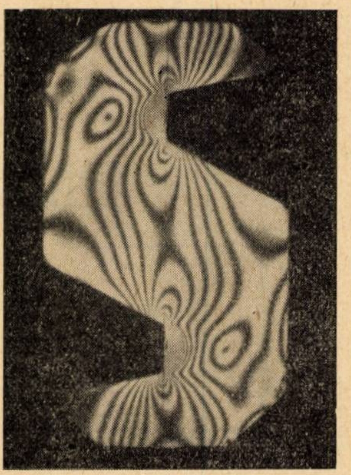


Fig. 5

Diagramele de eforturi din secțiunea de rupere a unei asemenea epruvete, stabilite pe cale fotoelastică în studiul sus citat, au fost acele din figura 6, din care se constată influența redusă a eforturilor tangențiale de pe acea secțiune, cum și efectul important al concentrărilor de eforturi de natură complexă de la capetele secțiunii, asupra amorsării și producerii ruperii. Aceasta face ca epruveta de forma respectivă să nu poată fi acceptată ca valabilă pentru scopul urmărit și, o dată cu ea, toate celelalte forme analoage de epruvete, care sînt alcătuite pe baza aceluiași principiu, fie că sînt cu una, fie cu două secțiuni de forfecare. Caracteristica de a fi prevăzute cu asemenea unghiuri intrînde la extremitățile acelor secțiuni, produce efecte similare de concentrări de tensiuni și de repartiții neuniforme, cu influențe reduse ale eforturilor tangențiale respective.

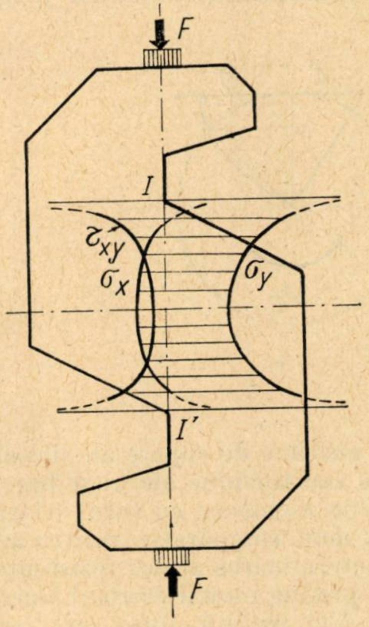
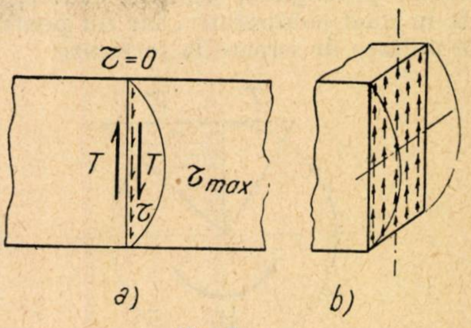


Fig. 6



a) b)

Fig. 7

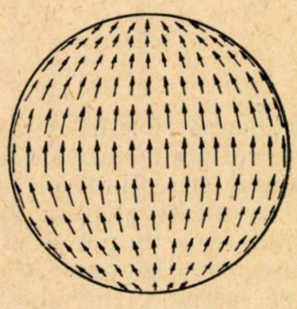
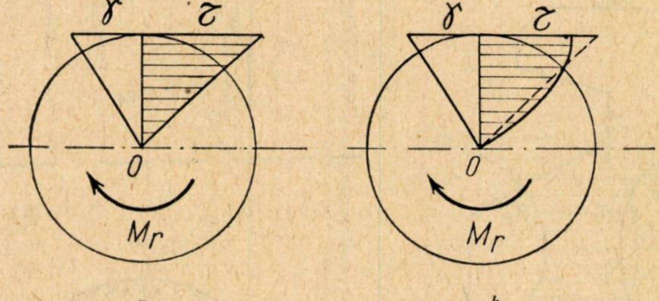


Fig. 8

De asemenea, în cazul unor epruvete de forme simple, cu laturile paralele și cu secțiunile de forme dreptunghiulare, cum ar fi acele pentru încercarea la forfecare a metalelor, supuse la acțiunea unei forțe tăietoare simple, chiar și în cazul cînd aceasta ar fi aplicată în mod indirect, repartiția eforturilor tangențiale pe secțiune în domeniul elastic nu este de loc uniformă. Ea este de formă parabolică, ca în figura 7, cu valoarea maximă la mijlocul înălțimii și cu valori nule la extremități, ceea ce este stabilit teoretic atît în rezistența materialelor cît și în teoria elasticității, aceste rezultate fiind confirmate și experimental prin diferite cercetări.

În cazul secțiunii de formă circulară a unor asemenea piese încercate la forfecare pură, cum este cazul încercării tijelor de nituri sau de buloane de exemplu, chiar dacă acțiunea forței tăietoare s-ar aplica indirect într-o asemenea secțiune, repartiția eforturilor este și mai variată încă, atît ca valori, cît și ca direcții de acțiune ale tensiunilor tangențiale τ pe secțiune (fig. 8). Astfel că rezultatele obținute cu ocazia unor asemenea încercări nu pot fi considerate decît în mod global și sînt foarte relative, față de condițiile principiale, științific exacte, arătate mai sus, ele neputînd servi decît în mod comparativ, iar nu pentru determinarea eforturilor tangențiale unitare de rupere la forfecare.



a *b*

Fig. 9

Determinarea eforturilor tangențiale maxime de rupere ale materialelor cu ajutorul unor încercări de răsucire sau torsiune ale unor bare de formă cilindrică cu secțiuni circulare, este de asemenea cu totul relativă, dînd numai rezultate globale, valabile în mod comparativ pentru acest fel de solicitare, care nu pot servi însă la determinarea acelor rezistențe la forfecare pură, cu toate că în acest caz se produc numai eforturi tangențiale pure pe secțiune. Într-adevăr, acest fapt rezultă, după cum arată Davis, Troxell și Wiskocil în tratatul lor [6], din considerația că repartiția liniară a eforturilor tangențiale (τ) în sens radial, valabilă în domeniul elastic de solicitare pînă la limita de proporționalitate, datorită variației liniare a deformațiilor unghiulare specifice [γ], după cum este arătat în figura 9 *a*, nu mai este valabilă dincolo de acea limită de proporționalitate. Ea este deci cu atît mai puțin valabilă în domeniul plastic de solicitare, mergînd pînă la rupere, în care caz τ nu mai variază liniar în sensul radial (fig. 9 *b*); astfel că rezultă de aci că nu se pot aplica formulele obișnuite de calcul ale torsiunii pentru determinarea lui $\tau_{\max}$ de rupere din aceste încercări de răsucire.

În afară de acestea, trebuie ținut seama că modul de producere al ruperii pentru diferitele categorii de materiale este destul de variat și că deci stabilirea rezistenței la forfecare trebuie considerată în mod diferit, după cum arată Nadai în tratatul său asupra curgerii și ruperii materialelor [13]. Astfel, pentru materialele considerate drept *ductile*, după felul lor de comportare din punct de vedere al modului de rupere, cum este oțelul moale de exemplu, adică a căror rupere se produce mai degrabă prin curgerea lor plastică în direcțiile traiectoriilor eforturilor tangențiale maxime, încercările făcute pentru determinarea rezistenței lor la rupere prin forfecare au o mare importanță practică și teoretică. Aceasta întrucît, chiar dacă solicitarea piesei, considerată în ansamblul ei, este caracteristică în mod categoric, de întindere sau de compresiune pură, ruperea se produce totuși adeseori la eforturile tangențiale τ dezvoltate după secțiuni înclinate la 45°, sau apropiate de acest unghi (fig. 10).

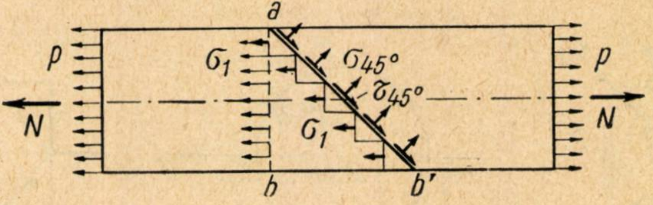


Fig. 10

Pentru materialele considerate drept *casante*, din același punct de vedere, cum este cazul betonului, fontei etc., a căror rupere se produce mai degrabă la rezistențele lor principale de întindere, chiar și atunci cînd piesele respective sînt solicitate la forfecare pură, deci înainte ca eforturile tangențiale să fi ajuns la limita pentru care s-ar produce ruperea, este de asemenea important de a se determina totuși rezistența maximă la forța tăietoare, sau valorile eforturilor tangențiale maxime din momentul ruperii, produse în secțiunile de forfecare indicate. Chiar și atunci cînd această rupere se produce în formă de trepte, în lungul acelei secțiuni de forfecare, la acțiunea eforturilor principale de întindere echivalente σ_1, acționînd în direcții înclinate la 45° față de aceea a secțiunii de forfecare, după cum se întîmplă în cazul betonului (fig. 11), este totuși important de cunoscut valorile eforturilor tangențiale echivalente corespunzătoare la care se produce ruperea materialului, care pot servi la calcule și verificări.

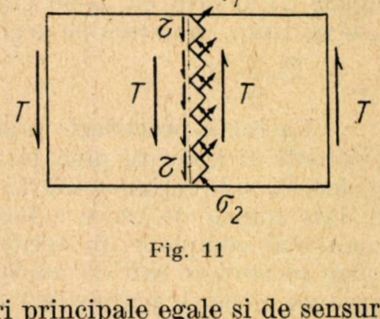
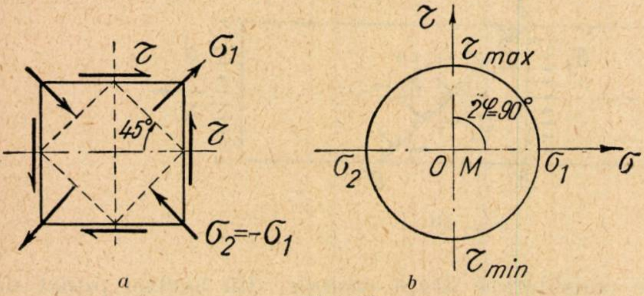


Fig. 11

Se știe foarte bine că, din punct de vedere al teoriei elasticității, deci în domeniul elastic de solicitare, acțiunea eforturilor tangențiale pure τ asupra laturilor unui element bidimensional, este echivalentă cu aceea a eforturilor normale principale egale și de semn contrar: σ_1 și $\sigma_2 = -\sigma_1$, acționînd în plane înclinate la 45° față de acel de forfecare pură (fig. 12 *a*), această stare fiind reprezentată de către cercul lui Mohr cu centrul în origină din figura 12 *b*. De asemenea, în mod invers, o stare de tensiuni dată de către două eforturi principale egale și de sensuri contrare: σ_1 și $\sigma_2 = -\sigma_1$, este echivalentă cu o forfecare simplă dată de către eforturi tangențiale pure τ aplicate după direcții înclinate la 45° față de direcțiile principale respective (fig. 13), starea aceasta de tensiuni fiind reprezentată prin acelaşi cerc al lui Mohr din figura precedentă. În sfîrşit, se ştie de asemenea că orice stare de tensiuni, reprezentată prin eforturile principale absolut oarecare σ_1 şi σ_2, cum şi de direcţiile de acţiune ale acestora (fig. 14 *a*), produce eforturi tangenţiale de valori maxime $\tau_{\max} = \tau_{45^\circ} = = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, în direcţii înclinate la 45° faţă de acele eforturi principale. Starea respectivă de tensiuni este reprezentată prin cercul lui Mohr din



a *b*

Fig. 12

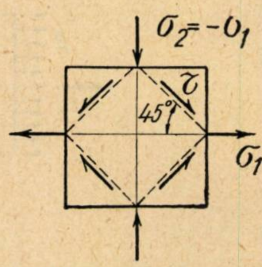
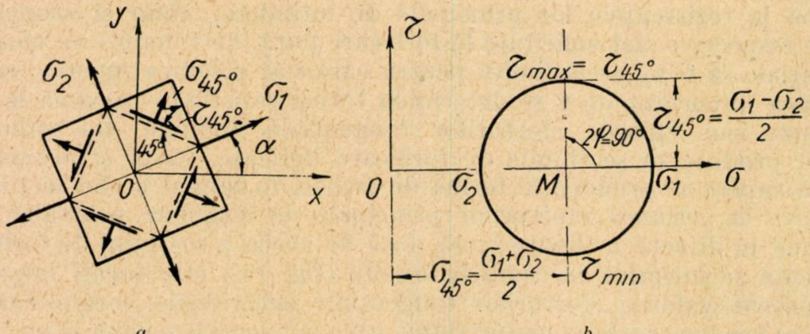


Fig. 13



a *b*

Fig. 14

figura 14 *b*, fără ca acele eforturi tangenţiale maxime să fie şi pure în acelaşi timp, deoarece pe aceleaşi secţiuni acţionează şi eforturile normale $\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

La toate procedeele practice de încercare a materialelor la forfecare existente şi aplicate pînă în prezent, ruperea epruvetelor nu se produce niciodată sub acţiunea eforturilor tangenţiale pure τ de rupere, care pot fi date numai de către o forţă tăietoare simplă, ci la stări de solicitări mult mai complexe, în special sub acţiunea eforturilor normale date de către încovoiere sau de unele compresiuni locale. Mai mult decît atît, se produce situaţia paradoxală că, la unele din aceste procedee practice de încercare la forfecare şi anume chiar pentru acel care este considerat drept cel mai specific dintre ele, acela din figura 1 *a*, rezultat prin acţiunea a două fălci de tăiere, nici nu se produc măcar eforturi tangenţiale în secţiunea de rupere respectivă, după cum s-a arătat anterior.

Într-adevăr, în forma inițială a solicitării acestei încercări, adică în domeniul elastic, acționarea celor două fălci de tăiere prin muchiile lor ascuțite situate într-o aceeași secțiune transversală, reprezintă de fapt doar o compresiune concentrată bilaterală acționînd într-o secțiune de simetrie (fig. 15 *a*), după cum a rezultat și din încercarea fotoelastică citată mai sus (vezi fig. 3). Astfel că în acea secțiune de simetrie nu se pot produce de loc eforturi tangențiale τ, date de către forțe tăietoare T care, prin însăși natura lor, au caracterul specific de antisimetrie (fig. 15 *b*). Ruperea piesei se va produce deci în primul rînd din cauza concentrărilor de eforturi normale σ din punctele de acțiune ale muchiilor vii ale fălcilor și nicidecum, sau numai într-o prea mică măsură, sub acțiunea eforturilor tangențiale de forfecare din cuprinsul secțiunii respective. Acestea pot interveni numai atunci cînd se produce o excentricitate a celor două piese de forfecare sau a eforturilor respective și cînd intervine deci și acțiunea unui moment încovoietor, care să justifice producerea unei forțe tăietoare, prin variația lui.

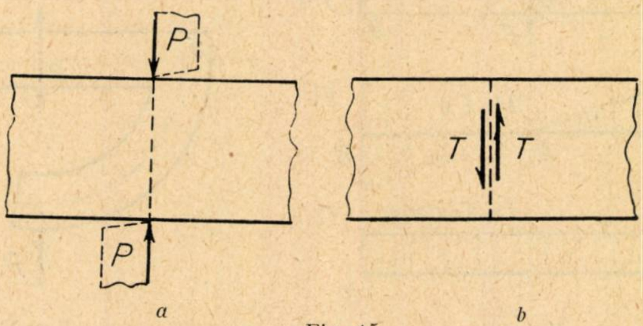


Fig. 15

Problema care se pune deci este aceea de a se stabili mai întîi o formă de solicitare care să fie produsă numai de către o forță tăietoare simplă, acționînd într-o secțiune a unei epruvete, fără ca să intervină acolo nici un moment încovoietor. Se poate constata ușor că o astfel de solicitare se poate realiza totuși, însă numai în secțiunea din dreptul unui punct de inflexiune al unei bare drepte, supusă la o solicitare de încovoiere sub acțiunea unui moment încovoietor de o variație liniară, trecînd printr-un punct de moment nul în dreptul acelei secțiuni. O astfel de solicitare este arătată principial în figura 16 *a*, fiind produsă de către acțiunea a două momente M și $-M$, egale și de semn contrar, aplicate la cele două extremități ale unei bare drepte AB. În acest caz diagrama de variație a momentului încovoietor dat de $M = F \cdot x$ este aceea liniară din figura 16 *b*, iar diagrama forțelor tăietoare respective, dată de expresia $T = \dfrac{dM}{dx} = F = \text{const.}$, este aceea uniformă din figura 16 *c*. În dreptul punctului de inflexiune 0, momentul încovoietor M anulîndu-se, iar forța tăietoare T fiind constantă pe toată lungimea barei, ea este singura solicitare care acționează în această secțiune a piesei din dreptul punctului 0 respectiv.

Studiul teoretic şi acel experimental al regiunii punctelor de moment nul ale unor bare drepte a fost realizat anterior de către Temmermann şi Blanjean [14], rezultatele acestor studii fiind reproduse şi în tratatul de Fotoelasticitate al lui Pirard [15], cum şi în vol. II al lucrării *Introducere*

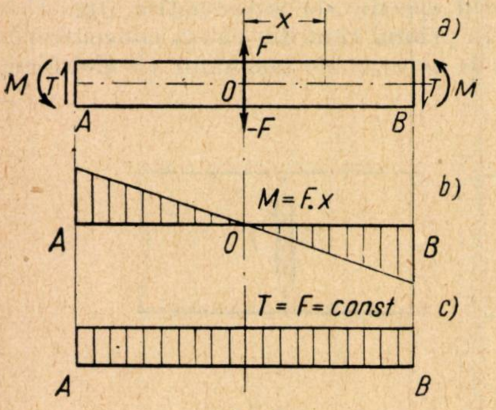


Fig. 16

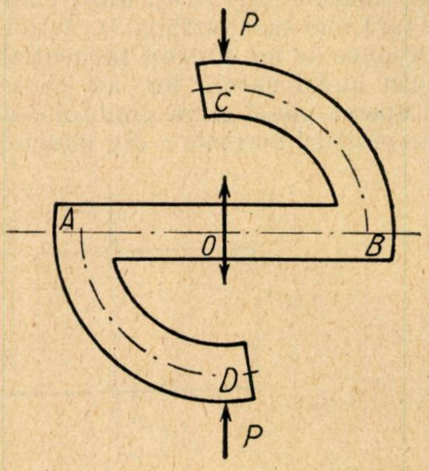


Fig. 17

în fotoelasticitate [16]. Cercetările fotoelastice respective au fost executate de autori pe modele în formă de Z cu tălpile curbe (fig. 17), obţinîndu-se astfel pentru regiunea punctului de moment nul izocromaticele din figurile 18 *a* şi *b*, pentru două trepte de solicitare diferite, caracterizate prin

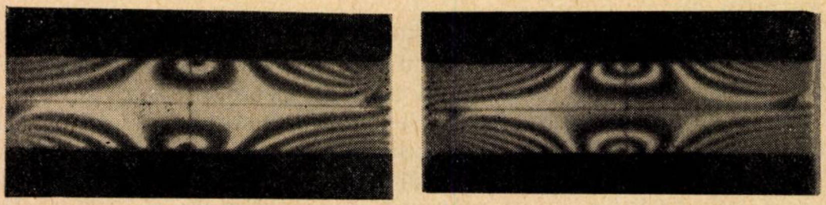

a *b*

Fig. 18

prezenţa punctelor singulare de pe cele două laturi opuse paralele ale modelului în dreptul unei aceleiaşi secţiuni transversale.

Deoarece realizarea unor modele de această formă, confecţionate din alte materiale decît acele folosite la cercetările fotoelastice, care să poată servi eventual ca epruvete de încercare la forfecare a acelor materiale, nu era avantajoasă, s-a căutat să se obţină aceeaşi stare de solicitare, caracterizată prin producerea punctelor de moment nul sau de inflexiune, printr-un alt procedeu mai uşor realizabil experimental.

Realizarea practică a unei asemenea solicitări poate fi astfel obţinută în mod simplu, după cum indică şi Mesmer în tratatul său de fotoelasticitate [17], cu ajutorul unei grinzi drepte, simplu rezemată în două puncte *A* şi *B*, prevăzută cu o consolă *BC* la unul din capetele ei. Această piesă este încărcată cu cele două forţe concentrate F_1 şi F_2, acţionînd în punctele *C* şi *D*, ca în figura 19 *a*, producîndu-se astfel un punct de inflexiune *O* intermediar, situat între punctele *B* şi *D*. Diagrama de variaţie a momentelor încovoietoare (*M*) este de forma aceleia din figura 19 *b*, iar aceea a forţelor tăietoare (*T*) este de forma din figura 19 *c*, poziţia punctului de inflexiune *O* faţă de punctele *B* şi *D* depinzînd de raportul forţelor F_1 şi F_2 de solicitare.

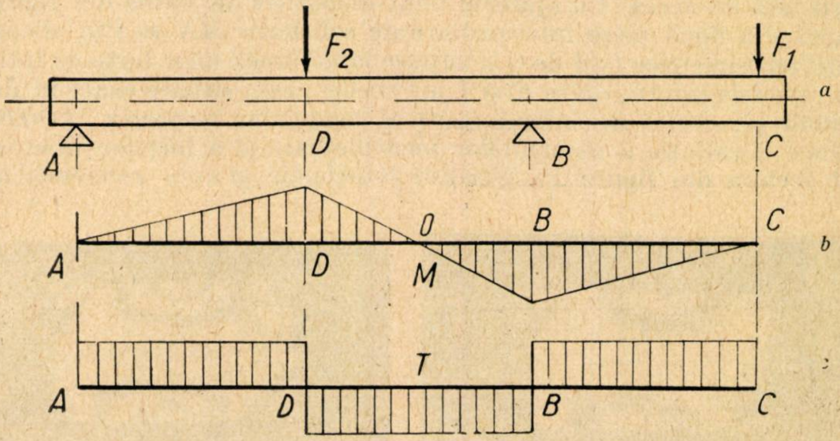


Fig. 19

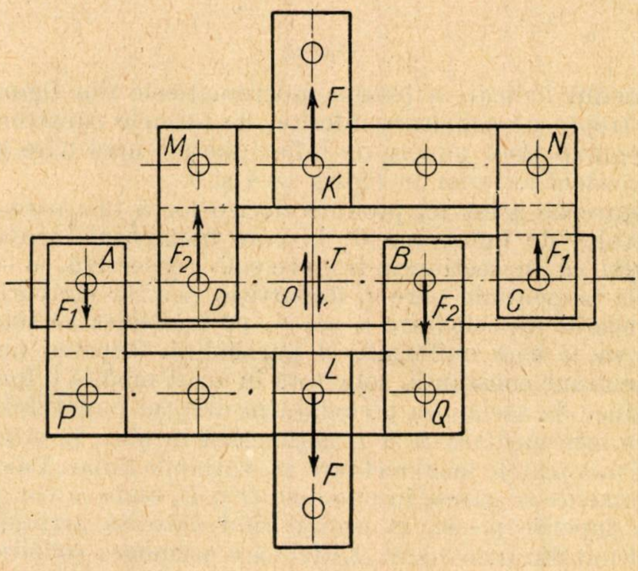
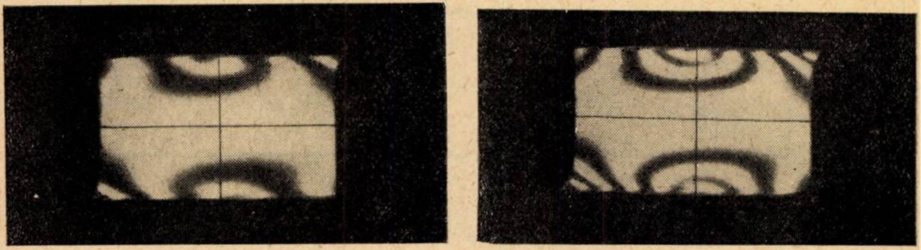


Fig. 20

Realizarea experimentală a unei asemenea solicitări, necesară pentru efectuarea cercetărilor fotoelastice, a fost executată cu ajutorul unei piese de forma celei folosite de către Frocht [18] pentru a realiza încovoierea pură în vederea etalonării materialelor, solicitată însă într-un mod diferit față de aceea. Cu ajutorul unui dispozitiv de forma din figura 20, compus din două piese intermediare de solicitare MN și PQ, dispuse în poziții antisimetrice față de O și supuse la acțiunea unor forțe de întindere F în punctele intermediare K și L ale acelor piese, situate exact în dreptul secțiunii punctului de inflexiune O al modelului respectiv $ADOBC$, se produce o variație a momentelor încovoietoare și a forțelor tăietoare de felul acelora din figura 19. Studiul fotoelastic al unui asemenea model,



a *b*

Fig. 21

solicitat în modul indicat, a produs izocromaticele din figura 21 *a* și *b*, pentru două trepte de solicitare diferite, de formele caracteristice corespunzătoare regiunii unor puncte de inflexiune ale unei bare drepte, obținute prin procedeul anterior în figura 18 *a* și *b*.

O solicitare de acest fel produce deci o forță tăietoare simplă T în dreptul punctului de inflexiune O, în care momentul încovoietor M se anulează, astfel că în secțiunea transversală respectivă se vor produce numai eforturi tangențiale pure τ. Repartiția acestor eforturi tangențiale în domeniul elastic de solicitare a piesei, pe înălțimea secțiunii dreptunghiulare, nu va fi însă uniformă, ci parabolică. Ruperea unei asemenea epruvete de secțiune constantă, solicitată în acest mod la o forfecare pură, nu se va produce de asemenea niciodată în dreptul punctului O, deoarece către punctele intermediare B și D acționează în plus, în afară de forțele tăietoare T și momentele încovoietoare M, variabile liniar. Valorile maxime ale acestor momente se găsesc în punctele D și B, unde se vor produce deci în mod sigur ruperile piesei, în primul rînd datorită acțiunii eforturilor normale rezultînd din încovoiere. Astfel că o asemenea solicitare nu poate fi folosită ca atare pentru scopul determinării rezistenței la forfecare, deși conține o secțiune de forfecare pură în dreptul punctului de inflexiune al barei solicitate în acest mod.

Pentru a se putea realiza totuși ruperea unei asemenea epruvete, de această formă și solicitare, în dreptul punctului O, numai la acțiunea forței tăietoare simple T, deci a eforturilor tangențiale pure τ_{xq} din acea secțiune, va trebui să se producă acolo o slăbire a formei grinzii cu ajutorul unor crestături. Prin alegerea potrivită a formei și adîncimii acestor crestături, va trebui să se ajungă la o creștere suficientă a valorilor lui τ_{xy} din secțiunea de forfecare pură, pentru a se produce astfel ruperea piesei în secțiunea minimă ce va rezulta acolo și numai la solicitarea dată de forța tăietoare respectivă. Prin prevederea acestor crestături trebuie urmărit însă să nu se producă de loc concentrări de tensiuni în capetele acelei secțiuni minime dintre fundurile crestăturilor respective. Din contră, prin potrivirea adîncimii acestora se poate să se obțină o repartiție cît mai uniformă a eforturilor tangențiale τ_{xy} de pe secțiunea de rupere, condiție ce s-a putut realiza numai pe baza studiului fotoelastic întreprins, ce face obiectul articolului de față.

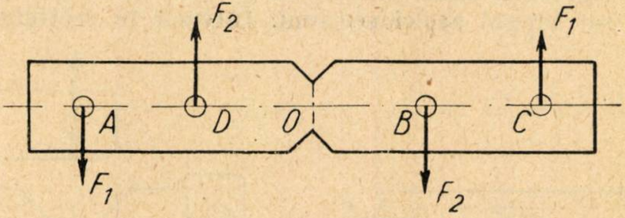
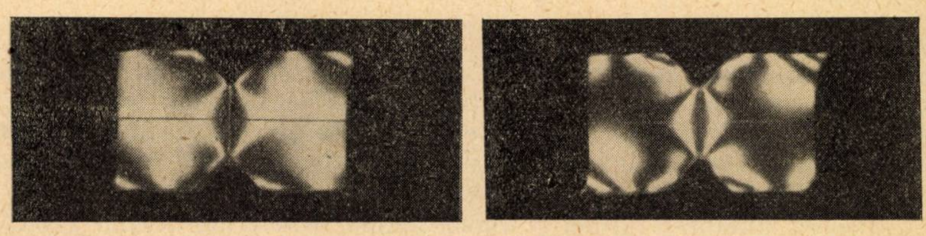


Fig. 22

În acest scop s-au prevăzut la un asemenea model, cele două crestături în formă de V, de o formă și de o adîncime stabilite pe cale fotoelastică, după cum vom arăta mai departe, situate în dreptul punctului de moment nul al unei asemenea epruvete, solicitate în mod analog ca mai sus (fig. 22). S-au obținut astfel izocromaticele din figurile 23 *a* și *b*, pentru două trepte de solicitare diferite, cu o izocromatică de număr de ordine maxim și de o formă rectilinie și continuă, producîndu-se între cele două vîrfuri ale crestăturilor.



a *b*

Fig. 23

După cum se știe din lucrările de specialitate și după cum se arată și în vol. I al lucrării *Introducere în fotoelasticitate* [16], izocromaticele obținute experimental reprezintă curbele de egală valoare a diferenței eforturilor principale ($\sigma_1 - \sigma_2$), fiind deci curbe de valori constante ale eforturilor tangențiale maxime $\tau_{\max}$. Într-adevăr, conform reprezentării variației eforturilor din jurul unui punct prin cercul lui Mohr, aceasta duce la condiția

$$\tau_{xy} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = k\sigma_0 = \text{const.},$$

care este îndeplinită pentru toate punctele din lungul unei izocromatice, indicînd deci existența unor eforturi tangențiale maxime $\tau_{\max}$, de valori constante în tot lungul acelei secțiuni. Întrucît în secțiunea respectivă nu acționează decît o forță tăietoare simplă, fără solicitare de încovoiere, deoarece momentul încovoietor se anulează în acest punct, singurele eforturi care se produc în acea secțiune sînt acele tangențiale pure τ_{xy}. Acestea vor avea deci valori maxime $\tau_{\max}$ în fiecare punct după direcția acelei secțiuni și vor fi de valori constante în lungul întregii secțiuni, ceea ce se urmărea de fapt să se stabilească prin cercetarea respectivă.

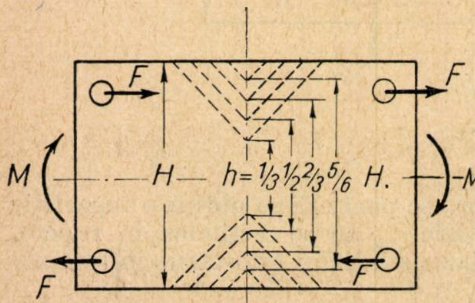


Fig. 24

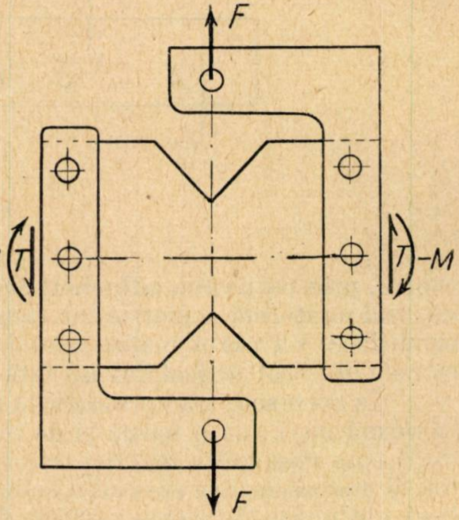


Fig. 25

Pentru stabilirea formei și dimensiunilor exacte ale acestor crestături, în vederea obținerii rezultatelor optime urmărite, s-a procedat la un studiu fotoelastic mai amănunțit, executat pe un model de formă mai scurtă și mai lată din figura 24, solicitat cu ajutorul unui dispozitiv de forma din figura 25. Acesta produce o solicitare principial analoagă cu aceea din dreptul punctului de inflexiune al grinzii din figura 16, cu momente egale și de semn contrar M și $-M$, aplicate în secțiunile de prindere ale epruvetei în piesele dispozitivului de solicitare respectiv și cu variațiile lui M și ale lui T de forme corespunzătoare, ducînd deci la o forfecare pură în secțiunea mijlocie. Pentru a stabili forma optimă a crestăturilor, s-a ținut seamă că, pentru ca eforturile tangențiale τ_{xy} să aibă valori maxime în fiecare punct din secțiunea de forfecare pură, chiar în direcția acelei secţiuni, trebuie ca izostaticele sau traiectoriile eforturilor principale să traverseze acea secţiune în direcţii înclinate la 45°. Aceasta se întîmplă de altfel în orice punct de inflexiune al unei bare, după cum se ştie din *Teoria elasticităţii* şi după cum se arată în tratatul lui Timoshenko [19], cum şi în lucrarea lui Paduart [20] asupra solicitării betonului la forfecare. Această condiţie nu este însă suficientă pentru a avea şi o forfecare pură în secţiunea respectivă, şi cu atît mai mult pentru a se obţine şi o repartiţie uniformă a eforturilor tangenţiale pe acea secţiune, conform observaţiilor rezultînd din compararea stărilor de tensiuni din figurile 12 şi 14.

Pentru ca această condiţie, a producerii de valori maxime ale eforturilor tangenţiale, să poată fi îndeplinită şi pentru cazul existenţei unor crestături în unghi viu pe cele două laturi ale epruvetei, va trebui ca laturile acestor crestături să fie înclinate şi ele după direcţiile obligatorii ale izostaticelor, deci după un unghi de 45° faţă de axa piesei sau faţă de secţiunea ei transversală (fig. 26). Crestăturile în *V* vor trebui să fie deci de o formă cu un unghi la fund de 90° şi cu înclinările laturilor lor îndreptate după direcţii la 45°, a căror adîncime optimă trebuie stabilită pentru a se obţine şi o repartiţie uniformă a eforturilor tangenţiale în secţiunea minimă. S-au cercetat deci fotoelastic diferite piese de model, alcătuite şi solicitate ca în figurile 24 şi 25, pornind de la piesa întreagă,

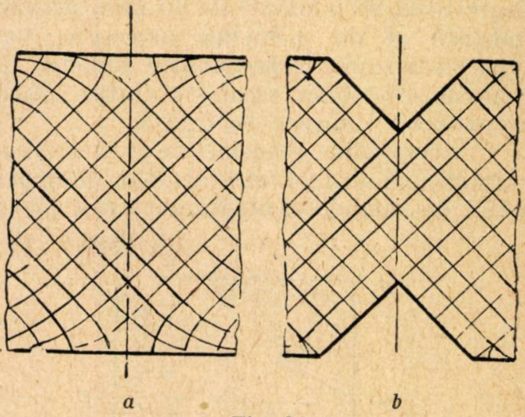
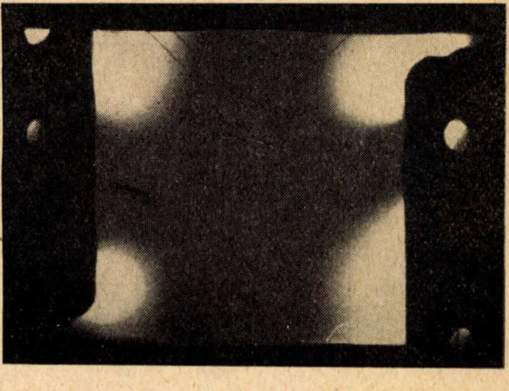

a *b*

Fig. 26


a

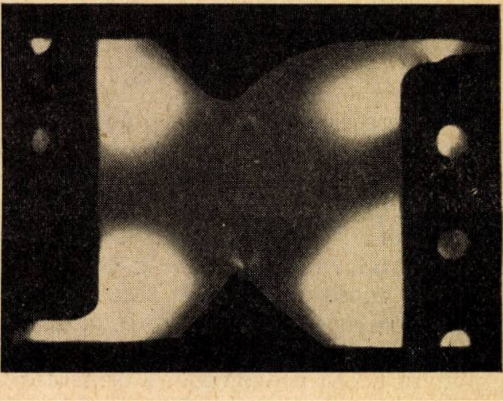
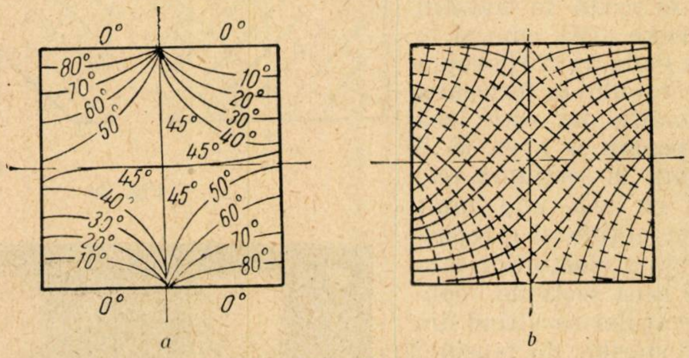

b

Fig. 27

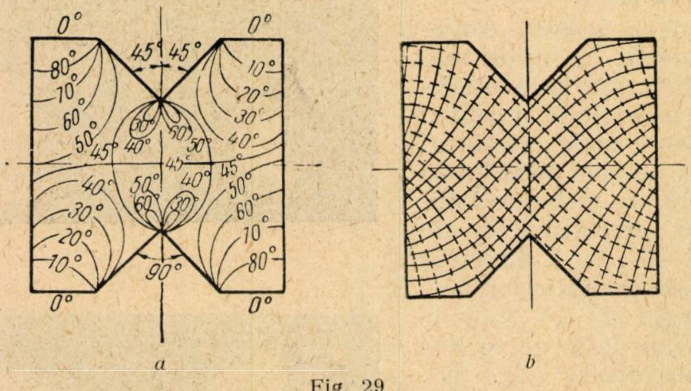
necrestată, de o lățime de 60 mm, prevăzută apoi cu crestături de forma indicată și de adîncimi succesive, variind din 5 în 5 mm, de la 0 pînă la 20 mm, reprezentate punctat pe figura 24, ceea ce reprezintă cazurile diferitelor rapoarte dintre înălțimea minimă și înălțimea totală a epruvetei indicate pe figură.

Cercetările fotoelastice calitative, executate în vederea stabilirii valabilității formei crestăturilor indicate mai sus, au fost efectuate pe astfel de modele confecționate din plexiglas, mai întîi fără crestături și apoi cu crestături de adîncimi variate. Pentru toate aceste modele s-au obținut izoclinele de parametru 45° îndreptate după direcția secțiunii transversale ce trece prin punctul de moment nul, după cum se constată din fotografiile acelor izocline obținute pentru parametrul de 45°. Sînt date ca exemplu aci izoclinele pentru cele două modele din figurile 27 *a* și *b*, primul de formă fără crestături și cel de-al doilea cu crestături de adîncimi egale cu un sfert din înălțime, ceea ce arată că izostaticele respective traversează după direcții înclinate la 45° acea secțiune în ambele cazuri. Rețelele de izocline trasate pentru epruveta fără crestături, cum și pentru aceea prevăzută cu crestăturile de adîncime optimă, determinată fotoelastic prin cercetările cantitative descrise mai jos, sînt date în figurile 28 *a* și 29 *a*. Rețelele izostaticelor respective, determinate pe baza



a *b*

Fig. 28



a *b*

Fig. 29

izoclinelor de mai sus, pentru aceleași două modele, sînt reproduse în figurile 28 *b* și 29 *b*.

Pentru stabilirea adîncimilor optime ale crestăturilor, în vederea realizării distribuției uniforme a eforturilor tangențiale pe secțiunea de rupere, s-au efectuat studiile fotoelastice cantitative pe modele din fenolformaldehidă. Aceste studii au fost executate în mod comparativ, mai întîi pentru epruveta de formă plină, fără crestături cum și mai apoi pentru aceleași modele prevăzute cu crestături de adîncimi succesive, variind din 5 în 5 mm. S-au obținut astfel izocromatice de diferite forme, dintre care reproducem aci mai întîi fotografia obținută pentru forma plină de epruvetă, fără crestături, din figura 30, similară aceleia din figura 21 *b*. Pentru cazul adîncimii crestăturilor egale cu cîte un sfert din înălțimea epruvetei, dar numai pentru acest caz, s-a obținut o izocromatică de un număr de ordine maxim și de o formă continuă, situată între cele două vîrfuri ale crestăturilor, deci în lungul secțiunii minime de forfecare

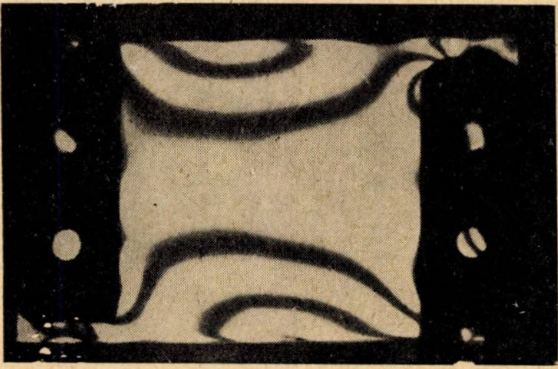


Fig. 30

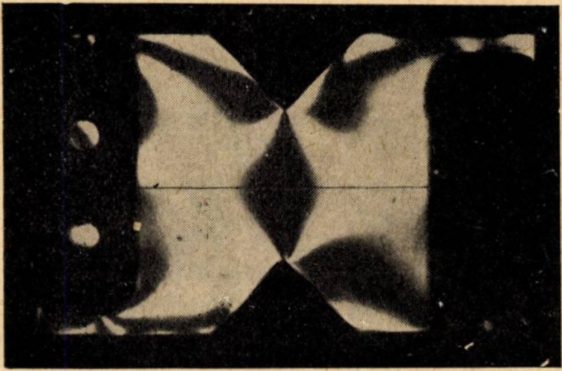
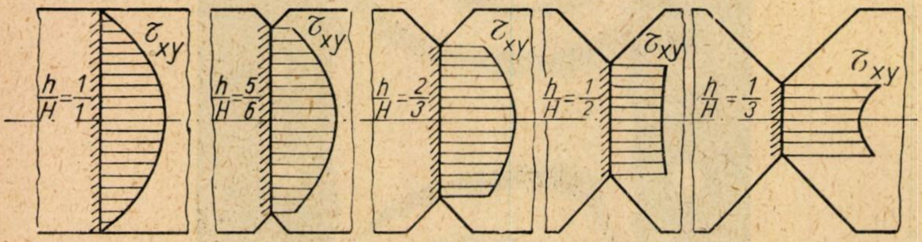


Fig. 31

(fig. 31), în mod absolut analog ca pentru aceea din figura 23 *a*, deşi solicitarea de încovoiere cu punct de moment nul a epruvetei este realizată aci în alt mod.

Prin aplicarea metodelor practice de interpretare şi prelucrare a rezultatelor cercetărilor fotoelastice, realizată prin metoda diferenţei tensiunilor tangenţiale a lui Frocht [18], s-au obţinut apoi diagramele de variaţie ale eforturilor tangenţiale pure şi maxime : $\tau_{xy} = \tau_{\max}$, din lungul secţiunilor minime ale diferitelor forme de epruvete, mai întîi ale aceleia fără crestături şi apoi ale acelora prevăzute cu crestături de adîncimi variate în rapoartele indicate, care au fost considerate la încercări. Formula de calcul a lui Frocht, prin aplicarea metodei diferenţei tensiunilor tangenţiale



τ_{xy}
$\frac{h}{H}=\frac{1}{1}$
$\frac{h}{H}=\frac{5}{6}$
$\frac{h}{H}=\frac{2}{3}$
$\frac{h}{H}=\frac{1}{2}$
$\frac{h}{H}=\frac{1}{3}$

a) b) c) d) e)

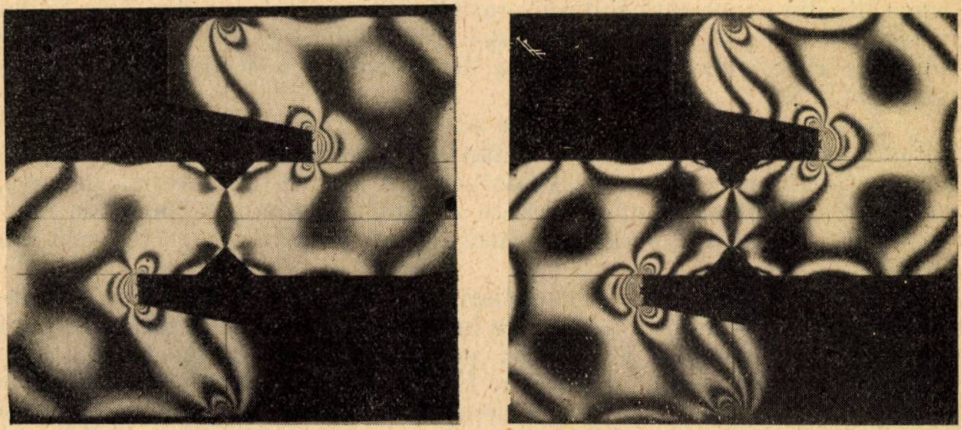
Fig. 32

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi$$

se simplifică în cazul nostru, avînd în vedere că izostaticele sînt înclinate la 45° în tot lungul secţiunii studiate, astfel că $\varphi = 45°$ şi deci $\sin 2\varphi = 1$. Urmează că diagramele de variaţie ale lui $\tau_{\max}$ se obţin în mod simplu din punctele de intersecţie ale izocromaticelor cu secţiunea, cum şi din numerele de ordine ale acelor izocromatice, obţinîndu-se astfel rezultatele asupra formelor acelor diagrame, pentru diferitele adîncimi ale crestăturilor, din figurile 32 *a*, *b*, *c*, *d* şi *e*. Se constată că numai în cazul unor adîncimi ale acestor crestături egale cu un sfert din înălţimea epruvetei şi numai pentru acestea, se obţine o repartiţie practic uniformă a eforturilor tangenţiale pure τ_{xy} din lungul secţiunii minime a epruvetei dintre vîrfurile crestăturilor, ceea ce îndeplineşte ultima condiţie impusă acestui fel de încercare şi tipului de epruvetă respectiv.

Pentru a constata că această condiţie este independentă de modul cum se produce solicitarea, cu condiţia de a se obţine numai punctul de moment nul şi de a se produce acolo crestăturile de formele şi dimensiunile stabilite mai sus, s-a mai realizat o altă încercare fotoelastică pe un model din Araldit, de forma şi proporţiile din figurile 33 *a* şi *b*, în care s-au reprodus fotografiile izocromaticelor respective pentru două trepte de solicitare consecutive. Se observă şi aci aspectul asemănător al fenomenelor fotoelastice produse pentru cele două trepte de solicitare diferite, care au dus la formarea unei izocromatice de ordinul 2, respectiv de ordinul 3, în dreptul secțiunii minime dintre fundurile crestăturilor.

Rezultă deci din acest studiu fotoelastic că, în cazul unei epruvete de acest fel, prevăzută cu crestături în formă de *V*, cu unghiurile la fund de 90° și cu laturile înclinate la 45°, cum și cu adîncimile crestăturilor egale cu cîte un sfert din înălțimea epruvetei, solicitată la o încovoiere cu o variație liniară a momentului încovoietor și cu un punct de moment nul


a Fig. 33 *b*

în dreptul secțiunii minime dintre fundurile crestăturilor, se obține o forfecare pură, cu valori maxime și uniform distribuite ale eforturilor tangențiale în domeniul elastic de solicitare, pe secțiunea minimă a piesei, egală cu jumătate din înălțimea ei. Datorită repartiției uniforme a eforturilor tangențiale în domeniul elastic pe întreaga secțiune, fără maxime și concentrări, această repartiție se va produce și în domeniul plastic, mergînd deci pînă la ruperea piesei în secțiunea respectivă.

Problema aceasta, a studiului fotoelastic a încercărilor de forfecare, a constituit preocuparea autorului din anii anteriori, cînd a prezentat, în colaborare cu I. Făcăoaru, o primă comunicare asupra unui subiect apropiat — privitor la încercarea betonului la forfecare — la sesiunea Academiei R.P.R. — Secția de științe matematice și fizice — din anul 1956, care a constituit și obiectul studiului publicat ulterior, menționat la punctul [12] din bibliografie. În aceeași ordine de idei, menționăm că probleme cu aspecte analoage au preocupat și pe alți cercetători, între care cităm studiile M. Arcan privitoare la cercetările fotoelastice asupra unor forme de epruvete de forfecare pură și uniformă, aplicate la încercările maselor plastice cu tip de rupere ductil [21], [22]. De asemenea lucrarea lui Beliankin, citată anterior și trecută în bibliografie la punctul [10], cuprinde un mare număr de studii fotoelastice comparative asupra numeroaselor procedee existente de încercare a lemnului la lunecarea în lungul fibrelor.

Rezultatele obținute prin studiul de față, realizate prin cercetările fotoelastice efectuate și descrise în cuprinsul acestei lucrări, au constituit principiile de bază pentru alcătuirea unei serii de procedee noi de încercare la forfecare pură a diferitelor materiale de construcții : oțel, lemn, beton etc. Asemenea procedee au fost realizate pe baza unor forme de epruvete adecuate și a unor dispozitive de solicitare potrivite, stabilite conform proprietăților specifice de rupere ale fiecărui din aceste materiale în parte, cunoscute din experiență și din literatură, care au fost descrise și de Nadai în tratatul său [13], epruvetele respective fiind încercate în condițiile de solicitare corespunzătoare modului de executare a studiului fotoelastic respectiv.

Aceste condiții se vor arăta cu ocazia unor lucrări și publicații viitoare, privitoare la studiile, cercetările și experimentările ce au fost făcute pentru stabilirea fiecărui procedeu de încercare ale acestor materiale în parte, care formează obiectul unor brevete ale statului romîn, cum și ale unor certificate de autor eliberate de către Oficiul de stat pentru invenții din R.P.R.

Aceste brevete au ca beneficiari Ministerul Transporturilor și Telecomunicațiilor, pentru procedeul de încercarea oțelurilor la forfecare pură și Ministerul Economiei Forestiere, pentru procedeul de încercare a lemnului la lunecare în lungul fibrelor. Urmează a se stabili un beneficiar și pentru procedeul de încercare a betonului la forfecare pură, cercetat și experimentat o dată cu celelalte două, dar care a întîrziat să fie definitivat din motive obiective, deși prezintă același interes pentru tehnica nouă, ca și celelalte două procedee stabilite pe baza acelorași cercetări fotoelastice din acest studiu, sau poate chiar un interes și mai mare încă, avînd în vedere nesiguranța și lipsa de preciziune a acestei probleme practice din teoria betonului, a comportării și rezistenței la forfecare pură a acestui material.

Primită la redacție la 18 decembrie 1961

ФОТОУПРУГИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРАВИЛЬНОМУ СПОСОБУ ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛОВ НА ЧИСТЫЙ СРЕЗ

РЕЗЮМЕ

Целью этих фотоупругих исследований являлось нахождение нового способа, строго правильного с научной точки зрения, для испытаний на чистый срез различных строительных материалов как сталь, дерево, бетон и пр. Ранее существующие способы, применяющиеся обычно и в настоящее время, совсем не соответствуют условиям, необходимым для того, чтобы вызвать напряжения чистого сдвига

максимальных значений и с их равномерным распределением по сечению разрыва испытуемых образцов.

Применяя нагружение от изгиба с линейным изменением, имеющим точку нулевого момента, расположенную по середине длины образца, получим простую срезывающую силу в этой точке перегиба, рассматриваемую с точки зрения деформации этого образца.

Для получения максимальных и равномерно распределенных значений касательных усилий в сечении разрыва, фотоупругие исследования показали, что форма образца должна иметь два пореза угловой формы, с двумя сторонами, наклоненными под углом в 45° по отношению к поперечному сечению и иметь глубины, равные четверти полной высоты образца. Эти прорезы производят, таким образом, минимальную высоту, равную половине полной высоты образца, в сечении, в котором произойдет разрыв детали при чисто срезывающей силе, вызванной соответствующей системой нагружения.

Эта форма образца с прорезами такой формы и таких размеров вызывает максимальные значения касательных напряжений и равномерное распределение чисто срезывающей силы в этом минимальном сечении, что ведет к разрыву детали именно в этом сечении, если принять некоторые меры предосторожности, вызванные свойствами каждого материала.

Результаты этих исследований были использованы для осуществления нескольких практических способов испытания на чистый срез некоторых строительных материалов, которые явились предметом различных патентов на изобретение, выданных Румынским государством, причем бенефициантами были Министерство транспорта и связи, а также Министерство лесного хозяйства РНР.

RECHERCHES PHOTOÉLASTIQUES SUR UN PROCÉDÉ CORRECT D'ESSAIS AU CISAILLEMENT PUR DES MATÉRIAUX

RÉSUMÉ

Le but de ces recherches photoélastiques a été d'établir un nouveau procédé, strictement correct au point de vue scientifique, pour les essais au cisaillement pur de diverses sortes de matériaux de constructions, tels que : l'acier, le bois, le béton, etc. Les anciens procédés, que l'on emploie encore beaucoup jusqu'à présent, ne correspondent du tout aux conditions nécessaires pour produire des contraintes de cissaillement pur, de valeurs maxima et uniformément distribuées dans la section de rupture des éprouvettes soumises aux essais.

En utilisant la sollicitation produite par un fléchissement à variation linéaire, ayant un point de moment nul situé au milieu de la lon-

gueur d'une éprouvette, on obtient un effort tranchant simple dans ce point d'inflexion, considéré au point de vue de la déformation de l'éprouvette. Les recherches photoélastiques ont prouvé que, pour obtenir des valeurs maxima et uniformément réparties des contraintes tangentielles dans la section de rupture, la forme de l'éprouvette doit posséder deux entailles de forme angulaire, ayant les deux côtés inclinés de 45° par rapport à la section transversale et des profondeurs égales à un quart de la hauteur totale de l'éprouvette. Grâce à ces entailles, la hauteur minimum sera égale à la moitié de la hauteur totale de l'éprouvette, dans la section où se produira la rupture de la pièce soumise à l'effort tranchant pur, produit par un système de sollicitation approprié. Cette forme d'éprouvette avec les entailles ayant les formes et les dimensions mentionnées, produit des valeurs maxima des tensions tangentielles et une répartition uniforme de l'effort tranchant pur dans cette section minimum, ce qui conduit à la rupture de la pièce dans cette section même, à la condition de prendre certaines précautions, imposées par les propriétés de chaque matériel. Les résultats de ces recherches ont été employés pour réaliser quelques procédés pratiques d'essais au cisaillement pur de certains matériaux de constructions. Ceux-ci ont constitué l'objet de plusieurs brevets d'invention accordés par l'Etat Roumain, et dont les bénéficiaires sont le Ministère des Transports et des Télécommunications, et le Ministère de l'Economie Forestière de la République Populaire Roumaine.

BIBLIOGRAFIE

1. A. MORLAY, *Strength of Materials*. Ed. Longmans, Green and Co. — Londra, 1920.
2. S. TIMOSHENKO, *Résistance des Matériaux*. I. Ed. Bétranger, Paris și Liège, 1947.
3. GH. EM. FILIPESCU, *Statica construcțiilor și rezistența materialelor*. Imprimeria Națională, București, 1935.
4. N. M. BELIAIEV, *Rezistența materialelor*. I (traducere din limba rusă). Ed. tehnică, București, 1956.
5. M. M. FILONENKO-BORODICI și alții, *Curs de rezistența materialelor*. I (traducere din limba rusă). Ed. tehnică, București, 1951.
6. H. DAVIS, G. E. TROXELL, G.T. WISKOÇIL, *The Testing and Inspection of Engineering Materials*. Ed. Mc Graw Hill — New York, 1955.
7. F. KOLLMANN, *Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe*. I. Ed. Springer, Berlin, 1951.
8. I. V. STOLEAROV, *Introducere în teoria betonului armat*. Editura de Stat pentru literatură de construcții, Moscova-Leningrad, 1941 (Traducere din limba rusă — Editura MCMC).
9. V. NICOLAU și alții, *Introducere în teoria betonului*. I. Editura de Stat pentru Arhitectură și Construcții, București, 1954 ; II. Ed. tehnică București, 1957.
10. Ф. П. БЕЛЯНКИН, *Прочность древесины при скалывании вдоль волокон* —Издательство Академии наук украинской ССР—Киев—1955.
11. N. IOSIPESCU, *Introducere în fotoelasticitate*. II. Ed. tehnică, București, 1960.
12. N. IOSIPESCU, I. FĂCĂOARU, *Aspecte ale comportării și rezistenței betonului la forfecare și întindere*. Revista Construcțiilor și Materialelor de Construcții, 3 (1959).
13. A. NADAI, *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Ed. McGraw Hill — New York, 1950.
14. F. TEMMERMANN, BLANJEAN, *Un problème de résistance de matériaux et de photoélasticité*. L'Ossature Métallique, 3 (1938).

15. A. PIRARD, *La Photoélasticité.* Ed. Dunod. Paris și Liège, 1947.
16. N. IOSIPESCU, *Introducere în fotoelasticitate.* I. Ed. tehnică, 1958.
17. G. MESMER, *Spannungsoptik.* Ed. Springer, Berlin, 1939.
18. M. M. FROCHT, *Photoelasticity.* I. Ed. John Wiley and Sons. New York, 1949.
19. S. TIMOSHENKO, *Théorie de l'Élasticité.* Ed. Béranger, Paris și Liège, 1936.
20. A. PADUART, *Résistance du Beton Armé à l'Effort Tranchant.* Ed. Dunod, Paris, Ed. Desoer Liège, 1947.
21. M. ARCAN, N. GOLDENBERG, *Sur un critère fondamental pour le choix d'un standard d'essais au cisaillement des matières plastiques.* ISOTC 61—WG 2 SP 171, Burgenstock, Elveția, 1957.
22. N. GOLDENBERG, M. ARCAN, E. NICOLAU, *On the most suitable Specimen Shape for testing shear Strenght of Plastics.* Symposium of Plastics Testing and Standardisation. S.T.P. *247*, ASTM, 1958.

STUDII

ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR

MOMENTE PLASTICE OPTIME ÎN GRINZI CONTINUE DE BETON ARMAT CU SECȚIUNEA VARIABILĂ

DE

VALERIU PETCU [1]

La proiectarea construcțiilor industriale de beton armat, grinzile continue cu secțiunea variabilă constituie de multe ori o soluție preferată.

Oportunitatea folosirii acestui tip de grinzi, îndeosebi în cazul deschiderilor sau sarcinilor mari, este subliniată de avantajele de ordin economic și de comportarea la acțiunea sarcinilor sensibil superioară în raport cu aceea a grinzilor cu secțiunea constantă.

Din punctul de vedere al calculului static, grinzile continue cu secțiunea variabilă prezintă, evident, unele dificultăți, rezultate din intervenția în calcule a parametrilor care caracterizează variația secțiunii.

Aceste dificultăți apar de asemenea la proiectarea plastică a acestor grinzi, datorită faptului că la o astfel de proiectare calculul elastic constituie o etapă necesară pe calea determinării momentelor plastice de calcul.

Această situație defavorabilă poate fi evitată numai prin stabilirea prealabilă a rezultatelor calculului elastic sub formă de formule, grafice sau tabele, astfel încît proiectarea plastică să se reducă exclusiv la operaţii caracteristice comportării plastice a materialelor şi structurilor.

Din acest punct de vedere, un deosebit interes îl prezintă acele tipuri de structuri de beton armat, la care influența variației secțiunii asupra distribuției eforturilor în stadiul elastic este caracterizată printr-un singur parametru. În această categorie intră grinzile continue de beton armat cu vute simetrice, avînd deschideri egale, simplu rezemate sau perfect încastrate la extremități. Pentru aceste grinzi influența variației secțiunii asupra distribuției eforturilor în stadiul elastic este caracterizată printr-un singur parametru

$$\nu = \frac{c'}{c} \; (\nu < 1),$$

---

[1] Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

reprezentînd raportul coeficienților de secțiune variabilă [1]

$$c' = \frac{3}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\cdot x^2 \cdot dx \text{ și } c = \frac{6}{l^3}\int_0^l \frac{I_0}{I_x}\cdot x\,(l - x).\,dx.$$

Studiul ce urmează are scopul de a prezenta soluțiile optime, conținînd valorile momentelor plastice determinate pe baza principiului redistribuției optime [4], ale grinzilor continue de beton armat cu 2, 3, 4 și 5 deschideri egale, avînd vute simetrice (drepte sau parabolice), simplu rezemate respectiv încastrate perfect la extremități. Se au în vedere următoarele tipuri de sarcini, specifice grinzilor cu secțiunea variabilă :

— două sarcini concentrate la treimile deschiderii;

— trei sarcini concentrate la sferturile deschiderii.

De asemenea, se prezintă un procedeu aproximativ de determinare a momentelor plastice optime pentru tipul de grinzi considerat, avînd extremitățile încastrate elastic.

Trebuie subliniat faptul că momentele plastice optime constituie totdeauna punctul de plecare pentru determinarea momentelor plastice de calcul, care stau la baza proiectării plastice a structurilor static nedeterminate de beton armat [3].

Studiul are la bază metoda stărilor limită.

În conformitate cu această metodă, sarcina permanentă de calcul (g, G) este constantă, iar sarcina utilă poate varia de la zero la valoarea sa de calcul (p_u, P_u).

DEFINIŢII

Coeficient de redistribuție : Raportul dintre sarcina totală de rupere plastică ($G + P_u$) a unei structuri și sarcina totală de apariție a primei articulații plastice ($G + P_1$) într-o anumită secțiune critică, determinat pentru schema de încărcare pentru care valoarea acestui raport este maximă.

Moment elastic : Moment determinat prin una din metodele staticii construcțiilor în domeniul elastic.

Moment plastic optim : Moment plastic obținut pe baza principiului redistribuției optime.

Secțiune critică : Secțiune a unei structuri în care apare o articulație plastică.

Soluție optimă : Ansamblul format de momentele plastice optime.

NOTAŢII

a — lungimea vutei;

c, c' — coeficienții de secțiune variabilă la grinzile cu vute simetrice drepte sau parabolice;

G — sarcina permanentă de calcul, aplicată concentrat;

g — sarcina permanentă de calcul, uniform distribuită pe ml;

I_0 — momentul de inerție minim al secțiunii grinzii;

I_r — momentul de inerție maxim al secțiunii grinzii;

$k_u = \frac{p_u}{g}$; $K_u = \frac{P_u}{G}$;

l — mărimea deschiderilor grinzii;

M_h — momentul elastic pe reazemul h;

M^0_{pji} — momentul plastic optim în secțiunea critică i din deschiderea j;

M^0_{ph} — momentul plastic optim în secțiunea critică de pe reazemul h;

M_{hj} — momentul încovoietor pe reazemul h stabilit în momentul apariției primei articulații plastice în secțiunea critică din deschiderea j;

$n = \frac{I_0}{I_r}$

P_1 — sarcina utilă de apariție a primei articulații plastice, aplicată concentrat;

p_1 — sarcina utilă de apariție a primei articulații plastice, uniform distribuită pe ml;

P_u — sarcina utilă de calcul (sarcina utilă de rupere plastică), aplicată concentrat;

p_u — sarcina utilă de calcul, uniform distribuită pe ml;

p, P — valoarea curentă a sarcinii utile;

$q = g + p$;

$Q = G + P$;

r_j — coeficientul de redistribuție corespunzător schemei de încărcare pentru care prima articulație plastică apare în secțiunea critică din deschiderea j;

r_h — coeficientul de redistribuție corespunzător schemei de încărcare pentru care prima articulație plastică apare în secțiunea critică de pe reazemul h;

T^0_{hj} — forța tăietoare pe reazemul h, în secțiunea corespunzătoare deschiderii j, rezultată pe baza soluției plastice optime;

X_{jh} — distanța de la reazemul h pînă la secțiunea critică din deschiderea j;

$\lambda = \frac{a}{l}$;

ρ — gradul de încastrare al extremităților grinzii continue ($0 \leqslant \rho \leqslant 1$);

$\nu = \frac{c'}{c}$

I. MOMENTELE ELASTICE ÎN GRINZILE CONTINUE SIMPLU REZEMATE LA EXTREMITĂȚI

În lucrarea [7] sînt prezentate rezultatele unui studiu amplu privind distribuția eforturilor (momente încovoietoare și forțe tăietoare) în grinzile continue cu vute simetrice (drepte sau parabolice), avînd deschideri egale, simplu rezemate la extremități, solicitate de sarcini uniform distribuite, în funcție de valorile coeficientului $\nu = \frac{c'}{c}$ variind între 1,00 și 0,50.

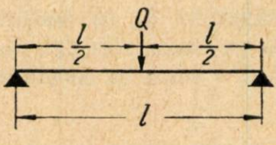
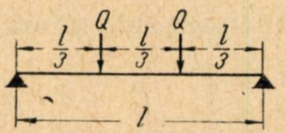
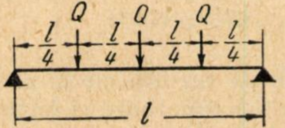
Pentru stabilirea momentelor elastice în funcție de caracteristicile efective ale grinzii, în tabelul 2 se dau valorile coeficientului $\nu = \frac{c'}{c}$ în funcție de lungimea relativă a vutei $\lambda = \frac{a}{l}$ și de raportul momentelor de inerție minim și maxim $n = \frac{I_0}{I_r}$, atît pentru grinzi cu vute simetrice drepte cît și pentru grinzi cu vute simetrice parabolice. La stabilirea valorilor coeficientului ν s-au folosit tabelele corespunzătoare din lucrarea [1].

Examinarea valorilor momentelor de încastrare perfectă pentru grinzile considerate, în cazul unor încărcări alcătuite din două sau trei sarcini concentrate [1], a condus la concluzia că pentru inegalitățile $0{,}05 \leqslant n \leqslant 1{,}00$ *momentele elastice de pe reazemele acestor grinzi pot fi determinate prin echivalarea sarcinilor luate în considerație prin sarcini uniform distribuite, coeficienții de echivalență fiind cei folosiți în cazul grinzilor continue cu secțiunea constantă.*

Erorile care afectează momentele încovoietoare determinate în acest mod, în raport cu soluția exactă, variază în limitele ± 5%.

Tabela 1

Coeficientul de echivalență $e = \frac{p_e \cdot l}{P}$

Schema încărcării	e
	1,50
	2,67
	3,75

Această concluzi este de o deosebită importanță, întrucît asigură stabilirea soluțiilor elastice, pentru diferite tipuri de sarcini, pe baza soluțiilor obținute în cazul sarcinilor uniform distribuite.

Valorile coeficientului de echivalență $e = \frac{p_e \cdot l}{P}$ [7] sînt date în tabela 1.

II. MOMENTELE ELASTICE ÎN GRINZILE CONTINUE ÎNCASTRATE PERFECT LA EXTREMITĂȚI, SOLICITATE DE SARCINI UNIFORM DISTRIBUITE

Pentru grinzile continue cu vute simetrice, avînd deschiderile egale, ecuația celor trei momente are forma

$$c . M_{h-1} + 4 . c' . M_h + c . M_{h+1} + c . (m'_h + m''_h) = 0,$$

în care m'_h și m''_h sînt caracteristicile de încărcare la stînga și la dreapta reazemului h.

Dacă se fac notațiile :

$$\nu = \frac{c'}{c} \text{ și } K_h = m'_h + m''_h$$

atunci ecuația precedentă devine :

$$M_{h-1} + 4 . \nu . M_h + M_{h+1} + K_h = 0 .$$

Pentru primul reazem se obține ecuația :

$$2 . \nu . M_a + M_b + K_a = 0 .$$

O ecuație analoagă rezultă de asemenea pentru ultimul reazem.

Pentru o anumită schemă de încărcare, determinarea soluției elastice se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații avînd forma

$$\begin{aligned} &2 . \nu . M_a + M_b + K_a = 0, \\ &M_a + 4 . \nu . M_b + M_c + K_b = 0, \\ &M_b + 4 . \nu . M_c + M_d + K_c = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &M_m + 2 . \nu . M_n + K_n = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

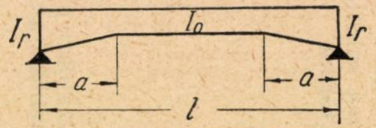
Pentru rezolvarea sistemelor de ecuații (1) corespunzătoare grinzilor cu 2, 3, 4 și 5 deschideri egale s-a folosit formula recurentă stabilită în lucrarea [2].

Pe baza celor arătate la punctul precedent, rezultă că și în acest caz momentele elastice de pe reazeme, pentru tipurile de sarcini considerate, se obțin din înmulțirea momentelor elastice corespunzătoare sarcinii uniform distribuite cu coeficienții de echivalență respectivi (tabela 1).

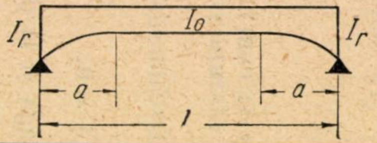
Tabela 2

Valorile coeficientului ν

I. *Vute drepte*



II. *Vute parabolice*



$\lambda = \frac{a}{l}$		$n = I_0 / I_r$																
		1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,250	0,200	0,150	0,125	0,120	0,100	0,080	0,060	0,050
0,50	I	1,000	0,982	0,960	0,935	0,912	0,880	0,852	0,817	0,793	0,768	0,738	0,722	0,718	0,705	0,685	0,663	0,652
	II	1,000	0,982	0,957	0,935	0,907	0,877	0,847	0,810	0,787	0,766	0,737	0,720	0,716	0,702	0,683	0,665	0,655
0,45	I	1,000	0,982	0,952	0,932	0,908	0,873	0,842	0,803	0,785	0,752	0,720	0,704	0,700	0,682	0,667	0,638	0,632
	II	1,000	0,980	0,957	0,933	0,908	0,877	0,847	0,807	0,790	0,767	0,738	0,722	0,716	0,705	0,690	0,670	0,660
0,40	I	1,000	0,978	0,952	0,932	0,902	0,865	0,835	0,793	0,770	0,743	0,713	0,693	0,692	0,677	0,659	0,640	0,627
	II	1,000	0,982	0,957	0,933	0,908	0,882	0,850	0,815	0,793	0,770	0,745	0,730	0,723	0,713	0,697	0,677	0,667
0,35	I	1,000	0,977	0,950	0,930	0,898	0,867	0,837	0,790	0,768	0,742	0,717	0,697	0,693	0,680	0,662	0,645	0,633
	II	1,000	0,980	0,957	0,935	0,913	0,887	0,850	0,822	0,802	0,780	0,755	0,742	0,737	0,722	0,713	0,687	0,683
0,30	I	1,000	0,980	0,953	0,927	0,900	0,870	0,837	0,797	0,775	0,752	0,725	0,710	0,705	0,692	0,678	0,660	0,652
	II	1,000	0,982	0,960	0,942	0,917	0,892	0,865	0,833	0,816	0,795	0,770	0,758	0,757	0,742	0,732	0,709	0,703
0,25	I	1,000	0,975	0,955	0,927	0,905	0,880	0,848	0,808	0,790	0,770	0,745	0,728	0,726	0,713	0,703	0,687	0,677
	II	1,000	0,983	0,963	0,947	0,935	0,903	0,877	0,847	0,832	0,813	0,792	0,783	0,775	0,765	0,755	0,740	0,732
0,20	I	1,000	0,982	0,960	0,935	0,913	0,890	0,860	0,830	0,810	0,792	0,772	0,759	0,757	0,747	0,733	0,722	0,713
	II	1,000	0,985	0,970	0,952	0,935	0,917	0,892	0,867	0,852	0,837	0,818	0,808	0,807	0,798	0,786	0,773	0,767
0,15	I	1,000	0,982	0,967	0,947	0,930	0,907	0,885	0,855	0,842	0,826	0,810	0,800	0,797	0,787	0,777	0,768	0,762
	II	1,000	0,988	0,975	0,963	0,948	0,932	0,915	0,893	0,880	0,867	0,852	0,842	0,828	0,834	0,825	0,815	0,809

III. MOMENTELE PLASTICE OPTIME

Momentele plastice optime s-au stabilit pe baza principiului redistribuției optime [4], specific proiectării plastice a structurilor static nedeterminate de beton armat.

Modul de conducere a calculului a fost prezentat în două lucrări anterioare [5], [6].

Rezultatele obținute în urma studiului efectuat sînt prezentate în tabelele 3—6 în funcție de coeficientul ν dat în tabela 2. Dintre acestea primele două tabele se referă la grinzi simplu rezemate la extremități iar ultimele două la grinzi încastrate perfect la extremități.

Aceste tabele cuprind :

1. Momentele plastice optime din secțiunile critice ale grinzilor.

2. Valoarea momentului încovoietor M_{hj} de pe reazemul h, în momentul apariției primei articulații plastice în secțiunea critică din deschiderea j.

Aceste momente sînt necesare pentru construirea înfășurătoarei momentelor plastice pozitive.

3. Distanța X_{jh}, care stabilește poziția secțiunii critice din deschiderea j în raport cu reazemul h.

4. Forțele tăietoare corespunzătoare ruperii plastice a grinzii, stabilite pe baza soluției optime a momentelor plastice.

5. Valorile coeficienților de redistribuție.

Observație : Rezultatele obținute în cazul grinzilor cu vute simetrice, simplu rezemate la extremități, pot fi extinse și la grinzile simplu rezemate la extremități, la care prima și ultima deschidere au cîte o singură vută în vecinătatea reazemului opus reazemului marginal. Aproximația care se face în acest caz se situează în limite admisibile din punctul de vedere al calculului plastic.

IV. MOMENTELE PLASTICE OPTIME ÎN GRINZILE ÎNCASTRATE ELASTIC LA EXTREMITĂȚI

Grinzile continue cu secțiunea variabilă sînt în mod obișnuit încastrate elastic la extremități.

Gradul de încastrare al extremităților variază, de la caz la caz, între cel corespunzător simplei rezemări (grad de încastrare nul) și cel corespunzător încastrării perfecte (grad de încastrare egal cu unitatea).

Stabilirea directă a momentelor plastice optime în funcție de gradul de încastrare al extremităților constituie, evident, o operație deosebit de laborioasă. Din această cauză apare necesitatea adoptării unui procedeu aproximativ de determinare a momentelor plastice optime în grinzile continue încastrate elastic la extremități, care să aibă avantajele simplității și al unei exactități suficiente în raport cu principiul redistribuției optime.

Un astfel de procedeu, prezentat într-o lucrare anterioară [6], constă în determinarea momentelor plastice optime prin interpolare liniară, în funcție de gradul de încastrare al extremităților, efectuată în raport cu cele două cazuri limită : grinda continuă simplu rezemată la extremități și grinda continuă încastrată perfect la ambele extremități.

Practic, calculul comportă următoarele operații :

— amplificarea momentelor plastice optime (M_{ps}^0) ale grinzii simplu rezemate la extremități cu factorul $(1 - \rho)$;

— amplificarea momentelor plastice optime (M_{pi}^0) ale grinzii încastrate perfect la ambele extremități cu gradul de încastrare ρ;

— determinarea momentelor plastice optime (M_p^0) ale grinzii considerate prin suprapunerea rezultatelor obținute din operațiile precedente :

$$M_p^0 = (1 - \rho) . M_{ps}^0 + \rho . M_{pi}^0 \tag{2}$$

CONCLUZII

1. În lucrare se stabilesc, pe baza principiului redistribuției optime, valorile momentelor plastice în grinzile continue de beton armat cu vute simetrice (drepte sau parabolice), avînd deschiderile egale, simplu rezemate la extremități, respectiv încastrate perfect la extremități, pentru două tipuri de sarcini.

2. Studiul cuprinde de asemenea un procedeu aproximativ de determinare a momentelor plastice optime în grinzile continue de tipul considerat, încastrate elastic la extremități.

Procedeul aproximativ propus are avantajul stabilirii momentelor plastice optime prin folosirea exclusivă a celor două cazuri limită de rezemare a extremităților, ale căror soluții sînt date în tabele.

Primită la redacție la 11 decembrie 1961

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАСТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ В НЕРАЗРЕЗНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛКАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

В работе устанавливаются, на основании принципа оптимального перераспределения, значения пластических моментов в железобетонных неразрезных балках с симметричными вутами (прямыми или параболическими), имеющих одинаковые пролеты, свободно опертых по концам, соответственно, полностью защемленных по концам, для двух типов нагрузок. Полученные результаты приведены в таблицах.

Работа содержит также приближенный способ определения оптимальных пластических моментов в неразрезных балках рассматриваемого типа, упруго защемленных по концам.

OPTIMUM PLASTIC MOMENTS IN REINFORCED CONCRETE CONTINUOUS BEAMS OF VARIABLE CROSS-SECTION

ABSTRACT

The optimum redistribution principle is used for establishing the values of the plastic moments in reinforced concrete continuous beams with symmetrical haunches and equal spans, simply supported or perfectly built-in at their ends.

The study reffers to two current schemes of loading. An approximate procedure is also given for determining the optimum plastic moments in continuous beams of the considered type, elastically built-in at their ends.

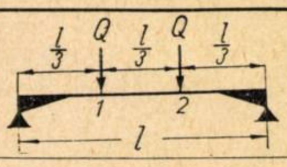
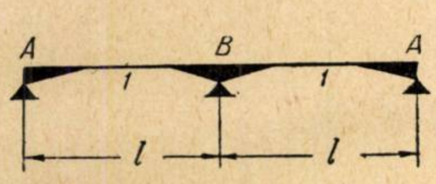
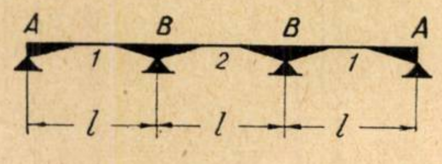
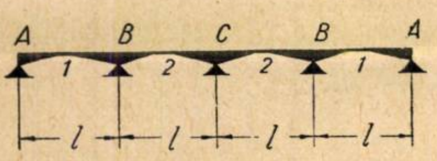
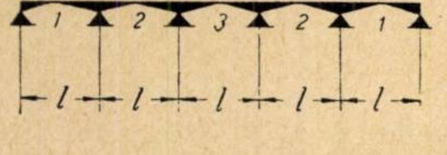
BIBLIOGRAFIE

1. R. AGENT, *Metoda aproximațiilor succesive*, vol. I, E.S.A.C., București, 1955.
2. V. PETCU, *Asupra rezolvării sistemelor de ecuații de echilibru elastic cu matrice de tip Jacobi*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, X, 3, 1959.
3. V. PETCU, *Problemele proiectării plastice a structurilor static nedeterminate de beton armat*, Revista construcţiilor și a materialelor de construcţii, XIII, 8, 1961.
4. V. PETCU, *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, XII, 5, 1961.
5. V. PETCU, *Calculul grinzilor continue de beton armat în domeniul plastic*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, XII, 6, 1961.
6. V. PETCU, *Momente de plastificare în grinzi continue de beton armat încastrate la extremități*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, XIII, 1, 1962.
7. И. И. УЛИЦКИЙ, ș. a., *Железобетонные конструкций*, Гостехиздат, УССР. Киев, 1959.

Tabela 3

GRINZI CONTINUE CU SECŢIUNEA VARIABILĂ, SIMPLU REZEMATE LA EXTREMITĂŢI

Două sarcini concentrate la treimile deschiderii

SCHEMA GRINZII	Mărimi statice	$Q = G + P$	 		$K_u = \frac{P_u}{G}$
		$\nu = 0{,}9$	$\nu = 0{,}8$	$\nu = 0{,}7$	$\nu = 0{,}6$
 	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0{,}208 + 0{,}228\,K_u)\,G.l$	$(0{,}192 + 0{,}217\,K_u)\,G.l$	$(0{,}172 + 0{,}204\,K_u)\,G.l$	$(0{,}146 + 0{,}187\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0{,}083 + 0{,}175\,K_u)\,G.l$	$(0{,}052 + 0{,}159\,K_u)\,G.l$	$(0{,}012 + 0{,}140\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}042 + 0{,}113\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0{,}375 + 0{,}317\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}422 + 0{,}348\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}482 + 0{,}390\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}562 + 0{,}440\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0{,}375 + 0{,}156\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}422 + 0{,}173\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}482 + 0{,}192\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}562 + 0{,}219\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$
	$\overset{\circ}{T}_a$	$(0{,}625 + 0{,}683\,K_u)\,G$	$(0{,}578 + 0{,}652\,K_u)\,G$	$(0{,}518 + 0{,}610\,K_u)\,G$	$(0{,}438 + 0{,}560\,K_u)G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-(1{,}375 + 1{,}317\,K_u)\,G$	$-(1{,}422 + 1{,}348\,K_u)\,G$	$-(1{,}482 + 1{,}390\,K_u)\,G$	$-(1{,}562 + 1{,}440\,K_u)G$
	$r_1 = r_b$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}84\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}82\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}80\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}78\,K_u}$
 	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0{,}235 + 0{,}260\,K_u)\,G.l$	$(0{,}226 + 0{,}255\,K_u)\,G.l$	$(0{,}214 + 0{,}250\,K_u)\,G.l$	$(0{,}201 + 0{,}244\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0{,}137 + 0{,}215\,K_u)\,G.l$	$(0{,}120 + 0{,}207\,K_u)\,G.l$	$(0{,}096 + 0{,}196\,K_u)\,G.l$	$(0{,}068 + 0{,}184\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p21}$	$(0{,}039 + 0{,}115\,K_u)\,G.l$	$(0{,}013 + 0{,}101\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}023 + 0{,}085\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}064 + 0{,}066\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0{,}294 + 0{,}218\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}320 + 0{,}233\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}356 + 0{,}248\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}397 + 0{,}266\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0{,}294 + 0{,}133\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}320 + 0{,}145\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}356 + 0{,}162\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}397 + 0{,}182\,K_u)\,G.l$
	M_{b2}	$-(0{,}294 + 0{,}090\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}320 + 0{,}094\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}356 + 0{,}098\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}397 + 0{,}098\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$
	X_{2b}	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$
	$\overset{\circ}{T}_a$	$(0{,}706 + 0{,}782\,K_u)\,G$	$(0{,}680 + 0{,}767\,K_u)\,G$	$(0{,}644 + 0{,}752\,K_u)\,G$	$(0{,}603 + 0{,}734\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-(1{,}294 + 1{,}218\,K_u)\,G$	$-(1{,}320 + 1{,}233\,K_u)\,G$	$-(1{,}356 + 1{,}248\,K_u)\,G$	$-(1{,}397 + 1{,}266\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b2}$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$
	r_1	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}91\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}91\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}91\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}91\,K_u}$
	$r_2 = r_b$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}62\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}59\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}55\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}49\,K_u}$
 A B C B A 1 2 2 1 l l l l	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0{,}222 + 0{,}256\,K_u)\,G.l$	$(0{,}202 + 0{,}246\,K_u)\,G.l$	$(0{,}171 + 0{,}232\,K_u)\,G.l$	$(0{,}118 + 0{,}212\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0{,}111 + 0{,}206\,K_u)\,G.l$	$(0{,}071 + 0{,}185\,K_u)\,G.l$	$(0{,}009 + 0{,}157\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}098 + 0{,}110\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p21}$	$(0{,}060 + 0{,}123\,K_u)\,G.l$	$(0{,}040 + 0{,}113\,K_u)\,G.l$	$(0{,}012 + 0{,}100\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}031 + 0{,}097\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p22}$	$(0{,}120 + 0{,}141\,K_u)\,G.l$	$(0{,}141 + 0{,}142\,K_u)\,G.l$	$(0{,}177 + 0{,}147\,K_u)\,G.l$	$(0{,}252 + 0{,}156\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0{,}333 + 0{,}231\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}393 + 0{,}260\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}486 + 0{,}303\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}646 + 0{,}364\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pc}$	$-(0{,}153 + 0{,}172\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}092 + 0{,}155\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}009 + 0{,}128\,K_u)\,G.l$	$-(-0{,}201 + 0{,}085\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0{,}333 + 0{,}154\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}393 + 0{,}181\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}486 + 0{,}224\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}646 + 0{,}305\,K_u)\,G.l$
	M_{b2}	$-(0{,}333 + 0{,}104\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}393 + 0{,}118\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}486 + 0{,}141\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}646 + 0{,}172\,K_u)\,G.l$
	M_{c2}	$-(0{,}153 + 0{,}047\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}092 + 0{,}027\,K_u)\,G.l$	$+(0{,}009 + 0{,}003\,K_u)\,G.l$	$+(0{,}201 + 0{,}053\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$
	X_{2b}	$0{,}67\,l$	$0{,}67\,l$	$0{,}67\,l$	$0{,}67\,l$
	$\overset{\circ}{T}_a$	$(0{,}667 + 0{,}769\,K_u)\,G$	$(0{,}607 + 0{,}740\,K_u)\,G$	$(0{,}514 + 0{,}697\,K_u)\,G$	$(0{,}354 + 0{,}636\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-(1{,}333 + 1{,}231\,K_u)\,G$	$(1{,}393 + 1{,}260\,K_u)\,G$	$-(1{,}486 + 1{,}303\,K_u)\,G$	$-(1{,}646 + 1{,}364\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b2}$	$(1{,}180 + 1{,}059\,K_u)\,G$	$(1{,}301 + 1{,}105\,K_u)\,G$	$(1{,}495 + 1{,}175\,K_u)\,G$	$(1{,}847 + 1{,}279\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{c2}$	$-(0{,}820 + 0{,}941\,K_u)\,G$	$-(0{,}699 + 0{,}895\,K_u)\,G$	$-(0{,}505 + 0{,}825\,K_u)\,G$	$-(0{,}153 + 0{,}721\,K_u)\,G$
	r_1	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}92\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}92\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}92\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}94\,K_u}$
	$r_2 = r_b = r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}62\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}60\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}58\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}53\,K_u}$
 A B C C B A 1 2 3 2 1 l l l l l	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0{,}229 + 0{,}261\,K_u)\,G.l$	$(0{,}217 + 0{,}257\,K_u)\,G.l$	$(0{,}202 + 0{,}253\,K_u)\,G.l$	$(0{,}182 + 0{,}251\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0{,}114 + 0{,}237\,K_u)\,G.l$	$(0{,}101 + 0{,}225\,K_u)\,G.l$	$(0{,}071 + 0{,}209\,K_u)\,G.l$	$(0{,}031 + 0{,}187\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p21}$	$(0{,}048 + 0{,}123\,K_u)\,G.l$	$(0{,}022 + 0{,}109\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}013 + 0{,}098\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}057 + 0{,}086\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p22}$	$(0{,}078 + 0{,}127\,K_u)\,G.l$	$(0{,}059 + 0{,}114\,K_u)\,G.l$	$(0{,}034 + 0{,}100\,K_u)\,G.l$	$(0{,}006 + 0{,}086\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p31}$	$(0{,}106 + 0{,}131\,K_u)\,G.l$	$(0{,}096 + 0{,}119\,K_u)\,G.l$	$(0{,}081 + 0{,}104\,K_u)\,G.l$	$(0{,}069 + 0{,}085\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0{,}313 + 0{,}215\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}348 + 0{,}229\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}393 + 0{,}239\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}453 + 0{,}247\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pc}$	$-(0{,}227 + 0{,}201\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}237 + 0{,}214\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}252 + 0{,}229\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}264 + 0{,}247\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0{,}313 + 0{,}146\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}348 + 0{,}161\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}393 + 0{,}185\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}453 + 0{,}220\,K_u)\,G.l$
	M_{b2}	$-(0{,}313 + 0{,}097\,K_u)G.l$	$-(0{,}348 + 0{,}100\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}393 + 0{,}106\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}453 + 0{,}115\,K_u)\,G.l$
	M_{c2}	$-(0{,}227 + 0{,}070\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}237 + 0{,}069\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}252 + 0{,}069\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}264 + 0{,}067\,K_u)\,G.l$
	M_{c3}	$-(0{,}227 + 0{,}068\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}237 + 0{,}066\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}252 + 0{,}063\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}264 + 0{,}056\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$
	X_{2b}	$0{,}67\,l$	$0{,}67\,l$	$0{,}67\,l$	$0{,}67\,l$
	X_{3c}	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$	$0{,}33\,l$
	$\overset{\circ}{T}_a$	$(0{,}687 + 0{,}785\,K_u)\,G$	$(0{,}652 + 0{,}771\,K_u)\,G$	$(0{,}607 + 0{,}761\,K_u)\,G$	$(0{,}547 + 0{,}753\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-(1{,}313 + 1{,}215\,K_u)\,G$	$-(1{,}348 + 1{,}229\,K_u)\,G$	$-(1{,}393 + 1{,}239\,K_u)\,G$	$-(1{,}453 + 1{,}247\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b2}$	$(1{,}086 + 1{,}014\,K_u)\,G$	$(1{,}111 + 1{,}015\,K_u)\,G$	$(1{,}141 + 1{,}010\,K_u)\,G$	$(1{,}189 + K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{c2}$	$-(0{,}914 + 0{,}986\,K_u)\,G$	$-(0{,}889 + 0{,}985\,K_u)\,G$	$-(0{,}859 + 0{,}990\,K_u)\,G$	$-(0{,}811 + K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{c3}$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$
	r_1	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}93\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}93\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}94\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}97\,K_u}$
	r_2	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}62\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}58\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}54\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}51\,K_u}$
	$r_3 = r_b = r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}60\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}56\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}50\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}42\,K_u}$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

Tabela 4

GRINZI CONTINUE CU SECŢIUNEA VARIABILĂ, SIMPLU REZEMATE LA EXTREMITĂŢI

Trei sarcini concentrate la sferturile deschiderii

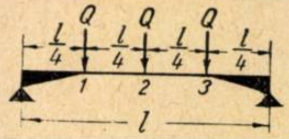
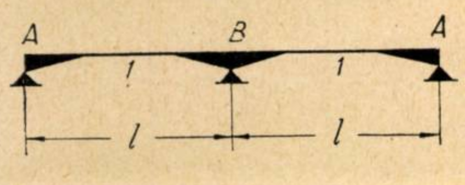
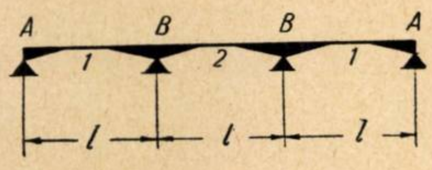
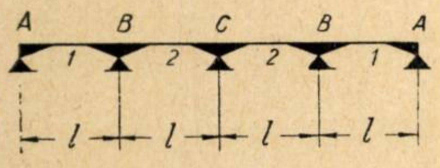
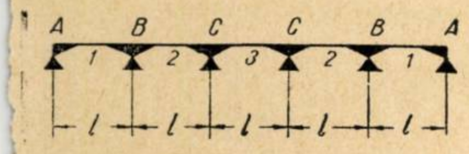
SCHEMA GRINZII	Mărimi statice	$Q = G + P$			$K_u = \frac{P_u}{G}$
		$\nu = 0,9$	$\nu = 0,8$	$\nu = 0,7$	$\nu = 0,6$
	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0,245 + 0,271 K_u) G.l$	$(0,228 + 0,262 K_u) G.l$	$(0,207 + 0,250 K_u) G.l$	$(0,179 + 0,234 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0,259 + 0,294 K_u) G.l$	$(0,207 + 0,275 K_u) G.l$	$(0,164 + 0,249 K_u) G.l$	$(0,109 + 0,219 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p13}$	$(-0,015 + 0,143 K_u) G.l$	$(-0,066 + 0,121 K_u) G.l$	$(-0,129 + 0,092 K_u) G.l$	$(-0,213 + 0,058 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0,522 + 0,415 K_u) G.l$	$-(0,587 + 0,453 K_u) G.l$	$-(0,672 + 0,502 K_u) G.l$	$-(0,783 + 0,563 K_u) G.l$
	M_{b1}	$-(0,522 + 0,205 K_u) G.l$	$-(0,587 + 0,226 K_u) G.l$	$-(0,672 + 0,251 K_u) G.l$	$-(0,783 + 0,281 K_u) G.l$
	X_{1a}	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$
	$\overset{\circ}{T}_{a}$	$(0,978 + 1,085 K_u) G$	$(0,913 + 1,047 K_u) G$	$(0,828 + 0,998 K_u) G$	$(0,717 + 0,937 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-(2,022 + 1,915 K_u) G$	$-(2,087 + 1,953 K_u) G$	$-(2,172 + 2,002 K_u) G$	$-(2,283 + 2,063 K_u) G$
	$r_1 = r_b$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,79 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,77 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,75 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,72 K_u}$
	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0,273 + 0,297 K_u) G.l$	$(0,264 + 0,292 K_u) G.l$	$(0,251 + 0,286 K_u) G.l$	$(0,237 + 0,279 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0,296 + 0,345 K_u) G.l$	$(0,278 + 0,334 K_u) G.l$	$(0,253 + 0,322 K_u) G.l$	$(0,224 + 0,308 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p13}$	$(0,069 + 0,218 K_u) G.l$	$(0,042 + 0,180 K_u) G.l$	$(0,003 + 0,162 K_u) G.l$	$(-0,039 + 0,143 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p21}$	$(-0,033 + 0,109 K_u) G.l$	$(-0,070 + 0,092 K_u) G.l$	$(-0,120 + 0,072 K_u) G.l$	$(-0,177 + 0,050 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p22}$	$(0,092 + 0,189 K_u) G.l$	$(0,055 + 0,168 K_u) G.l$	$(0,005 + 0,143 K_u) G.l$	$(-0,052 + 0,115 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0,408 + 0,311 K_u) G.l$	$-(0,445 + 0,332 K_u) G.l$	$-(0,495 + 0,357 K_u) G.l$	$-(0,552 + 0,385 K_u) G.l$
	M_{b1}	$-(0,408 + 0,176 K_u) G.l$	$-(0,445 + 0,191 K_u) G.l$	$-(0,495 + 0,213 K_u) G.l$	$-(0,552 + 0,237 K_u) G.l$
	M_{b2}	$-(0,408 + 0,130 K_u) G.l$	$-(0,445 + 0,135 K_u) G.l$	$-(0,495 + 0,139 K_u) G.l$	$-(0,552 + 0,142 K_u) G.l$
	X_{1a}	$0.5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$
	X_{2b}	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$
	$\overset{\circ}{T}_{a}$	$(1,092 + 1,189 K_u) G$	$(1,055 + 1,168 K_u) G$	$(1,005 + 1,143 K_u) G$	$(0,948 + 1,115 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-(1,908 + 1,811 K_u) G$	$-(1,945 + 1,832 K_u) G$	$-(1,995 + 1,857 K_u) G$	$-(2,052 + 1,885 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{b2}$	$1,5 (1 + K_u) G$	$1,5 (1 + K_u) G$	$1,5 (1 + K_u) G$	$1,5 (1 + K_u) G$
	r_1	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,87 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,86 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,86 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,85 K_u}$
	$r_2 = r_b$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,64 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,61 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,56 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,51 K_u}$
 A B C B A 1 2 2 1 l l l l	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0,260 + 0,293 K_u) G.l$	$(0,238 + 0,282 K_u) G.l$	$(0,206 + 0,272 K_u) G.l$	$(0,150 + 0,260 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0,269 + 0,336 K_u) G.l$	$(0,227 + 0,314 K_u) G.l$	$(0,162 + 0,293 K_u) G.l$	$(0,050 + 0,269 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p13}$	$(0,030 + 0,189 K_u) G.l$	$(-0,036 + 0,147 K_u) G.l$	$(-0,132 + 0,108 K_u) G.l$	$(-0,300 + 0,037 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p21}$	$(-0,025 + 0,112 K_u) G.l$	$(-0,068 + 0,096 K_u) G.l$	$(-0,129 + 0,070 K_u) G.l$	$(-0,230 + 0,036 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p22}$	$(0,163 + 0,213 K_u) G.l$	$(0,163 + 0,204 K_u) G.l$	$(0,168 + 0,206 K_u) G.l$	$(0,190 + 0,216 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p23}$	$(0,100 + 0,152 K_u) G.l$	$(0,142 + 0,160 K_u) G.l$	$(0,215 + 0,168 K_u) G.l$	$(0,390 + 0,180 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0,462 + 0,329 K_u) G.l$	$-(0,547 + 0,372 K_u) G.l$	$-(0,677 + 0,414 K_u) G.l$	$-(0,900 + 0,462 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pc}$	$-(0,213 + 0,245 K_u) G.l$	$-(0,128 + 0,219 K_u) G.l$	$-(-0,013 + 0,175 K_u) G.l$	$-(-0,280 + 0,107 K_u) G.l$
	M_{b1}	$-(0,462 + 0,203 K_u) G.l$	$-(0,547 + 0,236 K_u) G.l$	$-(0,677 + 0,298 K_u) G.l$	$-(0,900 + 0,437 K_u) G.l$
	M_{b2}	$-(0,462 + 0,149 K_u) G.l$	$-(0,547 + 0,170 K_u) G.l$	$-(0,677 + 0,193 K_u) G.l$	$-(0,900 + 0,221 K_u) G.l$
	M_{c2}	$-(0,213 + 0,067 K_u) G.l$	$-(0,128 + 0,040 K_u) G.l$	$+(0,013 + 0,004 K_u) G.l$	$+(0,280 + 0,068 K_u) G.l$
	X_{1a}	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$
	X_{2b}	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$
	$\overset{\circ}{T}_{a}$	$(1,038 + 1,171 K_u) G$	$(0,953 + 1,128 K_u) G$	$(0,823 + 1,086 K_u) G$	$(0,600 + 1,038 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-(1,962 + 1,829 K_u) G$	$-(2,047 + 1,872 K_u) G$	$-(2,177 + 1,914 K_u) G$	$-(2,400 + 1,962 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{b2}$	$(1,749 + 1,584 K_u) G$	$(1,919 + 1,653 K_u) G$	$(2,190 + 1,739 K_u) G$	$(2,680 + 1,855 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{c2}$	$-(1,251 + 1,416 K_u) G$	$-(1,081 + 1,347 K_u) G$	$-(0,810 + 1,261 K_u) G$	$-(0,320 + 1,145 K_u) G$
	r_1	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,87 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,86 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,88 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,97 K_u}$
	$r_2 = r_b =$ $= r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,64 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,62 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,57 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,49 K_u}$
 A B C C B A 1 2 3 2 1 l l l l l	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0,266 + 0,298 K_u) G.l$	$(0,254 + 0,293 K_u) G.l$	$(0,238 + 0,288 K_u) G.l$	$(0,218 + 0,285 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0,283 + 0,346 K_u) G.l$	$(0,258 + 0,336 K_u) G.l$	$(0,227 + 0,327 K_u) G.l$	$(0,185 + 0,319 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p13}$	$(0,048 + 0,188 K_u) G.l$	$(0,012 + 0,172 K_u) G.l$	$(-0,036 + 0,154 K_u) G.l$	$(-0,096 + 0,134 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p21}$	$(-0,031 + 0,111 K_u) G.l$	$(-0,070 + 0,094 K_u) G.l$	$(-0,124 + 0,074 K_u) G.l$	$(-0,191 + 0,051 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p22}$	$(0,125 + 0,202 K_u) G.l$	$(0,093 + 0,182 K_u) G.l$	$(0,052 + 0,161 K_u) G.l$	$(0,001 + 0,138 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p23}$	$(0,029 + 0,130 K_u) G.l$	$(0,008 + 0,117 K_u) G.l$	$(-0,026 + 0,102 K_u) G.l$	$(-0,059 + 0,087 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p31}$	$(0,060 + 0,134 K_u) G.l$	$(0,045 + 0,120 K_u) G.l$	$(0,025 + 0,110 K_u) G.l$	$(0,007 + 0,084 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p32}$	$(0,185 + 0,211 K_u) G.l$	$(0,170 + 0,192 K_u) G.l$	$(0,150 + 0,169 K_u) G.l$	$(0,132 + 0,139 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0,435 + 0,308 K_u) G.l$	$-(0,485 + 0,329 K_u) G.l$	$-(0,547 + 0,347 K_u) G.l$	$-(0,630 + 0,362 K_u) G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pc}$	$-(0,315 + 0,289 K_u) G.l$	$-(0,330 + 0,308 K_u) G.l$	$-(0,350 + 0,332 K_u) G.l$	$-(0,368 + 0,362 K_u) G.l$
	M_{b1}	$-(0,435 + 0,198 K_u) G.l$	$-(0,485 + 0,214 K_u) G.l$	$-(0,547 + 0,247 K_u) G.l$	$-(0,630 + 0,300 K_u) G.l$
	M_{b2}	$-(0,435 + 0,139 K_u) G.l$	$-(0,485 + 0,146 K_u) G.l$	$-(0,547 + 0,159 K_u) G.l$	$-(0,630 + 0,173 K_u) G.l$
	M_{c2}	$-(0,315 + 0,101 K_u) G.l$	$-(0,330 + 0,101 K_u) G.l$	$-(0,350 + 0,102 K_u) G.l$	$-(0,368 + 0,101 K_u) G.l$
	M_{c3}	$-(0,315 + 0,096 K_u) G.l$	$-(0,330 + 0,094 K_u) G.l$	$-(0,350 + 0,092 K_u) G.l$	$-(0,368 + 0,081 K_u) G.l$
	X_{1a}	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$
	X_{2b}	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$
	X_{3c}	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$	$0,5\, l$
	$\overset{\circ}{T}_{a}$	$(1,065 + 1,192 K_u) G$	$(1,015 + 1,171 K_u) G$	$(0,953 + 1,153 K_u) G$	$(0,870 + 1,138 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-(1,935 + 1,808 K_u) G$	$-(1,985 + 1,829 K_u) G$	$-(2,047 + 1,847 K_u) G$	$-(2,130 + 1,862 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{b2}$	$(1,620 + 1,519 K_u) G$	$(1,655 + 1,521 K_u) G$	$(1,697 + 1,515 K_u) G$	$(1,728 + 1,500 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{c2}$	$-(1,380 + 1,481 K_u) G$	$-(1,345 + 1,479 K_u) G$	$-(1,307 + 1,485 K_u) G$	$-(1,272 + 1,500 K_u) G$
	$\overset{\circ}{T}_{c3}$	$1,5 (1 + K_u) G$	$1,5 (1 + K_u) G$	$1,5 (1 + K_u) G$	$1,5 (1 + K_u) G$
	r_1	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,91 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,89 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,90 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,95 K_u}$
	r_2	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,64 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,61 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,58 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,55 K_u}$
	$r_3 = r_b =$ $= r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,61 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,57 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,52 K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,44 K_u}$

Tabela 5

GRINZI CONTINUE CU SECȚIUNEA VARIABILĂ, ÎNCASTRATE PERFECT LA AMBELE EXTREMITĂȚI

Două sarcini concentrate la treimile deschiderii

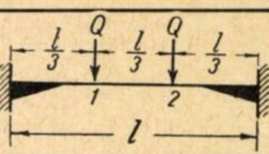
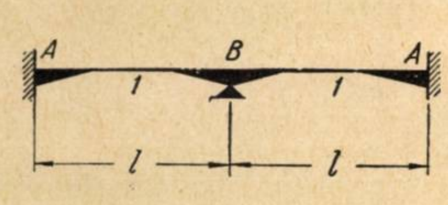
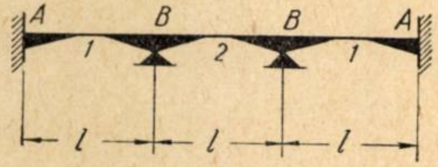
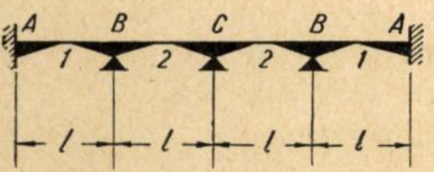
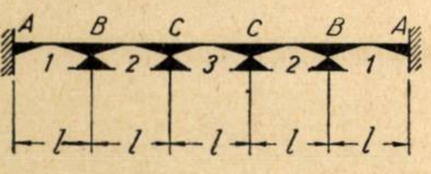
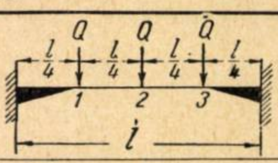
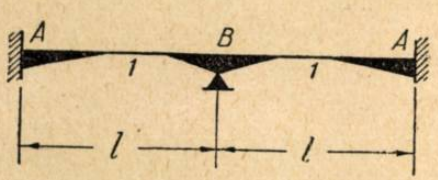
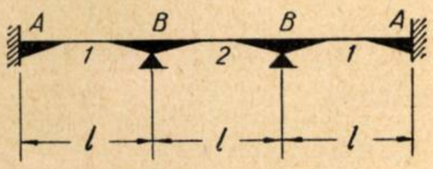
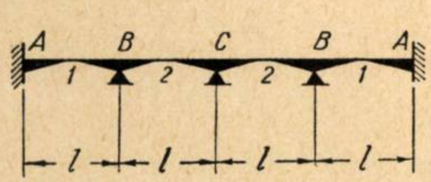
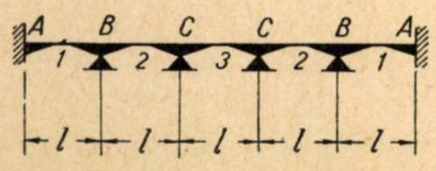
SCHEMA GRINZII	Mărimi statice	$Q = G + P$	 $\frac{l}{3}$ Q $\frac{l}{3}$ Q $\frac{l}{3}$ 1 2 l		$K_u = \frac{P_u}{G}$
		$\nu = 0,9$	$\nu = 0,8$	$\nu = 0,7$	$\nu = 0,6$
	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0,092 + 0,102\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,083\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,062\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,031\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0,092 + 0,121\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,106\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,088\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,065\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pa}$	$-(0,241 + 0,249\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,271\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,297\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,335\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0,241 + 0,195\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,206\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,220\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,236\,K_u)\,G.l$
	M_{a1}	$-(0,241 + 0,249\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,271\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,297\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,335\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0,241 + 0,098\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,104\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,110\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,118\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$
	$\overset{\circ}{T}_a$	$(1 + 1,054\,K_u)\,G$	$(1 + 1,065\,K_u)\,G$	$(1 + 1,077\,K_u)\,G$	$(1 + 1,099\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-\ (1 + 0,946\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,935\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,923\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,901\,K_u)\,G$
	$r_1 = r_a = r_b$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,81\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,80\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,78\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,77\,K_u}$
	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0,092 + 0,108\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,093\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,073\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,048\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0,092 + 0,123\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,109\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,095\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,077\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p21}$	$(0,092 + 0,136\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,125\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,116\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,104\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pa}$	$-(0,241 + 0,239\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,257\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,282\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,313\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0,241 + 0,197\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,208\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,217\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,229\,K_u)\,G.l$
	M_{a1}	$-(0,241 + 0,239\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,257\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,282\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,313\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0,241 + 0,054\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,048\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,040\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,026\,K_u)\,G.l$
	M_{b2}	$-(0,241 + 0,134\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,208\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,217\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,229\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$
	X_{2b}	$0,33\,l$	$0,33\,l$	$0,33\,l$	$0,33\,l$
	$\overset{\circ}{T}_a$	$(1 + 1,042\,K_u)\,G$	$(1 + 1,049\,K_u)\,G$	$(1 + 1,065\,K_u)\,G$	$(1 + 1,084\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-\ (1 + 0,958\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,951\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,935\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,916\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b2}$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$
	$r_1 = r_a = r_b$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,72\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,68\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,64\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,60\,K_u}$
	r_2	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,81\,K_u}$	—	—	—
 A B C B A 1 2 2 1 l l l l	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0,092 + 0,115\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,095\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,077\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,055\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0,092 + 0,125\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,110\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,096\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,080\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p21}$	$(0,092 + 0,133\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,121\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,111\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,106\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p22}$	$(0,092 + 0,130\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,117\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,110\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,107\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pa}$	$-(0,241 + 0,230\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,252\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,274\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,301\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0,241 + 0,196\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,209\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,220\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,230\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pc}$	$-(0,241 + 0,207\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,220\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,225\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,223\,K_u)\,G.l$
	M_{a1}	$-(0,241 + 0,230\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,252\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,274\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,301\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0,241 + 0,042\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,031\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,014\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 - 0,013\,K_u)\,G.l$
	M_{b2}	$-(0,241 + 0,121\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,139\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,187\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,230\,K_u)\,G.l$
	M_{c2}	$-(0,241 + 0,081\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,086\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,101\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,133\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$
	X_{2b}	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$
	$\overset{\circ}{T}_a$	$(1 + 1,034\,K_u)\,G$	$(1 + 1,043\,K_u)\,G$	$(1 + 1,054\,K_u)\,G$	$(1 + 1,071\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-\ (1 + 0,966\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,957\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,946\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,929\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b2}$	$(1 + 0,989\,K_u)\,G$	$(1 + 0,989\,K_u)\,G$	$(1 + 0,995\,K_u)\,G$	$(1 + 1,007\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{c2}$	$-\ (1 + 1,011\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 1,011\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 1,005\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,993\,K_u)\,G$
	$r_1^{*)} = r_a = r_b = r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,67\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,64\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,59\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,52\,K_u}$
*) Pentru cazul $\nu = 0,9$ se vor schimba coeficienții r_1 și r_2 între ei.	$r_2\ ^{*)}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,70\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,66\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,72\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,88\,K_u}$
 A B C C B A 1 2 3 2 1 l l l l l	$\overset{\circ}{M}_{p11}$	$(0,092 + 0,120\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,124\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,079\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,059\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p12}$	$(0,092 + 0,131\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,126\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,095\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,081\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p21}$	$(0,092 + 0,136\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,122\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,108\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,105\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p22}$	$(0,092 + 0,131\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,117\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,105\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,107\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{p31}$	$(0,092 + 0,126\,K_u)\,G.l$	$(0,074 + 0,112\,K_u)\,G.l$	$(0,052 + 0,101\,K_u)\,G.l$	$(0,025 + 0,110\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pa}$	$-(0,241 + 0,223\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,211\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,271\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,295\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pb}$	$-(0,241 + 0,192\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,206\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,221\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,231\,K_u)\,G.l$
	$\overset{\circ}{M}_{pc}$	$-(0,241 + 0,207\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,221\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,232\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,223\,K_u)\,G.l$
	M_{a1}	$-(0,241 + 0,223\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,211\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,271\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,295\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0,241 + 0,039\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,027\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,005\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 - 0,032\,K_u)\,G.l$
	M_{b2}	$-(0,241 + 0,121\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,140\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,166\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,231\,K_u)\,G.l$
	M_{c2}	$-(0,241 + 0,067\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,068\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,064\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,062\,K_u)\,G.l$
	M_{c3}	$-(0,241 + 0,090\,K_u)\,G.l$	$-(0,259 + 0,093\,K_u)\,G.l$	$-(0,281 + 0,112\,K_u)\,G.l$	$-(0,308 + 0,217\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$
	X_{2b}	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$	$0,67\,l$
	X_{3c}	$0,33\,l$	$0,33\,l$	$0,33\,l$	$0,33\,l$
	$\overset{\circ}{T}_a$	$(1 + 1,031\,K_u)\,G$	$(1 + 1,005\,K_u)\,G$	$(1 + 1,050\,K_u)\,G$	$(1 + 1,064\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b1}$	$-\ (1 + 0,969\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,995\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,950\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,936\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{b2}$	$(1 + 0,985\,K_u)\,G$	$(1 + 0,985\,K_u)\,G$	$(1 + 0,989\,K_u)\,G$	$(1 + 1,008\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{c2}$	$-\ (1 + 1,015\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 1,015\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 1,011\,K_u)\,G$	$-\ (1 + 0,992\,K_u)\,G$
	$\overset{\circ}{T}_{c3}$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$	$(1 + K_u)\,G$
	$r_1\ ^{*)}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,72\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,72\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,64\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,98\,K_u}$
	r_2	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,65\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,63\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,61\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,72\,K_u}$
*) Pentru cazurile $\nu = 0,7$ și $\nu = 0,6$ se vor schimba coeficienții r_1 și r_3 între ei.	$r_3^{*)} = r_a = r_b = r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,65\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,62\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,57\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0,47\,K_u}$

Tabela 6

GRINZI CONTINUE CU SECȚIUNEA VARIABILĂ, ÎNCASTRATE PERFECT LA AMBELE EXTREMITĂȚI

Trei sarcini concentrate la sferturile deschiderii

SCHEMA GRINZII	Mărimi statice	$Q = G + P$			$K_u = \frac{P_u}{G}$
		$\nu = 0{,}9$	$\nu = 0{,}8$	$\nu = 0{,}7$	$\nu = 0{,}6$
	M°_{p11}	$(0{,}040 + 0{,}028\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$
	M°_{p12}	$(0{,}165 + 0{,}173\,K_u)\,G.l$	$(0{,}139 + 0{,}147\,K_u)\,G.l$	$(0{,}109 + 0{,}115\,K_u)\,G.l$	$(0{,}072 + 0{,}074\,K_u)\,G.l$
	M°_{p13}	$(0{,}040 + 0{,}121\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}104\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}082\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}053\,K_u)\,G.l$
	M°_{pa}	$-(0{,}335 + 0{,}367\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}402\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}443\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}498\,K_u)\,G.l$
	M°_{pb}	$-(0{,}335 + 0{,}287\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}306\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}329\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}353\,K_u)\,G.l$
	M_{a1}	$-(0{,}335 + 0{,}367\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}402\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}443\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}498\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0{,}335 + 0{,}145\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}153\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}164\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}175\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$
	T°_{a}	$(1{,}500 + 1{,}580\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}596\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}614\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}645\,K_u)\,G$
	T°_{b1}	$-(1{,}500 + 1{,}420\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}404\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}386\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}355\,K_u)\,G$
	$r_1 = r_b = r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}86\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}85\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}84\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}82\,K_u}$
	M°_{p11}	$(0{,}040 + 0{,}037\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}000\,K)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$
	M°_{p12}	$(0{,}165 + 0{,}177\,K_u)\,G.l$	$(0{,}139 + 0{,}141\,K)\,G.l$	$(0{,}109 + 0{,}110\,K_u)\,G.l$	$(0{,}072 + 0{,}070\,K_u)\,G.l$
	M°_{p13}	$(0{,}040 + 0{,}149\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}128\,K)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}114\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}100\,K_u)\,G.l$
	M°_{p21}	$(0{,}040 + 0{,}111\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}084\,K)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}051\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}013\,K_u)\,G.l$
	M°_{p22}	$(0{,}165 + 0{,}207\,K_u)\,G.l$	$(0{,}139 + 0{,}179\,K)\,G.l$	$(0{,}109 + 0{,}160\,K_u)\,G.l$	$(0{,}072 + 0{,}138\,K_u)\,G.l$
	M°_{pa}	$-(0{,}335 + 0{,}353\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}397\,K)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}440\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}500\,K_u)\,G.l$
	M°_{pb}	$-(0{,}335 + 0{,}293\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}321\,K)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}340\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}362\,K_u)\,G.l$
	M_{a1}	$-(0{,}335 + 0{,}353\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}397\,K)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}440\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}500\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0{,}335 + 0{,}128\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}080\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}062\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}041\,K_u)\,G.l$
	M_{b2}	$-(0{,}335 + 0{,}174\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}200\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}249\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}362\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$
	X_{2b}	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$
	T°_{a}	$(1{,}500 + 1{,}560\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}576\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}600\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}638\,K_u)\,G$
	T°_{b1}	$-(1{,}500 + 1{,}440\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}424\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}400\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}362\,K_u)\,G$
	T°_{r2}	$1{,}5\,(1 + K_u)\,G$	$(1{,}51 + K_u)\,G$	$1{,}5\,(1 + K_u)\,G$	$1{,}5\,(1 + K_u)\,G$
	r_1 *)	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}82\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}75\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}82\,K_u}$	—
*) Pentru cazurile $\nu = 0{,}7$ și $\nu = 0{,}6$ se vor schimba coeficienții r_1 și r_2 între ei.	r_2*) $= r_a = r_b = r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}76\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}75\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}72\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}68\,K_u}$
 A B C B A 1 2 2 1 l l l l	M°_{p11}	$(0{,}040 + 0{,}053\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}016\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$
	M°_{p12}	$(0{,}165 + 0{,}190\,K_u)\,G.l$	$(0{,}139 + 0{,}157\,K_u)\,G.l$	$(0{,}109 + 0{,}111\,K_u)\,G.l$	$(0{,}072 + 0{,}066\,K_u)\,G.l$
	M°_{p13}	$(0{,}040 + 0{,}166\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}152\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}130\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}118\,K_u)\,G.l$
	M°_{p21}	$(0{,}040 + 0{,}103\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}076\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}037\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}002\,K_u)\,G.l$
	M°_{p22}	$(0{,}165 + 0{,}205\,K_u)\,G.l$	$(0{,}139 + 0{,}181\,K_u)\,G.l$	$(0{,}109 + 0{,}149\,K_u)\,G.l$	$(0{,}072 + 0{,}131\,K_u)\,G.l$
	M°_{p23}	$(0{,}040 + 0{,}131\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}115\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}076\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}082\,K_u)\,G.l$
	M°_{pa}	$-(0{,}335 + 0{,}334\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}375\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}430\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}462\,K_u)\,G.l$
	M°_{pb}	$-(0{,}335 + 0{,}287\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}311\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}348\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}375\,K_u)\,G.l$
	M°_{pc}	$-(0{,}335 + 0{,}303\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}326\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}354\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}363\,K_u)\,G.l$
	M_{a1}	$-(0{,}335 + 0{,}334\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}375\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}430\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}462\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0{,}335 + 0{,}070\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}055\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}023\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 - 0{,}020\,K_u)\,G.l$
	M_{b2}	$-(0{,}335 + 0{,}178\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}202\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}241\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}369\,K_u)\,G.l$
	M_{c2}	$-(0{,}335 + 0{,}120\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}124\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}131\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}168\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$
	X_{2b}	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$
	T°_{a}	$(1{,}500 + 1{,}547\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}564\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}582\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}587\,K_u)\,G$
	T°_{b1}	$-(1{,}500 + 1{,}453\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}436\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}418\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}413\,K_u)\,G$
	T°_{b2}	$(1{,}500 + 1{,}484\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}485\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}494\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}512\,K_u)\,G$
	T°_{c2}	$-(1{,}500 + 1{,}516\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}515\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}506\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}488\,K_u)\,G$
	r_1 *)	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}85\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}81\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}69\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}80\,K_u}$
*) Pentru cazul ν=0,6 se vor schimba coeficienții r_1 și r_2 între ei.	r_2*) $= r_a = r_b = r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}71\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}69\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}67\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}60\,K_u}$
 A B C C B A 1 2 3 2 1 l l l l l	M°_{p11}	$(0{,}040 + 0{,}065\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}041\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$
	M°_{p12}	$(0{,}165 + 0{,}202\,K_u)\,G.l$	$(0{,}139 + 0{,}178\,K_u)\,G.l$	$(0{,}109 + 0{,}134\,K_u)\,G.l$	$(0{,}072 + 0{,}065\,K_u)\,G\,l$
	M°_{p13}	$(0{,}040 + 0{,}180\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}177\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}153\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}129\,K_u)\,G.l$
	M°_{p21}	$(0{,}040 + 0{,}104\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}077\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}041\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}000\,K_u)\,G.l$
	M°_{p22}	$(0{,}165 + 0{,}215\,K_u)\,G.l$	$(0{,}139 + 0{,}193\,K_u)\,G.l$	$(0{,}109 + 0{,}163\,K_u)\,G.l$	$(0{,}072 + 0{,}123\,K_u)\,G.l$
	M°_{p23}	$(0{,}040 + 0{,}146\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}134\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}118\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}037\,K_u)\,G.l$
	M°_{p31}	$(0{,}040 + 0{,}123\,K_u)\,G.l$	$(0{,}014 + 0{,}103\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}016 + 0{,}080\,K_u)\,G.l$	$(-0{,}053 + 0{,}044\,K_u)\,G.l$
	M°_{p32}	$(0{,}165 + 0{,}205\,K_u)\,G.l$	$(0{,}139 + 0{,}183\,K_u)\,G.l$	$(0{,}109 + 0{,}155\,K_u)\,G.l$	$(0{,}072 + 0{,}127\,K_u)\,G.l$
	M°_{pa}	$-(0{,}335 + 0{,}322\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}347\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}403\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}488\,K_u)\,G.l$
	M°_{pb}	$-(0{,}335 + 0{,}275\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}297\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}330\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}382\,K_u)\,G.l$
	M°_{pc}	$-(0{,}335 + 0{,}295\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}317\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}345\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}373\,K_u)\,G.l$
	M_{a1}	$-(0{,}335 + 0{,}322\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}347\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}403\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}488\,K_u)\,G.l$
	M_{b1}	$-(0{,}335 + 0{,}068\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}047\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}009\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 - 0{,}055\,K_u)\,G.l$
	M_{b2}	$-(0{,}335 + 0{,}186\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}221\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}262\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}363\,K_u)\,G.l$
	M_{c2}	$-(0{,}335 + 0{,}103\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}108\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}101\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}083\,K_u)\,G.l$
	M_{3c}	$-(0{,}335 + 0{,}128\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}361 + 0{,}132\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}391 + 0{,}149\,K_u)\,G.l$	$-(0{,}428 + 0{,}203\,K_u)\,G.l$
	X_{1a}	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$
	X_{2b}	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$
	X_{3c}	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$	$0{,}5\,l$
	T°_{a}	$(1{,}500 + 1{,}547\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}550\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}573\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}606\,K_u)\,G$
	T°_{b1}	$-(1{,}500 + 1{,}453\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}450\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}427\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}394\,K_u)\,G$
	T°_{b2}	$(1{,}500 + 1{,}480\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}480\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}485\,K_u)\,G$	$(1{,}500 + 1{,}509\,K_u)\,G$
	T°_{c2}	$-(1{,}500 + 1{,}520\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}520\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}515\,K_u)\,G$	$-(1{,}500 + 1{,}491\,K_u)\,G$
	T°_{c3}	$1{,}5\,(1 + K_u)\,G$	$1{,}5\,(1 + K_u)\,G$	$1{,}5\,(1 + K_u)\,G$	$1{,}5\,(1 + K_u)\,G$
	r_1 *)	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}91\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}90\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}83\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}66\,K_u}$
	r_2	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}72\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}72\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}69\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}69\,K_u}$
*) Pentru cazul $\nu = 0{,}6$ se vor schimba coeficienții r_1 și r_3 între ei.	r_3*) $= r_a = r_b = r_c$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}67\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}63\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}61\,K_u}$	$\frac{1 + K_u}{1 + 0{,}56\,K_u}$

ERATĂ

Pag	rîndul sau formula	în loc de :	se va citi :	din vina :
332	(6)	$\dot{\alpha}$	$\dot{\eta}$	autorului
337	9 de jos	$F_A = 8,15$	$F_A = 8,15\ S_A$	,,
342	11 ,, ,,	$\ldots = 6,75\,\beta$	$\ldots = 67.5\,\beta$	,,
456	(15) şi (16)	M	M_0	,,
461	11 şi 12	P_{-x} şi x sau $p - px$ şi px	$P - X$ şi X sau $p - p_x$ şi p_x	,,
511	5 de jos	Δ	∇	editurii
523	19	$\ldots = e^{-\mu} \ldots$	$\ldots = e^{-x} \ldots$	,,

2437. — Studii şi cercetări de mecanică aplicată 2/1962

c. 2437

STUDII

ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENȚA MATERIALELOR

ASUPRA ECUAȚIILOR NELINIARE DE MIȘCARE ALE UNUI MEDIU CONTINUU DEFORMABIL

DE

V. MANEA

1. INTRODUCERE

În cadrul acestui articol ne-am propus să prezentăm ecuațiile de mișcare ale unui mediu continuu deformabil oarecare, sub o nouă formă, convenabilă pentru abordarea studiului unui mare număr de probleme cu caracter neliniar din mecanica corpurilor deformabile.

Am avut în vedere în mod deosebit neliniaritatea geometrică care intervine la scrierea ecuațiilor de echilibru, neliniaritate pusă în evidență în mod clar în cazul teoriei neliniare a elasticității, pentru care se poate cita cunoscuta lucrare a lui V. V. Novojilov [1].

Pentru celelalte chestiuni ce vor interveni în cuprinsul acestui articol, în special pentru cele referitoare la geometria deformației, putem cita printre altele [2] și [3]. De asemenea sînt indicate a fi menționate, ca avînd legătură cu conținutul prezentului articol, articolele [4] și [5], bibliografia ultimului fiind demnă de reținut.

2. VITEZELE DE DEFORMAȚIE A UNUI MEDIU CONTINUU DEFORMABIL OARECARE

Vom considera o porțiune limită a unui mediu continuu deformabil oarecare, care la momentul t are volumul V delimitat de suprafața S, iar la momentul t' volumul V′ și suprafața S', rezultate prin deformare continuă din V respectiv S. În cazul cînd t și t' definesc două momente de timp separate printr-un interval mare de timp, avem de-a face cu așa-zisele deformații finite [2] și [3]. Noi vom considera un interval mic de timp Δt astfel încît

$$t' = t + \Delta t. \tag{1}$$

Astfel, un punct P, de coordonate $\varkappa_i$ într-un spațiu euclidian tridimensional rectiliniu și ortogonal, va deveni P', de coordonate

$$\xi_i = x_i + v_i \, \Delta t \tag{2}$$

unde prin v_i am notat componentele vectorului viteză.

Componentele tensorului viteză de deformație și de rotație vor fi

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$

respectiv

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{4}$$

Punctul pus deasupra va indica operația de derivare în raport cu timpul.

Un element liniar dx_i paralel cu axa Ox_i la momentul t, va avea la momentul $t + \Delta t$ componentele

$$d\xi_i = \left(\delta_{ji'} + \frac{\partial v_j}{\partial x_{i'}} \Delta t\right) dx_{i'} \tag{5}$$

(semnul $'$ la un indice arată că operația de sumare nu are loc). Lungimea totală a acestui element în aproximația liniară în raport cu Δt va fi

$$ds_i = (1 + \dot{e}_{i'i'} \Delta t) \, dx_i . \tag{6}$$

Proiecțiile vectorilor unitari $\bar{\tau}'_i$ orientați după direcțiile tangentelor la liniile de coordonate $O\widetilde{x}_i$ (care se obțin prin deformarea liniilor de coordonate Ox_i la momentul t) sînt

$$\bar{\tau}'_{ij} = \frac{\delta_{ji} + \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} \Delta t}{1 + \dot{e}_{i'i'} \Delta t} \cong \delta_{ji} (1 - \dot{e}_{i'i'} \Delta t) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Delta t. \tag{7}$$

Printr-un calcul simplu putem obține componentele vectorului viteză de deformație a elementului de suprafață. Notînd cu dS'_i elementul de suprafață la momentul $t + \Delta t$ obținut prin deformarea elementului de suprafață dS_i, vom avea

$$dS'_i = ds_j \, ds_k \sin \, (\bar{\tau}'_j , \bar{\tau}'_k) \ , \ i \neq j \neq k. \tag{8}$$

Ținînd seamă de (6) putem scrie încă

$$dS'_i = (1 + \dot{e}_{j'j'} \Delta t) \, (1 + \dot{e}_{k'k'} \Delta t) \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 (\bar{\tau}'_j , \bar{\tau}'_k)\right) \tag{8'}$$

sau, deoarece

$$\cos \, (\bar{\tau}'_j , \bar{\tau}'_k) = \frac{dS_i}{ds_j \, ds_k} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) \Delta t = \frac{dS_i}{ds_j \, ds_k} \dot{e}_{jk} \Delta t$$

adică proporțional cu Δt, urmează că în cadrul aproximației liniare vom avea

$$dS_i' = [1 + (\dot{e}_{j'j'} + \dot{e}_{k'k'})\,\Delta t]\,dS_i \tag{8''}$$

de unde rezultă

$$\frac{dS_i'}{dS_i} = 1 + \dot{\alpha}_{i'}\,\Delta t \tag{9}$$

$\dot{\alpha}_i'$ reprezentînd componentele vectorului viteză de deformare superficială.

În mod analog se obține pentru viteza de deformație a elementului de volum

$$dV' = (1 + \dot{e}_{ii}\,\Delta t)\,dV = (1 + \dot{k}\,\Delta t)\,dV = D dV \tag{10}$$

$\dot{k}$ reprezentînd viteza de deformare volumetrică, iar D determinantul transformării (2) scrisă sub formă diferențială.

Rezolvînd sistemul de ecuații (2) scris sub forma diferențială

$$d\xi_j = \left(\delta_{ji} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,\Delta t\right) dx_i \tag{11}$$

în raport cu dx_i, obținem

$$dx_i = \frac{1}{D}\,\gamma_{ij}\,d\xi_j \tag{12}$$

unde γ_{ij} reprezintă minorii corespunzătorii elementelor lui D. Pentru vectorii unitari normali la elementul de suprafață dS_i' vom avea componentele

$$n_{i_j} = \frac{\gamma_{ij}}{1 + \dot{\alpha}_{i'}\,\Delta t}. \tag{13}$$

3. VARIAȚIA TENSIUNILOR ÎNTR-UN MEDIU CONTINUU DEFORMABIL

Vom nota tensorul tensiunilor la momentul t în punctul $P(x_i)$ cu

$$T_x = \bar{\sigma}_{x_i}\,\bar{\tau}_i \tag{14}$$

unde $\bar{\tau}_i$ sînt vectorii unitari ai sistemului de referință $Ox_1\,x_2\,x_3$, iar

$$\bar{\sigma}_{x_i} = \sigma_{x_i x_k}\,\bar{\tau}_k \tag{15}$$

vectorul tensiune ce acționează asupra elementului dS_i la momentul t. La momentul $t + \Delta t$ tensorul T_x va deveni

$$T_x' = \bar{\sigma}_{x_i}'\,\bar{\tau}_i' \tag{16}$$

unde

$$\bar{\sigma}_{x_i}' = \sigma_{x_i x_k}'\,\bar{\tau}_k'. \tag{17}$$

În același moment, în punctul $P'(\xi_i)$, tensorul ortogonal afin al tensiunilor, analog cu (14), va fi

$$T_\xi = \bar{\sigma}_{\xi_i} \bar{\tau}_i . \tag{18}$$

Ținînd seamă de (7) putem scrie

$$\bar{\tau}_i' = \tau_{ij}' \bar{\tau}_j = \bar{\tau}_i + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \bar{\tau}_j - \dot{e}_{i'i'} \bar{\tau}_i \right) \Delta t = \bar{\tau}_i + \dot{\bar{\tau}}_i' \Delta t \tag{19}$$

care împreună cu

$$\sigma_{x_i x_k}' = \sigma_{x_i x_k} + \dot{\sigma}_{x_i x_k} \Delta t \tag{20}$$

ne permit să scriem (17) sub forma

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{x_i}' &= (\sigma_{x_i x_k} + \dot{}_{x_i x_k} \Delta t) \left[\bar{\tau}_k + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \bar{\tau}_j - \dot{e}_{k''k'} \right) \Delta t \right] = \\ &\cong \bar{\sigma}_{x_i} + \left(\dot{\bar{\sigma}}_{x_i} + \sigma_{x_i x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \bar{\tau}_k - \dot{e}_{k'k'} \sigma_{x_i x_k} \bar{\tau}_k \right) \Delta t = \bar{\sigma}_{x_i} + (\dot{\bar{\sigma}}_{x_i} + \sigma_{x_i x_k} \bar{\tau}_k') \Delta t . \end{aligned} \tag{21}$$

4. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

La momentul t ecuația de echilibru al forțelor ce acționează asupra particulelor cuprinse într-un element infinitesimal de volum plasat în punctul $P(x_i)$ va avea forma

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{x_i}}{\partial x_i} + \rho(t) \left[\bar{F}(x_i, t) - \frac{d\bar{V}(x_i t)}{dt} \right] = 0 \tag{22}$$

unde $\bar{F} = F_k \bar{\tau}_k$, $\bar{V} = v_k \bar{\tau}_k$.

La momentul $t + \Delta t$ ecuația de echilibru al forțelor aplicate asupra particulelor cuprinse în același element de volum, plasat în punctul $P'(\xi_k)$, va avea forma

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{\xi_k}}{\partial \xi_k} + \rho(t + \Delta t) \left[\bar{F}(\xi_k, t + \Delta t) - \frac{d\bar{V}(\xi_k, t + \Delta t)}{dt} \right] = 0. \tag{23}$$

Din ecuația de echilibru al momentului forțelor, la momentul *t* și *t* + Δ*t*, rezultă

$$\tau_{x_i x_k} = \tau_{x_k x_i} \tag{24}$$

respectiv

$$\tau_{\xi_i \xi_k} = \tau_{\xi_k \xi_i} . \tag{25}$$

Ecuația (23) poate fi exprimată în funcție de coordonatele x_i, obținîndu-se o ecuație analoagă cu cea pentru teoria elasticității (1).

Ţinînd seamă de faptul că

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\gamma_{ik}}{D} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{26}$$

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_i} = 0 \tag{27}$$

$$\rho\,(t + \Delta t).\ D = \rho\,(t) \tag{28}$$

$$\bar{\sigma}'_{x_i} = \frac{\gamma_{ik}}{1 + \dot{\alpha}_{i'}\,\Delta t}\,\bar{\sigma}_{\xi_k} \tag{29}$$

rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,[(1 + \dot{\alpha}_{i'}\,\Delta t)\,\bar{\sigma}'_{x_i}] + \rho\,(t)\left[\bar{F}\,(\xi_i\,, t + \Delta t) - \frac{d\bar{V}\,(\xi_i\,, t + \Delta t)}{dt}\right] = 0. \tag{30}$$

Înlocuind $\bar{\sigma}'_{x_i}$ conform cu (21), iar

$$\bar{F}\,(\xi_i\,, t + \Delta t) = \bar{F}\,(x_i\,, t) + \frac{d\bar{F}}{dt}\,\Delta t \tag{31}$$

$$\frac{d\bar{V}\,(\xi_i\,, t + \Delta t)}{dt} = \frac{d\bar{V}\,(x_i\,, t)}{dt} + \frac{d^2\,\bar{V}\,(x_i\,, t)}{dt^2}\,\Delta t \tag{32}$$

şi ţinînd seama de (22), obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,[\dot{\bar{\sigma}}_{x_i} + \dot{\alpha}_{i'}\,\bar{\sigma}_{x_i} + \sigma_{x_i x_k}\dot{\bar{\tau}}'_k] + \rho\,(t)\left[\dot{\bar{F}}\,(x_i\,, t) - \frac{d^2\,\bar{V}\,(x_i\,, t)}{dt^2}\right] = 0. \tag{33}$$

Dacă considerăm că ecuaţia (22) descrie mişcarea la momentul t, atunci după acest moment mişcarea va fi descrisă de (33), prima servind drept condiţie iniţială celei de a doua.

Asupra condiţiilor la limită nu am insistat, deoarece acestea sînt diferite de la caz la caz în funcţie de natura fizică a problemei.

Deoarece coordonatele x_i le presupunem în general funcţii de timp, urmează că derivatele în raport cu timpul, ce au intervenit anterior în calcule, sînt luate în sensul derivatei substanţiale

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \tag{34}$$

unde $\Delta = \bar{\tau}_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

Ca urmare, ţinînd seamă că

$$\rho\,(t) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{V}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\rho\,(t)\frac{d\bar{V}}{dt}\right) + \nabla\,\bar{V} . \rho\,(t)\,\frac{d\bar{V}}{dt}$$

$$\rho\,(t)\,\frac{d\bar{F}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(\rho\,(t)\,\bar{F}) + \nabla\,\bar{V} .\ \rho\,(t)\,\bar{F} \tag{35}$$

$$\frac{\partial \dot{\bar{\sigma}}_{x_i}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{\sigma}_{x_i}}{dx_i}\right) + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial \bar{\sigma}_{x_i}}{\partial x_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{\sigma}_{x_i}}{dx_i}\right) + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_i}\,\nabla\right)\bar{\sigma}_{x_i}$$

ecuația (33) se poate scrie încă sub forma

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d\bar{\sigma}_{x_i}}{dx_i}+\rho\,(t)\left(\overline{F}-\frac{d\overline{V}}{dt}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\dot{\alpha}_{i'}\,\bar{\sigma}_{x_i}+\sigma_{x_i x_k}\,\dot{\bar{\tau}}'_k\right)+\left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial x_i}\,\nabla\right)\bar{\sigma}_{x_i}+$$
$$+\nabla\overline{V}.\ \rho\,(t)\left(\overline{F}-\frac{d\overline{V}}{dt}\right)=0 \tag{36}$$

în care apare sub semnul $\frac{d}{dt}$ chiar ecuația (22).

Dacă vrem să studiem mișcarea într-un punct $P(x_i)$, vom menține coordonatele x_i fixe, astfel că putem integra ecuația (36) în raport cu timpul. Presupunînd că la momentul t_0 a fost satisfăcută ecuația (22), pentru $t > t_0$ vom avea

$$\frac{d\bar{\sigma}_{x_i}}{dx_i}+\rho\,(t)\left(\overline{F}-\frac{d\overline{V}}{dt}\right)+\int_{t_0}^{t}\overline{M}\,(x_i,t)\,dt=0 \tag{37}$$

unde am notat

$$\overline{M}\,(x_i,t)=\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\dot{\alpha}_i\,\bar{\sigma}_{x_i}+\sigma_{x_i x_k}\,\bar{\tau}'_k)+\left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial x_i}\,\nabla\right)\bar{\sigma}_{x_i}+\nabla\overline{V}.\ \rho\,(t)\left(\overline{F}-\frac{d\overline{V}}{dt}\right)\cdot \tag{38}$$

Se observă că vectorul $\overline{M}$ este compus dintr-o sumă de termeni neliniari, a căror neglijare ne conduce la ecuația (22), ce trebuie satisfăcută pentru orice t. Acest caz corespunde teoriei geometric liniare a mișcării mediului continuu.

Se pot face o serie de simplificări în expresia vectorului $\overline{M}$ în funcție de natura fizică a mediului respectiv. Astfel pentru medii incompresibile $\nabla\overline{V}=0$, iar pentru cele relativ tari (elastice), la care deplasările au loc în jurul poziției din starea nedeformată, se poate înlocui $\frac{d}{dt}$ cu $\frac{\partial}{\partial t}$, ceea ce echivalează cu rezolvarea problemei în funcție de coordonatele inițiale x_i, care nu depind de timp.

Utilizarea ecuației neliniare (37) se impune în mod deosebit pentru studiul stabilității mișcării mediilor continuu deformabile, caracterizate de un comportament reologic oarecare (elastic, vîscos etc.).

5. APLICAȚIE

Vom face o aplicație pentru bara elastică de secțiune constantă, pornind de la ecuația (37) scrisă sub forma

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_i}-\rho\,\frac{\partial v_k}{\partial t}+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\dot{\alpha}_{i'}\,\sigma_{ik}+\sigma_{ij}\,\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\dot{e}_{k'k'}\,\sigma_{ik}\right)\right]dt=0 \tag{39}$$

în care indicii iau valorile 1 şi 2 corespunzători mişcării plane. Dînd aceste valori indicilor care intervin în (39) vom avea

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}-\rho\frac{\partial v_1}{\partial t^2}+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\dot{\alpha}_1\sigma_{11}+\sigma_{21}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\dot{\alpha}_2\sigma_{21}+\sigma_{22}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\right]dt=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}-\rho\frac{\partial v_2}{\partial t^2}+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\dot{\alpha}_1\sigma_{12}+\sigma_{11}\frac{\partial v_2}{dx_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\dot{\alpha}_2\sigma_{22}+\sigma_{21}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)\right]dt=0. \tag{40}$$

În cele ce urmează vom înlocui vitezele prin derivatele deplasărilor în raport cu timpul.

Ţinînd seamă de forma barei vom putea face o serie de simplificări. Vom presupune bara solicitată la compresiune şi încărcată cu o sarcină transversală distribuită $q(x_1)$. Pentru deplasări vom admite expresiile

$$u_1=u_{10}(x_1,t)-x_2\frac{\partial u_2(x_1t)}{\partial x_1} \tag{41}$$

$$u_2=u_2(x_1,t)$$

al căror mod de stabilire este bine cunoscut (1). În acest caz putem considera neglijabili toţi termenii de sub cele două integrale (40), în afară de termenul $\sigma_{11}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}$. Pentru componenta axială a deformaţiei rezultă expresia

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2-x_2\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1}. \tag{42}$$

Din prima ecuaţie (40) extragem

$$\sigma_{21}=\int_{-\frac{h}{2}}^{x_2}\left[-\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\rho\left(\frac{\partial^2u_{10}}{\partial t^2}-x_2\frac{\partial^3u_2}{\partial x_1dt^2}\right)\right]dx_2 \tag{43}$$

iar după înlocuire în cea de-a doua ecuaţie (40) obţinem

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-\frac{h}{2}}^{x_2}\left[-\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\rho\left(\frac{\partial^2u_{10}}{dt^2}-x_2\frac{\partial^3u_2}{\partial x_1\,\partial t^2}\right)\right]dx_2+\frac{\partial x_{22}}{\partial x_2}-\rho\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1\,\partial t}\sigma_{11}\right)dt=0. \tag{44}$$

Dacă înlocuim $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ în prima integrală și apoi in ăm, obținem mai întîi

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-\frac{h}{2}}^{x_2}\left\{-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(E\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1}\right)+\rho\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{E}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 - Ex_2 \qquad \right]-\right.$$

$$\left.-\rho x_2\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1\,\partial t^2}\right\}dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\left(x_2+\frac{h}{2}\right)\left[-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(E\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1}\right)+\rho \qquad {}_{10} - \right.\right. \tag{45}$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{E}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2\right)\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{h^2}{8}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(E\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right) - \qquad \frac{{}^3 u_2}{{}_1\,\partial t^2}\right]\right\}$$

unde se observă că suma termenilor din prima parant dreaptă este nulă, deoarece reprezintă tocmai prima ecuație (40) în e s-a înlocuit $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ și s-a integrat în raport cu x_2 pe întreaga secți ransversală, obținîndu-se ecuația undelor longitudinale

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(E\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1}\right)-\rho\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{E}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2\right] \qquad . \tag{46}$$

Integrînd acum ecuația (44) în raport cu x_2 pe întreaga une transversală și ținînd seama de (45) și (46),obținem ecuația

$$I\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(E\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right)-\rho I\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^2\partial t^2}+\rho A\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-q(x_1)-\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \frac{{}_2}{\partial t}P_1\right)\right]dt = 0 \tag{47}$$

unde s-a notat cu I și A momentul de inerție respectiv a cțiunii transversale, iar cu P_1 forța axială. Această ecuație coinci u ecuația din teoria barelor, unde se stabilește cu ajutorul teoriei ntare a încovoierii, diferind doar prin ultimul termen.

Neglijînd influența inerției și în absența sarcinii buite, pentru o bară omogenă, ecuația de mai sus se va scrie

$$EI.\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^4}-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial t}P_1\right)dt = 0 \tag{47'}$$

Forța axială P_1 este în general funcție de x_1 ș este dată în cazul de față de expresia

$$P_1 = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{11}dx_2 = bE\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \qquad x_2\right.\right. \tag{48}$$

astfel că ecuația (47′) devine

$$EI\,\frac{\partial^4 u_2}{\partial x_1^4} - EA\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\,\partial t}\left[\frac{\partial u_{10}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2\right]\right\}dt. \tag{47''}$$

Această ecuație împreună cu ecuația (46) constituie un sistem de două ecuații cu derivate parțiale neliniare ce descriu mișcarea barei. Se observă că dacă în (46) neglijăm ultimul termen, ecuația undelor longitudinale se poate soluționa independent de (47). Neglijînd în această ecuație și efectul forțelor de inerție (ceea ce echivalează cu a presupune viteza de propagare a undelor longitudinale infinită) rezultă că

$$P_1 = P_1(t).$$

Dacă punem

$$P_1 = -P_0 = \mathrm{ct}$$

ecuația (47′) se scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{P_0}{EI}\left[u_2(x_1, t) - u_2(x_1, t_0)\right] = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 \tag{49}$$

de asemenea bine cunoscută în teoria elementară a flambajului static.

6. ÎNCHEIERE

Am văzut în cursul acestei aplicații că ecuațiile de mișcare a unui mediu continuu deformabil scrise sub forma (37) pot servi direct pentru studiul unor probleme de elasticitate, îndeosebi de stabilitate a sistemelor elastice. Desigur aplicații asemănătoare se pot face și pentru medii visco-elastice sau fluide. Ne propunem să facem acest lucru însă într-un articol viitor.

Primită la redacție la 14 octombrie 1961, o nouă versiune la 12 decembrie 1961

О НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

РЕЗЮМЕ

Даются нелинейные уравнения движения деформируемых сплошных сред в новом унитарном общем виде.

При помощи уравнений движения, написанных в этом виде, можно составить большое число задач о движении и особенно об устойчивости движения деформируемых сплошных сред, характери-

зующихся некоторым реологическим поведением (упругим, вязким и пр.).

Описывается применение для упругого стержня постоянного сечения.

SUR LES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES DU MOUVEMENT D'UN MILIEU CONTINU DÉFORMABLE

RÉSUMÉ

L'auteur présente les équations non linéaires du mouvement des milieux continus déformables sous une nouvelle forme générale, unitaire.

Il montre comment, au moyen des équations du mouvement, exprimées sous cette forme, il est possible d'aborder un grand nombre de problèmes du mouvement et surtout de la stabilité du mouvement des milieux continus déformables, caractérisés par un comportement rhéologique quelconque (élastique, visqueux, etc.).

A la fin de l'article, l'auteur fait une application à la barre élastique de section uniforme.

BIBLIOGRAFIE

1. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Осоноы нелинейной теории упругости*, Огиз-Гостехиздат, Москва, 1948.
2. F. D. MURNAGHAN, Finite deformation of an elastic solid. New York, John Wiley & Sons, 1951.
3. И. И. ГОЛДЕНБЛАТ, *Некоторые вопросы деформируемых сред.* Gosud. izd. tehniko-teoreticeskoi literaturî, Moskva 1955.
4. CARL E. PEARSON, General theory of elastic stability. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XIV—iulie 1956, Nr. 1.
5. M. A. BIOT, Folding of a layered viscoelastic medium derived from an exact stability theory of a continuum under initial stress. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XVII—iulie 1955.

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

ASUPRA PARAMETRILOR OPTIMI ÎN DEFECTOSCOPIA CU RAZE X ŞI γ

DE

M. NĂSTASE

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Scopul prezentei lucrări a fost acela de a studia diferiţi parametri optimi de expunere a pieselor supuse controlului defectoscopic nedestructiv prin röntgenografie şi gammagrafie.

Acest control defectoscopic, după cum este cunoscut, se bazează pe legea absorbţiei radiaţiilor respective în materialul piesei, conform căreia — pentru radiaţii efectiv monocromatice — avem relaţiile :

$I = I_0 \cdot e^{-\mu x}$, pentru porţiunea piesei fără defect;

$I = I_0 \cdot e^{-[\mu(x - \Delta x) + \mu' \Delta x]}$, pentru porţiunea cu defect,

în care :

I_0 = intensitatea fascicolului de raze la suprafaţa piesei;

I = intensitatea fascicolului de raze după ce acestea au traversat piesa şi au ajuns să impresioneze filmul;

x = grosimea piesei, în cm;

Δx = grosimea defectului, în cm;

μ = coeficientul liniar de absorbţie, în materialul piesei, funcţie de energia radiaţiei folosite, în cm^{-1};

μ' = idem, pentru porţiunea defectă.

De obicei $\mu' < \mu$ sau $\mu' = 0$, astfel că porţiunile cu defect, permiţînd trecerea către film a unei intensităţi mai mari, apar — după developarea filmului — mai negre.

DETERMINAREA CURBELOR CARACTERISTICE DE ÎNNEGRIRE A FILMULUI

S-au efectuat mai întîi determinările experimentale şi măsurătorile fotometrice necesare pentru ridicarea curbelor caracteristice de înnegrire a filmului folosit, pentru razele X şi γ (fig. 1 şi 2).

Pe porțiunea dreaptă a acestor curbe — porțiunea expunerilor normale — este respectată relația:

$$S = a \cdot \lg D + c, \tag{1}$$

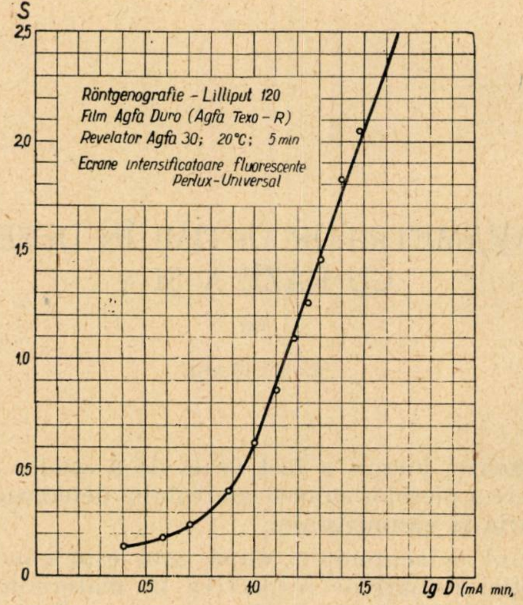


Fig. 1. — Curba caracteristică de înnegrire a filmului pentru raze X.

unde:

$S = \lg \frac{I'_0}{I'}$ — densitatea de înnegrire (înnegrirea), I'_0 și I' fiind intensitatea luminii care intră și care iese din film;

D — doza radiației ajunsă la film;

a — coeficientul de contrast (panta);

c — constantă ce depinde de densitatea voalului și sensibilitatea filmului.

Atît alura curbelor cît și coeficientul de contrast corespund cu cele indicate de firma furnizoare a filmului. Totodată se poate observa, din fig. 2, că timpul de expunere este de cca. 5—6 ori mai mic atunci cînd se folosesc ecrane intensificatoare fluorescente.

Unele constatări făcute în timpul experimentărilor:

— Ecranele intensificatoare fluorescente păstrează un efect remanent care acționează în continuare asupra filmului.

— Din această cauză, atunci cînd filmul dintr-o casetă se folosește pentru mai multe expuneri, pe porțiuni, nu este indicat a se face aceste expuneri prin însumarea timpului, ci trebuie expusă separat fiecare porțiune, deoarece altfel se deformează rezultatele obținute.

Acest fenomen constituie de altfel obiectul preocupărilor noastre, în continuare, pentru a vedea în ce măsură s-ar putea folosi în sens util.

— În cazul cînd sub casetă nu se pun plăci de plumb sau de oţel, efectul de difuzie este mult mai puternic.

— Deoarece condiţiile de developare pot să difere de la o developare la alta, este indicat a se face de fiecare dată şi o expunere-martor, corespunzătoare unuia din punctele de pe curba caracteristică şi după fotometrare să se efectueze corecţiile necesare pentru a păstra acelaşi factor de developare, în cursul seriei de experimentări necesare în problema respectivă.

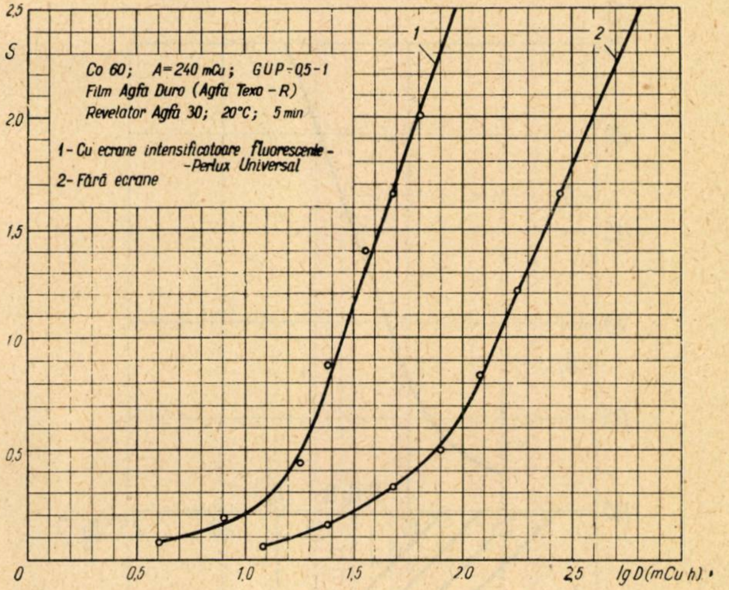


Fig. 2. — Curba caracteristică de înnegrire a filmului pentru raze γ.

DETERMINAREA COEFICIENTULUI LINIAR DE ABSORBŢIE

În defectoscopia cu raze X şi γ, este necesar, în mod curent, să cunoaştem valorile coeficientului liniar de absorbţie (μ).

Cum însă, în general, în literatura de specialitate, nu găsim aceste valori pentru energia radiaţiei cu care lucrăm, trebuie ca ele să fie determinate experimental pentru cazul în speţă.

În cazul cînd nu se dispune de aparatura radiometrică necesară (contori şi numărători de impulsuri), este posibil să se determine valorile lui μ şi prin următoarea metodă radiografică.

Expresia pentru doza radiaţiei ajunsă pe suprafaţa filmului se poate pune sub forma:

$$D = K \cdot e^{-\mu x} \cdot t, \tag{2}$$

în care t este timpul de expunere, iar constanta K cuprinde acțiunea intensității radiației și a ecranelor intensificatoare, precum și factorul de developare.

În cazul de față doza este dată în mA·min pentru razele X și în mCu·h pentru razele γ.

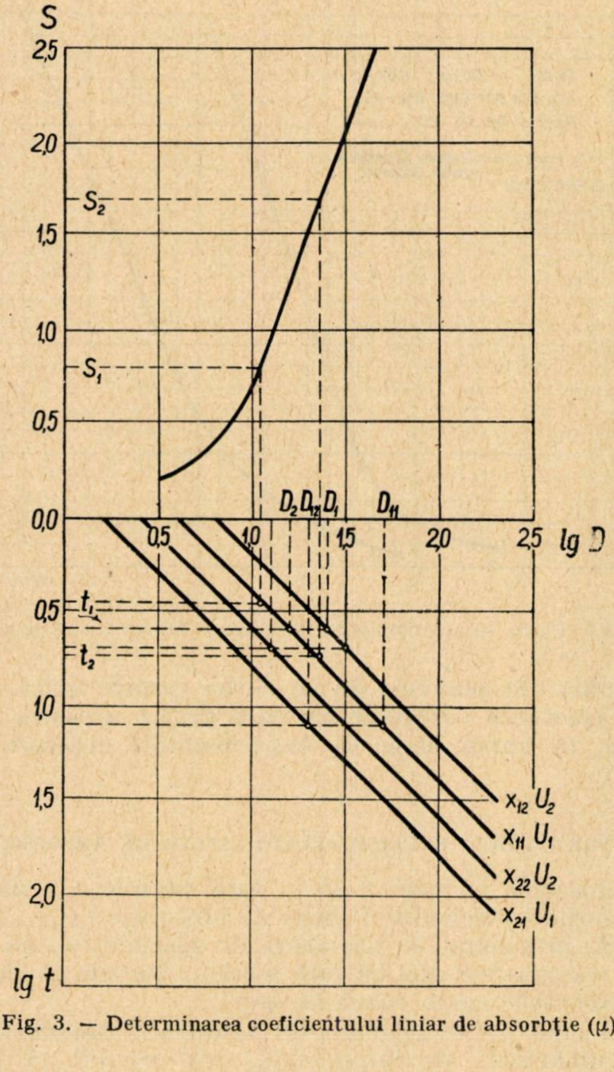


Fig. 3. — Determinarea coeficientului liniar de absorbție (μ).

Din relația (2) se poate observa că lg $D = f$ (lgt), pentru diferite energii ale radiației (μ diferit) sau pentru grosimi diferite ale materialului (x diferit), reprezintă o familie de drepte paralele cu coeficientul unghiular egal cu 1 (fig. 3).

Practic, pentru a reduce cît mai mult limita erorilor, se fac două expuneri pentru fiecare energie a radiaţiei şi pentru fiecare grosime (x) a piesei; se măsoară înnegririle respective, S_1 şi S_2 şi corespunzător timpului de expunere (lgt) se determină cele două puncte cu ajutorul cărora se trasează dreapta.

Pentru o aceeaşi energie a radiaţiei şi două grosimi de material diferite (dreptele x_{11} U_1 şi x_{21} U_1 (alegîndu-se o anumită valoare pentru t (lgt) se află valorile corespunzătoare ale dozei (D_{11} şi D_{12}).

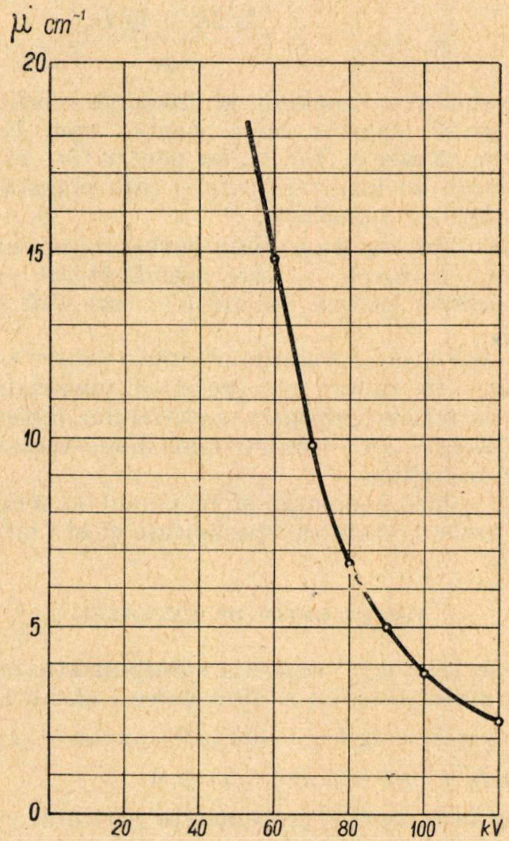


Fig. 4. — Valorile coeficientului liniar de absorbţie pentru oţel şi raze X.

Conform relaţiei (2) vom avea:

$$D_{11} = K \cdot e^{-\mu . x_1} \cdot t$$

$$D_{12} = K \cdot e^{-\mu . x_2} \cdot t$$

De unde:

$$\mu = 2,3 \frac{\lg D_{11} - \lg D_{12}}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

În mod similar, pentru o aceeași grosime de material și două energii diferite ale radiației (dreptele $x_{11}\, U_1$ și $x_{12}\, U_2$ și respectiv D_2 și D_1), vom avea :

$$D_1 = K \cdot e^{-\mu_1 x} \cdot t$$

$$D_2 = K \cdot e^{-\mu_2 x} \cdot t$$

De unde :

$$\mu_2 - \mu_1 = 2,3\, \frac{\lg D_1 - \lg D_2}{x}. \tag{4}$$

Pe baza datelor experimentale și folosind relațiile (3) și (4) s-a putut determina astfel valorile lui μ pentru oțel, la diferite tensiuni folosite în expunerile cu raze X (fig. 4), iar pentru Co—60 s-a găsit $\mu = 0,44$.

Valorile obținute au fost verificate și prin măsurători radiometrice, folosind un detector cu scintilație.

Se observă apoi din fig. 4 că aliura curbei reprezentînd variația lui μ cu variația tensiunii la razele X, este asemănătoare cu cea indicată în literatura de specialitate pentru radiațiile γ, care sînt de aceeași natură (electromagnetică).

Se menționează însă că valorile obținute pentru μ sînt valori medii, presupuse constante în raport cu grosimea materialului, deoarece în realitate μ efectiv variază cu grosimea materialului, datorit atît faptului că radiațiile X și radiația γ a Co—60 nu sînt monocromatice cît și fenomenului de difuzie a radiațiilor.

Acest aspect a fost constatat și în cursul experiențelor noastre și este indicat și în unele tratate de specialitate și el face obiectul studiilor noastre, în curs.

TIMPUL OPTIM DE EXPUNERE

Introducînd în relația (1) expresia corespunzătoare a dozei — relația (2) — pentru porțiunile piesei cu și fără defect, găsim că :

$$S_{x-\Delta x} = a[\lg K + \lg t - 0,434\,(\mu x - \mu\,\Delta x - \mu'\,\Delta x)] + c$$

$$S_x = a(\lg K + \lg t - 0,434\ \mu x) + c$$

Iar diferența de înnegrire, între aceste porțiuni, va fi :

$$\Delta S = S_{x-\Delta x} - S_x = 0,434\, a \cdot \Delta x(\mu - \mu') \tag{5}$$

În continuare, putem deduce acum expresia teoretică a sensibilității :

$$p\% = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100 = \frac{\Delta S}{0,434\ a \cdot x(\mu - \mu')} \cdot 100. \tag{6}$$

Această expresie arată că sensibilitatea crește cu cît panta (a) a porțiunii drepte a curbei și μ sînt mai mari.

Dacă $(\Delta x)_0$ reprezintă grosimea celui mai mic defect care provoacă o variație a densității de înnegrire $(\Delta S)_0 = 0,05$ încă sesizabilă cu ochiul liber și cunoscînd că x, μ și μ',pentru un anumit caz, sînt constante, iar panta (a) este de asemenea constantă de-a lungul porțiunii drepte a curbei caracteristice, rezultă că teoretic sensibilitatea este aceeași pe toată această porțiune.

În consecință, se poate trage concluzia că este indicat și avantajos ca să se ia ca înnegrire optimă aceea care corespunde începutului porțiunii drepte a curbei caracteristice, pentru care vom avea și doza și timpul optim de expunere ; acest timp este totodată și cel mai mic, fără a micșora totuși sensibilitatea.

Bazați pe această concluzie, în cazul filmului folosit de noi, s-a găsit că înnegrirea optimă este $S = 0{,}7$.

Cunoscînd timpul optim de expunere (t_1), corespunzător lui $S = 0{,}7$, pentru energia (tensiunea) radiației și grosimea materialului cu care s-a făcut ridicarea curbelor caracteristice, pentru razele X și γ, precum și valorile lui μ — determinate așa cum s-a arătat anterior — se poate afla timpul optim de expunere pentru diferite energii ale radiației și diferite grosimi ale materialului.

Folosind relația (2), pentru cazul cînd variază energia (tensiunea) radiației, iar grosimea materialului rămîne aceeași, vom avea :

$$D_0 = K \cdot e^{-\mu_1 x} \cdot t_1$$

$$D_0 = K \cdot e^{-\mu_2 x} \cdot t_2$$

De unde :

$$t_2 = e^{-\mu(\mu_1 - \mu_2)} \cdot t_1$$

În mod similar, pentru cazul cînd variază grosimea materialului iar energia radiației rămîne aceeași :

$$t_2 = e^{-\mu(x_1 - x_2)} \cdot t_1 .$$

Astfel, timpul optim de expunere cu raze X și γ, pentru piese din oțel, determinat în modul arătat mai sus, este redat în fig. 5 și fig. 6.

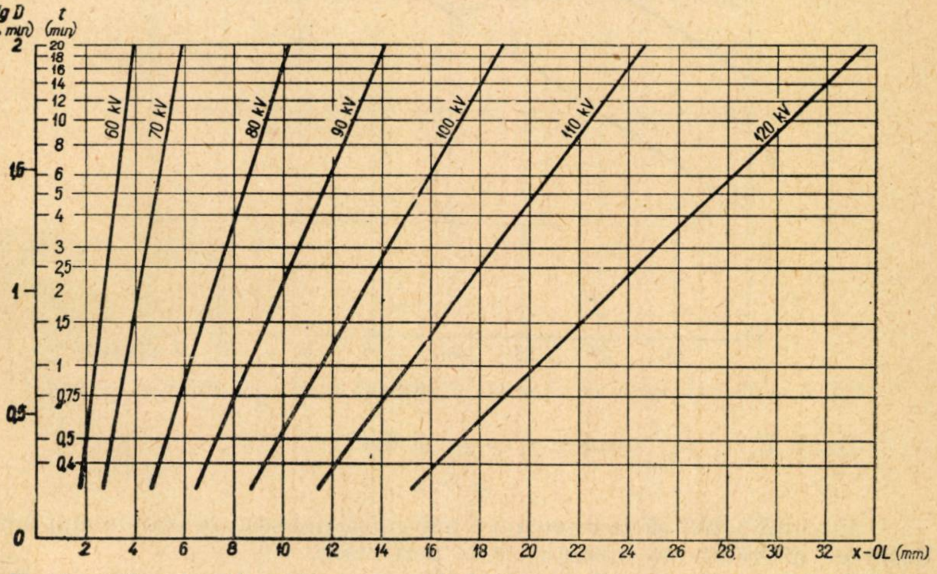


Fig. 5. — Timpul optim de expunere al pieselor de oțel cu raze X, la o distanță focală $d = 50$ cm.

În timpul experienţelor, s-a constatat diferenţa flagrantă ce există între o expunere a unei piese făcută empiric sau cu timpul luat sau dedus din diferite tratate şi o expunere făcută cu timpul corespunzător determinărilor în condiţiile locale specifice, efectuate în modul arătat.

ASUPRA TENSIUNII DE EXPUNERE

În cazul razelor X se pune întrebarea cu ce tensiune este bine să se lucreze: mai mare sau mai mică?

Aplicînd relaţia (5) pentru două tensiuni diferite U_1 şi U_2 şi pentru aceeaşi natură şi mărime a defectului (Δx şi μ' aceleaşi) găsim că:

$$\varphi = \frac{(\Delta S)_{U_1}}{(\Delta S)_{U_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

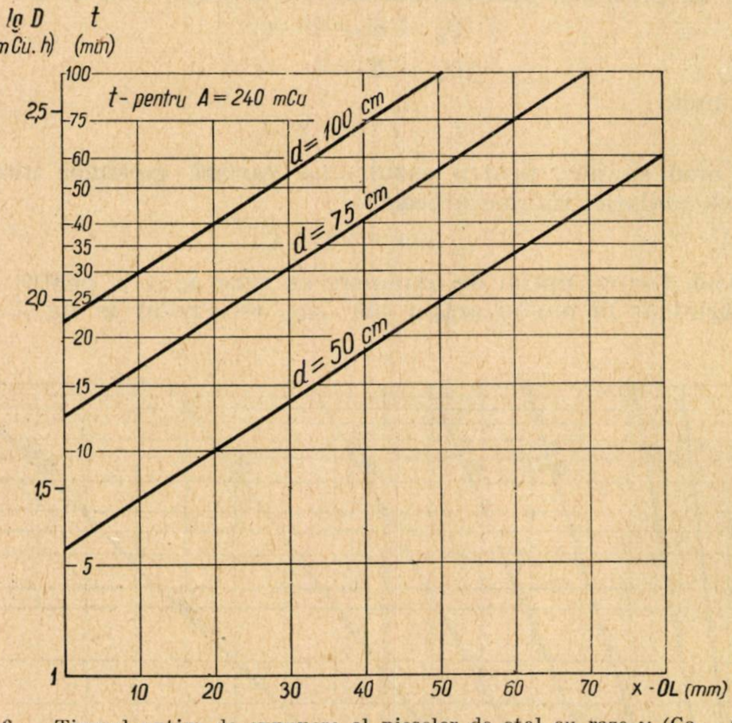


Fig. 6. — Timpul optim de expunere al pieselor de oţel cu raze γ (Co — 60).

Dacă $U_1 < U_2$, atunci $\mu_1 > \mu_2$ şi deci:

$$\varphi > 1$$

Rezultă astfel că la o tensiune mai mică defectul se prinde mai bine, deoarece diferenţa de înnegrire este mai mare.

La tensiunea mai mică însă, indicată pentru obţinerea unei sensibilităţi superioare, timpul de expunere va fi mai mare.

Pentru o piesă a cărei expunere pentru o înnegrire optimă, se poate face la o tensiune mai mare sau mai mică, alegerea tensiunii se va face în funcţie de factorul care are prioritate în cazul piesei respective : sensibilitate mărită sau timp de expunere mai mic (productivitate mai mare). Aceeaşi concluzie este valabilă şi în cazul razelor γ. Se ştie că atunci cînd se foloseşte Ir-192, cu o energie mai mică decît a Co-60, defectele se prind mai bine.

ASUPRA EXPUNERII PIESELOR CARE PREZINTĂ DIFERENŢE DE GROSIME

Să presupunem că avem de expus o piesă care prezintă diferenţe de grosime, cele două grosimi extreme fiind x_1 şi x_2 ($x_1 > x_2$).

Pentru un acelaşi timp de expunere, cu ajutorul relaţiilor (1) şi (2), putem obţine următoarea expresie pentru diferenţa între cele două înnegriri rezultate la grosimile respective ale piesei :

$$S_{x_2} - S_{x_1} = 0{,}434\ a \cdot \mu\,(x_1 - x_2) \tag{7}$$

Rezultă deci că pentru limitele de înnegrire între care dorim să ne încadrăm, diferenţa între grosimile extreme ale piesei ce se poate expune este mai mare atunci cînd valorile lui μ şi a sînt mai mici.

Astfel, în cazul expunerilor fără ecrane intensificatoare pentru care curba caracteristică are o pantă (a) mai mică sau pentru razele γ care au un μ mai mic, această diferenţă între grosimile piesei poate să fie mai mare ; în schimb, în acest caz, aşa cum s-a arătat anterior — expresia (6) — sensibilitatea scade.

Se poate observa apoi, de la bun început, că va trebui aleasă înnegrirea optimă (şi deci timpul optim de expunere), corespunzătoare grosimii maxime a piesei (x_1), pentru ca înnegririle pentru grosimile mai mici să se deplaseze în sus pe porţiunea dreaptă a curbei caracteristice ; altfel riscăm să intrăm pe porţiunea curbă a acesteia, unde sensibilitatea este scăzută.

Alegînd deci înegrirea optimă $S_{x_1} = 0{,}7$ pentru grosimea maximă a piesei (x_1) şi presupunînd că pentru grosimea minimă nu dorim să depăşim înnegrirea $S_{x_2} = 2$, cu ajutorul relaţiei (7) putem afla diferenţa de grosimi admisibilă pentru piesa în cauză, cunoscînd atît valorile lui μ cît şi panta curbei caracteristice (în cazul nostru $a = 2{,}9$).

Spre exemplu, pentru razele X :

— la 90 kV :

$$x_1 - x_2 = 0{,}208 \text{ cm}$$

— la 120 kV :

$$x_1 - x_2 = 0{,}425 \text{ cm}$$

Pentru raze γ(Co — 60) :

$$x_1 - x_2 = 2{,}65 \text{ cm}$$

În felul acesta putem avea o imagine clară a posibilităţilor de expunere a pieselor care au grosimi ce diferă între anumite limite.

Procedînd deci astfel, putem evita de la început comiterea unor erori. Astfel, de exemplu, bielele de la motoarele de tractor, a căror diferenţă de grosimi este de cca. 3 cm, nu se pot expune la aparatul de raze X, ci la cel de raze γ.

Din cele expuse, rezultă că la radiografiere cu raze γ, în afară de faptul că se pot expune piese cu grosimi mai mari decît la razele X, dar se pot reproduce printr-o singură expunere defectele în părţile groase şi subţiri ale unei piese, fără a se folosi mijloace de compensare, dat fiind că diferenţa între grosimile extreme ale piesei poate varia în limite mult mai largi.

În cazul în care însă această diferenţă depăşeşte valoarea admisibilă, grosimea maximă a piesei permiţînd totuşi expunerea la aparatul respectiv, atunci trebuie să se folosească compensatoare.

În schimb, la avantajul menţionat pentru razele γ apare şi dezavantajul unui timp de expunere mai mare şi a unei sensibilităţi mai mici.

Rămîne deci ca, înainte de fixarea soluţiei adoptate, să se facă o analiză a condiţiilor impuse de piesa respectivă şi a parametrilor optimi de expunere, deoarece cele două metode — de defectoscopie cu raze X şi γ — se completează reciproc.

Primită la redacţie la 28 noiembrie 1961

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ В РЕНТГЕНОВСКОЙ И ГАММА-ДЕФЕКТОСКОПИИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе, на основании полученных экспериментальных данных, были сняты кривые затемнения фотопленки и был установлен радиографический метод для определения коэффициентов поглощения (μ).

Затем даются некоторые уточнения в связи с установлением оптимального времени экспозиции, причем даются соответствующие кривые для различных толщин материала при облучении рентгеновскими и гамма-лучами.

В продолжении, на основании расчете с последующей экспериментальной проверкой, делаются примечания и выводы о напряжении (энергии) применяемых излучений и об облучении деталей переменной толщины.

ON THE OPTIMUM PARAMETERS OF THE X AND γ RAY DEFECTOSCOPY

ABSTRACT

This paper presents the curves of the film blackening, obtained on the basis of experimental results, and establishes a radiographic method for determining the absorption coefficient μ.

Details are given as regards the optimum time of exposure, the respective curves being plotted for various thicknesses of material exposed to X and γ rays.

Finally, observations and conclusions are presented, based on calculation and experimental data, concerning the radiation energy and the exposure of parts presenting various thicknesses.

BIBLIOGRAFIE

С. В. РУМЯНЦЕВ, *Применение радиоактивных изотопов в дефектоскопии*. Атомиздат, Москва, 1960.

A. BLONDEL, *Le contrôle non destructif par gammagraphie*, Ed. Techniques des industries de la fonderie, Paris, 1959.

L. K. TATOCENKO, S. V. MEDVEDIEV, *Aplicaţiile defectoscopiei cu raze gamma în industrie*, Ed. tehnică, 1956.

Academia de Ştiinţe a U.R.S.S., *Неразрушающие методы испытания материалов*. p. 99–169, Moskva, 1961.

NOTE

TORSIUNEA BARELOR PRISMATICE CU SECȚIUNEA TRANSVERSALĂ ÎN FORMĂ DE CRUCE CU BRAȚELE OPUSE EGALE

DE

EMERIC DEUTSCH

1. INTRODUCERE

În această lucrare ne vom ocupa cu torsiunea barelor elastice izotrope, forma secțiunii fiind cea din figura 1. Această problemă — după cum știm — nu a fost studiată pînă în prezent, decît în cazul particular cînd cele 4 brațe au lungimi și grosimi egale, adică $a = b$, $a' = b'$ [1].

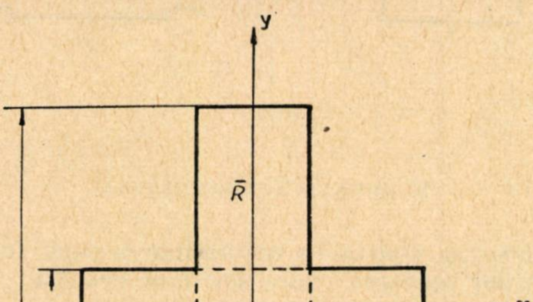


Fig. 1

În cazul nostru (a, b, a', b' oarecare), secțiunea considerată poate avea aspecte foarte diferite (fig. 2).

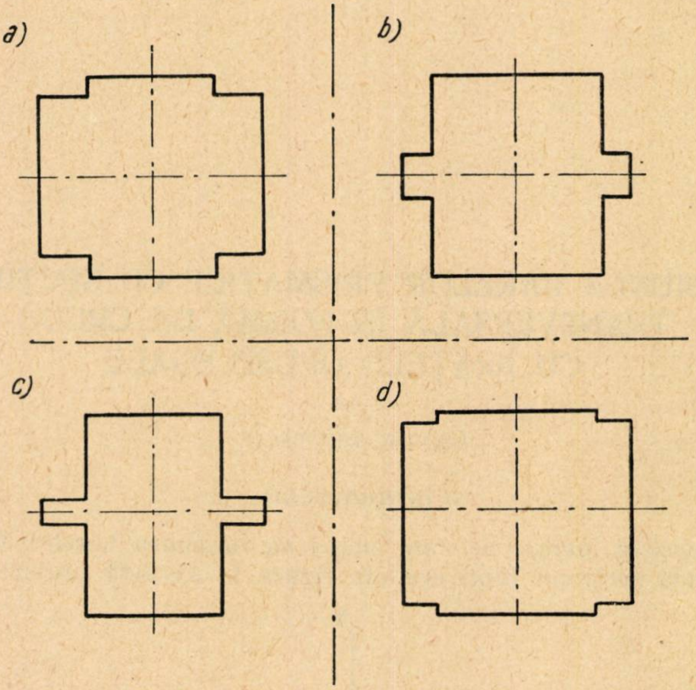


Fig. 2

2. ECUAȚII FUNDAMENTALE

Problema noastră constă în determinarea unei funcții $F(x, y)$ — funcția eforturilor unitare — care satisface ecuația

$$\nabla^2 F = -2 \qquad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

și condiția la limită

$$F = 0 \tag{2}$$

pe conturul secțiunii transversale.

Rigiditatea la torsiune este dată de

$$D = 2\mu \iint_S F(x, y)\, dx\, dy, \tag{3}$$

unde μ este rigiditatea materialului (modulul de elasticitate transversală) iar S este domeniul secțiunii transversale.

3. FUNCŢIA EFORTURILOR UNITARE

Din motive de simetrie, este suficient să determinăm funcţia eforturilor unitare numai în domeniile

$$\overline{P}\left(-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2}\right), \quad \overline{Q}\left(\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a'}{2}, -\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2}\right),$$

$$\overline{R}\left(-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b'}{2}\right).$$

Să punem

$$F(x, y) = \begin{cases} P(x, y) & \text{în domeniul } \overline{P}, \\ Q(x, y) & \text{,, \quad ,, } \overline{Q}, \\ R(x, y) & \text{,, \quad ,, } \overline{R}. \end{cases}$$

Ecuaţia (1) devine

$$\nabla^2 P = -2, \qquad \nabla^2 Q = -2, \qquad \nabla^2 R = -2. \tag{4}$$

Din cauza simetriei secţiunii, trebuie să avem

$$\begin{gathered} P(x, -y) = P(-x, y) = P(x, y), \\ Q(x, -y) = Q(x, y), R(-x, y) = R(x, y). \end{gathered} \tag{5}$$

Condiţia la limită (2) devine

$$Q\left(\frac{a'}{2}, y\right) = Q\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0, \quad R\left(\frac{a}{2}, y\right) = R\left(x, \frac{b'}{2}\right) = 0. \tag{6}$$

În sfîrşit, din motive de continuitate, trebuie să avem

$$P\left(\frac{a}{2}, y\right) = Q\left(\frac{a}{2}, y\right), \quad P\left(x, \frac{b}{2}\right) = R\left(x, \frac{b}{2}\right), \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=\frac{a}{2}} = \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{x=\frac{a}{2}}, \quad \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}} = \left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{y=\frac{b}{2}}. \tag{8}$$

Să luăm

$$P(x, y) = P_1(x, y) + P_2(x, y), \tag{9}$$

$$Q(x, y) = Q_1(x, y) + Q_2(x, y), \quad R(x, y) = R_1(x, y) + R_2(x, y), \tag{10}$$

unde $P_1(x, y), Q_1(x, y), R_1(x, y)$ sînt respectiv funcţiile eforturilor unitare corespunzătoare domeniilor $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$, iar $P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$, $R_2(x, y)$ sînt funcţii deocamdată nedeterminate. Avem deci [2], [3]

$$P_1(x, y) = \frac{32}{\pi^4} \sum_{m=1, 3, \dots}^{+\infty} \sum_{n=1, 3, \dots}^{+\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \qquad (11)$$

$$Q_1(x, y) = \frac{1}{4} b^2 - y^2 - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{k=1, 3, \dots}^{+\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{k\pi(a' + a - 4x)}{4b} \cos \frac{k\pi y}{b}}{k^3 \operatorname{ch} \frac{k\pi(a' - a)}{4b}}, \qquad (12)$$

$$R_1(x, y) = \frac{1}{4} a^2 - x^2 - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{h=1, 3, \dots}^{+\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{k\pi(b' + b - 4x)}{4a} \cos \frac{k\pi x}{a}}{k^3 \operatorname{ch} \frac{k\pi(b' - b)}{4a}}, \qquad (13)$$

Pentru funcţiile $P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$ şi $R_2(x, y)$ alegem

$$P_2(x, y) = \sum_{k=1, 3, \dots}^{+\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + B_k \cos \frac{k\pi y}{b} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b}\right), \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_2(x, y) &= \sum_{k=1, 3, \dots}^{+\infty} C_k \operatorname{sh} \frac{k\pi(a' - 2x)}{2b} \cos \frac{k\pi y}{b}, \\ R_2(x, y) &= \sum_{k=1, 3, \dots}^{+\infty} D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi(b' - 2y)}{2a} \cos \frac{k\pi x}{a}, \end{aligned}\right. \qquad (15)$$

unde A_k, B_k, C_k, D_k $(k = 1, 3, 5, \dots)$ sînt constante deocamdată nedeterminate.

Se verifică uşor că funcţiile $P(x, y)$, $Q(x, y)$ şi $R(x, y)$ date de (9) şi (10) satisfac atît ecuaţiile (4) cît şi condiţiile (5) şi (6). Condiţiile (7) sînt satisfăcute dacă

$$C_k \operatorname{sh} \frac{k\pi(a' - a)}{2b} = B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2b}, \qquad D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi(b' - b)}{2a} = A_k \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2a} \cdot \qquad (16)$$

Ţinînd seama de relaţia [4]

$$\sum_{m=1, 3, \dots}^{+\infty} \frac{1}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{4x} \operatorname{th} \frac{\pi x}{2}, \qquad (17)$$

se arată că condiţiile (8) sînt satisfăcute dacă avem

$$\sum_{\lambda=1, 3, \dots}^{+\infty} \left[\lambda B_\lambda \operatorname{sh} \frac{\lambda\pi a}{2b} + \lambda C_\lambda \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi(a' - a)}{2b} - \frac{8b^2}{\lambda^2\pi^3} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \left(\operatorname{th} \frac{\lambda\pi a}{2b} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \operatorname{th} \frac{\lambda\pi(a' - a)}{4b}\right)\right] \cos \frac{\lambda\pi y}{b} = \frac{b}{a} \sum_{\lambda=1, 3, \dots}^{+\infty} \lambda A_\lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi y}{a},$$

$$\sum_{\lambda=1, 3, \dots}^{+\infty} \left[\lambda A_\lambda \operatorname{sh} \frac{\lambda\pi b}{2a} + \lambda D_\lambda \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi(b' - b)}{2a} - \frac{8a^2}{\lambda^2\pi^3} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \left(\operatorname{th} \frac{\lambda\pi b}{2a} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \operatorname{th} \frac{\lambda\pi(b' - b)}{4a}\right)\right] \cos \frac{\lambda\pi x}{a} = \frac{a}{b} \sum_{\lambda=1, 3, \dots}^{+\infty} \lambda B_\lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi x}{b} \cdot$$

Înmulțind aceste relații cu $\cos \frac{k\pi y}{b}\, dy$ $\left(\text{respectiv } \cos \frac{k\pi x}{a}\, dx\right)$ și integrînd în raport cu y (respectiv x) între limitele 0 și $\frac{1}{2}\, b$ $\left(\text{respectiv } 0 \text{ și } \frac{1}{2}\, a\right)$ și ținînd seama de relațiile (16), obținem după unele calcule

$$A_k \sin \frac{k\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{k\pi b'}{2a} = \frac{16\, a^2}{k^3 \pi^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi\,(b'+b)}{4a} \operatorname{sh} \frac{k\pi\,(b'-b)}{4a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{2a}} +$$

$$+ \frac{4ab}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi\,(b'-b)}{2a} \sum_{\lambda=1,\,3,\,\dots}^{+\infty} \frac{\lambda B_\lambda}{a^2\lambda^2 + b^2 k^2} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi a}{2b}, \tag{18}$$

$$B_k \sin \frac{k\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{k\pi a'}{2b} = \frac{16 b^2}{k^3 \pi^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi\,(a'+a)}{4b} \operatorname{sh} \frac{k\pi\,(a'-a)}{4b}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{2b}} +$$

$$+ \frac{4ab}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi\,(a'-a)}{2b} \sum_{\lambda=1,\,3,\,\dots}^{+\infty} \frac{\lambda A_\lambda}{b^2\lambda^2 + a^2 k^2} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi b}{2a},$$

adică un sistem infinit de ecuații cu necunoscutele A_k, B_k ($k = 1, 3, 5, \dots$). Punînd

$$\lambda A_\lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi b}{2a} = X_\lambda, \quad \lambda B_\lambda \sin \frac{\lambda\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda\pi a}{2b} = Y_\lambda, \tag{19}$$

sistemul (18) devine

$$\begin{aligned} X_k &= \alpha_k + \sum_{\lambda=1,\,3,\,\dots}^{+\infty} \alpha_{k,\,\lambda}\, Y_\lambda, \\ Y_k &= \beta_k + \sum_{\lambda=1,\,3,\,\dots}^{+\infty} \beta_{k,\,\lambda}\, X_\lambda, \end{aligned} \qquad (k = 1, 3, \dots) \tag{20}$$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{16\, a^2}{k^2\, \pi^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi\,(b'+b)}{4a} \operatorname{sh} \frac{k\pi\,(b'-b)}{4a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b'}{2a}}, \\ \beta_k &= \frac{16\, b^2}{k^2\, \pi^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi\,(a'+a)}{4b} \operatorname{sh} \frac{k\pi\,(a'-a)}{4b}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi a'}{2b}}, \end{aligned} \qquad (k = 1, 3, \dots) \tag{21}$$

$$\alpha_{k,\lambda} = \frac{4abk}{\pi(a^2\lambda^2 + b^2k^2)} \, \frac{\operatorname{ch}\dfrac{k\pi b}{2a}\operatorname{sh}\dfrac{k\pi(b'-b)}{2a}}{\operatorname{ch}\dfrac{k\pi b'}{2a}},$$

$$\beta_{k,\lambda} = \frac{4abk}{\pi(b^2\lambda^2 + a^2k^2)} \, \frac{\operatorname{ch}\dfrac{k\pi a}{2b}\operatorname{sh}\dfrac{k\pi(a'-a)}{2b}}{\operatorname{ch}\dfrac{k\pi a'}{2b}}. \qquad (k,\ \lambda = 1, 3, \ldots) \qquad (22)$$

Punînd acum

$Z_k = X_k, \qquad c_k = \alpha_k,$ pt. k impar,

$Z_k = Y_{k-1}, \qquad c_k = \beta_{k-1},$ pt. k par,

$\gamma_{k,\lambda} = \alpha_{k,\lambda-1},$ pt. k impar, λ par,

$\gamma_{k,\lambda} = \beta_{k-1,\lambda},$ pt. k par, λ impar,

$\gamma_{k,\lambda} = 0,$ pt. k și λ de aceeași paritate,

sistemul (20) se poate scrie

$$Z_k = c_k + \sum_{\lambda=1}^{+\infty} \gamma_{k,\lambda} Z_\lambda \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (23)$$

Să arătăm că acest sistem este complet regulat [5]. Pentru k impar, avem :

$$\sum_{\lambda=1}^{+\infty} |\gamma_{k,\lambda}| = \sum_{\lambda=1}^{+\infty} \alpha_{k,\lambda-1} = \sum_{\lambda=2,4,\ldots}^{+\infty} \alpha_{k,\lambda-1} = \sum_{\lambda=1,3,\ldots}^{+\infty} \alpha_{k,\lambda} =$$

$$= \frac{4abk}{\pi} \, \frac{\operatorname{ch}\dfrac{k\pi b}{2a}\operatorname{sh}\dfrac{k\pi(b'-b)}{2a}}{\operatorname{ch}\dfrac{k\pi b'}{2a}} \sum_{\lambda=1,3,\ldots}^{+\infty} \frac{1}{a^2\lambda^2 + b^2k^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{2a}\operatorname{sh}\dfrac{k\pi(b'-b)}{2a}}{\operatorname{ch}\dfrac{k\pi b'}{2a}} < \frac{1}{2},$$

unde am ținut din nou seama de egalitatea (17). În mod asemănător se arată că inegalitatea de mai sus este satisfăcută și pentru k par, astfel că pentru orice k avem :

$$\sum_{\lambda=1}^{+\infty} |\gamma_{k,\lambda}| < \frac{1}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad (24)$$

adică sistemul (23) este complet regulat. În ceea ce privește termenii liberi ai sistemului (23), se găsește ușor că

$$|\alpha_k| = \alpha_k < \frac{8a^2}{k^2\pi^3} \leqslant \frac{8a^2}{\pi^3}, \quad |\beta_k| = \beta_k < \frac{8b^2}{k^2\pi^3} \leqslant \frac{8b^2}{\pi^3}\cdot$$

Avem deci

$$0 \leqslant c_k \leqslant \frac{8l^2}{\pi^3},$$

unde $l = \max(a, b)$. Se știe [5] că în acest caz, sistemul admite o soluție mărginită unică

$$0 \leqslant Z_k \leqslant \frac{16\, l^2}{\pi^3}\cdot \tag{25}$$

Observare. Întrucît atît coeficienții $\gamma_{k,\lambda}$ cît și termenii liberi c_k sînt numere pozitive, avem [6]

$$c_k \leqslant Z_k \leqslant c_k + \frac{8l^2}{\pi^3}, \tag{26}$$

adică o evaluare mai bună decît (25).

Soluția sistemului (23) poate fi aproximată dacă se dau valorile dimensiunilor a, b, a' și b'. Îndată ce Z_k, și prin urmare X_k și Y_k sînt găsiți, funcția eforturilor poate fi obținută din (9) și (10) unde $P_1(x, y)$, $Q_1(x, y)$ și $R_1(x, y)$ sînt date de (11), (12) și (13) iar $P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$ și $R_2(x, y)$ — ținînd seama de (14), (15) și (19) — sînt date de

$$P_2(x, y) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{+\infty} \sin\frac{k\pi}{2}\left(X_k \frac{\cos\frac{k\pi x}{a}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{a}}{k\operatorname{ch}\frac{k\pi b}{2a}} + Y_k \frac{\cos\frac{k\pi y}{b}\operatorname{ch}\frac{k\pi x}{b}}{k\operatorname{ch}\frac{k\pi a}{2b}} \right), \tag{27}$$

$$Q_2(x, y) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{+\infty} Y_k \frac{\sin\frac{k\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{k\pi(a'-2x)}{2b}\cos\frac{k\pi y}{b}}{k\operatorname{sh}\frac{k\pi(a'-a)}{2b}},$$

$$R_2(x, y) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{+\infty} X_k \frac{\sin\frac{k\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{k\pi(b'-2y)}{2a}\cos\frac{k\pi x}{a}}{k\operatorname{sh}\frac{k\pi(b'-b)}{2a}}\cdot \tag{28}$$

4. RIGIDITATEA LA TORSIUNE

Vom nota cu $\mu L(a, b)$, rigiditatea la torsiune corespunzătoare unei secțiuni dreptunghiulare de laturi a și b. Valoarea lui $L(a, b)$ poate fi calculată cu una din formulele

$$L(a, b) = \frac{256\, a^3 b^3}{\pi^6} \sum_{m=1,3,\ldots}^{+\infty} \sum_{n=1,3,\ldots}^{+\infty} \frac{1}{m^2 n^2 (b^2 m^2 + a^2 n^2)},$$

$$L(a, b) = L(b, a) = \frac{a^3 b}{3} - \frac{64 a^4}{\pi^5} \sum_{m=1,3,\ldots}^{+\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{th} \frac{m\pi b}{2a},$$

sau poate fi luată din tabele. Pentru rigiditatea la torsiune a barei noastre avem

$$D = 2\mu \left[\iint_{\overline{P}} (P_1 + P_2)\, dx\, dy + 2 \iint_{\overline{Q}} (Q_1 + Q_2)\, dx\, dy + \right.$$
$$\left. + 2 \iint_{\overline{R}} (R_1 + R_2)\, dx\, dy \right]. \qquad (29)$$

Întrucît $P_1(x, y)$, $Q_1(x, y)$, $R_1(x, y)$ sînt respectiv funcțiile eforturilor unitare corespunzătoare domeniilor $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, avem

$$2 \iint_{\overline{P}} P_1\, dx\, dy = L(a, b), \qquad 2 \iint_{\overline{Q}} Q_1\, dx dy = L\left(\frac{a' - a}{2}, b\right),$$
$$2 \iint_{\overline{R}} R_1\, dx\, dy = L\left(a, \frac{b' - b}{2}\right). \qquad (30)$$

Calculînd și celelalte trei integrale din (29), obținem

$$D = D_0 + \frac{8\mu}{\pi^2} \sum_{k=1,3,\ldots}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \left[a^2 X_k \left(\operatorname{th} \frac{k\pi b}{2a} + \operatorname{th} \frac{k\pi (b' - b)}{4a} \right) + \right.$$
$$\left. + b^2 Y_k \left(\operatorname{th} \frac{k\pi a}{2b} + \operatorname{th} \frac{k\pi (a' - a)}{4b} \right) \right], \qquad (31)$$

unde

$$D_0 = \mu \left[L(a, b) + 2L\left(\frac{a' - a}{2}, b\right) + 2\, L\left(a, \frac{b' - b}{2}\right) \right]. \qquad (32)$$

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С КРЕСТООБРАЗНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ С ОДИНАКОВЫМИ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ПЛЕЧАМИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается кручение изотропных упругих стержней, вид сечения которых показан на рис. 1.

Функция напряжения в областях $\overline{P}$, $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ дана соотношениями (9) и (10). В этих соотношениях $P_1(x, y)$, $Q_1(x, y)$, $R_1(x, y)$, соот-

ветственно, функции напряжений, соответствующие областям $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$, определяются соотношениями (11), (12), (13), а $P_2(x,y)$, $Q_2(x,y)$, $R_2(x,y)$ определяются соотношениями (27) и (28), причем X_k. Y_k ($k = 1, 3,\ldots$) являются решениями бесконечной системы уравнений (20).

Жесткость при кручении дана соотношением (31), где D_0 представляет собой сумму жесткостей при кручении, соответствующую пяти прямоугольным областям $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ и областям симметричным $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ относительно начала осей координат.

TORSION DES BARRES PRISMATIQUES À SECTION TRANSVERSALE EN CROIX AUX BRAS OPPOSÉS ÉGAUX

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur étudie la torsion des barres élastiques, isotropes dont la section a la forme indiquée sur la figure 1.

Les fonctions des tensions, dans les domaines $\overline{P}$, $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ sont fournies par les relations (9) et (10). Dans ces relations, $P_1(x, y)$, $Q_1(x, y)$ et $R_1(x,y)$ désignent, respectivement, les fonctions des tensions correspondant aux domaines $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ — fournies par (11), (12), (13) — et $P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$, $R_2(x, y)$ sont données par les relations (27) et (28), X_k, Y_k ($k = 1, 3,\ldots$) étant les solutions du système infini d'équations (20).

La rigidité à la torsion est fournie par la relation (31), où D_0 désigne la somme des rigidités à la torsion correspondant à cinq domaines rectangulaires, à savoir : $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ et les symétriques de $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ par rapport à l'origine des axes.

BIBLIOGRAFIE

1. Б. Л. АБРАМЯН, *Кручение призматических стержней с крестообразным поперечным сечением*. ПММ, *13*, 551—556 (1949).
2. А. Н. ДИННИК, *Аналогия Прандтля в теории кручения*. Избранные труды, том III, 238—254, Изд. Ак.Наук Украинской ССР, Киев, 1956.
3. M. N. FILONENCO-BORODICI, *Teoria elasticităţii*. Bucureşti, Ed. tehnică, 1952, 186.
4. I. M. RÎJIC, I. S. GRADSTEIN, *Tabele de integrale, sume, serii şi produse*. Bucureşti, Ed. tehnică, 1955, 50.
5. Л. В. КАНТОРОВИЧ, В. И. КРЫЛОВ, *Приближенные методы высшего анализа*. Москва, Гостехиздат, 1950.
6. Э. Г. ДЕЙЧ, *О некоторых бесконечных системах уравнений*. Журнал вычислительной математики и математической физики, *1*, 173—176 (1961).

RECENZII

E. BOTEZ, *Cinematica maşinilor unelte*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1961, 386 p.

Una din principalele probleme, pe care proiectantul de maşini-unelte trebuie să o rezolve, constă în alegerea lanţurilor cinematice specifice tipului de maşină-unealtă ce trebuie proiectată. Autorul şi-a propus ca în această lucrare să analizeze şi să sintetizeze aspectele principale, pe care le ridică specificul cinematicii maşinilor-unelte.

Lucrarea este împărţită în 5 părţi şi se adresează inginerilor şi tehnicienilor, care exploatează sau proiectează maşini-unelte, fiind utilă în acelaşi timp şi studenţilor care se pregătesc în această specialitate.

Autorul bazîndu-se pe o bibliografie însemnată, compusă din 131 de titluri ca şi pe bogata experienţă acumulată în studiile personale efectuate în ultimii ani, reuşeşte să prezinte o lucrare interesantă şi folositoare specialiştilor din acest domeniu.

Prima parte a lucrării tratează despre problemele de bază ale cinematicii maşinilor-unelte. Se face o analiză cuprinzătoare asupra cinematicii generării suprafeţelor. Metodele utilizate de autor pentru aceasta dau posibilitatea unei interpretări şi aprofundări a problemelor cu o claritate deosebită. La aceasta ajută în mare măsură şi sistemul de simbolizare ales. Partea I se încheie cu o analiză a metodelor de antrenare a lanţurilor cinematice, care se reduce la strictul necesar pentru a înţelege funcţionarea acestora.

Partea a II-a a lucrării tratează lanţul cinematic principal. Sînt prezentate caracteristicile sistemelor de realizare a acestui lanţ cinematic. Astfel se analizează lanţurile cinematice principale cu variaţie în trepte şi cu variaţie continuă şi specificul lor legat de sistemul transmisiei şi anume, mecanic, hidraulic sau electric, atît în cazul mişcărilor de rotaţie, cît şi al mişcărilor rectilinii. Se insistă asupra structurii şi caracteristicilor de reglaj.

Partea a III-a a lucrării se ocupă de lanţurile cinematice de avans. Autorul utilizează o metodică de examinare a problemelor similară cu cea din partea a doua, reuşind să scoată în relief elementele caracteristice ale acestor lanţuri cinematice. Cinematica mecanismelor pentru obţinerea avansului continuu şi periodic este examinată de autor, atît din punct de vedere teoretic cît şi al mecanismului pentru reglarea lanţului de avans.

Partea a IV-a a lucrării tratează problemele ridicate de lanţurile cinematice generatoare. După o prezentare a problemei unde sînt arătate caracteristicile acestor lanţuri cinematice se analizează următoarele grupe de lanţuri cinematice : de filetare, de rulare, de detalonare, de divizare şi de copiere. Metodica unitară adoptată de autor permite o înţelegere uşoară a problemelor şi totodată scoate în evidenţă necesitatea analizei unui lanţ cinematic strîns legată de mecanismele din care el va fi realizat.

În ultima parte a lucrării sînt prezentate exemple de analiză şi sinteză cinematică. Acest capitol vine să sublinieze încă o dată necesitatea cunoaşterii temeinice a problemelor prezentate în părţile anterioare şi totodată utilitatea lor practică.

Autorul în această lucrare utilizînd un sistem aparte de simbolizare şi introducînd o serie de noţiuni noi în interpretarea diferitelor aspecte ce le ridică lanţurile cinematice, reuşeşte să aducă aportul său personal în rezolvarea problemelor tratate.

În domeniul literaturii de specialitate din ţara noastră lucrarea *Cinematica maşinilor-unelte* vine să completeze un gol existent, avînd totodată calitatea că ridică o serie de probleme importante care pînă în prezent nu erau suficient de bine adîncite.

M. P. Popov

ALEXANDRU STOENESCU, GABRIELA ŢIŢEICA, *Teoria giroscopului şi aplicaţiile sale tehnice*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1961, 180 p.

Teoria giroscopului constituie unul dintre cele mai importante capitole ale dinamicii solidului rigid, atît datorită dezvoltărilor matematice pe care le implică cît — mai ales — datorită numeroaselor sale aplicaţii în tehnica clasică şi modernă. Ea a fost dezvoltată în multe lucrări pînă în prezent, de la monografiile clasice ale lui R. Grammel sau A. Sommerfeld pînă la cele ale lui E. L. Nikolai sau B. V. Bulgakov.

Giroscopul este întîlnit în cele mai variate împrejurări, de la sfîrleaza cu care se joacă copiii pînă la aparatele de dirijare şi conducere a rachetelor purtătoare de sateliţi sau planete artificiale. Fenomeneul giroscopic a fost studiat cu pasiune în decursul timpului, ,,farmecul deosebit al sfîrlezei constînd — după cum spune R. Grammel — în lupta continuă între două proprietăţi fundamentale ale masei : greutatea, care tinde să trîntească sfîrleaza, şi inerţia, care se opune căderii într-un mod ciudat". Autorii, în această nouă ediţie revăzută şi adăugită a lucrării lor, pun în evidenţă atît aspectul teoretic al acestei probleme cît — în mod deosebit-numeroasele aplicaţii tehnice pe care le are.

Cartea este alcătuită din patru părţi.

Partea I, cuprinzînd cinci capitole, este destinată unor noţiuni introductive de calcul vectorial şi mecanică generală. Se tratează cinematica rigidului cu punct fix, teoremele generale ale dinamicii, problema momentelor de inerţie şi ecuaţiile generale ale mişcării solidului rigid cu un punct fix.

În partea a II-a (13 capitole) se tratează teoria giroscopului. După un studiu cu caracter general, în care sînt cuprinse şi reprezentările geometrice ale lui Poinsot şi MacCullagh legate de mişcarea rigidului suspendat în centrul de greutate şi acţionat numai de greutatea sa, se consideră diferite probleme speciale. Menţionăm astfel determinarea condiţiilor ca axa de simetrie în jurul căreia se roteşte giroscopul să aibă o direcţie fixă sau a condiţiilor ca un giroscop, sub acţiunea momentului greutăţii sale, să aibă o mişcare de precesie regulată. Fenomenul giroscopic şi influenţa cuplului giroscopic, sînt, de asemenea, puse în evidenţă. Capitole speciale sînt destinate calculului forţelor de inerţie în mişcarea de precesie regulată a giroscopului, precum şi mişcării giroscopului în care apar variaţii ale unghiului de nutaţie. Influenţa rotaţiei pămîntului şi influenţa frecării sînt de asemenea luate în consideraţie. Menţionăm ca un fapt interesant prezentarea în paralel a mişcării giroscopice a pămîntului şi a atomului.

Aplicaţiile tehnice ale giroscopului sînt cuprinse în cele 11 capitole ale părţii a III-a. Se consideră astfel efectele giroscopice care apar la mişcarea vehiculelor în curbă, în special cuplurile giroscopice stabilizatoare în mişcarea bicicletei. O altă aplicaţie este cea legată de morile cu role şi de morile pendulare. În mişcarea avioanelor şi vapoarelor, precum şi în balistică apar de asemenea fenomene giroscopice interesante. Giroscopul este apoi studiat ca stabilizator al vapoarelor şi al vagoanelor ce merg pe o singură şină. O importantă problemă considerată este cea a pilotului-automat. Menţionăm şi diferite aplicaţii moderne ale giroscopului care au fost luate în considerare, precum sînt navigaţia prin inerţie şi dirijarea giroscopică a rachetei. În legătură cu fiecare din aceste direcţii de aplicare autorii au studiat aspecte cît mai variate. De exemplu, în problemele de navigaţie se consideră atît problema orizontului giroscopic cît şi compasul giroscopic.

Partea a IV-a este dedicată unui capitol de probleme şi aplicaţii numerice.

Lucrarea este scrisă într-o formă deosebit de clară şi accesibilă, fără a se pierde nimic din rigurozitatea prezentării. Prin redarea celor mai importante rezultate obţinute în această problemă, autorii reuşesc să prezinte într-o formă concisă o monografie ştiinţifică utilă atît în învăţămîntul superior cît şi pentru inginerii proiectanţi.

P. P. Teodorescu

Г. Н. САВИН, В. В. ГЕОРГИЕВСКАЯ, *Развитие механики на Украине за годы советской власти* (Dezvoltarea mecanicii în Ucraina în anii puterii sovietice), Изд. Акад. Наук Укр. ССР, Kiev, 1961, 284 p.

După o scurtă introducere privind dezvoltarea mecanicii în Ucraina, care a dat cîteva nume mari : M. V. Ostrogradskii, A. M. Liapunov, V. A. Steklov, de la Universitatea din Harkov, N. M. Krîlov, V. P. Ermakov, G. K. Suslov, de la Universitatea din Kiev, I. D. Sokolov, de la Universitatea din Odesa, V. L. Kirpicev, K. K. Siminskii, S. P. Timoşenko, E. O. Paton, de la Politehnica din Kiev, A. N. Dinnik, de la Institutul minier din Dniepropetrovsk etc., se trece la analiza şcolilor create de A. N. Dinnik, în domeniul flambajului şi teoriei elasticităţii şi de N. M. Krîlov şi N. N. Bogoliubov în domeniul mecanicii neliniare.

În prezent, multe cercetări se duc în cadrul Institutului de mecanica construcţiilor al Academiei de ştiinţe a R.S.S. Ucraina. Direcţiile principale de cercetare în acest institut sînt următoarele : rezistenţa, stabilitatea şi vibraţiile sistemelor de bare dincoace şi dincolo de limita de elasticitate, starea de tensiune şi de deformaţie a plăcilor subţiri plane şi curbe, rezistenţa statică şi dinamică a materialelor şi elementelor de construcţie, organe de maşini, mecanică neliniară, aparatură şi maşini de încercat. În unele din aceste direcţii se continuă tradiţia înaintaşilor şi a şcolilor create.

O analiză succintă este destinată principalelor domenii de cercetare şi anume : mecanica generală, elasticitatea şi plasticitatea, rezistenţa construcţiilor, aerohidromecanica, metode experimentale, maşini de calcul, alte ramuri ale mecanicii.

Cea mai mare parte a lucrării (246 pagini) este însă destinată datelor bibliografice. Sînt expuse pe autori şi în ordine alfabetică lucrările de după Marea Revoluţie din Octombrie a R.S.S. Ucraina în domeniul mecanicii. O cît de sumară parcurgere arată varietatea de teme abordate şi bogăţia de rezultate prezentate. În felul acesta lucrarea este de un interes deosebit pentru toţi cercetătorii din domeniul mecanicii, putînd fi utilizată cu succes în strîngerea de material bibliografic ; de asemenea, scurta introducere a cărţii ne dă cele mai importante date cu privire la viaţa în domeniul mecanicii în R.S.S. Ucraina.

P. P. Teodorescu

Д. Е. ДОЛИДЗЕ, *Некоторые вопросы нестационарного течения вязкой жидкости.* (Unele probleme ale scurgerii nestaţionare a fluidelor vjscoase), Издательство Академии Наук Грузинской ССР, Тбилиси, 1960, 332 p.

Această monografie asupra scurgerii laminare a fluidelor vîscoase incompresibile, a prea timpuriu decedatului prof. D. E. Dolidze, constituie o interesantă contribuţie la studiul matematic al problemei. Ea se bazează în mare parte pe rezultatele obţinute de autor în cercetările sale, completate cu lucrările cele mai semnificative în această direcţie ale altor oameni de ştiinţă.

Primul capitol este consacrat aspectelor generale ale problemei. Se începe astfel cu stabilirea ecuaţiilor Navier-Stokes pentru fluidele incompresibile, în coordonate carteziene şi curbilinii. Se precizează apoi condiţiile iniţiale şi la limite şi se trece la prezentarea ecuaţiilor aproximative corespunzătoare la valori mici sau mari ale numărului lui Reynolds. Un paragraf special este consacrat teoremelor de unicitate a soluţiilor ; se demonstrează o teoremă generală de unicitate şi se consideră cîteva cazuri particulare, printre care şi acela al scurgerii în stratul limită. Un ultim paragraf este închinat în special unor observaţii asupra mişcărilor unidimensionale, indicîndu-se soluţiile unor probleme la limite.

Capitolul al doilea conţine tratarea problemei mişcărilor bidimensionale în cazul general. Primul caz luat în considerare este acela al scurgerilor lente, în care se neglijează forţele de inerţie, ceea ce face ca ecuaţiile de mişcare să devină liniare. Studiul este făcut cu ajutorul teoriei potenţialului, al funcţiei lui Green şi al ecuaţiilor integrale. Se stabileşte mai întîi soluţia fundamentală şi se introduce noţiunea de potenţial hidrodinamic, aşa cum a fost dată de F. Odqvist pentru scurgerea staţionară şi se generalizează apoi pentru scurgerea nestaţionară. În felul acesta, se ajunge la construirea soluţiei problemei la limite sub forma unui sistem de ecuaţii integrale pentru care se demonstrează unicitatea soluţiei. În paragraful următor, se introduce funcţia de curent pentru mişcarea bidimensională lentă şi apoi funcţia hidrodinamică a lui Green, cu ajutorul căreia se reprezintă, mai departe, funcţia de curent. Pornindu-se de la faptul cunoscut că funcţia de curent a scurgerii lente nestaţionare se poate reprezenta ca suma unei funcţii armonice şi a unei funcţii care este soluţia ecuaţiei căldurii, se ajunge la o ecuaţie integrală neomogenă singulară de tip Fredholm care poate servi la determinarea funcţiei de curent. Cazul general al mişcării bidimensionale, în care nu se mai neglijează forţele de inerţie, este tratat de autor prin introducerea tensorului hidrodinamic al lui Green, cu ajutorul căruia problema la limită este redusă la rezolvarea unui sistem de ecuaţii integrale. În continuare, se discută găsirea soluţiilor acestui sistem, sub formă de serii şi se studiază problema unicităţii. Se indică, de asemenea, şi o rezolvare aproximativă, pentru cazul în care numărul lui Reynolds este mic. Ultimul paragraf este dedicat studiului funcţiei de curent în cazul general al mişcării bidimensionale.

Capitolul al treilea tratează unele cazuri particulare ale mişcării bidimensionale. Prima problemă studiată este aceea a scurgerii într-un domeniu mărginit de pereţi solizi plani, impermeabili sau poroşi, soluţiile fiind construite cu ajutorul ecuaţiilor integrale. În mod asemănător se cercetează şi problema scurgerii în domenii mărginite de pereţi cilindrici. Un paragraf special conţine consideraţii asupra scurgerii în stratul limită, pentru care se dă, de asemenea, o ecuaţie integrală.

Conform unei scheme asemănătoare este tratată în capitolul al patrulea mişcarea tridimensională. Astfel, se stabileşte mai întîi soluţia fundamentală pentru scurgerea lentă, se trece apoi la introducerea potenţialilor hidrodinamici tridimensionali şi în cele din urmă se găseşte cu ajutorul lor soluţia problemei la limite, sub forma unui sistem de ecuaţii integrale. În continuare, se defineşte funcţia de curent pentru cazul mişcării axial-simetrice. Paragraful următor este dedicat cazului general al mişcării tridimensionale şi debutează prin introducerea tensorului hidrodinamic tridimensional al lui Green, cu ajutorul căruia se construieşte soluţia problemei la limite, sub forma unui sistem de ecuaţii integrale. În continuare, se studiază rezolvarea exactă şi aproximativă a acestui sistem. Ultimul paragraf al capitolului conţine cîteva cazuri particulare, care pot fi studiate fără introducerea potenţialilor hidrodinamici şi a tensorului lui Green. Este vorba în special de mişcări de rotaţie sau de mişcări lente.

Ultimul capitol cuprinde studiul stărilor limită ale scurgerilor nestaţionare, denumire sub care autorul înţelege comportarea acestor scurgeri, atunci cînd timpul tinde către infinit. Cu ajutorul tensorului hidrodinamic al lui Green pentru scurgerea staţionară, introdus de F. Odqvist, se construieşte soluţia problemei la limite corespunzătoare. Utilizînd această reprezentare, autorul găseşte soluţia problemei la limite pentru scurgerea nestaţionară. Mai departe, în alt paragraf, se studiază starea limită a scurgerii într-un domeniu interior, prin operaţii de trecere la limită, atît în cazul particular al mişcării lente cît şi în cazul general. Un paragraf separat tratează această problemă pentru scurgerea între pereţi paraleli. Consideraţii analoage sînt efectuate de autor şi pentru scurgerea într-un domeniu exterior, cu aplicaţie la cîteva cazuri particulare (scurgerea într-un semispaţiu şi în jurul unei sfere). Interesul principial al unui astfel de studiu constă în faptul că există cazuri în care pentru scurgerea nestaţionară soluţia problemei la limite este regulată şi unică, în timp ce problema staţionară corespunzătoare nu are soluţie regulată.

Monografia lui D. E. Dolidze are un pronunţat caracter matematic şi este valoroasă îndeosebi prin concluziile ei referitoare la aspectele generale ale rezolvării problemelor la limite pentru ecuaţiile Navier-Stokes. Studiul amănunţit, efectuat pe baza celor mai recente rezultate cunoscute la data redactării, are marele merit de a nu lăsa neclarificat nici un aspect al problemelor abordate. Deşi din punct de vedere practic mişcările laminare prezintă un interes mai redus, această monografie poate fi consultată cu folos de către specialiştii din domeniul mecanicii fluidelor.

T. Oroveanu

Ю. М. ШЕХТМАН, *Фильтрачия малоконцентрированных суспенсии* (Filtrarea suspensiilor cu concentraţie mică). Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1951, 212 p.

Problema filtrării printr-un mediu poros a unui fluid care conţine particule solide în suspensie are o importanţă deosebită prin numeroasele aplicaţii practice, dintre care cităm cîteva şi anume : calculul filtrelor, colmatarea canalelor şi a lacurilor de reţinere sau aceea a zonei din vecinătatea găurii de sondă dintr-un strat petrolifer. Studiile teoretice şi experimentale, ale căror rezultate sînt prezentate de autor în această carte, sînt deci menite să contribuie la rezolvarea eficientă a problemelor de felul celor amintite mai sus.

Primul capitol conţine o serie de consideraţii generale asupra proprietăţilor solurilor şi în legătură cu colmatarea acestora, asupra proprietăţilor apelor naturale precum şi unele aspecte fundamentale ale teoriei filtrării.

Capitolul al doilea este consacrat punerii problemei şi stabilirii ecuaţiilor diferenţiale. După o trecere în revistă destul de amplă a cercetărilor efectuate pînă în prezent, se trece la stabilirea ecuaţiilor de continuitate şi de mişcare, atît pentru faza fluidă cît şi pentru aceea solidă. Aceste ecuaţii sînt apoi particularizate pentru cazul filtrării liniare. Tot pentru acest ultim caz se deduce şi o ecuaţie de bilanţ, care reprezintă o legătură între concentraţia volumetrică de substanţă solidă şi saturaţia în lichid a spaţiului poros. Aceasta este prima dintre ecuaţiile care servesc efectiv la studiul problemei, o a doua ecuaţie fiind aceea care exprimă cinetica procesului. Pentru precizarea formei acesteia din urmă este necesar să se facă unele ipoteze în care sînt luate în considerare ambele situaţii posibile şi anume sau colmatarea mediului poros cu particule solide sau antrenarea particulelor solide de către fluidul care curge. Se ajunge astfel la un sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de primul ordin respectiv, prin eliminarea uneia din funcţiile necunoscute, la o ecuaţie hiperbolică de ordinul al doilea pentru care se arată că problema lui Cauchy este corect pusă.

Capitolul următor este consacrat găsirii efective a soluţiilor pentru cazurile indicate mai sus, considerîndu-se şi situaţia mai complicată în care debitul este variabil în timp.

În capitolul al patrulea se tratează problema filtrării plane cu simetrie radială, urmărindu-se o cale cu totul analoagă cu aceea utilizată în studiul filtrării liniare. Se dau şi cîteva exemple de calcul, dintre care menţionăm pe acela al unui filtru pentru combustibil lichid.

Următoarele două capitole conţin descrierea experienţelor şi prezentarea rezultatelor obţinute de autor atît pentru cazul colmatării cît şi pentru acela al antrenării particulelor solide.

Recomandaţiile practice care rezultă în urma efectuării studiului teoretic şi experimental sînt date în ultimul capitol. Lucrarea mai conţine şi patru anexe destul de dezvoltate în care se discută pe larg teoria fenomenului în cazul filtrării liniare şi radiale, indicîndu-se metodele de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale şi apoi filtrarea amestecului în cazul în care particulele solide sînt de dimensiuni diferite. Ultima anexă conţine cîteva exemple de calcul pentru scurgeri liniare şi radiale.

Specialiştii care se interesează de problemele menţionate la începutul acestei recenzii vor găsi în cartea lui Iu. M. Şehtman un material preţios, care poate aduce contribuţii considerabile în ameliorarea soluţiilor practice.

T. Oroveanu

КИМ А. КХ., *Некоторые вопросы реологии вязко-пластичных дисперсных систем* (Cîteva probleme ale reologiei sistemelor disperse vîscoplastice). Минск, Редакционно-издательств. отдел БПИ, 1960, 81 p.

Este tratată problema neliniară a scurgerii fluidelor compresibile în tuburi cilindrice cu secţie oarecare, mişcarea plană în difuzorul parabolic şi mişcarea axial-simetrică în conul cu secţie circulară pentru un model ,,Hersey-Iliuşin" :

$$p_{x_i x_k} = -\partial_{ik}\, p + \left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{x_k}}{\partial x_i}\right);\ i, k, = 1,2,3,$$

v_{x_i} fiind vitezele de deformare iar $p_{x_i x_k}$ tensiunile. În domeniul viscoplastic, deformaţia este considerată ireversibilă. În cazul cînd tensiunile nu depăşesc valoarea τ_0 se consideră o lege elastică a deformaţiei ($h \leqslant \tau_0$), h fiind invariantul reprezentînd *intensitatea tensiunilor*.

În primul capitol se stabileşte ecuaţia diferenţială neliniară a mişcării în tuburi. Se consideră nucleul secţiunii transversale a tubului definit ca o zonă mărginită de o curbă închisă pe care tensiunea tangenţială ia valoarea limită τ_0. În interiorul lui, deformaţia are un caracter elastic cu proprietăți de relaxare după înlăturarea gradientului de presiune. Toate punctele nucleului au viteza maximă ce se atinge în tub.

Reducînd ecuația diferențială la o formă în care apare derivata normală la o curbă în secția transversală și raza ei de curbură, se obține o serie de rezultate calitative privind geometria nucleului.

Sînt rezolvate cazurile scurgerii în cilindrul circular, între cilindri coaxiali (după alți autori). Pentru rezolvarea în cazul general se propune o metodă inversă : fiind dat nucleul, se deduce conturul secțiunii prin calcule folosind diferențe. Pe baza ei se rezolvă cazul secțiunii dreptunghiulare, triunghiulare cu sau fără tub circular interior.

În al doilea capitol se studiază mișcarea plană într-un unghi determinîndu-se vitezele, nucleul și presiunile cu ajutorul unor soluții de forma $\partial_r^* = \Sigma \omega_i (\theta) r_i$ etc., $\omega_i(\theta)$ fiind funcții zonale de unghi, iar r distanța la vîrf. Se mai rezolvă cazul scurgerii în un domeniu interior la două parabole.

În capitolul al treilea se tratează cazul mișcării în conul circular și a conului circular parabolic indicîndu-se procedeele de rezolvare.

Lucrarea este orientată în direcția dezvoltării teoriei neliniare reologice a scurgerii în tuburi prezentînd interes atît din punct de vedere teoretic cît și pentru aplicații practice.

M. Mișicu

А. М. ОВЕЧКИН, *Расчет железобетонных осесимметричных конструкций* (Calculul construcțiilor de beton armat cu simetrie axială). Гос. изд. лит. по строительству, архитектуре и строительным материалам, Москва, 1961, 256 p., 144 fig.

Una dintre direcțiile principale ale studiilor actuale în domeniul mecanicii construcțiilor o constituie generalizarea introducerii metodei echilibrului limită în problemele de proiectare și de verificare a capacității portante a construcțiilor static nedeterminate.

Avantajele de ordin științific și economic ale acestei metode au determinat în ultima vreme o desfășurare rapidă a studiilor teoretice și experimentale privind capacitatea de rezistență a construcțiilor, ale căror rezultate au fost concretizate, pentru unele tipuri de elemente de construcții și construcții sub formă de prescripții oficiale de calcul.

Caracteristica principală a majorității acestor studii este referirea lor la elemente și structuri plane.

Din acest punct de vedere, cartea prof. A. M. Ovecikin reprezintă prima lucrare de mari proporții în domeniul calculului capacității portante a unei categorii de construcții spațiale, prin metoda echilibrului limită.

Apariția acestei lucrări este o consecință logică a activității îndelungate a prof. A. M. Ovecikin în domeniul teoriei construcțiilor cu simetrie axială, ea marcînd saltul de la analiza echilibrului elastic la aceea a echilibrului limită pentru categoria de construcții studiată.

În prima parte a lucrării se prezintă, în mod succint, bazele calculului plăcilor curbe de revoluție în stadiul elastic. Se au în vedere cupolele sferice și conice, precum și plăcile cilindricel de revoluție. Ca un caz particular se prezintă comportarea plăcilor circulare plane în stadiu elastic.

Partea a doua a cărții conține teoria echilibrului limită pentru categoria de construcții luată în considerație. Începutul acestei părți se remarcă prin prezentarea deosebit de clară și sugestivă a schemelor posibile de rupere plastică a plăcilor curbe sferice, conice şi cilindrice de revoluţie.

O extindere apreciabilă este acordată stabilirii ecuaţiilor de echilibru a plăcilor curbe de revoluţie din beton armat solicitate de sarcini axial simetrice.

Se au în vedere :

— o sarcină concentrată aplicată în vîrful cupolei ;

— o sarcină inelară, uniform distribuită pe ml ;

— o sarcină distribuită pe toată suprafaţa cupolei.

În lucrare se prezintă aplicarea concretă, inclusiv prezentarea formulelor de calcul, a celor două procedee ale metodei echilibrului limită : procedeul static şi procedeul cinematic. Studiul este extins atît la plăci curbe groase cît şi la plăcile curbe subţiri.

Este de remarcat analiza influenţei inelului de bază asupra capacităţii portante a structurilor examinate.

O atenţie deosebită este acordată posibilităţilor de rupere casantă a cupolelor, în care caz metoda echilibrului limită devine, evident, inaplicabilă. Ruperea casantă a cupolelor de beton armat poate avea loc fie prin secţiuni înclinate, fie prin distrugerea zonei comprimate a betonului.

Pe baza analizei acestor două situaţii se precizează limitele de aplicabilitate ale metodei echilibrului limită la cupolele de revoluţie din beton armat.

Această parte a cărţii se încheie cu un paragraf în care se prezintă influenţa sarcinilor dinamice asupra cupolelor.

Ultima parte a lucrării cuprinde sinteza unui vast studiu experimental efectuat pe modele de cupole din beton armat. Scopul lucrărilor experimentale a fost, pe de o parte, verificarea schemelor de rupere iar, pe de alta, măsura în care rezultatele experimentale confirmă capacitatea portantă obţinută pe cale teoretică.

Studiul experimental efectuat justifică pe deplin aplicabilitatea metodei echilibrului limită la determinarea capacităţii portante a construcţiilor de beton armat cu simetrie axială.

În lucrare nu se examinează problema stabilităţii acestor construcţii.

Cartea prof. A. M. Ovecikin este o lucrare originală unică în domeniul teoriei echilibrului limită a construcţiilor de beton armat cu simetrie axială.

Numeroasele probleme examinate şi soluţionate în cadrul lucrării, justificarea soluţiilor obţinute de către studiile experimentale efectuate precum şi procedeele practice de calcul prezentate reprezintă o contribuţie extrem de preţioasă nu numai din punct de vedere ştiinţific, dar şi pentru activitatea practică a inginerilor constructori care se ocupă cu proiectarea construcţiilor de beton armat cu simetrie axială.

V. Petcu

A. M. ДУБИНСКИЙ, *Расчет несущей способности железобетонных плит* (Calculul capacităţii portante a plăcilor plane de beton armat). Госстройиздат, УССР. Киев, 1961, 176 p., 60 fig.

Cartea candidatului în ştiinţe tehnice A. M. Dubinski este o sinteză a lucrărilor efectuate pînă în prezent de numeroşi cercetători, inclusiv autorul, privind determinarea capacităţii portante a plăcilor plane de beton armat, cu armătura aşezată pe două direcţii, pe baza echilibrului limită.

Studiul se referă exclusiv la plăci independente.

În tratarea teoretică a problemelor este folosită exclusiv metoda cinematică.

În prima parte a lucrării (cap. I) se prezintă principiile calculului plăcilor de beton armat prin metoda echilibrului limită, legile de formare a mecanismului de rupere, precum și diferitele forme ale ecuației care caracterizează echilibrul limită.

Un prim loc în lucrare îl ocupă plăcile egal armate pe două direcții, simplu rezemate sau articulate pe contur, solicitate de o sarcină concentrată, respectiv de o sarcină uniform distribuită (cap. II și III).

O atenție deosebită este acordată influenței rigidității colțurilor și armăturilor de la fața superioară asupra capacității portante a plăcilor.

În această parte a lucrării se dau de asemenea indicațiile necesare pentru cazurile în care apare posibilitatea existenței mai multor scheme de rupere.

Formulele de calcul deduse se referă la plăci dreptunghiulare, trapezoidale, triunghiulare și circulare.

Plăcile inegal armate pe cele două direcții (denumite de autor plăci ortotrope) fac obiectul capitolului IV.

Studiul se axează pe determinarea raportului dintre cantitățile de armătură de pe cele două direcții ale plăcii (denumit de autor coeficient de ortotropie) care corespunde soluției celei mai avantajoase din punct de vedere economic. Se studiază plăcile dreptunghiulare simplu rezemate pe contur, solicitate de sarcini uniform distribuite sau de sarcini trapezoidale, precum și plăcile trapezoidale simplu rezemate pe contur, solicitate de sarcini uniform distribuite.

În ultimul capitol al cărții (cap. V) se studiază, în cazul general, capacitatea portantă a plăcilor încastrate perfect pe contur.

Lucrarea cuprinde tabele de calcul pentru majoritatea cazurilor tratate, iar modul de aplicare al formulelor deduse este ilustrat prin exemple de calcul.

Cartea candidatului în științe tehnice A. M. Dubinski, reprezintă o contribuție substanțială la teoria calculului plăcilor plane de beton armat, prin metoda echilibrului limită.

Ea constituie un ajutor deosebit de util în activitatea de proiectare a plăcilor cu armătura așezată pe două direcții.

V. Pelcu

* * * *Вопросы теории пластичности и прочности строительных конструкции.* (Probleme ale teoriei plasticității și rezistenței construcțiilor civile), Труды института (lucrările institutului), nr. 4, Госстройиздат, Москва, 1961, 236 p.

În această lucrare, scoasă de Institutul central de cercetări științifice în construcții al Academiei de construcții și arhitectură a U.R.S.S., sub redacția prof. A. R. Rjanițîn, sînt prezentate 16 articole din domeniul mecanicii construcțiilor, care caracterizează diferite direcții de cercetare teoretică ale acestui institut.

Astfel A. R. Rjanițîn se ocupă de probleme de dimensionare prin metoda coeficientului de siguranță. În trei articole, G. A. Gheniev studiază probleme de propagare a undelor bidimensionale în pămînturi, sub fundații și în cazul a diferite construcții subterane ; mediul este considerat cu proprietăți plastice (caz compresibil) sau cu proprietăți vîscoase, ecuațiile neliniare la care se ajunge fiind integrate prin metode aproximative de calcul — de exemplu metoda diferențelor finite.

Probleme variate sînt atacate de M. I. Estrin. Astfel, în afara unui studiu dedicat plăcilor subţiri cilindrice şi a altui articol despre calculul plăcilor subţiri pleoştite, cu simetrie axială, alcătuite din material cu proprietăţi vîscoelastice, autorul prezintă alte trei lucrări ce tratează probleme de teoria plasticităţii; menţionăm în special încercările de liniarizare a condiţiilor de plasticitate în cazul problemei dinamice.

În cele trei articole ale sale M. I. Erhov se ocupă, în afară de cazul barelor cu pereţi subţiri, de echilibrul grinzilor drepte, alcătuite dintr-un material cu proprietăţi ideal plastice. V. V. Kupriianov studiază metodica de calcul a cadrelor în stadiu elastoplastic, S. Z. Vulfson consideră unele probleme ale teoriei liniare a fluajului iar Cijao Tsu-U se ocupă de cazul plăcilor plane la starea limită de rupere.

Este important să menţionăm că aceste lucrări, cu toate că au un pronunţat caracter teoretic, sînt generate de probleme impuse de practica inginerească — probleme pe care încearcă să le soluţioneze. Culegerea de articole prezintă un interes deosebit atît pentru cercetătorii din domeniul mecanicii construcţiilor cît şi pentru inginerii proiectanţi.

P. P. Teodorescu

* * *, *Прыборостроение и средства автоматизации контроля.* (Construcţia de aparate şi mijloace de automatizare a controlului). Academia de Ştiinţe a U.R.S.S. (Institutul de informare ştiinţifică şi tehnică), Moscova, 1961, vol. I şi II, 567 p.

Această lucrare răspunde cerinţelor actuale, impuse de necesitatea creării celor mai noi aparate şi mijloace de automatizare, control şi comandă a proceselor de producţie, dat fiind atît proporţiile şi nivelul producţiei moderne cît şi desfăşurarea unui progres tehnic continuu.

Lucrarea, prin cele două volume, reprezintă o culegere de articole scrise de specialişti recunoscuţi în domeniile respective, sub redacţia lui S. I. Freiberg.

De altfel, — aşa cum se anunţă în prefaţă — această culegere constituie doar o primă publicaţie din cele proiectate a fi tipărite în domeniul construcţiei de aparate şi mijloace de automatizare a controlului.

Primul volum cuprinde articole privind *metodele nedestructive de încercare şi control al materialelor*. Aceste articole au un caracter de sinteză, sursele şi materialele utilizate fiind atît sovietice cît şi străine. După un prim articol în care se arată rolul încercărilor nedestructive în tehnica modernă, celelalte se referă la realizările cele mai noi în metodele nedestructive ale defectoscopiei cu ultrasunet, cu raze X şi γ, prin pulberi magnetice, curenţi turbionari şi indicatori radioactivi, fluoroscopie.

Unul din articole tratează despre grosimetria electrică şi magnetică.

Pentru fiecare metodă se arată bazele sale fizice, aparatura cea mai modernă, metodica controlului, posibilităţile şi domeniile de aplicaţie.

Cel de-al doilea volum cuprinde articole despre *aparate metrologice şi mijloace de automatizare a controlului*.

După ce se dau unele cunoştinţe despre istoricul problemei respective, fiecare articol prezintă cele mai noi şi moderne realizări, ca aparate şi metodă, atît din U.R.S.S., cît şi din străinătate.

Se tratează astfel despre : aparate pneumatice pentru măsurarea dimensiunilor în construcţia de maşini ; maşini şi aparate moderne pentru încercările mecanice ale metalelor ; aparate pentru măsurarea timpului şi domeniul lor de aplicare; aparate electronomecanice cu electrovacuum; aparate de control-măsură mecanotronice; automatizarea şi mecanizarea controlului parametrilor geometrici ai pieselor şi organelor de maşini şi a controlului roţilor dinţate.

Această culegere, deosebit de utilă, este destinată personalului tehnico-ingineresc din industria constructoare de maşini şi aparate şi studenţilor institutelor de învăţămînt superior tehnic şi ea constituie un răspuns imediat şi valoros al oamenilor de ştiinţă şi specialiştilor sovietici la sarcinile puse de planul septenal, în care aceste probleme — de automatizare, control şi comandă a proceselor de producţie — ocupă un loc de deosebită importanţă.

M. Năstase

А. ЛИСОВСКИЙ, *Колебания прямых стержней и рам* (Vibraţiile barelor şi cadrelor drepte). Gosudarstvennoe izdatelstvo literaturî po stroitelstvu, arhitekture i stroitelnîm materialam, Moskva, 1961.

Lucrarea este o succintă monografie asupra vibraţiilor barelor şi cadrelor tratînd de asemenea în aceeaşi dezvoltare şi noţiunile introductive în teoria vibraţiilor.

Se prezintă astfel cazul vibraţiilor libere cu un singur grad de libertate fără şi cu amortizare. Ca forţe de amortizare se consideră atît cazul forţelor de frecare independente de viteză cît şi al celor proporţionale cu viteza. Exemplificările se fac asupra barelor în ipoteza neglijării masei repartizate.

Vibraţiile forţate sînt tratate atît cu, cît şi fără amortizare. O dezvoltare mai mare este dată diferitelor tipuri de forţe perturbatoare. În afară de cazul sarcinilor periodice este prezentat cazul acţiunii unei forţe aplicată brusc, a unei forţe perturbatoare variabile liniar sau arbitrar.

Un capitol special priveşte vibraţiile cu două şi mai multe grade de libertate, prezentîndu-se aici principalele metode de rezolvare.

Pentru sistemele cu masă continuă este prezentat cazul oscilaţiilor transversale ale barelor de secţiune constantă.

Metodele de calcul aproximativ al frecvenţelor proprii pentru sistemele cu masă continuă formează, de asemenea, obiectul unui capitol separat. Sînt prezentate aici metoda energetică, cea a aproximaţiilor succesive, formulele aproximative ale lui Dunkerly şi Geiger, metoda diferenţelor finite etc.

Vibraţiile cadrelor plane sînt tratate atît pentru cazul maselor concentrate cît şi pentru cazul maselor repartizate.

În privinţa cadrelor spaţiale este prezentat cazul cadrului spaţial cu patru montanţi, precum şi cazul cadrelor etajate. Pentru cazul cadrelor cu patru montanţi este studiat cazul prezenţei unei mase concentrate, a două mase concentrate şi cazul unei sarcini distribuite.

Lucrarea conţine, de asemenea, numeroase exemplificări şi aplicaţii interesante.

Datorită modului pedagogic de tratare a problemelor, prezenta monografie constituie o interesantă introducere în domeniul studiului vibraţiilor, ce poate fi uşor abordată de cei ce doresc a avea o vedere generală în acest domeniu.

Augustin Petre

RICHARD DOLEŽAL, *Grosskessel-Feuerungen, Theorie, Bau und Regelung* (Camere de ardere pentru cazane de abur mari, Teorie, construcţie şi reglaj Ed. Springer-Berlin, cu 312 fig. şi 18 tab., 1961.

În ultimii ani se manifestă pe tot globul o tendinţă susţinută de a construi cazane de abur din ce în ce mai mari, care să producă mii de tone de abur pe oră (cea mai mare centrală termică din lume este proiectată actualmente în U.R.S.S. şi capătă 4 cazane de abur cu o producţie totală de 7 600 t/h abur).

Realizarea acestor unităţi termice gigantice nu se poate obţine printr-o simplă mărire la scară a tipurilor mai mici actuale de cazane de abur. Şi în afară de aceasta, baza de combustibili clasică (cărbunii) este obligată a-şi reduce sfera de utilizare, din motive economice, în favoarea combustibililor lichizi şi gazoşi.

Factorii care determină calităţile unei centrale termice sînt numeroşi şi cu tot progresul tehnicii şi al ştiinţelor exacte azi se mai spune uneori, că un cazan de abur reuşit este nu numai un rezultat al cunoştinţelor, cît şi o chestie de noroc.

Instalaţiile mari de cazane de abur pun probleme dificile privind pregătirea combustibililor şi arderea lor. Iar construcţia camerelor de ardere pentru mai multe feluri de combustibili (solizi, lichizi, gazoşi) reclamă cunoştinţe aprofundate asupra proceselor de ardere, atît în ceea ce priveşte tehnica arderii cît şi asigurarea reglării automate a arderii în funcţie de felul combustibililor şi necesarul cantitativ de aburi. Numai aşa s-a putut scade consumul specific de căldură la circa 2 000 kcal/kWh. Pentru o raţională repartiţie şi transmisiune a căldurii, se folosesc azi metode de calcul sigure bazate pe teoria similitudinii. Cercetările şi studiile din ultimul timp au condus la stabilirea unor interesante dependenţe între unii factori determinanţi în construcţia cazanelor de abur şi a focarelor, care pun la dispoziţia inginerilor de specialitate o documentaţie de valabilitate generală şi fac posibilă construcţia noilor cazane de abur cu producţie mare, dar de dimensiuni mici şi cu mare încărcare termică.

Pe această linie de gîndire se situează lucrarea ce este recenzată în cele de faţă. Ea prezintă principiile cele mai importante (privind proiectarea şi construirea cazanelor de abur), care şi-au cîştigat prestigiul unor cunoştinţe, valabile în timp, pentru construcţia camerelor de ardere. Ea acordă o mai mică atenţie detaliilor constructive cu un caracter mai mult sau mai puţin trecător.

Materialul este împărţit în două părţi :

I. În prima parte se tratează, în 9 capitole, teoria şi elementele camerelor de ardere. Ea cuprinde în 290 pagini următoarele :

A. Evoluţia cazanelor cu abur şi a centralelor de forţe termice de la 1900—1958 şi previziunile privind dezvoltarea acestora pînă în 1975, oferind un material documentar interesant privind laturile tehnică, constructivă şi economică ; apoi încadrarea unităţilor termice mari în reţeaua energetică a ţărilor, balanţa energeticei mondiale pe cele trei stări fizice de combustibili (solizi, lichizi, gazoşi) ; încărcările termice ale camerelor de ardere care variază de la $0,1.10^6$ kcal/m^{3}h la 95.10^6 kcal/m^3 h pentru combustibili fosili şi de la 400.10^6 kcal/m^{3}h la 850.10^6 kcal/m^{3}h pentru combustibilii nucleari ; temperaturile gazelor evacuate care azi pot scădea pînă sub 100°C şi cerinţele ce se impun focarelor.

B. Tipurile camerelor de ardere : pentru combustibili solizi (ardere uscată, ardere cu film topit, ardere în ciclon) , pentru combustibili lichizi şi gazoşi se dau principiile tehnologice şi soluţiile constructive ; în completare se prezintă diferitele tipuri de încălzitoare pentru aerul de combustie, dintre care cel regenerativ găseşte o utilizare aproape exclusivă la marile cazane.

C. Procesele de ardere, încălzirea aerului pentru combustie, cenuşa şi zgura, efectele prezenţei sulfului în combustibili (coroziunile la temperaturi joase şi înalte).

D. Prepararea combustibililor solizi (măcinare, uscare etc.), lichizi și gazoși, arzătoare pentru toată gama de combustibili, alimentarea cu aer de combustie a arzătoarelor.

E. Suprafețele de încălzire (construcția suprafețelor schimbătoarelor de căldură și calitățile lor termice), răcirea camerei de ardere, factorul de formă, utilizarea camerei de ardere, gradul de luminozitate a flăcării, cîmpul temperaturilor în spațiul de ardere, factorul de murdărire, ecrane de răcire (netede și căptușite), răcirea gazelor în camera de ardere.

F. Compoziția mineralogică a reziduurilor de combustie (cenușă, zgură), legile de formare, mijloace de curățire, uzura țevilor datorită cenușii, purificarea gazelor arse, recircularea cenușii și influența recirculării asupra randamentului arderii, topirea cenușii.

G. Evacuarea reziduurilor de combustie (zgura și cenușa) ; stingerea și granularea zgurii.

H. Tratarea reziduurilor solide de combustie, instalații mecanice și hidraulice pentru tratarea zgurilor, valorificarea cenușii și zgurii după proprietățile lor fizice, recuperarea căldurii din zgură, producerea apei de adaos pentru circuitul de abur de înaltă presiune.

I. Dinamica combustiei, reglarea combustiei la variațiile de încărcare a cazanului (focarului), principii de reglaj automat al cantității de combustibil, a aerului de combustie și a tirajului, supravegherea flăcării ; o atenție deosebită se acordă funcționării în subsarcină.

II. În partea a II-a se prezintă, în 3 capitole, exemple de instalații executate. Ea cuprinde în cca 50 pagini următoarele :

A. Camere pentru arderea uscată la cărbuni bruni și huilă.

B. Camere pentru arderea cu film topit de diferite tipuri (volum mare, ciclon vertical, ciclon orizontal american, ciclon orizontal german) ; zona de radiație.

C. Cazane de abur mari pentru mai mulți combustibili (cărbune-petrol și cărbune-gaz).

După părerea noastră această parte este prea puțin dezvoltată și așteptăm ca la următoarea ediție să i se dea aceeași dezvoltare ca și primei părți.

Lucrarea este însoțită de un index bibliografic cu 304 referințe, care constituie un excelent ajutor pentru cititorii ce vor să-și aprofundeze documentarea.

Cartea poate servi ca îndreptar de bază inginerilor proiectanți, constructorilor și celor care exploatează cazanele de abur și, de asemenea, studenților de specialitate.

Is. Niculescu

* * * *Handbook of Mechanical Wear* : *Wear, Frettage, Pitting, Cavitation, Corrosion* (Manualul uzurii mecanice : uzură, frecare, ciupituri, cavitație, coroziune). Editată de Ch. Lipson și L. V. Colwell, Ann. Arbour, The University of Michigan Press, 1961, 469 p.

În acest volum se prezintă în mod succint numeroasele cercetări întreprinse în direcția lămuririi proceselor de uzură. Diversitatea aspectelor proceselor de uzură a determinat gruparea materialului în mai multe secțiuni.

Prima parte, introducerea, cuprinde probleme de ordin general : schițarea unei clasificări logice a uzurii, atît în legătură cu natura suprafețelor în contact, cît și cu caracteristicile funcționale. Se stabilesc următoarele tipuri de uzură : uzură prin adeziune, uzură prin abraziune, ciupiturile (pitting), uzura prin frecare (frettage), eroziunea prin cavitație, coroziunea electrolitică.

În partea a doua se tratează unele aspecte fundamentale ale proceselor de uzură : compatibilitatea perechilor de metale, stabilindu-se condițiile care trebuie să fie îndeplinite pentru ca uzura să fie minimă (cap. 1) și caracteristicile frecării în cazul temperaturilor ridicate (cap. 2). Se stabilește cu această ocazie importanța filmelor protectoare de oxizi, iar în capitolul următor se studiază în mod special frecarea, uzura și deteriorarea suprafețelor în cazul a diverse acoperiri cu film solid : oxizi formați în mod natural, oxizi formați prin reacții chimice de suprafață, lubrifianți solizi. În capitolul 4 se prezintă rezultatele obținute în direcția stabilirii factorilor încărcare-solicitări pentru rostogolire pură sau rostogolire și alunecare combinate, fenomen curent întîlnit în cazul roților dințate, camelor, rulmenților etc.

Partea a treia tratează aspectele legate de natura distrugerii suprafeței materialelor : în capitolul 5 se prezintă fenomenele de oboseală care au loc în imediata apropiere a suprafeței supuse proceselor de uzură ; în capitolul 6 rezistența materialelor față de sarcinile aplicate cu mișcări de rostogolire, iar în capitolul 7 se prezintă fenomenele de ciupituri la roțile dințate și mijloacele pentru reducerea lor. În sfîrșit, capitolul 8 tratează despre influența temperaturii suprafețelor asupra distrugerii lor.

Problemele privind coroziunea sînt tratate în partea a patra a lucrării. Cele patru capitole care compun această secțiune se ocupă, în ordine, de coroziunea electrolitică, de cercetări asupra cavitației (accelerate), de coroziunea de frecare și de coroziunea la temperaturi înalte. În cadrul acestor capitole, se prezintă numeroase date de un real interes practic, cum ar fi de exemplu analiza factorilor care produc uzura, sau comportarea diverselor perechi de metale întîlnite în construcția de mașini față de coroziunea electrolitică.

Partea a cincea a lucrării este consacrată problemelor de abraziune. În capitolul 13 se tratează problemele de uzură abrazivă a metalelor, iar în capitolul 14, rezistența la uzură a materialelor metalurgice.

Materialele rezistente la uzură sînt prezentate în mod special în partea a șasea a lucrării : în capitolul 15 se menționează caracteristicile materialelor feroase cu conținut ridicat de carbon (materiale grafitate, fontă perlitică, sferoidală, nodulară etc.), iar în capitolul următor rezistența la uzură a componenților fontei.

În sfîrșit, în partea a șaptea a lucrării se prezintă procesele de uzură legate de prelucrarea prin așchiere a metalelor, iar ultima parte, a opta, conține un sumar al materialului prezentat însoțit de numeroase referințe bibliografice.

Lucrarea conține un amplu material experimental, prezentat în mod critic și însoțit de o serie de concluzii interesante. Indicațiile practice privind reducerea diverselor fenomene de uzură, precum și datele asupra comportării la uzură a diverselor materiale, sînt de un deosebit interes. În concluzie, lucrarea poate fi consultată cu folos de toți acei care se preocupă de problemele de uzură în construcția de mașini.

Al. Nica

G. HELKE, *Untersuchungen zur Stabilität nichtlinearer erzwungener Schwingungen von einem Freiheitsgrad* (Cercetări privitoare la stabilirea vibrațiilor neliniare cu un grad de libertate). DVL Bericht nr. 55, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1958.

În această lucrare autorul se ocupă de studiile a diferiți autori privind stabilitatea unui anumit tip de vibrații neliniare. Pentru o apreciere critică se studiază o ecuație mai generală de forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + g(x) + \mu\left[r\left(\frac{dx}{dt}\right) + p\cos\alpha t\right] = 0 \qquad (p > 0),$$

la care se stabilesc criteriile de stabilitate şi se ajunge la concluzia importantă că în anumite condiţii stabilitatea este independentă de frecvenţa excitatoare.

Pe baza acestei concluzii se justifică rezultatele obţinute de Klotter şi Pinney şi se infirmă cele obţinute de Grim şi Malkin, care afirmă că în cazul studiat soluţiile devin nestabile dacă frecvenţa excitatoare nu ia valori mici, arătîndu-se totodată şi cauza care i-a condus pe aceştia din urmă la rezultatul inexact arătat.

Augustin Petre

H. SÖHNGEN, *Schwingungsverhalten eines Schaufelkranzes im Vakuum* (Comportarea la vibraţii a unei coroane de palete în vid). DVL Bericht nr. 1, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1955.

În lucrare se studiază vibraţiile paletelor de turbină, neglijînd efectul prezenţei mediului fluid şi ţinînd seama de efectele de cuplaj introduse de paletele vecine.

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sînt simplificate printr-o transformare bazată pe rădăcinile de ordinul z a unităţii drept coeficienţi, z fiind numărul paletelor coroanei.

Pe această cale se obţine, pentru un număr mare de palete, soluţia sub formă de integrală. Frecvenţa proprie se obţine sub forma unei unde călătoare cu k perioade.

Studiind vibraţiile forţate a unei palete, se constată o dublă rezonanţă.

Se arată în continuare că la palete identice apar $\frac{z}{2}$ frecvenţe proprii nu mult depărtate ca valoare de frecvenţa proprie a unei singure palete.

Dacă paletele au frecvenţe proprii diferite, există două domenii de frecvenţe proprii situate în jurul acestor frecvenţe.

În concluzie rezultă că introducerea de palete cu frecvenţe proprii diferite faţă de cele vecine nu constituie un mijloc de evitare a vibraţiilor.

Augustin Petre

K. LÜRENBAUM, *Der Meßwagen des Instituts für Triebwerksdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL), Aachen.* (Automobilul laborator al Institutului de dinamica mecanismelor motoare din DVL). DVL Bericht nr. 32, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1957.

În această lucrare se descrie sumar automobilul laborator dotat pentru măsurători de vibraţii, realizat de Institutul de dinamica mecanismelor motoare, precum şi cîteva din rezultatele obţinute în acest laborator.

Utilitatea unui asemenea laborator este evidentă, permiţînd determinări precise în condiţii optime pentru orice condiţii în care se găseşte obiectul în studiu.

Dotarea acestui laborator este următoarea.

1. Vibro-accelerometru cu înregistrare electrică şi mecanică;
2. Tensometru DVL;

3. Tensometru cu captori inductivi cu accesoriile de amplificare şi înregistrare;
4. Torsiograf DVL;
5. Măsurător de trepidaţii;
6. Vibrocaptor cu înregistrare mecanică şi electrică;
7. Frecvenţmetru cu lamele;
8. Masă vibratoare electrodinamică şi cu masă excentrică;
9. Instalaţie de cameră obscură;
10. Instalaţie telefonică de legătură;
11. Microscop pentru citirea înregistrărilor.

Ca exemple de rezultate obţinute în acest laborator mobil, cităm:

— Studiul experimental static şi dinamic al caroseriei unui autobuz. Sînt prezentate aici şi parte din rezultatele obţinute ca variaţii de solicitări în lungul longeroanelor şi traverselor atît sub sarcină cît şi gol, rezultate care au permis reproiectarea în condiţii reale.

— Studiul posibilităţii de amenajarea la o ţesătorie de noi războaie la etajul al 3-lea. S-a ajuns aici la concluzia că trepidaţiile ar depăşi limitele admisibile astfel încît s-a recomandat renunţarea la mărirea numărului de războaie în încăperea respectivă.

— Studiul sursei trepidaţiilor la unele compresoare rotative montate în vecinătatea unor ciocane de piuă. S-a constatat că sursa acestor trepidaţii este compresorul şi nu ciocanele de piuă.

— Studiul fundaţiei unui generator electric de 30 kW. S-a constatat proiectarea complet greşită a fundaţiei şi s-au dat indicaţiile necesare reproiectării.

Exemplele citate sînt suficiente pentru a arăta eficacitatea unui asemenea laborator precum şi absoluta lui necesitate în cazurile cele mai frecvente de altfel, în care obiectul de studiu nu poate fi adus sau reprodus în laborator.

Augustin Petre

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

A. J. MAŞANOV, *Mehanika massiva gornîh porod.* Alma-Ata, 1961, 90 p.
— Energhetika i energheticeskaia nauka sovetskogo Kazahstana, Alma-Ata, 1961, 121 p.
— Trudî Tbiliskogo Matematiceskogo Instituta, XXV*II*, 1960.
— Prikladnaia Matematika i Mehanika, XXV, vîp. 5/1961.
— Dokladî T.S.H.A. — Moskovskoi selskohoziaistvennoi Akademii im.K.A. Timiriazena, nr.55/ /1960 ; nr. 66/1961.
— LEV ALEKSANDROVICI ZENKOVICI,
Izd. Akademii Nauk SSSR, Moscova, 1961, 68 p.
— Voprosî mehanizaţii otkrîtîh gornîh i zemlianîh rabot, Moskovskii injenerno-stroitelnîi institut, nr. 30, 1959 ; nr. 39, 1961.
— Sbornik trudov Moskovskogo injenerno-stroitelnogo instituta, nr. 31, 35/1960 ; nr. 36, 38/1961/
A. E. ERGALIEV, *Razrabotka mestorojdenii jilnogo tipa.* Alma-Ata, 1960, 231 p.
— Trudî Instituta maşinovedenia, Seminar po T.M.M., tom XXII, vîp. 85—86, 1961.
— Referativnîi jurnal, Mehanika, nr. 10, 11, 12/1961.
— ,, ,, Maşinostroenia nr. 12/1961.
— Injinerno-fiziceskii jurnal, nr. 7, 8, 9, 10, 11/1961.
— Von der Königlichen Gewerbeschule Chemnitz zur Hochschule für Maschinenbau Karl-Marx-Stadt, 1836—1961, Karl-Marx-Stadt, 1961. 33 p.
— Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Maschinenbau Karl-Marx-Stadt, nr. 3, 1961.
— Jahrbuch des Maschinenbaues, 1961 ; GEP. Budapesta, 1961, 121 p.
— Polish Technical Abstracts, nr. 2, 1961.
— Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, nr. 8, 9, 10, 1961.
— Archiwum Budowy Maszyn, VIII, nr. 3, 1961.
— Jenaer Rundschau, nr. 5, 1961.
— Aplikace Matematiky, nr. 4, 1961.
— Stavebnicky casopis, nr. 8, 9, 1961.
— Deutsche Flugtechnik, nr. 10, 11, 12, 1961.
— Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg, nr. 2, 1961.
— Zeitschrift für messen, steuern, regeln, nr. 9, 10.
— GEP, nr. 10, 11 ,12, 1961.
— The College of Aeronautics Cranfield, Report, 147, 150, 151, 1961.
— Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt D.V.L., Bericht nr. 162, 166, 172, 173, 174, 179, 180, 181, 192, 193, 194, 195, 196.
—Aeronautical Research Institute of Sweden, Report, nr. 88, 1961.
— Fifteen Year Report. School of Theoretical Physics Dublin Institute of Advancd Studies, 1940—1955. Dublin, 1961, 34 p.
— Communications of the Dublin Institute of Advanced Studies, Series A, nr. 14, 1961.

Disertații primite de la Institutul politehnic Zürich

H. G. BÜRGIN, *Untersuchungen über das dynamische Verhalten von Drehgestell-Personenwagen*. 1960, 196 p.

A. MÜTZENBERG, *Über die Flüssigkeitsdurchmischung und die Schaumbildung auf Siebböden*. 50 p., 1961.

J. DESCLOUX, *Contribution au calcul des approximations de Tschébicheff*. 1961, 40 p.

W. STRAUMANN, *Ein instationäres Verfahren zur Messung der Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten und Gasen*. 1960, 26 p.

Disertații primite de la Institutul politehnic Stuttgart

E. THAMASETT, *Kräfte und Grenzformänderungen beim Abstreckdrücken zylindrischer rotationssymmetrischer Hohlkörper aus Aluminium*. 1961, 137 p.

G. BECKMANN, *Beitrag zur Erforschung der Festigkeit zylindrischer Rohre mit senkrecht abzweigenden Einzelstutzen bei statischer Innendruckbelastung*. 1961, 110 p.

Disertații primite de la Institutul politehnic Aachen

K. OSTERTAG, *Anwendung der Mischungsweggesetzes auf die turbulente Bewegung von Luft-Korngemischen bei der pneumatischen Förderung*. 1961, 71 p.

H. KEVER, *Beiträge zur Dynamik der magnetischen Kompression zylindrischer Plasmen*. 1961, 84. p.

H. DE JONG, *Der Einfluss der Walzgenauigkeit von Verzahnmaschinen auf die Fertigungsgenauigkeit und das Laufverhalten von Stirnradgetrieben*. 1961, 110 p.

96

R
F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA“

3

ANUL XIII
1962

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

1962 NOV 5

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:
ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
GR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;
M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacţia: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*
- Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*
- Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune : stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*
- *Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).*
- *Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).*
- *Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).*
- *Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii).*
- *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul ,,16 Februarie".

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIII, nr. 3 1962

SUMAR

STUDII

Pag.

CINEMATICA ȘI DINAMICA SOLIDULUI

N. TIPEI, Asupra mișcării rachetei în mediu rezistent. II. Ascensiunea rachetei. Efectul curburii pămîntului 567
T. HACKER, Asupra stabilității longitudinale a avionului cu autopilot 575

ELASTICITATE – PLASTICITATE – REZISTENȚA MATERIALELOR – REOLOGIE

M. MIȘICU, Structuri reologice 597
M. ARCAN și ED. NICOLAU, Studii asupra structurilor de rezistență ale construcțiilor cu ajutorul modelelor din mase plastice 621
V. PETCU, Capacitatea portantă a grinzilor curbe de beton armat solicitate la torsiune cu încovoiere 651
V. MANEA, Asupra ecuațiilor neliniare de mișcare a unui mediu continuu deformabil în coordonate curbilinii oarecare 669
LIVIU LIBRESCU, Asupra flaterului neliniar al structurilor cilindrice, subțiri, neomogene 681

AEROMECANICĂ

V. P. ȘIDLOVSKI, Problema mișcării unui gaz vîscos electroconductibil în apropierea unei plăci poroase infinite 701
H. PASCAL, Determinarea aproximativă a presiunii și debitului curentului ascendent în forajul cu gaze 707

HIDROMECANICĂ

T. OROVEANU, Un caz limită de dezlocuire a petrolului de către apă în medii poroase fisurate 719
S. R. MAJUMDER, Mișcarea impulsivă de rotație a unei sfere într-un fluid vîscos . . . 729
T. K. CHAUDHURY, Asupra mișcării longitudinale a unui cilindru circular într-un lichid vîscos conținut într-un cilindru circular coaxial 735

Pag.

TEORIA MECANISMELOR

CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN și L. CALMACIUC, Considerații asupra mișcării sferei cu centru fix pentru controlul automat al suprafeței 749

UNGERE-FRECARE-UZURĂ

V. N. CONSTANTINESCU, Influența formei de variație a grosimii stratului de lubrifiant asupra caracteristicilor de funcționare ale lagărelor lubrificate cu gaze 761

GH. VASILCA și AL. NICA, Contribuții la determinarea pe cale experimentală a parametrilor funcționali de la lagărele motoarelor cu ardere internă. I. Parametrii funcționali, metoda de lucru și instalația experimentală 773

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE

D. MANGERON și R. C. BOGDAN, A III-a Conferință unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor și mașinilor, 23—28 iunie 1961 . . . 783

D. MANGERON, Sesiunea jubiliară reunită a Academiilor de Științe a U.R.S.S., a R.S.S. Gruzia, a R. S. S. Azerbaidjan, a R. S. S. Armenia, consacrată celei de-a 40-a aniversări a instituirii Puterii Sovietice în Gruzia și a înființării Partidului Comunist din Gruzia (30 noiembrie — 4 decembrie 1961) 791

* * * Al III-lea Congres al Consiliului Internațional de științe aeronautice, Stockholm, Suedia, 27—31 august 1962 795

RECENZII 799

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE 823

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XIII, № 3 1962

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

Стр.

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Н. ТИПЕЙ, О движении ракеты в сопротивляющейся среде. II. Подъем ракеты. Эффект кривизны земли 567
Т. ХАКЕР, О продольной устойчивости самолета с автопилотом 575

УПРУГОСТЬ — ПЛАСТИЧНОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — РЕОЛОГИЯ

М. МИШИКУ, Реологические структуры 597
М. АРКАН и Г. НИКОЛАУ, Исследования по прочностным конструкциям сооружений при помощи пластмассовых моделей 621
В. ПЕТКУ, Несущая способность кривых железобетонных балок, подверженных кручению и изгибу 651
В. МАНЯ, О нелинейных уравнениях движения сплошной деформируемой среды в произвольных криволинейных координатах 669
Л. ЛИБРЕСКУ, О нелинейном флаттере неоднородных тонких цилиндрических конструкций 681

АЭРОМЕХАНИКА

В. П. ШИДЛОВСКИЙ, Задача о движении электропроводящего вязкого газа вблизи бесконечной пористой пластины 701
Х. ПАСКАЛ, Приближенное определение давления и расхода восходящего потока при бурении газами 707

ГИДРОМЕХАНИКА

Т. ОРОВЯНУ, Один предельный случай вытеснения нефти водой в трещиноватых пористых средах 719
С. Р. МАЖУМДЕР, Импульсивное вращательное движение сферы в вязкой жидкости 729

Стр.

Т. К. ЧОДХЭРИ, О продольном движении круглого цилиндра в вязкой жидкости, заполняющей соосный круглый цилиндр 735

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

К. ПЕЛЕКУДИ, Р. К. БОГДАН и Л. КАЛМАЧУК, Об осуществлении движения сфер с неподвижным центром для автоматического контроля поверхности 749

СМАЗКА—ТРЕНИЕ—ИЗНОС

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Влияние способа изменения толщины смазочного слоя на характерстики работы подшипников с газовой смазкой 761

Г. ВАСИЛИКА и А. НИКА, К экспериментальному определению функциональных параметров подшипников двигателей внутреннего сгорания . . 773

НАУЧНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ ЗА РУБЕЖОМ

Д. МАНДЖЕРОН и Р. К. БОГДАН, III-е Всесоюзное Совещание по основным проблемам теории машин и механизмов 783

Д. МАНДЖЕРОН, Объединенная юбилейная сессия Академии наук СССР, Грузинской ССР, Азербайжанской ССР и Армянской ССР, посвященная 40-летию установления Советской власти в Грузии и создания Коммунистической партии Грузии (30 ноября — 4 декабря 1961 года) 791

* * * III Конгресс Международного Совета по аэронавтике, Стокгольм, Швеция, 27—31 августа 1962 года 795

РЕЦЕНЗИИ 799

ПУБЛИКАЦИИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ . . . 823

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ”

публикует:

- Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*
- Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*
- Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*
- Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*
- *Астродинамика (оптимальные траектории, расчет орбит или отрезка орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа).*
- *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*
- *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*
- *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*
- *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, элекрические и гидравлические аналогии).*
- *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*
- *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике.*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район „16 Februarie”.

Le périodique

«STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie:

- *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique* ;
- *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question* ;
- *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose* : *l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau* ; *des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée* ;
- *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

- *astrodynamique (réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique).*
- *aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*) ;
- *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*) ;
- *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*) ;
- *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*) ;
- *statique et dynamique des constructions* (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*) ;
- *technique des mesures* (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : *Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.*

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XIII, nº 3 1962

SOMMAIRE

ÉTUDES

Page

CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SOLIDE

N. TIPEI, On the motion of a rocket in resisting medium. II. Ascending motion. Effect of the earth curvature 567
T. HACKER, On the longitudinal stability of an aircraft with automatic pilot . . 575

ÉLASTICITÉ — PLASTICITÉ — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX — RHÉOLOGIE

M. MIŞICU, Structures rhéologiques 597
M. ARCAN and ED. NICOLAU, Studies on strength structures of building by model of plastics 621
V. PETCU, Carrying capacity of curved reinforced concrete beams subjected to torsion and bending 651
V. MANEA, Sur les équations non linéaires du mouvement d'un milieu continu déformable, en coordonnées curvilignes quelconques 669
LIVIU LIBRESCU, Sur le flatter non linéaire des structures cylindriques, minces, non homogènes 681

AÉROMÉCANIQUE

V. P. ŞIDLOVSKI, The flow of an electrically conducted gas in the vicinity of a porous infinite plate 701
H. PASCAL, Détermination approximative de la pression et du débit du courant ascendant, lors du forage à gaz 707

HYDROMÉCANIQUE

T. OROVEANU, Un cas limite de déplacement du pétrole par l'eau dans un milieu poreux ayant des fissures 719

Page

S. R. MAJUMDER, The impulsive rotatory motion of a sphere in a viscous fluid . . 729
T. K. CHAUDHURY, On the longitudinal motion of a circular cylinder in a viscous liquid contained in a coaxial circular cylinder 735

THÉORIE DES MÉCANISMES

CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN et L. CALMACIUC, Betrachtungen über die Erzeugung der Bewegung von Kugeln mit festem Mittelpunkt zur automatischen Oberflächenkontrolle 749

LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE

V. N. CONSTANTINESCU, Influence of the film thickness variation on the operating characteristics of self-acting gas-bearings 761
GH. VASILCA et AL. NICA, Contributions à la détermination, par voie expérimentale, des paramètres fonctionnels pour les paliers des moteurs à combustion interne. I. Paramètres fonctionnels, méthode de travail et installation expérimentale. . 773

MANIFESTATIONS SCIENTIFIQUES À L'ÉTRANGER

D. MANGERON et R. C. BOGDAN, Die 3. Unionale Konferenz für Probleme der Getriebe- und Maschinenlehre, 23—28 VII 1961 783
D. MANGERON, Session jubilaire réunie des Académies des Sciences de l'U.R.S.S., de la R. S. S. de Géorgie, de la R. S. S. d'Arménie et de la R. S. S. d'Azerbaïdjan à l'occasion du 40e anniversaire de l'instauration du pouvoir soviétique en Géorgie et de la fondation du Parti Communiste de Géorgie (30 novembre — 4 décembre 1961) 791
* * * International council of the aeronautical sciences. Third Congress. Stockholm, Sweden, 27—31 August, 1962. 795

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 799

PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION 823

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

STUDII

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI

ASUPRA MIŞCĂRII RACHETEI ÎN MEDIU REZISTENT

II. ASCENSIUNEA RACHETEI. EFECTUL CURBURII PĂMÎNTULUI

DE

N. TIPEI

Dacă se notează cu θ unghiul de poziţie al razei vectoare R [1], faţă de o direcţie fixă trecînd prin centrul pămîntului şi cu G_t greutatea rachetei la un moment dat, redusă la sol

$$G_t = \frac{g_0}{g} G, \tag{1}$$

rezultă ecuaţiile de mişcare în care nu s-a mai neglijat efectul curburii, dar se consideră $Cz = 0$, adică axa rachetei dirijată după tangenta la traiectorie,

$$\begin{aligned} \frac{G_t}{g_0}(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}) &= \left(\mathcal{T} - \frac{\rho}{2} S V^2 \, Cx\right) \cos\gamma, \\ \frac{G_t}{g_0}(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2) &= \left(\mathcal{T} - \frac{\rho}{2} S V^2 \, Cx\right) \sin\gamma - G_t \frac{R_0^2}{R^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Se deduce din acestea

$$\begin{gathered} \frac{\ddot{R} - R\dot{\theta}^2}{R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}} = \frac{\dot{R}}{R\dot{\theta}} - f(t,\ V) \frac{R_0^2}{R^2} \sqrt{1 + \frac{\dot{R}^2}{R^2\dot{\theta}^2}}, \\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{\dot{R}}{R\dot{\theta}};\ \frac{G_t}{\mathcal{T} - \frac{\rho}{2} S V^2 \, Cx} = f(t,\ V). \end{gathered} \tag{3}$$

Traiectorii cu pantă constantă. Unghiul $\frac{\pi}{2} - \gamma_0$ dintre tangenta la traiectorie și verticala fiecărui punct rămîne mereu constat, iar curba descrisă este o spirală, a cărei ecuație este

$$R = R_1 e^{m(\theta - \theta_1)}, \quad m = \mathrm{tg}\,\gamma_0. \qquad (4)$$

Considerînd în momentul inițial $\theta = \theta_1 \, (R = R_1)$ se poate scrie

$$\dot{R} = mR\dot{\theta}, \quad \ddot{R} = m^2 R\dot{\theta}^2 + mR\ddot{\theta} \qquad (5)$$

și din (3), dacă se neglijează la început efectul rezistenței la înaintare

$$\frac{(m^2 - 1)\,\dot{\theta}^2 + m\ddot{\theta}}{\ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}^2} = m - \frac{R_0^2}{\cos\gamma_0} \cdot \frac{f(t)}{R^2}. \qquad (6)$$

Raportul $\frac{R_0^2}{R^2}$ este, pentru înălțimi sub 1 000 km aproape egal cu unitatea; chiar pentru altitudini mai mari se poate considera aproape constant $\frac{R_0^2}{R^2} = \beta \, (\beta < 1)$. Fie

$$m - \frac{R_0^2}{\cos\gamma_0} \cdot \frac{f(t)}{R^2} = B(t), \qquad (7)$$

o funcție cunoscută, dacă se dă legea de admisie și caracteristicile motorului în funcție de aceasta. Se obține din (6)

$$\ddot{\theta} + \frac{m^2 - 1 - 2m\,B(t)}{m - B(t)}\,\dot{\theta}^2 = 0. \qquad (8)$$

Integrînd această ecuație, rezultă viteza unghiulară și unghiul de poziție

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\displaystyle\int \frac{m^2 - 1 - 2m\,B(t)}{m - B(t)}\,dt + C_1},$$
$$\theta = \int \dot{\theta}\,dt + C_2; \quad C_2 = -\left(\int \dot{\theta}\,dt\right)_{\theta = \theta_1}. \qquad (9)$$

Mai exact, se poate considera valoarea lui R (4), în care caz $B(t)$ se înlocuiește prin

$$B(t, \theta) = m - \frac{R_0^2}{R_1^2 \cos\gamma_0} f(t)\, e^{-2m(\theta - \theta_1)}, \qquad (10)$$

dar în acest caz, soluția nu se mai poate scrie direct. Totuși se pot deduce aproximații succesive, dacă se consideră întîi $R \sim R_0$, se determină $\theta(t)$ din (9), cu acesta $B(t)$ din (10) și se reiau calculele cu această valoare.

Cînd $B(t)$ se reduce la o constantă, prima aproximație dă rezultatul destul de exact

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}_1}{1 + B^{\star}\dot{\theta}_1 t}; \quad \theta = \frac{1}{B^{\star}} \ln(1 + B^{\star}\dot{\theta}_1 t); \; B^{\star} = \frac{m^2 - 1 - 2mB}{m - B} \cdot \tag{11}$$

Fie $Cx \neq 0$. Pentru mişcări la altitudini unde atmosfera se poate considera încă mediu continuu, se pot aproxima Cx și densitatea ρ prin expresiile [1]

$$Cx = Cx^{(0)} + \frac{\alpha a^2}{V^2}; \quad \rho = \rho_1 e^{-K(R - R_1)}, \tag{12}$$

unde a este viteza sunetului. Folosind relația (4) se deduce

$$\rho = \rho_1 \Bigg(1 + m(\theta - \theta_1) + \frac{2}{2!} m^2 (\theta - \theta_1)^2 + \frac{5}{3!} m^3 (\theta - \theta_1)^3 + $$
$$+ \frac{15}{4!} m^4 (\theta - \theta_1)^4 + \ldots\Bigg)^{-KR_1} \cong \rho_1^{\star} (1 + m^{\star}\theta)^{-KR_1}. \tag{13}$$

Ultima expresie poate fi eventual dedusă direct, determinînd parametrii $\rho_1^{\star}$ și K astfel încît să se aproximeze cît mai bine valoarea densității pe intervalul respectiv.

Ținînd seama de (12) și (13) ecuația (3) va fi

$$\frac{(m^2 - 1)\dot{\theta}^2 + m\ddot{\theta}}{\ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}^2} = m -$$
$$- \frac{G_t}{\mathfrak{T} - \frac{1}{2} \rho_1^{\star} S \left[\alpha a^2 + Cx^{(0)} \frac{R_1^2 \dot{\theta}^2}{\cos^2 \gamma_0} e^{2m(\theta - \theta_1)}\right] (1 + m^{\star}\theta)^{-KR_1}} \cdot \frac{1}{\cos \gamma_0}. \tag{14}$$

Această ecuație se poate pune sub forma

$$\frac{d\left(\frac{1}{\dot{\theta}}\right)}{dt} + \frac{m^2 + 1}{f(t, \theta, \dot{\theta}^2)} - 2m = 0. \tag{15}$$

Integrarea directă nu este posibilă, dar sub forma (15) se poate uşor trece la rezolvarea din aproape în aproape pe arce succesive. Plecînd de la valorile t_1, θ_1, $\dot{\theta}_1$ date într-un punct, se deduce

$$\left[\frac{d\left(\frac{1}{\dot{\theta}}\right)}{dt}\right]_1 = 2m - \frac{m^2 + 1}{f(t_1, \theta_1, \dot{\theta}_1^2)},$$
$$\Delta \left(\frac{1}{\dot{\theta}}\right)_{12} = \left[2m - \frac{m^2 + 1}{f(t_1, \theta_1, \dot{\theta}_1^2)}\right] \Delta t_{12},$$
$$\frac{1}{\dot{\theta}_2} = \frac{1}{\dot{\theta}_1} + \Delta\left(\frac{1}{\dot{\theta}}\right)_{12}, \quad \theta_2 = \theta_1 + \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{2} \Delta t_{12}. \tag{16}$$

Făcînd apoi media $\theta_{12} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ pe intervalul Δt_{12}, introducînd acest rezultat precum şi $\dot{\theta}_{12} = \frac{\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2}{2}$ în sistemul (16), în locul valorilor $\dot{\theta}_1$, θ_1, se obţine mai exact $\frac{1}{\dot{\theta}_2}$ şi θ_2. Calculele pot fi astfel repetate pentru fiecare arc pentru atingerea gradului de precizie dorit, asociindu-se încă o ecuaţie de mişcare (2).

Traiectorii cu rotaţie constantă. Din figura 1 se deduce

$$\alpha = \gamma - \theta, \quad \dot{\alpha} = \dot{\gamma} - \dot{\theta}. \tag{17}$$

În acestea $\dot{\alpha}$ reprezintă rotaţia rachetei în planul traiectoriei faţă de un sistem fix, iar $\dot{\gamma}$ rotaţia faţă de orizontala în fiecare punct.

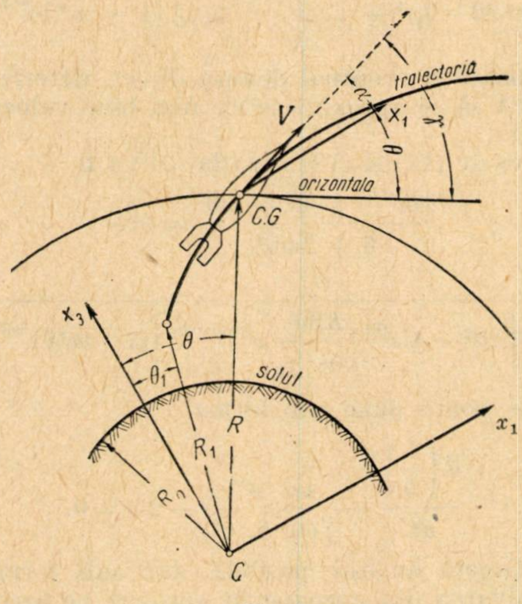


Fig. 1

a) *Cazul* $\dot{\gamma} = \gamma_1 =$ *constant.* Ecuaţiile intrinseci de mişcare se pot pune sub forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_0}\dot{V} &= \frac{\mathcal{F} - \frac{\rho}{2} S V^2 Cx}{G_t} - \frac{R_0^2}{R^2}\sin\gamma, \\ \frac{1}{g_0} V\dot{\alpha} &= \frac{\rho\, S\, Cz\, V^2}{2G_t} - \frac{R_0^2}{R^2}\cos\gamma. \end{aligned} \tag{18}$$

Admițînd $Cz = 0$ (axul rachetei tangent la traiectorie) rezultă din ultima ecuație (18)

$$V^2 - \frac{R\dot{\gamma}_1}{\cos\gamma} V - g_0 \frac{R_0^2}{R} = 0,$$

$$V = \frac{R\dot{\gamma}_1}{2\cos\gamma}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4g_0 R_0^2 \cos^2\gamma}{R^3 \dot{\gamma}_1^2}}\right); \quad \gamma = \gamma_1 + \dot{\gamma}_1 t, \tag{19}$$

care dă direct viteza ca funcție de timp. Evident că rotația $\dot{\gamma}_1$ nu poate fi arbitrară. Ea depinde de condițiile inițiale (V_1, γ_1, R_1) conform ecuației (19)

$$\dot{\gamma}_1 = \left(\frac{V_1}{R_1} - \frac{g_0}{V_1} \cdot \frac{R_0^2}{R_1^2}\right) \cos\gamma_1, \tag{20}$$

iar problema are o soluție unică pentru condiții inițiale date. În expresia vitezei, semnul + (plus) corespunde la $\dot{\gamma}_1 > 0$ și – (minus) la $\dot{\gamma}_1 < 0$. Prima ecuație (18) dă apoi

$$\frac{\dot{\gamma}_1 (R\dot{\gamma}_1 \operatorname{tg}\gamma + \dot{R})}{2g_0 \cos\gamma}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4g_0 R_0^2 \cos^2\gamma}{R^3 \dot{\gamma}_1^2}}\right) \mp \frac{R_0^2\left(\dfrac{3\cos\gamma \dot{R}}{R\dot{\gamma}_1} + 2\sin\gamma\right)}{R^2\sqrt{1 + \dfrac{4g_0 R_0^2 \cos^2\gamma}{R^3 \dot{\gamma}_1^2}}},$$

$$= \frac{\mathcal{T} - \dfrac{\rho}{2} S V^2 Cx}{G_t} - \frac{R_0^2}{R^2} \sin\gamma = \frac{1}{f(t)} - \frac{R_0^2}{R^2} \sin\gamma. \tag{21}$$

Din aceasta se poate deduce $f(t)$ și deci legea de admisie corespunzătoare. Pentru R se poate lua, de asemenea, o valoare medie, sau, ceea ce revine la același lucru, pentru g. Mai exact se poate considera și variația lui R, din expresiile

$$\dot{R} = V \sin\gamma, \quad R = \int_0^t V(t) \sin(\gamma_1 + \dot{\gamma}_1 t)\, dt + R_1, \tag{22}$$

care se pot rezolva prin aproximări succesive, considerînd inițial viteza dată de (19). În acest mod se poate determina și ρ mai exact (12). Astfel pentru evaluarea rezistenței se poate introduce o valoare medie a densității, în cazul sborului la altitudini mari cînd efectul său asupra mișcării este puțin important, sau în păturile dense trebuie urmărită mișcarea pe arce succesive, în lungul cărora ρ = constant. În acest scop, se poate aplica ecuația (22) sub forma creșterilor finite pe intervalele Δt.

b) *Cazul* $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1 =$ *constant.* De data aceasta rotația nu mai este constantă față de linia orizontului sau de verticala locului, ci în raport cu un sistem de axe CX_1X_3, figura 1, cu o orientare fixă. Din a doua ecuație (18) se deduce

$$V = -\frac{g_0}{\dot{\alpha}_1}\frac{R_0^2}{R^2}\cos\gamma. \tag{23}$$

Dacă se neglijează variația lui R și se înlocuiește $\dot{V}$ în prima ecuație de mișcare (18), rezultă ecuația diferențială

$$\dot{\gamma} + \dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_1 \frac{R^2}{R_0^2} \cdot \frac{1}{f(t, \gamma) \sin \gamma} = 0, \tag{24}$$

unde $f(t, \gamma)$ are aceeași semnificație ca și în formulele (3).

Pentru $f(t, \gamma) = f =$ constant se obțin soluțiile

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 t = \alpha + \alpha_1 &= C - \gamma - \frac{2}{\sqrt{1 - f^2 \dfrac{R_0^4}{R^4}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2} - f \dfrac{R_0^2}{R^2}}{\sqrt{1 - f^2 \dfrac{R_0^4}{R^4}}}, \\ & \qquad \left(f \frac{R_0^2}{R^2} < 1\right), \\ &= C - \gamma - \frac{1}{\sqrt{f^2 \dfrac{R_0^4}{R^4} - 1}} \ln \frac{\operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2} - f \dfrac{R_0^2}{R^2} - \sqrt{f^2 \dfrac{R_0^4}{R^4} - 1}}{\operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2} - f \dfrac{R_0^2}{R^2} + \sqrt{f^2 \dfrac{R_0^4}{R^4} - 1}}, \\ & \qquad \left(f \frac{R_0^2}{R^2} > 1\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Dacă se dau V_1, R_1, γ_1 în momentul inițial, din (23) rezultă $\dot{\alpha}_1$, în timp ce valoarea $\alpha_1 = \dot{\alpha}_1 t_1$ permite calculul constantei C. În aceste condiții, $f(t, \gamma) = f = f_1$ determină legea de admisie, pentru a obține mișcarea considerată

Variația exponențială a pantei. Fie

$$\gamma = \gamma_1 e^{-\frac{t}{T}}, \quad \dot{\gamma} = -\frac{1}{T} \gamma \qquad (t_1 = 0). \tag{26}$$

Cu aceleași ipoteze și anume axa rachetei tangentă la traiectorie rezultă

$$-V\left(\frac{\gamma}{T} + \dot{\theta}\right) = -g_0 \frac{R_0^2}{R^2} \cos \gamma, \quad \dot{\theta} = \frac{V \cos \gamma}{R}, \quad \dot{R} = V \sin \gamma. \tag{27}$$

Din acestea se găsește

$$\begin{aligned} V &= -\frac{R\gamma}{2T \cos \gamma}\left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{g_0 R_0^2 T^2}{R^3 \gamma^2} \cos^2 \gamma}\right), \\ \dot{V} &= \frac{\dfrac{R}{T}(1 + \gamma \operatorname{tg} \gamma) - \dot{R}}{2T \cos \gamma} \gamma \left[1 - \sqrt{1 + 4 \frac{g_0 R_0^2 T^2}{R^3 \gamma^2} \cos^2 \gamma}\right] + \\ &\quad + \frac{g_0 R_0^2 \cos \gamma}{R^2 \gamma} \cdot \frac{2(1 + \gamma \operatorname{tg} \gamma) - \dfrac{3T}{R} \dot{R}}{\sqrt{1 + 4 \dfrac{g_0 R_0^2 T^2}{R^3 \gamma^2} \cos^2 \gamma}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Sînt astfel cunoscute viteza şi acceleraţia tangenţială ca funcţii de γ sau de timp. Din prima ecuaţie (18) rezultă apoi

$$f(t)=\frac{1}{\frac{\dot{V}(t)}{g_0}+\frac{R_0^2}{R^2}\sin\left(\gamma_1 e^{-\frac{t}{T}}\right)}, \tag{29}$$

cu ajutorul căreia se deduce legea de admisie a propelantului. Din (3) se vede că această lege este influenţată de variaţia rezistenţei la înaintare care conţine funcţiile cunoscute $V(t)$ şi $Cx(V)=Cx(t)$. Denistatea ρ depinde de altitudinea R care se poate stabili cu ajutorul ecuaţiei (22). Aceasta se scrie mai general

$$R=\int_0^t V(t)\sin[\gamma(t)]\,dt+R_1 \tag{30}$$

şi este determinată prin integrare analitică sau grafică. Totuşi, în expresia vitezei R trebuie considerat constant, în cazul contrariu calculele fiind mult mai complicate.

Primită la redacţie la 25 ianuarie 1962

О ДВИЖЕНИИ РАКЕТЫ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

II. ПОДЪЕМ РАКЕТЫ. ЭФФЕКТ КРИВИЗНЫ ЗЕМЛИ

РЕЗЮМЕ

Рассматривая эффект кривизны земли, прежде всего изучаются кривые траектории с постоянным уклоном. При этом определяется общее решение и рассматриваются частные случаи, когда пренебрегается лобовое сопротивление или принимается постоянным отношение тяга-вес. Затем рассматривается движение ракеты под действием эффекта постоянного вращения вокруг центра тяжести или вращения, изменяющегося экспоненциально со временем. Для обеих гипотез приводятся решения в замкнутом виде и разбираются различные частные случаи. Также определяются начальные условия, при которых движение возможно.

ON THE MOTION OF A ROCKET IN RESISTING MEDIUM

II. ASCENDING MOTION. EFFECT OF THE EARTH CURVATURE

ABSTRACT

Curved paths with constant slope, taking into account the effect of earth curvature, are first studied. The general solution for this case is established, and particular cases, when drag is not considered or the thrust-weight ratio is admitted constant, are examined.

Further, the rocket motion subjected to a constant rotation about the gravity centre, or to a rotation which varies exponentially with respect to time is considered. For both hypothesis, solutions under closed-form are given, and different particular cases analysed.

Also initial conditions, to make motion possible, ar settled.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, *Asupra mişcării rachetei în mediu rezistent.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *3* (1961).

STUDII

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDULUI

ASUPRA STABILITĂŢII LONGITUDINALE A AVIONULUI CU AUTOPILOT

DE

T. HACKER

NOTAŢII

t — timpul, s, sau adimensional,
τ, τ_1 — întîrzieri, s, sau adimensionale,
V — viteza de zbor, m/s,
α — unghiul de incidență, rad,
ϑ — unghiul de tangaj, rad,
δ_p — unghiul de bracaj al profundorului, rad,
ω_z — viteza unghiulară de tangaj, rad/s,
ΔV, $\Delta\alpha$, $\Delta\vartheta$, $\Delta\omega_z$ — deviațiile respective induse de o perturbație,
m — masa avionului, $kg \cdot s^2/m$,
I_z — momentul de inerție al avionului în raport cu axa transversală OZ trecînd prin c.g., $kg \cdot s^2 \cdot m$,
r_z — raza de inerție în raport cu OZ, m,
S — aria suprafeței portante, m^2,
b_A — coarda aerodinamică medie a aripii, m,
y_p — distanța de la c.g. al avionului la linia de acțiune a tracțiunii rezultante, situată deasupra c.g.,m,
ρ — densitatea aerului, $kg \cdot s^2/m^4$,
ψ_1 — coeficientul de reglaj proporțional al autopilotului, adimensional,
ψ_2 — coeficientul de reglaj derivativ al autopilotului, s,
M_z — momentul rezultant în jurul axei transversale a avionului trecînd prin c.g. (OZ), kgm,

M_z^V, M_z^α, $M_z^{\omega_z}$, $M_z^{\dot{\alpha}}$ — derivatele parțiale ale momentului longitudinal M_z în raport cu V, α, ω_z și $\frac{d\alpha}{dt}$,

c_x — coeficientul adimensional al rezistenței la înaintare aerodinamice,

c_y — coeficientul de portanță,

m_z — coeficientul momentului longitudinal,

c_x^M, c_y^M, m_z^M — derivatele parțiale respective în raport cu numărul Mach,

c_{pV} — forma adimensională a derivatei tracțiunii rezultante P în raport cu viteza de zbor

$$\left(c_{pV} = \frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{1}{\rho S V}\right),$$

c_x^α, c_y^α, m_z^α — derivatele parțiale ale coeficienților aerodinamici c_x, c_y, m_z în raport cu α,

m_z^δ — derivata parțială a coeficientului momentului longitudinal în raport cu unghiul de bracaj al profundorului,

m_z^ω, $m_z^{\dot{\alpha}}$ — derivatele parțiale ale coeficientului de moment în raport, respectiv, cu parametrii adimensionali

$$\left(\frac{b_A}{V}\,\omega_z\right) \text{ și } \left(\frac{b_A}{V}\,\frac{d\alpha}{dt}\right).$$

1. OBSERVAȚII PRELIMINARE

În acest articol prin autopilot se va înțelege un automat de stabilizare oarecare aflat la bordul avionului, detectînd deviațiile unuia sau mai multor parametri ai mișcării acestuia și care acționează fie concomitent (în paralel) cu pilotul (ca stabilizor automat), fie excluzînd orice intervenție din partea acestuia din urmă (ca pilot automat propriu-zis). În general, obiectul studiului îl va constitui nu funcționarea instalației automate, ci stabilitatea sistemului complet avion + comenzi + factor de stabilizare, adică, stabilitatea zborului în condițiile de funcționare specifice, caracterizate prin prezența la bord a unui automat de stabilizare oarecare.

Se va face o distincție, în ceea ce privește tratarea matematică, între intervenția stabilizatoare a pilotului și funcționarea automatului de stabilizare în modul următor : intervenția pilotului se va considera ca o constrîngere a mișcării perturbate, traducîndu-se prin mărginirea (sau la limită, anularea) deviațiilor unora dintre parametrii cinematici, induse de perturbație. Considerarea funcționării automatului de stabilizare se va traduce, în schimb, printr-o mărire a numărului de grade de libertate a sistemului dinamic studiat, ecuațiile de funcționare respective fiind înglobate în sistemul de ecuații al mișcării perturbate.

În articol se vor folosi de asemenea noțiunile de autopilot ideal și autopilot real, precizarea de *ideal* sau *real* referindu-se exclusiv la lipsa sau prezența întîrzierii în funcționare [1]). Se vor folosi scheme simplificate de automate ale căror mărimi de ieșire vor fi în cazul întîrzierii nule funcții liniare de deviațiile detectate. Drept mărimi detectate pot figura deviații ale poziției unghiulare a aparatului față de un sistem fix în spațiu (unghiul de ruliu, de tangaj, sau de girație), vitezele unghiulare respective etc.

2. MODELUL MATEMATIC AL MĂRIMILOR AFECTATE DE ÎNTÎRZIERE

Considerîndu-se, după cum s-a arătat, sistemul dinamic avion + autopilot, în ecuațiile mișcării perturbate vor apare și termeni corespunzători mărimilor de ieșire ale acestuia din urmă. Întrucît procesul tranzitoriu care conduce de la mărimile de intrare la cele de ieșire ale autopilotului nu va fi modelat ca atare, pentru punerea în evidență a intervalului de timp necesar consumării acestuia, adică a *întîrzierii*, se va recurge la modelul cunoscut al deplasării argumentului.

Într-adevăr, termenii ce se referă la efectul funcționării autopilotului nu vor corespunde momentului de timp t, pentru care sînt scrise celelalte mărimi, ci unor momente anterioare $t - \tau_i\,(t\,;\,x_i)$, τ_i reprezentînd întîrzierile respective. Deci variabilele dinamice ce figurează în una și aceeași ecuație vor corespunde unor valori diferite ale variabilei independente (argumentului) : $t,\ t - \tau_1(t),\ t - \tau_2(t), \ldots$ Conform acestei situații metodele matematice folosite vor fi din domeniul teoriei ecuațiilor cu argument întîrziat.

Întîrzierile τ_i sînt, în general, funcții de timp și de deviațiile controlate de către canalele de rang i ale autopilotului. Totuși, întrucît, pe de o parte, această dependență nu este aproape niciodată cunoscută, iar, pe de altă parte, întrucît pentru procedeele ce urmează a fi expuse prezintă importanță nu atît valoarea exactă a întîrzierii cît o evaluare ca ordin de mărime sau ca margine superioară, se va presupune că întîrzierile τ_i sînt constante ale autopilotului folosit.

Cu observațiile de mai sus, notînd prin σ_z mărimea de ieșire a autopilotului ce reglează mișcarea avionului în jurul axei transversale (mișcarea longitudinală) [2]) schema admisă de funcționare a acestui autopilot va fi descrisă de ecuația

$$\sigma_z(t) = \psi_1\,\Delta\,\vartheta\,(t - \tau_1) + \psi_2\,\Delta\,\omega_z\,(t - \tau_2), \tag{2.1}$$

cu ψ_1, ψ_2, τ_1 și τ_2 constante.

---

[1]) În esență, în această accepțiune sînt folosite noțiunile de mai sus în literatura de specialitate sovietică (vezi de exemplu [1], p. 148, sau [2], p. 410).

[2]) Dacă intervenția pilotului este eliminată, drept σ_z se poate considera bracajul profundorului δ_p.

Atunci ecuația momentelor liniarizată pentru mișcarea perturbată longitudinală, obținută prin metoda deviațiilor mici va putea fi scrisă sub forma

$$I_z \frac{d\Delta\,\omega_z(t)}{dt} = M_z^V\,\Delta V(t) + M_z^\alpha\,\Delta\alpha(t) + M_z^{\omega_z}\,\Delta\omega_z(t) + \\ + M_z^{\dot\alpha}\,\Delta\dot\alpha(t) + M_z^{\sigma_z}\,\psi_1\,\Delta\vartheta(t-\tau_1) + M_z^{\sigma_z}\,\psi_2\,\Delta\omega_z(t-\tau_2). \tag{2.2}$$

Pentru simplificare se va putea admite că

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau.$$

3. DESPRE PUNEREA PROBLEMEI ȘI METODELE DE LUCRU CORESPUNZĂTOARE

Problema stabilității avionului cu autopilot real va fi pusă în acest articol în două moduri.

Primul va consta în stabilirea unei legături între condițiile de stabilitate a mișcării controlate de un autopilot real și cele ale stabilității avionului cu autopilot ideal. O asemenea punere a problemei este justificată în primul rînd prin faptul că reflectă o situație reală, întrucît stabilitatea pentru întîrzierea nulă, reprezintă, practic, o condiție necesară, a stabilității pentru cazul întîrzierii diferite de zero. O altă împrejurare care face oportună cercetarea legăturii dintre stabilitatea cu autopilot real și aceea cu autopilot ideal constă în remarcabila simplitate și intuitivitate a procedeelor și rezultatelor legate de aceasta din urmă, fapt pentru care ea formează obiectul unei suficient de bogate literaturi.

Arătîndu-se că stabilitatea pentru întîrzierea nulă implică stabilitatea avionului cu autopilot real pentru valori ale întîrzierii aflate într-o vecinătate suficient de mică a valorii nule, problema practică, dacă se admite existența stabilității cu autopilot ideal, se va reduce la evaluarea acestei vecinătăți. Mărimea intervalului admisibil va depinde, evident, de caracteristicile constructive ale avionului, de parametrii autopilotului și de regimul de zbor neperturbat. Evaluarea însă, adică gradul de aproximare a marginii superioare stricte a întîrzierii admisibile, depinde și de metoda de lucru. Într-adevăr pentru cazul mișcării neperturbate nestaționare utilizarea metodelor aproximative, construite pe baza unor teoreme care pun în evidență doar condiții suficiente de stabilitate, este cel puțin pînă în prezent, inevitabilă. Dar și în cazul mișcării de bază uniforme, o asemenea metodă poate apărea cîteodată avantajoasă prin simplitatea ei și prin ușurința analizei influenței diferiților parametri cu ajutorul unor relații algebrice simple pe care o oferă.

Al doilea mod de punere a problemei stabilității avionului cu autopilot real va fi unul independent de comportarea sistemului dinamic în cazul întîrzierii nule. O asemenea tratare este firească în cazul mișcărilor de bază uniforme pentru care au fost elaborate în ultimul timp, datorită necesităților teoriei comenzilor și reglajului automat, unele procedee grafice bazate pe tehnică operațională deosebit de fertile.

Aceste procedee oferă evaluări al căror grad de aproximare nu mai este funcţie decît de gradul de aproximaţie al datelor problemei, al operaţiilor aritmetice folosite şi de exactitatea geometrică a graficelor.

Spre deosebire de metodele de evaluare analitice, în particular, cele legate de întîrzierea admisibilă în ipoteza existenţei stabilităţii pentru întîrzierea nulă, procedeul grafic direct ce va fi prezentat nu va oferi o formulă generală care să pună în evidenţă relaţia funcţională dintre diferiţii parametri ai problemei, ci doar posibilitatea analizei influenţei unui anumit număr de parametri, cînd toţi ceilalţi parametri ai problemei sînt daţi cu valorile lor numerice. Avantajul va consta în precizia evaluării şi în relativa uşurinţă a efectuării analizei.

4. LEGĂTURA DINTRE CONDIŢIILE DE STABILITATE ÎN CAZURILE AUTOPILOTULUI IDEAL ŞI REAL. STABILITATEA ÎN PRIMĂ APROXIMAŢIE ÎN CEEA CE PRIVEŞTE ÎNTÎRZIEREA

Calitativ, efectul destabilizator al întîrzierii în funcţionarea autopilotului este cunoscut şi menţionat în literatură, cu recomandarea reducerii ei în cea mai largă măsură posibilă [1]). Din cauza acestui efect nedorit a fost necesar să se întreprindă pe lîngă studiile destul de complete privind stabilitatea avionului cu autopilot ideal, şi unele cercetări referitoare la cazul autopilotului real. Acestea din urmă însă au fost conduse pe o cale proprie, pe baza unui model matematic independent, nelegat de cazul autopilotului ideal [2]). Totuşi între cele două cazuri există o legătură evidentă, care poate fi speculată în tratarea cazului mai complicat al automatului cu întîrziere.

Într-adevăr, în urma efectului, în general, destabilizator al întîrzierii sistemului de stabilizare, stabilitatea cu autopilot ideal apare ca o condiţie necesară practică a stabilităţii sistemului avion + autopilot real. Pe de altă parte însă stabilitatea în cazul întîrzierii nule atrage după sine în mod obligator stabilitatea pentru cazul unor întîrzieri diferite de zero dar suficient de mici. Această constatare, avînd, după cum se va vedea, unele implicaţii utile, este intuitiv evidentă, rezultînd din continuitatea părţilor drepte şi a variabilelor dependente în raport cu t. Ea se poate exprima într-o formă riguroasă cu ajutorul unei teoreme, reprezentînd o particularizare imediată a teoremei asupra conservării stabilităţii pentru variaţii mici ale întîrzierii dată de Iu. M. Repin [3]).

Înainte de enunţarea teoremei se va defini noţiunea de stabilitate asimptotică uniformă în cazul sistemelor cu argument întîrziat.

---

[1]) Vezi de exemplu, [3], p. 361 ; de asemenea [2], p. 413.

[2]) Vezi, de exemplu [2] p. 412—414. În această carte (p. 410) este citată de asemenea lucrarea lui V. A. Kotelnikov, *Продольная устойчивость самолета с автопилотом* (Stabilitatea longitudinală a avionului cu autopilot), Труды ЛИИ, выпуск *3* (1941).

[3]) Vezi [4], p. 257.

Se consideră sistemul

$$\frac{dx(t)}{dt} = X[t,\ x(t),\ x(t-\tau)], \tag{4.1}$$

unde x, τ şi X sînt vectori, cu

$$X(t,0,0) \equiv 0.$$

În plus, funcţia $X(t,x,y)$ satisface condiţia lui Lipschitz uniform în raport cu t

$$|X(t,\ x,\ y) - X(t,\ x_1,\ y_1)| \leqslant L(|x-x_1| + |y-y_1|),$$

într-un domeniu

$$|x| < H,\ |y| < H,\ |x_1| < H,\ |y_1| < H,$$

pentru $t \geqslant t_0$. Funcţia vectorială $\tau(t)$, definită pentru $t \geqslant t_0$ este ne-negativă, continuă şi mărginită, $|\tau(t)| \leqslant \tau_0$. Fie dat un sistem de funcţii iniţiale $\varphi_i(t)$, componente ale unei funcţii vectoriale $\varphi(t)$, continue, definite pe intervalul închis $[t_0 - \tau_0,\ t_0]$. Se vor considera acele soluţii $x(t,t_0,\ \varphi)$ ale sistemului (4.1) care se racordează cu funcţia iniţială $\varphi(t)$ în sensul satisfacerii condiţiei

$$x(t_0,\ t_0,\ \varphi) = \varphi(t_0). \tag{4.2}$$

Pentru $t \in [t_0 - \tau_0,\ t_0]$ funcţia $x(t)$ va fi înlocuită prin $\varphi(t)$.

Definiţie. Soluţia nulă a sistemului (4.1) este uniform asimptotic stabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) > 0$ şi $T(\varepsilon) > 0$ astfel încît

1) din $|\varphi| < \eta$ să rezulte $|x(t,\ t_0,\ \varphi)| < \varepsilon$, pentru $t \geqslant t_0$, şi
2) din $|\varphi| < \delta$ să rezulte $|x(t,\ t_0,\ \varphi)| < \varepsilon$, pentru $t \geqslant t_0 + T$ oricare ar fi t_0.

Se vede că dacă funcţia iniţială φ este constantă şi egală cu perturbaţia iniţială $x(t_0) = x_0$ definiţia de mai sus devine cea obişnuită a stabilităţii asimptotice uniforme a soluţiei banale a unui sistem fără întîrziere.

Acum, pe lîngă sistemul cu argument întîrziat (4.1), se consideră şi sistemul de ecuaţii diferenţiale ordinare obişnuite

$$\frac{dx}{dt} = X(t,\ x,\ x) = \overline{X}(t,\ x), \tag{4.3}$$

Atunci, particularizînd teorema amintită a lui Iu. M. Repin, se poate enunţa următoarea

TEOREMĂ. *Dacă soluţia banală a sistemului (4.3) este uniform asimptotic stabilă, atunci există* $\rho > 0$ *pentru care* $|\tau(t)| < \rho$ *implică stabilitatea asimptotică uniformă a soluţiei nule a sistemului (4.1).*

Prin urmare stabilitatea asimptotică uniformă a soluţiei în cazul autopilotului ideal reprezintă o condiţie suficientă pentru existenţa unui interval al întîrzierii pentru care sistemul corespunzător cu autopilot real este, de asemenea, uniform asimptotic stabil.

Autopilotul ideal este, evident, o ficțiune matematică. Conform celor enunțate, unui autopilot real i se poate atașa o schemă ajutătoare, sub forma unui *autopilot ideal*, reprezentat printr-o ecuație (sau sistem de ecuații), obținută din ecuația (respectiv sistemul de ecuații) de funcționare a autopilotului real prin anularea întîrzierilor și care va fi denumită convențional ecuația autopilotului ideal. Dacă soluția banală a sistemului de ecuații corespunzător sistemului avion + autopilot ideal este uniform asimptotic stabilă, atunci cercetarea stabilității sistemului real (avion + autopilot real) se reduce la simple operații de evaluare a mărimii admisibile a întîrzierilor.

5. EVALUĂRI ÎN CAZUL STABILITĂȚII LONGITUDINALE A AVIONULUI CU AUTOPILOT REAL, CÎND SOLUȚIA BANALĂ A SISTEMULUI CORESPUNZĂTOR AUTOPILOTULUI IDEAL ESTE UNIFORM ASIMPTOTIC STABILĂ. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În acest paragraf se vor da cîteva procedee de evaluare a întîrzierii admisibile a sistemului de stabilizare din punctul de vedere al stabilității zborului. La început se vor căuta condițiile de stabilitate pentru întîrzierea nulă și abia după aceea se va trece la evaluarea propusă a valorii admisibile a întîrzierilor.

Pentru efectuarea evaluărilor vor fi folosite următoarele două leme demonstrate de A. Halanay[1]).

Fie $f(t)$ o funcție pozitivă, iar α, β, γ și δ constante pozitive.

LEMA 1. *Dacă este satisfăcută inegalitatea*

$$\frac{df}{dt} \leqslant -\alpha f + \beta \sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} f(s) + \gamma e^{-\delta t} \tag{a}$$

și

$$\alpha > \beta \tag{b}$$

există $\nu > 0$ *și* $f_0 > 0$ *astfel încît*

$$f(t) \leqslant f_0 e^{-\nu t}$$

pentru $t \geqslant 0$, *oricare ar fi* γ *și* δ.

LEMA 2. *Dacă are loc*

$$f(t) \leqslant \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \sup_{s-2\tau\leqslant\sigma\leqslant s} f(\sigma)\, ds + \gamma e^{-\alpha t} \tag{c}$$

și

$$\alpha > \beta \tag{b}$$

există ν *și* f_0 *pentru care*

$$f(t) \leqslant f_0 e^{-\nu t}$$

pentru $t \geqslant 0$ *și* γ *arbitrar.*

---

[1]) Demonstrarea lemei 1 pentru $\gamma = 0$ se găsește în [5]. Se vede că lema 2 se poate reduce ușor la aceasta din urmă.

Pentru fixarea ideilor se va considera mişcarea din planul de simetrie al avionului. Drept stare neperturbată se consideră zborul orizontal, rectiliniu şi uniform. Atunci ecuaţiile adimensionale liniarizate ale mişcării perturbate stabilite pe baza metodei micilor deviaţii vor fi

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta\overline{V}(t)}{dt} &= a_{11}\,\Delta\overline{V}(t) + a_{12}\,\Delta\alpha(t) + a_{13}\,\Delta\vartheta(t),\\
\frac{d\,\Delta\alpha(t)}{dt} &= a_{21}\,\Delta\overline{V}(t) + a_{22}\,\Delta\alpha(t) + \Delta\,\overline{\omega}_z(t),\\
\frac{d\Delta\,\vartheta(t)}{dt} &= \Delta\overline{\omega}_z(t),\\
\frac{d\Delta\overline{\omega}_z(t)}{dt} &= a_{41}\,\Delta\overline{V}(t) + a_{42}\,\Delta\alpha(t) + a_{44}\,\Delta\overline{\omega}_z(t) + b_{43}\,\Delta\vartheta(t-\tau_1) +\\
&\quad + b_{44}\,\Delta\,\overline{\omega}_z(t-\tau_2).
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Unde

$$
\Delta\overline{V} = \frac{\Delta V}{V}, \quad t = \frac{t_{\text{dimens.}}}{\frac{2m}{\rho S V}}, \quad \tau_{1,2} = \frac{\tau_{1,2\ \text{dimens.}}}{\frac{2m}{\rho S V}}, \quad \Delta\overline{\omega}_z = \Delta\omega_z \frac{2m}{\rho S V},
$$

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= -\,2c_x - Mc_x^M - c_{pV}\cos\alpha,\\
a_{12} &= -\,c_x^{\alpha} + c_y,\\
a_{13} &= -\,c_y,\\
a_{21} &= -\,2c_y - Mc_y^M,\\
a_{22} &= -\,c_y^{\alpha},\\
a_{41} &= \frac{1}{\bar{r}_z^2}\left[\mu\left(2m_z + Mm_z^M + \frac{y_p}{b_A}\,c_{pV}\right) - m_z^{\dot{\alpha}}\,(2c_y + Mc_y^M)\right],\\
a_{42} &= \frac{1}{\bar{r}_z^2}\,(\mu\, m_z^{\alpha} - m_z^{\dot{\alpha}}\, c_y^{\alpha}),\\
a_{44} &= \frac{1}{\bar{r}_z^2}\,(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}),\\
b_{43} &= \frac{\mu}{\bar{r}_z^2}\, m_z^{\delta}\,\psi_1,\\
b_{44} &= \frac{\mu}{\bar{r}_z^2}\, m_z^{\delta}\,\overline{\psi}_2,
\end{aligned}
$$

cu

$$\mu = \frac{2m}{\rho S b_A}, \quad \bar{r}_z^2 = \frac{I_z}{m b_A^2}, \quad \bar{\psi}_2 = \frac{\psi_2}{\dfrac{2m}{\rho S V}}.$$

Pentru simplificare la primele două procedee se va presupune că autopilotul răspunde numai la deviații unghiulare ($b_{44} = 0$).

Pentru a se pune în evidență mai ușor sistemul de ecuații corespunzător autopilotului ideal, (5.1) se va transcrie sub forma următoare :

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\bar{V}(t)}{dt} &= a_{11}\,\Delta\bar{V}(t) + a_{12}\,\Delta\alpha(t) + a_{13}\,\Delta\vartheta(t),\\
\frac{d\Delta\alpha(t)}{dt} &= a_{21}\,\Delta\bar{V}(t) + a_{22}\,\Delta\alpha(t) + \Delta\bar{\omega}_z(t),\\
\frac{d\Delta\vartheta(t)}{dt} &= \Delta\bar{\omega}_z(t),\\
\frac{d\Delta\bar{\omega}_z(t)}{dt} &= a_{41}\,\Delta\bar{V}(t) + a_{42}\,\Delta\alpha(t) + b_{43}\,\Delta\vartheta(t) + c_{44}\Delta\bar{\omega}_z(t) + Q,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

unde

$$Q = b_{43}\,[\Delta\vartheta(t-\tau_1) - \Delta\vartheta(t)] + b_{44}\,[\Delta\bar{\omega}z\,(t-\tau_2) - \Delta\,\bar{\omega}_z(t)],$$

$$c_{44} = a_{44} + b_{44}.$$

Sistemul obișnuit (fără întîrzieri) scris pentru autopilotul ideal corespunzător (atașat) va fi

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\bar{V}}{dt} &= a_{11}\,\Delta\bar{V} + a_{12}\,\Delta\alpha + a_{13}\,\Delta\vartheta,\\
\frac{d\Delta\alpha}{dt} &= a_{21}\,\Delta\bar{V} + a_{22}\,\Delta\alpha + \Delta\bar{\omega}_z,\\
\frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\bar{\omega}_z,\\
\frac{d\Delta\bar{\omega}_z}{dt} &= a_{41}\,\Delta\bar{V} + a_{42}\,\Delta\alpha + b_{43}\,\Delta\vartheta + c_{44}\,\Delta\bar{\omega}_z.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

6. PRIMA EVALUARE

Se consideră $b_{44} = 0$ deci ($c_{44} = a_{44}$) și se notează $b_{43} = -b$ și $\tau_1 = \tau$. Atunci Q din (5.2) pe baza teoremelor creșterilor finite și a ecuației a treia a sistemului va avea expresia

$$Q = \tau\, b\, \Delta\bar{\omega}_z(t-\theta),$$

unde

$$0 \leqslant \theta \leqslant \tau.$$

Se presupune că avionul fără autopilot în zbor liber are o ușoară instabilitate, de exemplu, aperiodică în faza fugoidă. Se cere ca sistemul avion + autopilot să fie riguros stabil.

Conform presupunerilor făcute, ecuația caracteristică a sistemului (5.3), în care s-a luat $c_{44} = a_{44}$ și $b_{43} = 0$, deci corespunzător zborului liber (nestabilizat), admite o pereche de rădăcini complexe, mari în valoare absolută, corespunzătoare fazei de restabilire rapidă a incidenței, și două rădăcini reale, mici ca valoare, caracterizînd modul lent al variației perturbației, dintre care una (cea mai mică ca valoare) este pozitivă. Ecuația caracteristică respectivă va avea, corespunzător acestei configurații a rădăcinilor, termenul liber mic și negativ.

Se consideră un autopilot ideal care introduce un termen de corecție în ultima ecuație ($-\,b\Delta\vartheta$) în așa fel încît termenul liber al ecuației caracteristice a sistemului obținut să devină pozitiv, fără ca semnul vreunui alt coeficient al ei să fie schimbat.

Dacă

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \tag{6.1}$$

este ecuația caracteristică pentru zborul liber, cu

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\,(a_{11} + a_{22} + a_{44}),\\
a_2 &= a_{11}a_{22} + a_{22}a_{44} + a_{44}a_{11} - a_{42} - a_{12}a_{21},\\
a_3 &= -\,a_{44}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{41}(a_{12} + a_{13}) + a_{11}a_{42},\\
a_4 &= a_{13}(a_{22}a_{41} - a_{21}a_{42}),
\end{aligned}$$

atunci ecuația caracteristică a sistemului corespunzător prezenței autopilotului ideal, răspunzînd la deviația unghiulară a atitudinii, se poate scrie sub forma

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + (a_2 + b)\lambda^2 + [a_3 - (a_{11} + a_{22})\,b]\,\lambda + a_4 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,b = 0. \tag{6.2}$$

După cum se vede introducerea termenului de corecție pentru $b > 0$ nu schimbă semnul coeficienților termenilor în λ de grad diferit de zero, și prin urmare o condiție a obținerii unui zbor uniform stabil se exprimă cu ajutorul inegalității

$$b > \frac{-\,a_4}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{6.3}$$

Se poate observa că valoarea coeficientului b, necesară pentru efectuarea acestei corecții, este de ordinul de mărime al grupului de coeficienți mici ai ecuației (6.1) și în orice caz cu mult mai mică decît valoarea lui a_2. Prin urmare pentru valoarea coeficientului b se poate alege un asemenea interval încît configurația rădăcinilor să se schimbe, în principal, numai în ceea ce privește semnul rădăcinii reale mici, care devine negativ. Se va presupune, deci, pentru fixarea ideilor că ecuația (6.2) va admite și ea o pereche de rădăcini complexe cu partea reală negativă, mare în valoare (restabilirea rapidă a incidenței asigurată),

$$\lambda_{2.4} = \mu \pm i\,\nu,$$

$$\mu < 0,$$

și două rădăcini reale și distincte, negative și mici în valoare în comparație cu modulul perechii de rădăcini complexe,

$$\lambda_1 < 0,$$

$$\lambda_3 < 0.$$

Pentru primele două evaluări propuse se va recurge la metoda variației constantelor de integrare.

Într-adevăr, soluția sistemului (5.3) se scrie, ca o combinație liniară a unor soluții particulare, sub forma

$$\begin{aligned}
\Delta \overline{V} &= C_1\,\alpha_1\,e^{\lambda_1 t} + C_3\,\alpha_3\,e^{\lambda_3 t} + e^{\mu t}\,[C_2\,(\alpha' \cos \nu t - \alpha'' \sin \nu t) + \\
&\quad + C_4\,(\alpha' \sin \nu t + \alpha'' \cos \nu t)], \\
\Delta \alpha &= C_1\,\beta_1\,e^{\lambda_1 t} + C_3\,\beta_3\,e^{\lambda_3 t} + e^{\mu t}\,[C_2\,(\beta' \cos \nu t - \beta'' \sin \nu t) + \\
&\quad + C_4\,(\beta' \sin \nu t + \beta'' \cos \nu t)], \\
\Delta \vartheta &= C_1\,\gamma_1\,e^{\lambda_1 t} + C_3\,\gamma_3\,e^{\lambda_3 t} + e^{\mu t}\,[C_2\,(\gamma' \cos \nu t - \gamma'' \sin \nu t) + \\
&\quad + C_4\,(\gamma' \sin \nu t + \gamma'' \cos \nu t)], \\
\Delta \overline{\omega}_z &= C_1\,\delta_1\,e^{\lambda_1 t} + C_3\,\delta_3\,e^{\lambda_3 t} + e^{\mu t}\,[C_2\,(\delta' \cos \nu t - \delta'' \sin \nu t) + \\
&\quad + C_4\,(\delta' \sin \nu t + \delta'' \cos \nu t)],
\end{aligned} \tag{6.4}$$

unde $\alpha_i = \alpha(\lambda_i)$, $\beta_i = \beta(\lambda_i)$, [1] etc. se determină din trei dintre ecuațiile sistemului

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)\,\alpha + a_{12}\,\beta + a_{13}\,\gamma &= 0, \\
a_{21}\,\alpha + (a_{22} - \lambda)\,\beta + \delta &= 0, \\
-\lambda\,\gamma + \delta &= 0, \\
a_{41}\,\alpha + a_{42}\,\beta + b_{43}\,\gamma + (a_{44} - \lambda)\,\delta &= 0,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

pentru cele patru rădăcini λ_1, λ_2, λ_3 și λ_4. Una dintre constantele α, β, γ și δ fiind arbitrară, se ia de exemplu,

$$\gamma(\lambda) \equiv 1 \qquad \text{deci} \qquad \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma' = 1, \qquad \gamma'' = 0.$$

---

[1] $\alpha_{2.4} = \alpha' \pm i\,\alpha''$, $\beta_{2.4} = \beta' \pm i\,\beta''$ etc.

Atunci

$$\alpha = \frac{(a_{12} + a_{13})\lambda - a_{13}a_{22}}{\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$\beta = \frac{\lambda^2 - a_{11}\lambda + a_{13}a_{21}}{\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$\gamma = 1,$$

$$\delta = \lambda.$$

În continuare, coeficienţii C_1, C_3, C_2, C_4, care apar drept constante de integrare pentru sistemul (5.3), se vor considera funcţii de t şi se vor determina în aşa fel încît soluţia (6.4) să satisfacă sistemul complet (5.2). Pentru aceasta, variabilele dinamice din (5.2) se înlocuiesc prin expresiile respective (6.4), de unde se determină $\frac{dC_i}{dt}$ sub forma

$$\begin{aligned} \frac{dC_{1.3}}{dt} &= \Gamma_{1.3}\, e^{-\lambda_{1,3} t}\, Q, \\ \frac{dC_2}{dt} &= e^{-\mu t}(\Gamma' \sin \nu t + \Gamma'' \cos \nu t)\, Q, \\ \frac{dC_4}{dt} &= e^{-\mu t}(\Gamma' \cos \nu t - \Gamma'' \sin \nu t)\, Q, \end{aligned} \tag{6.6}$$

unde Γ_1, Γ_3, Γ' şi Γ'' sînt constante cunoscute depinzînd de λ_1, λ_3, μ, ν, α_1, α_3, β_1, β_3, α', α'', β' şi β''.

Înlocuindu-se mai departe, în (6.4) C_i cu expresiile lor

$$C_i = C_{i0} + \int_0^t \frac{dC_i}{dt}\, dt,$$

scrise ţinîndu-se seama de (6.6), se obţine, în locul sistemului de ecuaţii diferenţiale (5.2) următorul sistem de ecuaţii integrale :

$$\begin{aligned} \Delta\overline{V} &= g_1(t) + \int_0^t k_1(t, s)\, Q(s)\, ds, \\ \Delta\alpha &= g_2(t) + \int_0^t k_2(t, s)\, Q(s)\, ds, \\ \Delta\vartheta &= g_3(t) + \int_0^t k_3(t, s)\, Q(s)\, ds, \\ \Delta\overline{\omega}_z &= g_4(t) + \int_0^t k_4(t, s)\, Q(s)\, ds, \end{aligned} \tag{6.7}$$

unde

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= C_{10}\,\alpha_1\,e^{\lambda_1 t} + C_{30}\,\alpha_3\,e^{\lambda_3 t} + [C_{20}(\alpha'\cos\nu t - \alpha''\sin\nu t) + \\
&\quad + C_{40}(\alpha'\sin\nu t + \alpha''\cos\nu t)]\,e^{\mu t},\\
g_2(t) &= C_{10}\,\beta_1\,e^{\lambda_1 t} + C_{30}\,\beta_3\,e^{\lambda_3 t} + [C_{20}(\beta'\cos\nu t - \beta''\sin\nu t) + \\
&\quad + C_{40}(\beta'\sin\nu t + \beta''\cos\nu t)]\,e^{\mu t},\\
g_3(t) &= C_{10}\,e^{\lambda_1 t} + C_{30}\,e^{\lambda_3 t} + (C_{20}\cos\nu t + C_{40}\sin\nu t)\,e^{\mu t},\\
g_4(t) &= C_{10}\,\lambda_1\,e^{\lambda_1 t} + C_{30}\,\lambda_3\,e^{\lambda_3 t} + [C_{20}(\mu\cos\nu t - \nu\sin\nu t) + \\
&\quad + C_{40}(\mu\sin\nu t + \nu\cos\nu t)]\,e^{\mu t},\\
k_1(t,s) &= \alpha_1\,\Gamma_1\,e^{\lambda_1(t-s)} + \alpha_3\,\Gamma_3\,e^{\lambda_3(t-s)} + [(\alpha'\cos\nu t - \alpha''\sin\nu t)(\Gamma'\sin\nu s + \\
&\quad + \Gamma''\cos\nu s) + (\alpha'\sin\nu t + \alpha''\cos\nu\, t)(\Gamma'\cos\nu s - \Gamma''\sin\nu s)]\,e^{\mu(t-s)},\\
k_2(t,s) &= \beta_1\,\Gamma_1\,e^{\lambda_1(t-s)} + \beta_3\,\Gamma_3\,e^{\lambda_3(t-s)} + [(\beta'\cos\nu t - \beta''\sin\nu t)(\Gamma'\sin\nu s + \\
&\quad + \Gamma''\cos\nu s) + (\beta'\sin\nu t + \beta''\cos\nu t)(\Gamma'\cos\nu s - \Gamma''\sin\nu s)]\,e^{\mu(t-s)},\\
k_3(t,s) &= \Gamma_1\,e^{\lambda_1(t-s)} + \Gamma_3\,e^{\lambda_3(t-s)} + [\cos\nu t\,(\Gamma'\sin\nu s + \Gamma''\cos\nu s) + \\
&\quad + \sin\nu t\,(\Gamma'\cos\nu s - \Gamma''\sin\nu s)]\,e^{\mu(t-s)},\\
k_4(t,s) &= \lambda_1\,\Gamma_1\,e^{\lambda_1(t-s)} + \lambda_3\,\Gamma_3\,e^{\lambda_3(t-s)} + [(\mu\cos\nu t + \nu\sin\nu t)(\Gamma'\sin\nu s + \\
&\quad + \Gamma''\cos\nu s) + (\mu\sin\nu t + \nu\cos\nu t)(\Gamma'\cos\nu s - \Gamma''\sin\nu s)]\,e^{\mu(t-s)}.
\end{aligned}
$$

Acum ultima ecuație a sistemului (5.2) se transcrie în forma următoare

$$\frac{d\,\Delta\bar{\omega}_z(t)}{dt} = a_{44}\,\Delta\bar{\omega}_z(t) + \tau\,b\,\Delta\bar{\omega}_z\,(t-\theta) + a_{41}\,\Delta\bar{V}\,(t) + a_{42}\,\Delta\alpha\,(t) - b\Delta\theta\,(t),$$

$(\theta \leqslant \theta \leqslant \tau)$.

Înmulțind ambii membrii cu $\Delta\bar{\omega}_z\,(t)$ și ținînd seama de (6.7), din ultima ecuație se obține

$$
\begin{aligned}
\Delta\bar{\omega}_z(t)\,\frac{d\,\Delta\bar{\omega}_z(t)}{dt} &= a_{44}\,\Delta\bar{\omega}_z^2(t) + \tau\,b\,\Delta\bar{\omega}_z(t)\,\Delta\bar{\omega}_z(t-\theta) + \\
&\quad + \Delta\bar{\omega}_z\,g(t) + \Delta\bar{\omega}_z\int_0^t k(t,s)\,Q(s)\,ds,
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

unde

$$g\,(t) = a_{41}\,g_1\,(t) + a_{42}\,g_2\,(t) - b\,g_3\,(t),$$

$$k\,(t,s) = a_{41}\,k_1\,(t,s) + a_{42}\,k_2\,(t,s) - b\,k_3\,(t,s).$$

Fie

$$f^2 = \Delta\bar{\omega}_z^2 \qquad (f = |\,\Delta\bar{\omega}_z\,|),$$

si fie $K\,(b)$ un număr pozitiv depinzînd de b, care majorează integrala $\int_0^t |\,k\,(t,s)\,|\,ds$. Atunci, se vede imediat, că are loc inegalitatea

$$\frac{df}{dt} \leqslant a_{44}\,f + \tau\,b\,[1 + K\,(b)]\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} f\,(s) + |\,g\,(t)\,|. \tag{6.9}$$

Întrucît din expresiile lui g_1, g_2 și g_3, λ_1 și λ_3 fiind negative, rezultă că se poate găsi o constantă pozitivă g_0 pentru care

$$|g(t)| \leqslant g_0 e^{-\lambda t},$$

unde $\lambda = \min(|\lambda_1|, |\lambda_3|, |\mu|)$, inegalitatea (6.9) se încadrează în enunțul lemei 1 din paragraful precedent și prin urmare o condiție suficientă de stabilitate asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului (5.2) se obține din inegalitatea

$$\tau b\,[1 + K(b)] < -a_{44} = |a_{44}|,$$

de unde rezultă evaluarea căutată a întîrzierii admisibile în funcție de coeficienții sistemului (5.2) (între care și b)

$$\tau < \frac{|a_{44}|}{b\,[1 + K(b)]}, \tag{6.9'}$$

unde K poate avea de exemplu, expresia

$$K = |\Gamma_1 (a_{41}\alpha_1 + a_{42}\beta_1 - b)| + |\Gamma_3 (a_{41}\alpha_3 + a_{42}\beta_3 - b)| +$$
$$+ 2\sqrt{\Gamma'^2 + \Gamma''^2}\,(|a_{41}|\sqrt{\alpha'^2 + \alpha''^2} + |a_{42}|\sqrt{\beta'^2 + \beta''^2} + b).$$

Într-adevăr, conform lemei, inegalitatea (6.9) implică amortizarea exponențială a perturbației $\Delta\overline{\omega}_z$,

$$|\Delta\overline{\omega}_z| \leqslant f_0 e^{-\nu t}, \tag{6.10}$$

cu $\nu > 0$.

Atunci, pentru celelalte componente ale perturbației se pot scrie, pe baza ecuațiilor (6.7), inegalități de forma

$$\begin{aligned} |\Delta\overline{V}| &\leqslant A_1 e^{-\lambda t} + B_1 e^{-\nu(t-\theta)}, \\ |\Delta\alpha| &\leqslant A_2 e^{-\lambda t} + B_2 e^{-\nu(t-\theta)}, \\ |\Delta\vartheta| &\leqslant A_3 e^{-\lambda t} + B_3 e^{-\nu(t-\theta)}, \end{aligned} \tag{6.11}$$

unde

$$\begin{aligned} A_1 &= |C_{10}\alpha_1| + |C_{30}\alpha_3| + (|C_{20}| + |C_{40}|)\sqrt{\alpha'^2 + \alpha''^2}, \\ A_2 &= |C_{10}\beta_1| + |C_{30}\beta_3| + (|C_{20}| + |C_{40}|)\sqrt{\beta'^2 + \beta''^2}, \\ A_3 &= |C_{10}| + |C_{30}| + |C_{20}| + |C_{40}| \\ B_1 &= \frac{\tau b f_0}{\lambda - \nu}\,[|\alpha_1\Gamma_1| + |\alpha_3\Gamma_3| + 2\sqrt{(\alpha'^2 + \alpha''^2)(\Gamma'^2 + \Gamma''^2)}], \\ B_2 &= \frac{\tau b f_0}{\lambda - \nu}\,[|\beta_1\Gamma_1| + |\beta_3\Gamma_3| + 2\sqrt{(\beta'^2 + \beta''^2)(\Gamma'^2 + \Gamma''^2)}], \\ B_3 &= \frac{\tau b f_0}{\lambda - \nu}\,(|\Gamma_1| + |\Gamma_3| + 2\sqrt{\Gamma'^2 + \Gamma''^2}) . \end{aligned}$$

Din (6.10) și (6.11) rezultă că amortizarea exponențială este asigurată pentru toate componentele perturbației.

7. A DOUA EVALUARE

Se evaluează direct membrul al doilea al ultimei ecuații (6.7). Atunci, întrucît

$$| Q(s) | = \tau b \, | \Delta\overline{\omega}_z (s - \theta) | \leqslant \tau b \sup_{s-2\tau\leqslant\sigma\leqslant s} | \Delta\overline{\omega}_z (\sigma) |, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \tau$$

se vede ușor că

$$| \Delta\overline{\omega}_z | \leqslant \int_0^t \beta \, e^{-\lambda (t-s)} \sup_{s-2\tau\leqslant\sigma\leqslant s} | \Delta\overline{\omega}_z (\sigma) | \, ds + \gamma \, e^{-\lambda t},$$

unde, ca mai sus, $\lambda = \min (| \lambda_1 |, | \lambda_3 |, | \mu |$, iar β are, de exemplu, expresia

$$\beta = \tau b \, [| \lambda_1 \Gamma_1 | + | \lambda_3 \Gamma_3 | + \sqrt{(\mu^2 + \nu^2)(\Gamma'^2 + \Gamma''^2)}].$$

Coeficientul γ al termenului $\gamma e^{-\lambda t}$, rezultat din evaluarea lui $| g_4 (t) |$ nu intervine în condiția care dă evaluarea căutată. Într-adevăr, conform, lemei 2, din paragraful 5, satisfacerea inegalității

$$\lambda > \beta,$$

din care rezultă condiția

$$\tau < \frac{\lambda}{b \, [| \lambda_1 \Gamma_1 | + | \lambda_3 \Gamma_3 | + \sqrt{(\mu^2 + \nu^2)(\Gamma'^2 + \Gamma''^2)} \,]},$$

asigură amortizarea exponențială a perturbației $\Delta\overline{\omega}_z$.

Într-un mod cu totul analog ca în paragraful precedent se poate arăta că amortizarea exponențială a componentei $\Delta\overline{\omega}_z$ implică de asemenea amortizarea exponențială și a celorlalte componente ale perturbației ($\Delta \overline{V}$, $\Delta\alpha$ și $\Delta\vartheta$) și deci stabilitatea asimptotică uniformă a mișcării de bază considerate.

8. A TREIA EVALUARE

Cel de-al treilea procedeu de evaluare ce urmează a fi prezentat schematic mai jos se bazează pe metoda directă a lui Liapunov[1])

Se notează

$$\Delta \overline{V} = x_1, \ \Delta\alpha = x_2, \ \Delta\vartheta = x_3, \ \Delta\overline{\omega}_z = x_4.$$

Fie

$$V = \sum_{j,k=1}^{4} \alpha_{jk} \, x_j \, x_k, \tag{8.1}$$

---

[1]) În [5] se dă un procedeu general bazat pe metoda a doua a lui Liapunov, valabil și pentru sisteme neautonome.

cu $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$, o formă patratică. Coeficienții α_{jk} se determină din condiția ca derivata funcției V în raport cu timpul în virtutea sistemului (5.3) să fie identic egală cu o formă patratică negativ definită dată $-U$. Fie, de exemplu,

$$-U = -2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2). \qquad (8.2)$$

Se presupune că mișcarea neperturbată în cazul autopilotului ideal este uniform asimptotic stabilă, deci ecuația caracteristică a sistemului (5.3) are numai rădăcini cu părți reale negative. Atunci, după cum se știe[1], funcția V, unic determinată, va fi pozitiv definită.

Evaluarea căutată se va obține din condiția ca derivata în raport cu timpul a formei patratice V, astfel determinate, în virtutea sistemului (5.2) să fie negativ definită

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(5.2)} \equiv -\sum_{s=1}^{4} x_s^2 + Q \sum_{i=1}^{4} \alpha_{i4}\, x_i < 0, \qquad (8.3)$$

unde

$$Q = -\tau_1\, b_{43}\, \dot{x}_3(t-\theta_1) - \tau_2\, b_{44}\, \dot{x}_4(t-\theta_2),$$
$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \tau_1, \qquad 0 \leqslant \theta_2 \leqslant \tau_2.$$

Ținînd seama de (5.2) și neglijîndu-se termenii nelineari în raport cu x_i, Q se mai poate scrie

$$Q = -\tau_1\, b_{43}\, x_4^{*} - \tau_2\, b_{44}\,(a_{41}\, x_1^{**} + a_{42}\, x_2^{**} + b_{43}\, x_3^{**} + b_{44}\, x_4^{**}), \qquad (8.4),$$

unde

$$x_i^{*} = x_i(t-\theta_1),$$
$$x_i^{**} = x_i(t-\theta_2).$$

Atunci notînd

$$\tau = \max(\tau_1, \tau_2),$$
$$a = \max(|\alpha_{11}|, |\alpha_{12}|, |\alpha_{13}|, |\alpha_{14}|),$$
$$b = \max(\alpha\, |b_{44}|, |b_{43}| + |c_{44}|),\ \alpha = \max(|a_{41}|, |a_{42}|, |b_{43}|),$$
$$\frac{dV^{\star}}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{(5.2)},$$

din (8.3) și (8.4) se obține inegalitatea

$$\frac{1}{2}\,\frac{dV^{\star}}{dt} \leqslant -\sum_{s=1}^{4} x_s^2 + \tau\, a\, b \sum_{s=1}^{4} |x_s| \sup_{t-\tau\leqslant\sigma\leqslant t} \sum |x_s(\sigma)|,$$

sau, ținînd seama de relația evidentă

$$\sum_{s=1}^{4} |x_s| \leqslant 2\sqrt{\sum_{1}^{4} x_s^2},$$

---

[1] Vezi, de exemplu [6], p. 62.

inegalitatea

$$\frac{1}{2}\,\frac{dV^\star}{dt} \leqslant -\sum_{1}^{4} x_s^2 + 4\,\tau\,a\,b \sqrt{\sum_{1}^{4} x_s^2}\ \sup_{t-\tau\leqslant\sigma\leqslant t} \sqrt{\sum_{1}^{4} x_s^2(\sigma)}. \qquad (8.5)$$

Fie Λ_m și Λ_M, respectiv, cea mai mică și cea mai mare valoare proprie a matricii formei patratice V. Atunci are loc dubla inegalitate evidentă

$$\frac{V^\star}{\Lambda_M} \leqslant \sum x_s^2 \leqslant \frac{V^\star}{\Lambda_m}$$

și din (8.5) se obține

$$\frac{1}{2}\,\frac{dV^\star}{dt} \leqslant -\frac{V^\star}{\Lambda_M} + \frac{4\,\tau\,a\,b}{\Lambda_m}\sqrt{V^\star}\ \sup_{t-\tau\leqslant\sigma\leqslant t}\sqrt{V^\star\,[x_1(\sigma),\ldots]}. \qquad (8.6)$$

Se notează

$$f^2 = V^\star.$$

Atunci inegalitatea (8.6) devine

$$\frac{df}{dt} \leqslant -\frac{1}{\Lambda_M} f + \frac{4\,\tau\,a\,b}{\Lambda_m}\ \sup_{t-\tau\leqslant\sigma\leqslant t} f(\sigma),$$

din care, pe baza lemei 1 din paragraful 5, se deduce următoarea condiție suficientă de amortizare exponențială a perturbației :

$$\tau < \frac{\Lambda_m}{\Lambda_M}\cdot\frac{1}{4\,a\,b}.$$

9. UN PROCEDEU DIRECT. DOMENIUL DE STABILITATE ÎN SPAȚIUL PARAMETRILOR

În sfîrșit, se indică o metodă de tratare a problemei stabilității avionului cu autopilot real, fără a se considera în prealabil stabilitatea cu autopilot ideal. Metoda a fost expusă într-o lucrare anterioară [7] și aplicată la un caz în care, zborul liber fiind pe de-a-ntregul instabil, stabilizarea apărea absolut obligatorie. Aici metoda se va aplica de asemenea la un caz la care corecția introdusă de autopilot servește la eliminarea unei instabilități sistematice, deși nu totale, a mișcării neperturbate și anume se va considera cazul stabilizării automate a zborului de regim la un avion convențional, prezentînd instabilitate longitudinală în faza fugoidă.

Pentru început se va scrie transformata Laplace a sistemului (5.1). Notînd prin s operatorul lui Laplace ($s = \sigma + i\omega$) și prin x_1, x_2, x_3 și x_4 transformatele Laplace, respectiv ale variabilelor $\Delta\overline{V}$, $\Delta\alpha$, $\Delta\vartheta$

şi $\Delta\overline{\omega}_z$ (de exemplu, $x_1 = \int_0^\infty e^{-st}\,\Delta\overline{V}(t)\,dt$, etc.) sistemul (5.1) se transformă în următorul sistem de ecuaţii algebrice în x_1, x_2, x_3 şi x_4.

$$\begin{aligned}(a_{11} - s)\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= -\Delta\overline{V}(0),\\ a_{21}\,x_1 + (a_{22} - s)\,x_2 + x_4 &= -\Delta\alpha(0),\\ -\,s x_3 + x_4 &= -\Delta\vartheta(0),\\ a_{41}\,x_1 + a_{42}\,x_2 + b_{43}\,e^{-\tau_1 s}\,x_3 + (a_{44} + b_{44}\,e^{-\tau_2 s} - s)\,x_4 &= -\Delta\overline{\omega}_z(0) -\\ -\,e^{-\tau_1 s}\int_{-\tau_1}^{0} b_{43}\,\Delta\vartheta(t)\,dt - e^{-\tau_2 s}&\int_{-\tau_2}^{0} b_{44}\,\Delta\overline{\omega}_z(t)\,dt.\end{aligned} \tag{9.1}$$

Quasipolinomul caracteristic al sistemului (9.1) este

$$\begin{aligned}Q \equiv s^4 &+ (a_1 - b_{44}\,e^{-\tau_2 s})\,s^3 + [a_2 - b_{43}\,e^{-\tau_1 s} + (a_{11} + a_{22})\,b_{44}\,e^{-\tau_2 s}]\,s^2 +\\ &+ [a_3 + (a_{11} + a_{22})\,b_{43}\,e^{-\tau_1 s} - (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,b_{44}\,e^{-\tau_2 s}]\,s + a_4 -\\ &- (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,b_{43}\,e^{-\tau_1 s} = 0,\end{aligned} \tag{9.2}$$

unde a_i au expresii identice cu ale coeficienţilor ecuaţiei caracteristice (6.1), anume:

$$\begin{aligned}a_1 &= -\,(a_{11} + a_{22} + a_{44}),\\ a_2 &= -\,a_{42} + a_{11}\,a_{22} + a_{22}\,a_{44} + a_{44}\,a_{11} - a_{12}\,a_{21},\\ a_3 &= a_{11}\,a_{42} - a_{44}\,(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}) - a_{41}\,(a_{12} + a_{13}),\\ a_4 &= -\,a_{13}\,(a_{21}\,a_{42} - a_{22}\,a_{41}).\end{aligned}$$

Pentru simplificare, fără o restrîngere esenţială a generalităţii, se va considera în continuare

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau.$$

Precum s-a arătat [7][1]) frontiera domeniului de stabilitate asimptotică uniformă în spaţiul parametrilor va fi o suprafaţă, reprezentînd imaginea în acest spaţiu a dreptei $\sigma = -\,\varepsilon$ din planul complex s, obţinută prin transformarea

$$Q(s;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots) = 0,$$

unde α_i sînt parametrii consideraţi. S-a arătat de asemenea că, practic, în locul dreptei $\sigma = -\,\varepsilon$, cu ε arbitrar de mic, de poate lua axa imaginară $\sigma = 0$ şi deci frontiera căutată se poate construi pe baza ecuaţiilor parametrice

$$\begin{aligned}R(\omega) &\equiv \mathcal{Re}\,Q(i\omega;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots) = 0,\\ S(\omega) &\equiv \mathcal{Im}\,Q(i\omega;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots) = 0,\end{aligned}$$

prin eliminarea parametrului ω.

---

[1]) Vezi, de asemenea, [8], capitolul 3.

Pentru cazul considerat sistemul de ecuații parametrice va fi

$$\left.\begin{aligned}
R(\omega) \equiv{} & \omega^4 + b_{44}\,\omega^3 \sin \tau\omega + \omega^2 \{-a_2\,[b_{43} - (a_{11} + a_{22})\,b_{44}] \cos \tau\omega\} + \\
& + \omega \sin \tau\omega\ [(a_{11} + a_{22})\ b_{43} + (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\ b_{44}] + a_4 - \\
& - \cos \tau\omega\,(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}) = 0, \\
S(\omega) \equiv{} & \omega^3\,(-a_1 + b_{44} \cos \tau\omega) + \omega^2 \sin \tau\omega\ [-b_{43} + b_{44}\,(a_{11} + a_{22})] + \\
& + \omega\ \{a_3 + \cos \tau\omega\ [(a_{11} + a_{22})\,b_{43} - (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})]\} + \\
& + \sin \tau\omega\,(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,b_{43} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

Cu ajutorul acestor ecuații prin eliminarea lui ω se pot determina grafic domeniile de stabilitate în spațiul unor parametri aleși arbitrar, de care poate dispune constructorul. Pentru ușurarea analizei este indicat a se alege cîte doi parametri considerînd restul parametrilor dați, adică a se determina domeniile de stabilitate în secțiuni plane ale hiperspațiului parametrilor. Astfel, se poate studia din punctul de vedere al asigurării stabilizării zborului de regim relația dintre factorii de corecție proporțional și derivativ (ψ_1 și ψ_2) admisibili pentru un avion, un regim de zbor și întîrzieri date; sau variația raportului de transmisie al unuia dintre cele două canale ale autopilotului (ψ_1 sau ψ_2) în funcție de centraj (prin intermediul coeficienților ecuației de momente a mișcării perturbate), în funcție de suprafața ampenajului orizontal (prin intermediul acelorași coeficienți), în funcție de stabilitatea statică longitudinală (prin intermediul coeficientului a_{42}, vezi sistemul (5.1)) pentru întîrzieri date, sau variația întîrzierii admisibile, pentru ψ_1 și ψ_2 dați, în funcție de aceiași parametri etc.

În acest articol, pentru exemplificare, se va construi domeniul de stabilitate asimptotică uniformă a soluției banale a sistemului (5.1), în planul (ψ_1, τ), făcîndu-se prin aceasta o legătură și cu problema de stabilitate de primă aproximație, în ceea ce privește întîrzierea tratată în paragrafele precedente.

Frontiera domeniului de stabilitate în planul (ψ_1, τ) va indica valorile admisibile ale întîrzierii în funcție de valorile factorului de corecție proporțională și invers

Fie $b_{44} = 0$ (control proporțional). Atunci din (9.2) prin transformări elementare se obține sistemul de ecuații parametrice ale frontierei domeniului de stabilitate sub forma

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \varkappa \sqrt{A^2 + C^2}, \\
\tau &= \frac{1}{\omega}\left(\operatorname{arctg} \frac{A}{C} + k\,\pi\right), \qquad k = 0{,}1, \ldots
\end{aligned} \qquad (9.4)$$

unde

$$A = \frac{\alpha\delta_1 - \gamma\delta_2}{\alpha^2 + \gamma^2}; \quad C = \frac{\gamma\delta_1 + \alpha\delta_2}{\alpha^2 + \gamma^2}, \quad \varkappa = \frac{\bar{r}_z^2}{\mu\, m_z^\delta}\ ^{1)}$$

cu

$$\alpha = (a_{11} + a_{22})\,\omega,$$

$$\gamma = \omega^2 - (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}),$$

$$\delta_1 = -\,\omega^4 + a_2\,\omega^2 - a_4,$$

$$\delta_2 = a_1\,\omega^3 - a_3\,\omega.$$

Cu ajutorul acestei diagrame se poate determina și valoarea coeficientului ψ_1 pentru care este asigurată stabilitatea în cazul întîrzierii nule (autopilot ideal). Fie ψ_{10} această valoare. Toată semidreapta coincizînd cu axa absciselor, începînd din acest punct pînă la $+\infty$ va fi situată, a priori, într-o zonă de stabilitate. Aceasta este tocmai zona care prezintă interes pentru problema considerată.

Se vede că pentru valori mari ale coeficientului ψ_1, cu creșterea valorii acestuia mărimea întîrzierii admisibile scade, tinzînd către zero pentru $\psi_1 \to \infty$.

Primită la redacție la 27 februarie 1962

О ПРОДОЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ САМОЛЕТА С АВТОПИЛОТОМ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача продольной устойчивости самолета с автопилотом, учитывая запаздывание. Устанавливается связь между устойчивостью самолета с идеальным автопилотом и самолета с реальным автопилотом. Введя в рассмотрение идеальный автопилот, уравнение которого получается приравниванием нулю запаздываний в уравнении работы реального автопилота, и, принимая, что динамическая система самолет + идеальный автопилот устойчива, оценивают интервал запаздывания, в котором сохраняется устойчивость полета.

Далее дается прямой графический способ для случая реального автопилота, при помощи которого можно анализировать влияние параметров задачи (среди которых и запаздывания автомата) на устойчивость полета.

---

¹) Vezi notațiile după (5.1).

ON THE LONGITUDINAL STABILITY OF AN AIRCRAFT WITH AUTOMATIC PILOT

ABSTRACT

The problem of longitudinal stability of autopiloted aircraft is considered, taking into account the lag.

The relation between the stability of the aircraft with ideal autopilot and real autopilot is established.

Considering as an auxiliary ideal autopilot one whose equation is obtained by taking the lag, in the operating equation of the respective real autopilot, equal to zero, and admitting that the dynamic system aircraft *cum* ideal autopilot is stable, the lag range, within which flight stability is kept still, is evaluated.

Then a direct graphic procedure for the real autopilot is given. With its aid one may analyse the influence of the problem data (including the lag of the automatic device) on the flight stability.

BIBLIOGRAFIE

1. В. С. ВЕДРОВ, *Динамическая устойчивость самолета.* Оборонгиз, Москва-Ленинград, 1938.
2. И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, *Аэродинамика самолета.* Оборонгиз, Москва, 1957.
3. W. J. DUNCAN, *The Principles of the Control and Stability of Aircraft.* University Press, Cambridge, 1952.
4. Ю. М. РЕПИН, *Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом.* Прикладная математика и механика, **21**, *1*, 253—261 (1957).
5. A. HALANAY, *Inegalități diferențiale cu întîrziere și o aplicație a lor la o problemă din teoria stabilității sistemelor cu întîrziere.* Comunicările Acad. R.P.R., **11**, *11*, 1305—1309, (1961).
6. И. Г. МАЛКИН, *Теория устойчивости движения.* Гос. изд. тех.-теор. лит., Москва-Ленинград, 1952.
7. T. HACKER, *Unele probleme ale stabilizării automate a avioanelor DAV în zbor imobil.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **13**, *2* (1962).
8. E. PINNEY, *Ordinary Difference-Differential Equations.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1958 (Traducere în limba rusă : ,,*Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения*'', Изд. иностр. лит., Москва (1961)).

STUDII

ELASTICITATE-PLASTICITATE-REZISTENȚA MATERIALELOR – REOLOGIE

STRUCTURI REOLOGICE

DE

M. MIŞICU

I. TEORIA GEOMETRICĂ A STRUCTURILOR REOLOGICE

Teoria geometrică a structurilor reologice reprezintă o extindere a teoriei geometrice a spațiilor cu conexiune afină în cazul unor spații mai generale, corespunzătoare însușirilor structurilor reologice reale. Această generalizare, compatibilă cu însușirile unor categorii de medii materiale nu este, fapt de altfel evident, corespunzătoare tuturor acestor medii. Ulterior, vom da o nouă extindere a elementelor care urmează necesitînd însă în prealabil, o lărgire a unor noțiuni teoretice cu un caracter fundamental.

§ 1. VARIETĂȚI F-DIFERENȚIABILE

1. *Structuri coordonate.* În baza corelației între grafurile geometrice și structurile algebrice există posibilitatea utilizării aparatului teoriei algebrice în studiul corpurilor materiale care pot fi descrise cu ajutorul grafurilor. În cazul structurilor dedekindiene cu complement, avînd o bază omogenă formată din elemente $p_1, \ldots, p_n$ s-a demonstrat [1], [17] existența bazelor de repere și teorema coordonării lor cu un spațiu n-dimensional de coordonate, existînd o corespondență biunivocă între elementele ei și inelul claselor de resturi ale vectorilor în raport cu matricele de transformări. Se pot, de asemenea, considera însă și produse directe de grafuri sau structuri. S-a stabilit de asemenea că în cazul unui omomorfism φ structural al structurilor S, S', anume $S \xrightarrow{\varphi'} S'$ (astfel ca pentru $p \xrightarrow{\varphi} p'$, $p \in S$, $p' \in S'$, $p \vee q \xrightarrow{\varphi} p' \vee q'$, $p \wedge q \xrightarrow{\varphi} p' \wedge q'$, $q \in S$, $q' \in S'$ există corespondența reperelor.

2. *Structuri valorificate şi coordonate.* Fie o structură S pe care se poate defini o funcţională v satisfăcînd condiţia de valorificare $v\,[p \vee q] + v\,[p \wedge q] = v\,[p] + v\,[q]$; $p, q \in S$, $v \in R$, R fiind cel puţin un inel. Acestea pot fi de pildă valori de adevăr, probabilităţi măsuri, diametre etc. În general, structurile valorificate izoton [1] sînt cvasimetrice. Structurile cvasimetrice sînt spaţii cvasimetrice în care $\wedge$, $\vee$ sînt uniform continui (asfel că pentru $\partial\,(a, b) = v\,[a \vee b] - v\,[a \wedge b]$; $\partial\,(a \vee b, c \vee d) + \partial\,(a \wedge b, c \wedge d) \leqslant \partial\,(a, b) + \partial\,(c, d)$. Dacă v este şi *pozitivă* (astfel ca $p > q \Rightarrow v\,[p] > v\,[q]$), atunci S este metrică, orice structură metrică fiind dedekindiană.

Considerînd o bază omogenă formată din elementele $P_1, \ldots, P_n$ se obţin valori $x_\alpha = v\,[p_\alpha]$, $\alpha = 1, \ldots, n$, $p_\alpha \in P_\alpha$. Valorificarea permite astfel o interpretare geometrică dată de următoarele echivalări : x_α constituie o coordonare a elementelor din S astfel că $p \vee q$ are componentele p, q iar $p \wedge q$ este componenta comună lui p, q, ca obiecte geometrice componente, respectiv rezultante. *Valoarea de interval* $v\,[p, q] = v\,[p] - v\,[q]$ permite o reprezentare structural omomorfă izometrică pe o structură $S^\star$ metrică, condiţia $v\,[p, q] = 0$ împărţind pe S în clase de congruenţă faţă de $S^\star$. Se ştie însă că o structură $S^\star$ cu toţi factorii proectivi simpli este o structură simplă $S^{\star\star}$ adică fără relaţii proprii de congruenţă. În acest caz valoarea poate servi la o reperare a elementelor în S fără nedeterminarea dată de congruenţe. Vom numi valoare de coordonată a intervalelor mărimea $v\,[p, \theta]$ unde $v\,[\theta] = 0$ aşadar $v\,[p_i, \theta] = v\,[p_i] = x_i$. În cazul structurilor dedekindiene cu complement valorile fiind izotone se demonstrează dacă aceste structuri sînt finite, că x_i defineşte univoc în raport cu clasele de intervale simple proiective structura S în raport cu $v\,[\theta]$ dat şi lungimea λ_p a acestor intervale, p fiind numărul de intervale simple proective între θ şi q de lungime λ_p prin relaţia $v_p\,[q] = v\,[\theta] + \Sigma\,\lambda_p \cdot p$. Pentru acest motiv, în aceste structuri valorile $v\,[p_i]$ le vom numi valori de coordonate peste intervalele simple proective iar valorile $v\,[p]$ în $S^{\star\star}$ sînt valori de coordonate efective. Vom defini prin coordonată de distanţă mărimea $\partial\,[p, \theta]$ dacă $v\,[\theta] = 0$, v fiind izotonă iar laticea cuasimetrică. Se obţine astfel un spaţiu cuasimetric cu $\wedge$, $\vee$ uniform continui, $\partial\,(p, \theta) = 0$ constituind o congruenţă reprezentînd structura S izometric şi structural omomorf în o structură metrică. Dacă S este dedekindiană finită, se obţine corespondenţa biunivocă a claselor de factori simpli proiectivi cu origine anulată de v cu o algebră Boole. Deoarece o structură metrică e topologică, $S^\star$ este topologică.

Vom considera o structură $S^{\star\star}$ cu valori izotone denumite în cele ce urmează şi coordonate izotone. În acest caz $S^{\star\star}$ este un spaţiu vectorial parţial ordonat. Dacă are variaţii mărginite atunci $S^{\star\star}$ este o structură vectorială (spaţiu liniar semiordonat). Se ştie că dacă el este şi σ-complet atunci e un spaţiu topologic liniar în raport cu ordinea şi o structură topologică (sau de asemenea în raport cu ordinea stelară). În cazul unui spaţiu produs de spaţii factor reticulate (σ sau complet) acesta de asemenea e reticulat (σ sau complet) şi poate fi scufundat în un spaţiu produs al unui sistem total de componente ale sale. În acest caz vom denumi $v\,[x_\xi]$ coordonate pentru, $\xi \in \Xi$ (mulţime de indici caracterizînd elementele componente). Este clar că structurile vectoriale sînt distributive.

3. *Domeniu de valorificare*. Fie un sistem de coordonate al unei structuri vectoriale S (componente sau produs). Definim conform teoriei spațiilor lineare ordonate modulul lui $p \in S$ prin $|x| = x \vee (-x) (= |-x| = x_{+} + x_{-} = x_{+} \vee x_{-})$; $|x_i| = |v[p_i]|$. Vom spune că $|x| < 1$ este un domeniu deschis valoric. Vom denumi $|x-y| = x \vee y - x \wedge y < \alpha$ o α — vecinătate $\mathcal{U}_\alpha$, valorică a lui $y : x \in \mathcal{U}_\alpha$. În particular, valorile pot fi definite pe un cîmp real, complex, hipercomplex etc., și chiar de valori logice. În acest din urmă caz, cu ajutorul lor se pot specifica categoriile de intern, extern, contingent, aderent etc., fapt asupra căruia vom reveni ulterior. O submulțime de elemente ale unei structuri este conexă dacă șirurile ce unesc două elemente p, q ale sale au elementele în acea sub mulțime și intervalele simple. Dacă un interval are o putere $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ (puterea structurii) vom spune că pe acest interval avem o $\mathcal{J}'$ — acumulare; dacă acest interval este simplu vom avea o $\mathcal{J}'$ — acumulare simplă iar dacă este proiectiv, o $\mathcal{J}'$ — acumulare proiectivă. Dacă lanțurile între două puncte arbitrare ale unui domeniu definite de p, $q \in \mathrm{S}$ sînt conținute în el și au intervale simple, conexiunea este simplă iar dacă sînt proiective, conexiunea este proiectivă.

4. *Varietăți algebrice V*. O varietate algebrică V în spațiul afin A_n pe un cîmp $\mathcal{V}$ de valori este mulțimea elementelor $v[p]$ satisfăcînd un sistem de ecuații algebrice $\mathcal{J}(V) \equiv E_\alpha(v[p_1], \ldots, v[p_n]) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, n$ cu coeficienții în $\mathcal{V}$. Se știe că ele formează în general o structură distributivă ($\vee$, $\wedge$ se pot defini de exemplu astfel: $\mathcal{V} \wedge \mathcal{W} \rightarrow E_\alpha(\mathcal{V}) \equiv E_\alpha(\mathcal{W}) = 0$; $\mathcal{V} \vee \mathcal{W} \rightarrow E_\alpha(\mathcal{V}) E_\beta(\mathcal{W}) = 0$). Prin varietăți constructive sau recursive vom înțelege o mulțime de elemente algebrice satisfăcînd recursii de ordin $m + 1$. De studiul acestora se leagă și substituțiile de ordin m.

În cazul varietăților algebrice, pe cîmpul valorilor de tip distanță corespunzînd unei latici cvasimetrice vom defini o transformare de coordonate (date de valori izotone — caz în care ele satisfac condiția de uniform continuitate). Înlocuind $\mathcal{V}$ cu E_α vom defini $E_\alpha(p, q)$ analog cu $\partial(p,q)$, [1]. Vom spune că V este uniform continuă dacă E_α satisface condiția de uniform continuitate analogă celei în v. O curbă algebrică $\mathcal{C}e$ de forma $\partial_\alpha(p, \theta) = f_\alpha(t)$; $v[\theta] = 0$, $\alpha = 1, \ldots n$. Vom spune că t este un cvasiparametru al claselor de congruență date de $\partial_\alpha(p, \theta) = 0$ pe curbă. Dacă p, $q \in \mathcal{C}$ atunci $\partial(p, q)$ este distanța între p și q pe coardă. Mai general dacă p, q, r, $s \in \mathcal{C}$ atunci $\partial[p \vee q, r \vee s] + \partial[p \wedge q, r \wedge s]$ este distanța pe coarda între p, q, r, s.

Un spațiu topologic T_0 este ([1], [5]) corelat cu un număr finit de mulțimi parțial ordonate; un spațiu topologic T_1 este corelat cu structuri distributive (cazul spațiilor liniare semiordonate) în topologia de interval și ordine. Un spațiu topologic T_2 este corelat cu structura funcțiilor continue pe el. Un spațiu topologic complet T_4, total discontinuu este corelat cu o algebră booleană. Un spațiu T_0 este corelat în general cu topologia de ordine a unor mulțimi parțial ordonate. Vom spune că V este un T_α— spațiu topologic ($\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$) după cum pot fi puse în evidență în diferite cazuri proprietăţile corespunzătoare (de exemplu aceea de a forma în general o structură distributivă).

5. *Operatori.* Vom nota în cele ce urmează prin E, F structuri vectoriale faţă de un corp K, T un operator definit pe E cu valori în F. Dacă $F = R$ atunci T este o funcţională. Vom spune că T este cvasiaditiv în raport cu alt operator τ dacă $T(x+y) = T(x) + T(y) + \tau(x,y)$. Un operator este o cvasivaloare dacă $T(x \vee y) = T(x) + T(y) + \tau(x, y)$; $\tau(x, y) = - T(x \wedge y) + \tau'(x, y)$. Este clar că un operator cvasiaditiv satisface relaţia $T(x) = T(x+0) = T(x) + O'_x$, $O'_x = T(0) + \tau(x, 0)$. De asemenea, pentru orice număr natural $\nu \in N$: $T(\nu x) = T(x) + T((\nu-1)x) + \tau((\nu-1)x, x) = \nu T(x) + \tau(x, x) + \tau(2x, x) + \ldots + \tau((\nu-1)x, x)$, $T(x) = T(\nu \nu^{-1} x) = \nu T(\nu^{-1} x) + \tau(x, \nu^{-1} x) + \ldots + \tau((\nu-1)\nu^{-1} x, \bar{\nu}^{1}_{x})$; $T(\mu\nu^{-1}; x) = \mu T(\nu^{-1} x) + \tau(\nu^{-1} x, \nu^{-1} x) + \tau(2\nu^{-1} x, \nu^{-1} x) + \ldots + \tau((\mu-1)\nu^{-1} x, \nu^{-1} x) = \mu(\nu^{-1} T(x)) - T(\nu^{-1} x, \nu^{-1} x) - \ldots - T((\nu-1)\nu^{-1} x, \nu^{-1} x)) + \tau(\nu^{-1} x, \nu^{-1} x) + \ldots +$

$$+ \tau((\mu-1)\nu^{-1} x, \nu^{-1} x) = \mu \nu^{-1} T(x) + \sum_{\rho=\nu-1}^{\mu-1} \tau(\rho\nu^{-1} x, \nu^{-1} x).$$

Vom spune că τ este cvasicontinuă dacă $\tau(x, y_c) - \tau(x, y) \to \mathrm{O}' \in F$, pentru $\mathrm{O}' \in F$; $x, y_c, y \in E_p$, $y_c \to y$ sau pentru $x, y_c, y \in E_s$, $y_c \downarrow y$; E_s, F_s fiind structuri local convexe vectoriale înzestrate cu seminorme, pentru orice şir $\{y_\alpha\}$.

6. *F-Diferenţiale.* Fie E şi F două spaţii local convexe. Prin E_p vom înţelege un spaţiu local convex parţial ordonat iar E_s o structură vectorială local convexă. Prin A şi B înţelegem familii de seminorme pe E (sauE_p, E_s) respectiv F iar prin T un operator definit în vecinătatea lui $x \in E$ (sau E_p, E_s) cu valori în F. Fie $x, y \in E\,(E_p, E_s)$, $dT \mid x, y) \in \mathscr{L}(E, F)$ sau $\mathscr{L}(E_p, F)$, $L(E_s, F)$, $\mathscr{L}$ semnificînd reuniunea spaţiilor E, F; E_p, F sau E_s, F. Vom presupune dT un operator cvasiaditiv, cvasicontinuu în y astfel că pentru orice $\beta \in B$ să existe $\alpha \in A$, $c \in \equiv$ (mulţime de indici dirijată pentru care $| T(x+y_c) - T(x) - dT(x; y_c) |_\beta : | x + y_c - (x+y)_\alpha | \to O' \in F$ cînd $y_c \to y$. dT este F-diferenţiala (finală) a operaţiei T în punctul x pentru $y_c \to y$. Dacă $E = E_s$ vom considera $F_\vee$, $F_\wedge$ şi $F\oint$-diferenţialele definite astfel

$$| T(x \vee y_c) - T(x) - dT_\vee(x; y_c) |_\beta ; | x \vee y_c - x \vee y |_\alpha \to 0' \in F, \text{ cînd } y_c \downarrow y,\ y = \bigwedge_{c \in \equiv} y_c,$$

$$|T(x) - T(x \wedge y_c) - dT_\wedge(x, y_c)|_\beta : | x \wedge y - x \wedge y_c |_\alpha \to$$

$$\to 0' \in F \text{ cînd } y_c \uparrow y,\ y = \overset{c \in \equiv}{\bigvee} y_c,$$

$$\left| T\left(\oint x\right) - T\left(\oint_0 x\right) - d\,T_{\oint}\left(\oint_0 x, \oint x - \oint_0 x\right)\right|_\beta : \left|\oint x - \oint_0 x\right|_\alpha \to$$

$$\to 0' \in F \text{ cînd} \oint x \to \oint_0 x,$$

$\oint$ fiind operator cvasiaditiv

$$\left| T\left(\oint_0^{-1} x\right) - T\left(\oint^{-1} x\right) - dT_{\oint^{-1}}\left(\oint_0^{-1} x, \oint_0^{-1} x - \oint_0^{-1} x\right)\right|_\beta ; \left|\oint_0^{-1} x - \right.$$
$$\left. - \oint^{-1} x \right|_\alpha \to 0' \in F, \oint^{-1} x \to \oint_0^{-1} x.$$

Vom nota $\omega\,(T, x, y_c) = T\,(x + y_c) - T\,(x) - dT\,(x\,; y_c)$; $\omega_\vee\,(T, x, y_c) = = T\,(x \vee y_c) - T\,(x) - dT_\vee\,(x, y_c)$ etc.

Dacă T admite succesiv de k ori F-diferențiale vom spune că este de clasă C^k de F-diferențiabilitate.

Dacă T este de clasă C^1 atunci este cvasicontinuu. Într-adevăr, deoarece $dT\,(x, y_c) - dT(x, y) \to 0'$ cînd $y_c \to y$ atunci se arată că $\omega(T, x, y_c) \to \omega\,(T, x, y)$ pentru $y_c \to y$, deoarece în acest caz $|\,\omega(T, x, y_c)\,|_\beta$: $|\,y_c - y\,|_\alpha \to 0'$ și deci $|\,\omega\,(T, x, y_c)\,|_\beta \to 0'$ pentru orice $\beta \in B$. Deci $\omega\,(T, x, y_c) \to 0'$, $\omega\,(T, x, y) = 0'$. În mod analog se demonstrează și pentru celelalte tipuri de F-diferențiale proprietăți analoge.

Condiția de F-diferențiere se mai poate pune sub forma $t^{-1}\,(T\,(x + +ty) - T\,(x)) - dT'\,(x, y, ty) \to 0'$ cînd $y_c \to y$ unde $dT\,(x, y) = t\,dT'\,(x, y, ty)$, $t \in N$. Într-adevăr, notînd $y_c = ty$ se obține succesiv $|\,T(x + ty) - T\,(x) - t\,dT'\,(x, y, ty)\,|_\beta \leqslant k\,|\,y_c - y\,|_\alpha$, $k \to 0'$ cînd $y_c \to y$, $t \to 1$ etc. Vom denumi $dT'\,(x, y, ty)$ diferențiala G (globală) în x în raport cu y, a operației T.

7. *Spațiu cvasiparametric.* Fie un spațiu topologic E local convex (structural E_s sau parțial ordonat) produs de spații local convexe $E = \prod\limits_1^n E_\alpha$ sau admițînd o bază E_α, $\alpha = 1, \ldots, n$. Dacă E are valori în R (ca rezultat de exemplu al unei valorificări în R) vom spune că E_α, $\alpha = 1, \ldots, n$ sînt spații parametrice iar în general cvasiparametrice. Fie E, E' două asemenea spații. Dacă $e_\alpha \in E^\alpha$, $e'_\beta \in E'^\beta$, $\alpha = 1, \ldots, n$; $\beta = = 1, \ldots, n'$, vom spune că mulțimea elementelor $(e_1, \ldots, e_n; e'_1, \ldots e'_n)$ este produsul $E \times E'$ al spațiilor E, E'. Fie de asemenea, mulțimile de omomorfisme $E \to E'$ sau $\tau\,(E) = E'$ realizate prin transformări $\delta = = \{e'_\alpha = f_\alpha\,(e_1, \ldots, e_n), \alpha = 1, \ldots n\}$, f_α fiind operatori într-o algebră A determinînd univoc pe e'_α ([1] Introducere din algebră). Acestor omomorfisme le presupunem asociată o algebră liberă $F_n\,(\mathfrak{a})$. Vom spune că aceste omomorfisme sînt de clasă C^k în $\Omega \in E$ dacă f_α admit F - diferențiale în raport cu un reprezentant oarecare, de r ori succesiv, fiind topologic continui. Vom mai spune că aceste omomorfisme sînt regulate dacă sînt cel puțin de clasă C^1 în $\Omega \in E$ și inversabile în Ω. Vom spune că omomorfismele sînt F - diferențiabile în $\Omega \in E$ dacă sînt de clasă C^1 în Ω și că sînt analitice F dacă sînt de clasă C^∞ și regulate în Ω. Dacă în loc de $\mathfrak{a}$ considerăm o algebră $\mathfrak{a}$ cu o algebră liberă $F_n\,(\mathfrak{a})$ vom spune că avem un spațiu cvasiparametric general.

8. *Spaţiul celulelor cvasiparametrice* $E^{(n)}$. Vom considera produsul $E^1 \times \ldots \times E^n = E^{(n)}$ şi echivalentul său topologic (în ordine sau interval) pe care îl vom denumi o $E^{(n)}$ — celulă topologică. De exemplu E_α, $\alpha = 1, \ldots, n$ poate fi un E_s cu valori de interval, o structură metrică (care este topologică). Dacă E_s este σ — complet va fi un spaţiu topologic liniar şi o structură topologică în raport cu topologia ordinei sau stelare. Dacă este un E_p, va fi un spaţiu T_0. Dacă este un lanţ va fi un spaţiu Hausdorff în raport cu topologia intrinsecă sau a ordinii şi un spaţiu T_1 în raport cu topologia de interval etc. Vom defini prin celulă cvasiparametrică E_n, o celulă topologică E_n inclusiv un omomorfism (de ordine structural) al ei pe un spaţiu $\mathcal{U}_n$ (care poate fi E, E_p, E_s), anume T, notată (E_n, τ, U^{-}_n). Dacă E, E_p, E_s au valori în R atunci vom spune că este o celulă $E^{(n)}$-parametrică.

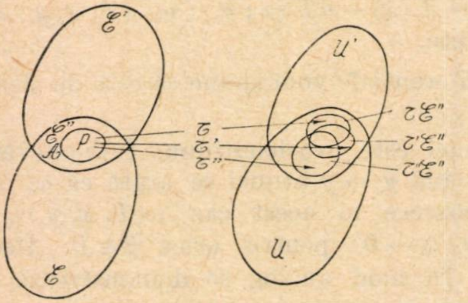


Fig. 1

Fie celulele $(E^{(n)} = E, \tau, \mathcal{U})$, $(E^{(n')} = E', \tau', \mathcal{U}')$. Vom spune că $\mathcal{A}$ este o C^r intersecţie a celulelor, E, E' dacă pentru fiecare $x \in \mathcal{A}$ există o q — celulă cvasiparametrică $(E^{(q)} = E'', \tau'', \mathcal{U}'')$ astfel că 1°E'' să fie o vecinătate (mulţime deschisă convexă în $\mathcal{A}$) topologică a lui $p \in \mathcal{A}$, 2° pe $\tau\, E''$, $\tau'\, E''$, $\tau''\, E''$ sînt definite elementele transformate $u_\alpha = f_\alpha (e_1'', \ldots, e_n'')$, $u_\alpha' = q_\alpha (e_1'', \ldots, e_n'')$; $u_\alpha'' = h_\alpha (e_1'', \ldots, e_n'')$; f_α, g_α, h_α fiind funcţii algebrice, regulate de clasă c^r, $r > 0$ în $\tau''\, E''$ astfel că $\tau'\, \tau^{-1}$ realizează o transformare a mulţimii $\tau\, E''$ în $\tau'\, E''$. Vom denumi omomorfismele $\tau'\, \tau^{-1}$ transformări cvasiparametrice (dacă E ia valori în R vor fi transformări de parametri). În cazul particular în care $\mathcal{U} \ni \mathcal{U}'$, avem $q = n$, $(E_1''\, \tau'', \mathcal{U}'') = (E', \tau', \mathcal{U}')$ existînd o C^r — scufundare a unei n-celule cvasiparametrice în alta. Dacă $m = n$ iar $\mathcal{A}$ este o mulţime deschisă în $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$, avem o C^r — intersecţie a n-celulelor. În cazul diferenţiabilităţii Fréchet se ajunge la rezultate stabilite în [7]. În scriere obişnuită vom nota $x = \tau\,(p)$, $x' = \tau''\, \tau^{-1}\, x = x'\,(x) = f\,(x)$.

9. *Varietăţi topologice* V_n. O varietate V_n e un spaţiu topologic T_i-separabil [5] care este o structură topologică, sau cel puţin parţial ordonat E_p, în care fiecare element[1] $p \in V_n$ are o acoperire numerabilă local finită de vecinătăţi (mulţimi deschise conexe) formate din n- celule (sau avînd omomorfii numerabile pe mulţimi local convexe E (E_p, E_s) ale unui spaţiu n-celular). Vom defini prin varietate kantoriană generalizată un spaţiu topologic compact de dimensie n în care fiecare mulţime are dimensia n şi e cel puţin parţial ordonată, în particular latice distribuită. În aplicaţii V_n va fi în particular parametric; intersecţia n-celulelor fiind presu-

---

[1] Elementele p vor fi denumite puncte în sensul topologiei în V_n.

pusă de clasă C^r, şi T_{maxi}-separabile, *maxi* fiind cel mai mare indice al T_i spaţiilor topologice ale n-celulelor. R este considerat cel puţin un inel. O dată cu V_n, E_p, E_s vom mai considera spaţiile duale E^*_p, E^*_s. În cele ce urmează $i = 1$ (E_s) sau $i = 4$.

10. *Funcţii scalare definite pe varietatea* V_n. În cele precedente s-au considerat omomorfisme de clasă C^r în $\Omega \in E$. Vom defini funcţia $f(p)$ pe un domeniu D_{V_n} al unei varietăţi V_n astfel ca ea să fie de clasă C^r în D_{V_n} iar o mulţime dată de vecinătăţi formate din n-celule (admise de f) să constituie o acoperire numerabilă local finită a lui D_{V_n}. Ţinînd seama de transformări se poate arăta (în cazul diferenţiabilităţii Fréchet de clasă C^r, $r \geqslant 0$) că $f(p)$, $p \in D_{V_n}$ e de clasă C^s şi în altă acoperire, s avînd astfel un caracter intrinsec, independent de trecerea de la un sistem de acoperiri la altul. Dacă p e arbitrar în V_n atunci $f(p)$ e o funcţie scalară de clasa C^s pe V_n. Pentru o funcţie $f(p)$ scalară de clasa C^s în vecinătatea $\mathcal{U}_p$ a lui $p \in V_n$ există o vecinătate U'_p a lui p în care e de clasă C^s.

11. *Spaţiul k-vectorial.* Fie V_n o varietate de clasă C^r iar $p \in E$. Fie $D(p)$ mulţimea valorilor sau în genere a funcţiilor $f(p)$ de clasă C^r în p luînd valori în $E(E_p, E_s)$. Vom introduce notaţiile : $k_+(f, p, q) = f(p+q) - f(p)$; $k_-(f, p, q) = f(p) - f(p-q)$; $k_\vee(f, p, q) = f(p \vee q) - f(p)$; $k_\wedge(f, p, q) = f(p) - f(p \wedge q)$ pentru $q \in E$. De asemenea vom mai nota $\omega_\vee(f, p, q) = k_\vee(f, p, q) - d_\vee(f, p, q)$ etc. $k_+(-, -, q) = k_{+-.q}$ etc. $k_{+(-,p,q)} = k_{+p.q}$; $k_+(f, p, q) = k_{+p.q}f$ etc.

Următoarele proprietăţi sînt satisfăcute de k pe care le vom considera ca definitorii pentru spaţiul k-vectorial

k. 1 $p, q \in E(E_p, E_s)$; $f(p), f(q) \in F(F_p, F_s)$; $(k_{+p.q} + k_{+p.s})f = k_{+p.q}f + k_{+p.s}f$

k. 2. I $k_{+p.q}(f + g) = k_{+p.q}f + k_{+p.q}g$ şi analog pentru k_-, $k_\vee$, $k_\wedge$ (notate generic k).

Demonstraţie : $k_{+p.q}(f + q) = k_+(f + g, p, q) = f(p + q) + g(p + q) - f(p) - g(p)$ etc.

k. 2. II $k_{p.q+r}f = k_{p.r}k_{\sim.q}f + k_{p.r}f + k_{p.q}f$.

Demonstraţie : $k_{p.q+r}f = k(f, p, q + r) = f(p + q + r) - f(p) = f(p + q + r) - f(p + r) - (f(p + q) - f(p)) + (f(p + r) - f(p)) + (f(p + q) - f(p)) = k_{p.r}f + k_{p.q}f + k_{p.r}k_{\sim.q}f$; $k_{p.r}k_{\sim.q}f = k_{p.r}(f_{(\sim+q)} - f_{(\sim)}) = f(p + r + q) - f(p + r) - (f(p + q) - f(p))$

*k.*2.III $k_{p.r}(k_{\sim.q}f) = (k_{p.r}k_{\sim.q})f$.

Demonstraţie : $(k_{p.r}k_{\sim.q})f = (k_{p+r.q} - k_{p.q})f = k_{p+r.q}f - k_{p.q}f = f(p + q + r) - f(p + r) - (f(p + q) - f(p)) = k_{p.r}(k_{\sim.q}f)$.

k. 2. IV $k_{p.\sim}0' = 0') - k_{p.r} = 0$

k. 3. I $k_{p.q}(f_g) = (k_{p.q}f)g + f(k_{p.q}g) + (k_{p.q}f)(k_{p.q}g)$.

Demonstraţie : $k_{p.q}(f_g) = f(p + q) \cdot g(p + q) - f(p)g(p) = (f(p+q) - f(p))(g(p + q) - g(p)) + (f(p + q) - f(p))g(p) + f(p)(g(p + q) - g(p))$.

k. 4. I $k_{p+q.r}f = k_{p.q+r}f - k_{p.q}f (= k_{q.p+r}f - k_{q.p}f) = k_{p.r}k_{\sim.q}f + k_{p.r}f$

Demonstraţie : $k_{p+q.r}f = k(f, p + q, r) = f(p + q + r) - f(p + q) = f(p + q + r) - f(p) - (f(p + q) - f(p))$.

$k.4.$ II $k_{p\,.\,q} + (k_{r\,.\,s} + k_{t\,.\,u}) = (k_{p\,.\,q} + k_{r\,.\,s}) + k_{t\,.\,u}$.
$k.4.$ III $k_{p\,.\,q} + 0 = k_{p\,.\,q}$.
$k.$ 4. IV $k_{p\,.\,q} - k_{p\,.\,q} = 0$.
$k5.$ I. $\alpha \in E \Rightarrow \alpha\ (k_{p\,.\,q}\, f) = (\alpha\, k_{p\,.\,q})\, f;\ 1\ k_{p\,.\,q} = k_{p\,.\,q};\ (\alpha + \beta)\ k_{p\,.\,q} = = \alpha\, k_{p\,.\,q} + \beta\, k_{p\,.\,q};\ \alpha\,(k_{p\,.\,q} + k_{r\,.\,s}) = \alpha\, k_{p\,.\,q} + \beta\, k_{r\,.\,s};\ \alpha(\beta\, k_{p\,.\,q}) = (\alpha\,\beta) k_{p\,.\,q}$
(Spaţiul k-vectorial e un E-modul unitar la stînga. Observăm că denumirea de spaţiu vectorial ar fi corespunzătoare celei algebrice dacă E ar forma un corp algebric).

În cele ce urmează vom nota $k = d\ (\omega)$ sau $k \overset{F}{=} d$ (unde $d = d_{+}$, d_{-}, $d_{\wedge}.\, d_{\vee}.\ \omega = \omega_{+}.\ \omega_{-}.\ \omega_{\wedge}.\ \omega_{\vee}$). Această notaţie arată (de ex) că $|\,\omega_{+}\,(f, p, q_c)\,| : |\,q_c - q\,| \to 0' \in F$ pentru $q_c \to q$. În cele precedente se subînţelege că $d\,(f, p, q) = d_{p\,.\,q} f$ sau în notaţie simplificată $d\,(-, -, -) = = d_{-,-}\, f = df$. Se stabilesc atunci următoarele proprietăţi pe care le considerăm definitorii pentru un spaţiu d-vectorial

$d.1\,(d_{p\,.\,q} + d_{r\,.\,s}) f = d_{p\,.\,q} f + d_{r\,.\,s} f + (\omega_{p\,.\,q} f + \omega_{r\,.\,s} f - (\omega_{p\,.\,q} + \omega_{r\,.\,s})\, f)$,
$d.$ 2. I $d_{p\,.\,q}(f + g) = d_{p\,.\,q} f + d_{p\,.\,q}\, g + (\omega_{p\,.\,q} f + \omega_{p\,.\,q}\, g - \omega_{p\,.\,q}\,(f + g))$.
$d.$ 2. II $d_{p\,.\,q+r} f = d_{p\,.\,r}\, d_{\sim.\,q} f + d_{p\,.\,r} f + d_{p\,.\,q}\, f + (\omega_{p\,.\,r}\, \omega_{\sim.\,q}\, f + \omega_{p\,.\,r} f + + \omega_{p\,.\,q} f + d_{p\,.\,r}\, \omega_{\sim.\,q}\, f + \omega_{p\,.\,r}\, d_{\sim.\,q} f - \omega_{p\,.\,q+r}\, f)$,
$d.$ 2. III $d_{p\,.\,r}\ (d_{\sim.\,q}\, f) = (d_{p\,.\,r}\ d_{\sim.\,q})\ f + ((\omega_{p\,.\,r}\ \omega_{\sim.\,q})\ f + \omega_{p\,.\,r}\ d_{\sim.\,q}\ f + + d_{p\,.\,r}\, \omega_{\sim.\,q} f - \omega_{p\,.\,r}\,(\omega_{\sim.\,q} f) - \omega_{p\,.\,r}\,(d_{\sim.\,q} f) - d_{p\,.\,r}\,(\omega_{\sim.\,q}\, f))$,
$d.$ 2. IV $d_{p\,.\,r}\, 0' = 0'\, d_{p\,.\,r} = 0$.
$d.$ 3. I $d_{p\,.\,q}\,(f\, g) = (d_{p\,.\,q}\, f)\ (d_{p\,.\,q}\ g) + f\ (d_{p\,.\,q}\ g) + (d_{p\,.\,q} f)\ g + (\omega_{p\,.\,q}\, f)$ $(\omega_{p\,.\,q}\, g) + (\omega_{p\,.\,q} f)\ (d_{p\,.\,q}\, g) + (d_{p\,.\,q} f)\,(\omega_{p\,.\,q}\, g) + f\,(\omega_{p\,.\,q\,g}) + (\omega_{p\,.\,q} f)\, g - - \omega_{p\,.\,q}(f\, g)$ etc.

Un spaţiu d-vectorial este un spaţiu k-vectorial (ω) pt. care proprietăţile k. $1 - 5$ se scriu înlocuind $=$ cu $\overset{F}{=}$.

Demonstraţie. Deoarece $|\,\omega(f, p, q_c)\,|_{\alpha} \leqslant k\,|\,q_c - q\,|_{\beta}$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$ cînd $q_c \to q$ într-o vecinătate $\mathcal{U}_f$ a lui $0' \in F$ iar $|\,\omega\,(g, p, q_c)\,|_{\alpha'} \leqslant k'\,|\,q_c - q\,|_{\beta'}$ într-o vecinătate $\mathcal{U}_g$ a lui $0' \in F$ cu $k \in \mathcal{U}_f$, $k' \in \mathcal{U}_g$ iar

$$|\,\omega\,(f + g),\ p,\ q_c\,|_{\alpha''} \leqslant k''\,|\,q_c - q\,|_{\beta''} \text{ în } \mathcal{U}_{f+g},\ k'' \in \mathcal{U}_{f-g}$$

avem $|\omega f + \omega g - \omega\,(f + g)\,| \leqslant (\omega f\ |_{\alpha} + |\,\omega g\,|_{\alpha} + |\,\omega(f + g)\,|_{\alpha} \leqslant$

$$\leqslant k\,|q_c - q\,|_{\beta} + k'\,|\,q_c - q\,|_{\beta'} + k''\,|\,q_c - q\,|_{\beta''}$$

sau pentru orice $K \in \mathcal{U}_{f\wedge}\ \mathcal{U}_{g\wedge}\ \mathcal{U}_{f+g}$ există $\beta \in C$ astfel ca C să fie o familie de seminorme iar $|\omega f + \omega g - \omega\,(f + g)\,|_{\alpha} \leqslant K\,|\,q_c - q\,|_{\beta}$; aşadar $(d_{p\,.\,q} + d_{r\,.\,s}) f \overset{F}{=} d_{p\,.\,q} f + d_{r\,.\,s}\ f$, d satisfăcînd proprietatea k.2.I (ω). În demonstraţie am omis notarea $(\ )_{p\,.\,q}$ pentru ω. În ceea ce priveşte celelalte proprietăţi, demonstraţia e analoagă deşi mai complicată.

Ideea extinderii teoriei spaţiilor cu conexiune la spaţii funcţionale se găseşte în [8]. Aceasta a mai fost extinsă în [10], [11].

12. *Vectori q-tangenţi în* V_n. Mulţimea elementelor de forma $d\,(\tau'\,\tau^{-1} p,\ p,\ q) = d\ (p'\ p,\ q) = d_{p\,.\,q}\, p'$ unde q este un element fie din E $(E_p,\ E_s)$ iar $\varphi = \tau'\,\tau^{-1}\, p$ parcurge mulţimea tuturor transformărilor (cvasiparametrice) se numeşte vector q-contravariant în $p \in V_n$. Elementele $d\ (\varphi\, p,\ p,\ q)$ sînt reprezentări ale vectorului q-contravariant q, în transformarea φ. Conform ipotezelor, omomorfismele fiind presupuse regulate, transformările sînt inversabile astfel că un vector poate fi definit

prin oricare din reprezentările lui. Vom nota vectorul contravariant : $q' = d(\varphi p, p, q) = d_{p\,.\,q}\, \varphi p$ iar această formulă de definiție o vom numi legea de transformare a vectorilor contravarianți, lege care se poate interpreta ca o corespondență $q \rightarrow q'$ prin intermediul operatorului $(\varphi'_p) = d(\varphi p, p, -)$.

Am văzut însă că $d_{p\,.\,q} = d(\sim, p, q)$ pe care îl vom mai nota $d_{p\,.\,q} = X_{p\,.\,q}$ satisface axiomele spațiului k-vectorial (ω). Vom spune că reprezentarea $X_{p\,.\,q}$ a elementelor $f \in F$ în un spațiu dual $F^{\star}$ mijlocește pentru $f = \varphi$ existența unui vector q-tangent $q' = X_{p\,.\,q}\, \varphi p$. Mulțimea tuturor vectorilor q-tangenți în $p \in V_n$ formează un spațiu $\mathcal{T}_p$ pe care îl vom denumi spațiul q-tangent în p.

Vom înțelege prin cîmp vectorial q-tangent, corespondența între orice punct $p \in V_n$ și un vector oarecare q-tangent : $p \rightarrow d(\varphi p, p, q) \in \mathcal{T}_p$.

Dacă într-o vecinătate $\mathcal{U}_p$ a lui $p \in V_n$ există cvasiparametrii $(u_1, \ldots, u_n)$ atunci $f \in F$ în $\mathcal{U}_p$ este o funcție de aceștia iar corespondența $f \rightarrow d(f, p(u_1, \ldots, u_n), q_c(v_1^c, \ldots v_n^c))$ unde v_α^c, $\alpha = 1, \ldots n$ sînt ficși în vecinătatea lui u_α e un vector q-tangent în p. Dacă q_α sînt elementele unei baze (vezi paragraful 2.5) ale lui E, atunci vom spune că $[q^\alpha]$ constituie elementele bazei lui $\mathcal{T}_p$. Cîmpul vectorial poate fi considerat ca reprezentări ale mulțimii funcțiilor din F într-o structură algebrică dată. Cîmpul vectorial q-tangent este de clasă C^r dacă pentru orice $f \in F$, $X_{p\,.\,q}\, f$ e de clasă C^r. V_n este complet paralelizabilă dacă există n cîmpuri vectoriale $X_{u^1\,.\,v^1} \ldots X_{u^n\,,\,v^n}$ care în fiecare punct $p \in V_n$ sînt independente. V_n se presupune de clasă C^r, $r \geqslant 1$.

13. *Vectori r-covarianți* [7]. Se numește vector r-covariant mulțimea tuturor elementelor de forma $r' = r\, d(\tau \tau'^{-1} p', p', -)$ unde r este un element fix în $E^{\star}$ dual lui E iar $d(\tau \tau'^{-1} p', p', -) = X_{p',-}\, \tau' \tau^{-1}$. Aceste elemente se numesc reprezentările vectorului r — covariant prin transformarea $\varphi^{-1} = \tau \tau'^{-1}$. Ca și mai înainte deducem că un vector pr - covariant poate fi definit prin oricare din reprezentările lui. Formula de definiție $r' = rd(\tau' \tau^{-1} p', p', \sim)$, $r = d(f, p_1 -) = X_{p\,.\,-}\, f$ constituie legea de transformare a vectorilor covarianți, r' fiind imaginea lui r prin operatorul ,,adjunct'' lui $(\varphi'_p -)$, anume $(\varphi'_p) = d(p, p', -) = d(\tau \tau'^{-1} p', p', -) = d(\varphi^{-1} p', p', -)$ astfel că $r' = r(\cdot \varphi'_p)$.

Prin definiție, r are caracter de operator și care în cazul general are un caracter neliniar cu coeficienți într-un spațiu dual $E^{\star}$, $X_{p\,.\,-} = d(-, p, -)$ constituie o reprezentare a elementelor $f \in F$ în spațiul dual $F^{\star}$ fiind de natura unui vector r — tangent în V_n. Această reprezentare $(X_{p\,.\,-} = d_{p\,.\,\underset{F}{-}})$ satisface tabloul de proprietăți ale spațiului d — vectorial sau $= k(\omega)$ -vectorial. El are natura unui operator : $X_{p\,.\,-}\, f(q) = X_{p\,.\,q}\, f$; $X_{p\,.\,-}\, \varphi p = r'$, $X_{p'.-}\, \varphi^{-1} p' = r$, $X_{p'.-}\, \varphi^{-1} p'(q) = rq = d(f, p, q) = d_{p\,.\,q}\, f = X_{p\,.\,q}\, f$ pentru $f = \varphi^{-1} p'$. Mulțimea tuturor vectorilor r -tangenți în $p \in V_n$ constituie un spațiu vectorial r - tangent în $p \in V_n$, anume $\mathcal{T}_p^{*}$. Vom înțelege prin cîmp vectorial r - tangent corespondența între orice punct $p \in V_n$ și un vector oarecare r - tangent $X_{p.-}$: $p \rightarrow X_p \in \mathcal{T}_p^{*}$. În formulare cvasiparametrică (locală), $d(-, u_{\alpha.-})$, $\alpha =$

$= 1, \ldots n$ constituie o bază a lui $\mathcal{T}_p^*$ care este un spaţiu vectorial r -tangent de dimensie n. (vezi paragraful 2.6) Conform formulelor precedente cîmpul vectorial X (pentru orice $p \in V_n$) apare ca o reprezentare a mulţimii funcţiilor din F în o structură algebrică a funcţiilor pe V_n compatibile cu axiomele de F-diferenţiere. Cîmpul vectorial r-tangent este F - diferenţiabil dacă pentru orice funcţie $f \in F$, $X_{p,-} f$ este F-diferenţiabil. Varietatea de dimensie n este complet paralelizabilă dacă există n cîmpuri r-tangente $X_{u_1}, \ldots, X_{u_n}$ independente în fiecare punct $p \in V_n$. E de asemenea clar că $(\cdot \varphi_p') = X_{p',-}\, p = X_{\varphi p,-}\, p = X_{p',-}\, \varphi^{-1} p$ pe cînd $(\varphi_p' \cdot) = = x_{p,-}\, \varphi p$.

De exemplu, în cazul unor funcţii continue diferenţiabile, are loc legea de transformare a vectorilor q - contravarianţi $q' = d\,(\tau' \tau^{-1} p, p, q) = d\,(p', p, q) = \xi'$ sau $\xi'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \xi^j + \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} \xi^j \xi^k + \ldots = \partial_{xj} x'^i \xi_j$ $\partial_{xj} = \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} \xi^k + \ldots$, cu $\xi^i \in F$ *fix*.

Ţinînd seama că diferenţiala unei funcţii f se scrie: $df = = \frac{\partial f}{\partial x^j} \xi^j + \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \xi^j \xi^k + \ldots = d\,(f, x, \xi) = \frac{\partial f}{\partial x^j} \partial_{x'k} \xi'^j \xi'^k + \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} (\partial_{x'l} x^j)(\partial_{x'm} x^k) \xi'^l \xi'^m + \ldots = d\,(f, x, dx\,(x', \xi)) = \frac{\partial f}{\partial x^k} \xi'^k + \frac{\partial^2 f}{\partial x'^l \partial x'^m} \xi'^l \xi'^m + + \ldots = d\,(f, x', \xi')$, vectorii covarianţi $r = \eta = d\,(f, x, -)$, $r' = \eta' = = d\,(f, x', -)$ satisfac atunci relaţiile $\eta\, d\,(x, x', -) = d\,(f, x, d\,x\,(x', -)) = = \frac{\partial f}{\partial x'^k} (\,)'k' + \frac{\partial^2 f}{\partial x'^l \partial x'^k} (\;)'^l (\;)'^k + \ldots = d\,(f, x', d\,(\,)') = \eta'$ relaţii care corespund celor de definiţie.

14. *Reprezentări F-diferenţiabile de clasă C^r*. Fie V_n şi V_n' două varietăţi F-diferenţiabile de clasă respectiv C^v şi C'^v iar φ o reprezentare a varietăţii V_n în V_n'. Dacă pe V_n este un punct al primei varietăţi p, iar $p' \in V_n'$, atunci p' este imaginea lui p prin reprezentarea φ dacă $p' = \varphi\, p$. Dacă pentru orice funcţie f', F-diferenţiabilă pe V_n' funcţia $f'\varphi$ este F-diferenţiabilă pe V_n atunci reprezentarea este de clasă C^ω $(\omega \leqslant v, v')$ dacă φ este de clasă C^ω. Dacă u^α, $\alpha = 1, \ldots, n$; $u'^\beta, \beta = = 1, \ldots, n'$ constituie sisteme locale cvasiparametrice în $p \in V_n$ respectiv $p' \in V_{n'}'$, atunci $u'^\beta\,(\varphi\,(u^\alpha)) = u'^\beta\,(u^1, \ldots, u^n)$ constituie în $p' = \varphi\, p$ funcţii F-diferenţiabile în raport cu $u_1, \ldots, u^n$. Se numeşte rangul reprezentării φ în $p \in V_n$ numărul real care nu depinde de alegerea sistemului local cvasiparametric în V_n sau $V_{n'}'$ dar depinde într-un mod univoc de reprezentarea φ (dacă există).

Un omomorfism F-diferenţiabil de clasă C^ω al varietăţii F-diferenţiabile V_n în varietatea F-diferenţiabilă V_n' este o reprezentare φ de tipul celei definite mai sus (care este şi un omomorfism structural pe E_s) avînd peste tot acelaşi rang n. În cazul funcţional liniar (infinitezimal) subzistă teorema lui Whitney care arată că pentru fiecare V_n de clasă C^v $(v \geqslant 0)$ există o varietate V'_n de clasă C^∞ astfel că V_n să fie C^v omomorfă cu V'_n. În cele ce urmează, în afara cazurilor în care vom utiliza o menționare specială, vom presupune varietăți de clasă C^∞ (sau varietăți V_n omomorfe cu varietăți V'_n de clasă C^∞).

15. *F-diferențiala reprezentării* $\varphi : V_n \rightarrow V'_n$. Fie o reprezentare F-diferențiabilă φ între V_n și V'_n. F-diferențiala reprezentării φ în $p \in V_n$ se definește în modul următor. Fie $X_{p,-} \in \mathcal{T}'_p$. Atunci reprezentarea $f' \rightarrow X_{p,-} f' = X(f' \varphi)$ este un vector r — tangent în punctul $\varphi(p) \in V'_n$. Punînd în corespondență fiecare $X_{p,-} \in \mathcal{T}'_p$ cu imaginea sa $X'_{\varphi(p)} \in \mathcal{T}'_{\varphi(p)}$ se obține o reprezentare $\mathcal{T}'_p \rightarrow \mathcal{T}'_{\varphi(p)}$ mijlocită de φ numită F-diferențiala reprezentării φ în p și se notează $d\varphi_p$ sau φ'_p. O reprezentare φ, F-diferențiabilă este *regulată* în $p \in V_n$ dacă diferențiala reprezentării sale φ'_p este biunivocă (φ fiind un izomorfism structural pe E_s). O reprezentare φ F-diferențiabilă este regulată dacă este regulată în orice $p \in V_n$.

Definițiile introduse corespund următoarelor scheme

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, "\varphi_p"] \arrow[d] & V'_n \\ X_{p,-} \in \mathcal{T}_p \arrow[r, "\varphi'_p"] & \mathcal{T}'_{\varphi p} \ni X'_{\varphi(p),-}\, ; \quad X'_{\varphi(p),-} \equiv \varphi'_p X_{p,-} \end{tikzcd}$$

O reprezentare F-diferențiabilă a unei varietăți F-diferențiabile V_n în ea însăși este o reprezentare admițînd și reprezentarea inversă de asemenea F-diferențiabilă. Reprezentarea F-diferențiabilă φ a varietății V_n mijlocește următorul automorfism $\varphi^\star$ al structurii algebrice $\mathcal{F}$ a funcțiilor $f \in F$ definite pe V_n : $f(\varphi^{1-} p) = (\varphi^\star f)(p)$ (vezi [11] pentru orice $f \in F$. De asemenea, reprezentarea F-diferențiabilă φ generează reprezentarea unui cîmp vectorial F-diferențiabil r-tangent cu altul dată de relația $\varphi'_{\varphi \frac{-1}{-p-}} X_{\varphi \frac{-1}{p}} = (X')_{p,-}$ care se deduce din cea care definește F-diferențiala reprezentării φ' înlocuind p cu $\varphi^{-1} p$ și care se mai scrie în baza aceleiași definiții : $\varphi'_{\varphi \frac{-1}{p}} X_{\varphi \frac{-1}{p,-}} = (\varphi' X)_{p,-}$. De asemenea conform celor precedente avem $(\varphi' X)\ (\varphi^\star f) = (\varphi'_{\varphi \frac{-1}{-,-}}\ X_{\varphi \frac{-1}{-,-}})$ $(f(\varphi^{-1}(\,)))= (X'_{-,-} f)\ (\varphi^{-1}(,) = (X_{-,-} f\varphi)\,(\varphi^{-1}(\,)) = (X_{-,-} f\varphi)(\varphi^{-1}_{(\,)}) =$ $= \varphi^\star (X f \varphi)$ pentru orice $f \in F, X \in \mathcal{T}'_{(\,)}$.

Fie φ o reprezentare F-diferențiabilă a varietății V_n în V'_n; atunci $\varphi'_p X_{p,-} = X'_{\varphi(p),-}$ prin definiție; vom spune că elementele $X_{-,-}, X'$ ale cîmpurilor r-tangente sînt φ-corespondente. Aceasta se mai scrie cu $r = X_{p,-} f, r' = r(\cdot \varphi'_p)$ astfel : $X'_{\varphi p,-} f = X_{p,-} f(\cdot \varphi)$ sau $\varphi'_p X_{p,-} = X_{p,-}(\cdot \varphi'_p) = X'_{\varphi p,-}$.

16. *Distribuții pe* V_n. O distribuție $\triangle$ pe varietatea V_n de dimensie n este legea care pune în corespondență cu fiecare punct $p \in V_n$ subspațiul

$\triangle_p$ de dimensie n al spaţiului r-tangent $\mathcal{T}_p^*$. Distribuţia $\triangle$ este F-diferenţiabilă dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii: fiecare punct $p \in V_n$ admite o vecinătate $\mathcal{U}$ şi n cîmpuri r-tangente $X_1, \ldots, X_n$ pe $\mathcal{U}$ astfel încît $(X_1)_q, \ldots, (X_n)_q$ să fie o bază a subspaţiului $\triangle_q$ în fiecare punct $q \in \mathcal{U}$. Mulţimea $\{X_1, \ldots, X_n\}$ se numeşte în acest caz *baza locală* a distribuţiei $\triangle$ în vecinătatea $\mathcal{U}$ a punctului p. Cîmpul F-diferenţiabil X definit pe o mulţime deschisă $\mathcal{U}$ aparţine distribuţiei $\triangle$ dacă $X_p \in \triangle_p$ pentru toţi $p \in \mathcal{U}$. Distribuţia $\triangle$ se numeşte *involutivă* dacă pentru $X_{.-.q}; X_{-.r} \in \triangle$ şi $[X_{p.q} X_{\vee.r}] = [X_{p.q} X_{\sim.r} - X_{p.r} X_{\sim.q}] \in \triangle$ iar $[X^{\alpha}_{p.q}, X^{\beta}_{\sim.r}] \in \triangle$, X^{α}, $\alpha = 1, \ldots n$ fiind elemente ale bazei lui $\mathcal{T}'_p$.

17. *Subvarietate* [11]. O mulţime $V'_{n'}$ a unei varietăţi V_n $(n' \leqslant n)$ este o subvarietate a varietăţii V_n dacă are o structură de varietate F-diferenţiabilă şi dacă scufundarea lui $V'_{n'}$ în V_n este o reprezentare F-diferenţiabilă regulată. În general topologia spaţiului $V'_{n'}$ nu coincide în mod necesar cu a lui V_n. Dacă $V'_{n'}$ este o submulţime oarecare deschisă a lui V_n atunci $V'_{n'}$ poate avea o structură indusă de ,,subvarietate în V''_n. Subvarietatea $V'_{n'}$ conexă se numeşte varietatea F-integrală a distribuţiei $\triangle$ dacă $\triangle_p$ coincide cu spaţiul r-tangent al varietăţii $V'_{n'}$ în punctul p pentru orice $p \in V'_{n'}$. $V'_{n'}$ se numeşte varietate maximală F-integrală dacă fiecare varietate F-integrală a distribuţiei $\triangle$ conţinînd $V'_{n'}$ coincide cu $V'_{n'}$. În cazul linear (infinitezimal) funcţional [11] se demonstrează *teorema*: Prin fiecare punct $p \in V_n$ trece o varietate maximală integrală a distribuţiei $\triangle$ involutive diferenţiabile. O varietate integrală conţinînd pe $p \in V_n$ este o subvarietate deschisă a lui V_n (p).

§ 2. CÎMPURI VECTORIALE ŞI TENSORIALE

1. *Spaţiul $\mathcal{X}$-vectorial.* Fie o varietate diferenţială V_n. Vom considera mulţimea $\mathcal{X}$ (V_n) a tuturor vectorilor $X_{p.-}$ (r-tangenţi) pe V_n astfel că $\underset{F}{X_{p.}} \in \mathcal{X}(V_n)$, $p \in V_n$, $f \in F \Rightarrow X_{p.-} = d\,(-, p, -)$; $X_{p.-} f = d\,(f, p, -) = f\,(p + \sim) - f\,(p)$. De asemenea vom considera mulţimea tuturor $X_{p.q} = d\,(-, p, q)$ astfel ca $X_{p.q} f = d\,(f, p, q) \underset{F}{=} d_{p.q} f$. Este clar conform celor stabilite în § 1,11 că $\mathcal{X}$ este un spaţiu $= k$ (ω) vectorial sau k (ω)-vectorial fiind satisfăcute axiomele k. 1,2, I—IV, 3.I, 4.I — V; 5,I. Remarcăm că, în plus mai sînt satisfăcute următoarele proprietăţi pe care le vom considera integrante spaţiului $\mathcal{X}$-vectorial.

$\mathcal{X}$ 5.II. $f\, X_{p.q}\, g = f\,(X_{p.q}\, g)$ (condiţia ca $\mathcal{X}$ să fie un F-modul unitar la stînga conform axiomelor specificate anterior)

$\mathcal{X}$. 6, $\mathcal{X}$ este pe $E\,(E_p, E_s)$ o L-algebră înţelegînd prin aceasta că pe $\mathcal{X}$ este definită operaţia L
$[X_{-.q} X_{\sim.r}]_p = X_{p.q} X_{\sim.r} - X_{p.r} X_{\sim.q} = [X_{p.q} X_{\sim.r}]$,

care are următoarele proprietăți:

$\mathscr{X}$. 6. I. $[X_{-,q}, X_{\sim,r} + X_{\sim,s}]_p \overset{F}{=} [X_{-,q}, X_{\sim,r}]_p + [X_{-,q}, X_{\sim,s}]_p$.

Demonstrație. $[X_{-,q}, X_{\sim,r} + X_{\sim,s}] = X_{p,q}(X_{\sim,r} + X_{\sim,s}) - (X_{p,r} + X_{p,s})X_{-,q} \overset{F}{=} X_{p,q}X_{\sim,r} + X_{p,q}X_{\sim,s} - X_{p,r}X_{\sim,q} - X_{p,s}X_{\sim,q} = (X_{p,q}X_{\sim,r} - X_{p,r}X_{\sim,q}) + (X_{p,q}X_{\sim,s} - X_{p,s}X_{\sim,q})$

$\mathscr{X}$. 6. II. Dacă $\alpha, \beta \in K$ definit pe E (constante) atunci $[\alpha X_{-,q}, X_{-,r}\beta]_p = [\alpha(X_{-,q}, X_{-,r})\beta]_p$.

Demonstrație. $[\alpha(X_{-,q}, X_{\sim,r})\beta]_p = \alpha(X_{p,q}X_{\sim,r})\beta - \beta(X_{p,q}, X_{\sim,q})\alpha \overset{F}{=} \alpha(X_{p,q}X_{\sim,r})\beta - \beta(X_{p,r}X_{\sim,q})\alpha$.

În cazul cînd $X_{p,q}$ sînt operatori lineari $[\alpha(X_{-,q}, X_{\sim,r})\beta]_p = \alpha[X_{-,q}, X_{\sim,r}]\beta$.

$\mathscr{X}$. 6. III $[X_{-,q}, X_{\sim,r+s}]_p \overset{F}{=} [X_{-,q}, X_{\sim,r}]_p + [X_{-,q}, X_{\sim,s}]_p + [X_{-,q}, X_{\sim,r}X_{\sim,s}]_p$.

Demonstrație. $[X_{-,q}, X_{\sim,r+s}]_p \overset{F}{=} [X_{-,q}, X_{\sim,r} + X_{\sim,s} + X_{\sim r}X_{\sim,s}]_p \overset{F}{=} [X_{-,q}X_{\sim,r}]_p + [X_{-q}X_{\sim,s}]_p + [X_{-,q}, X_{\sim,r}X_{\sim,s}]_p$.

$\mathscr{X}$. 6. IV $[X_{-,q}, X_{\sim,r}]_p \overset{F}{=} -[X_{-,r}, X_{\sim,q}]$.

Demonstrație. $-[X_{-,r}, X_{\sim,q}]_p = -[X_{p,r}X_{\sim,q} - X_{p,q}X_{\sim,r}]_p \overset{F}{=} X_{p,q}X_{\sim,r} - X_{p,r}X_{\sim,q} = [X_{-,q}X_{\sim,r}]_p$

$\mathscr{X}$. 6. V. $[[X_{-,q}, X_{\sim,r}], X_{(\sim),s}]_p + [[X_{-,r}, X_{\sim,s}]X_{()q}]_p + [[X_{-,p}, X_{\sim,q}]X_{(),r}]_p \overset{F}{=} 0$.

Demonstrație. $[[X_{-,q}, X_{\sim,r}], X_{(),s}]_p = [X_{p,q}, X_{\sim,r}]X_{(),s} - X_{p,s}[X_{\sim,q}, X_{()r}] = X_{p,q}X_{\sim,r}X_{(),s} - X_{p,r}X_{\sim,q}X_{(),s} - X_{p,s}X_{\sim q} \cdot X_{(),r} + X_{p,s}X_{\sim,r}X_{(),q}$; $[[X_{-,q}, X_{\sim,r}], X_{(),s}]_p + [[X_{-,r}, X_{\sim,s}], X_{()q}]_p + [[X_{-,s}, X_{\sim,q}]X_{(),r}]_q = (X_{p,q}X_{\sim,r}X_{()s} - X_{p,r}X_{\sim,q}X_{()s} - X_{p,s}X_{\sim,q}X_{(),r} + X_{p,s}X_{\sim,r}X_{(),q}) + (X_{p,r}X_{\sim,s}X_{(),q} - X_{p,s}X_{\sim,r} \cdot X_{(),q} - X_{p,q}X_{\sim,r}X_{(),r} + X_{p,q}X_{\sim,s}X_{(),r}) + (X_{p,r}X_{\sim,q}X_{(),r} - X_{p,q}X_{\sim,p}X_{(),r} - X_{p,r}X_{\sim,s}X_{(),q} + X_{p,r}X_{\sim,q}X_{(),s}) = 0$.

Prin spațiu $\mathscr{X}$ φ — complet înțelegem un spațiu $\mathscr{X}$ în care pentru orice $X_{-,-} \in \mathscr{X}$ și orice șir $p_\alpha \in E_s$, astfel ca $p_\alpha \to q$ avem $X_{p,-}\varphi q \to (\varphi'_q \cdot)$.

2. *Proprietățile reprezentării* φ'. Proprietățile reprezentării φ' a spațiului $\mathscr{X}$ în el însuși se deduc pe baza proprietăților și definițiilor deja considerate φ' fiind determinată de relațiile $\varphi'_p X_{p,-} = X_{p,-}(\cdot\varphi'_p) = X'_{\varphi p,-}$ unde $(\cdot\varphi'_p) = d(p, \varphi p, -) = X_{\varphi p,-}(p)$. Reprezentarea φ' e caracterizabilă prin următoarele proprietăți

$\varphi' \cdot a)$ φ' este o reprezentare a lui $\mathscr{X}$ astfel că $(\varphi'_p + \varphi'_q)X_{r,-} \overset{F}{=} \varphi'_p X_{r,-} + \varphi'_q X_{r,-} + (\varphi'_p X_{r,-})(\varphi'_q X_{r,-})$

Demonstrație. $(\varphi'_p + \varphi'_q)X_{r,-}f = (\dot{\varphi}'_p + \varphi'_q)\,d(f, r, -) = d(f, r, -)[\cdot(\varphi'_p + \varphi'_q)] = d(f, p' -)[d(p, \varphi p, -) + d(q, \varphi q, -)] = X_{r,-} f(X_{\varphi p,-}p + X_{\varphi q,-}q) = X_{r,(X_{\varphi p,-}p + X_{\varphi q,-q})} f$. Aplicînd d.2.II rezultă

$(\varphi'_p + \varphi'_q)\, X_{r.-} f \overset{F}{=} X_{r.(X_{\varphi p,-p})} f + X_{r.(X_{\varphi q,-q})} f + (X_{r.X_{\varphi p,-p}} f)(X_{r.X_{\varphi q,-q}} f) = d(f,r,d(p,\varphi p,-)) + d(f,r,d(q,\varphi q,-)) + (d(f,r,d(\varphi,p,-))(d(f,r,d(q,\varphi q,-)) = \varphi'_p X_{r.-} + \varphi'_q X_{r.-} + (\varphi'_p X_{r.-})(\varphi'_q X_{r.-})$

$\varphi.\ b.\ \varphi'_p (X_{q.-} + X_{r.-}) \overset{F}{=} \varphi'_p X_{q.-} + \varphi'_p X_{r.-}.$

Demonstrație. $\varphi'_p (X_{q.-} + X_{r.-}) f = \varphi'_p (X_{q.-} + X_{r.-}) f = (X_{q.-} f + X_{r.-} f)\, d(p,\varphi p,\sim) = [d(f,q,-) + d(f,r,-)]\, d(p,\varphi p,-) \overset{F}{=} d(f,q,d(p,\varphi p,-)) + d(f,r,d(p,\varphi p,-)) = \varphi'_p X_{q.-} f + \varphi'_p X_{r.-} f = (\varphi'_p X_{q.-} + \varphi'_p X_{r.-}) f$

$\varphi.\ c.\ \varphi'_p (\varphi'_q X_{r.-}) \overset{F}{=} (\varphi'_p \varphi'_q) X_{r.-}.$

Demonstrație. $\varphi'_p (\varphi'_q X_{r.-}) = ((X_{r.-} (\cdot \varphi'_q)) \cdot \varphi'_p) = d(-,r,d(q,\varphi q,d(p,\varphi p,-)))$; $(\varphi'_p \varphi'_q) X_{r.-} = X_{r.-} (\cdot(\varphi'_q \varphi'_q)) = X_{r.-} (\cdot(\varphi'_q (\cdot \varphi'_p))) = X_{r.-}\, d(q,\varphi q,d(p,\varphi p,-)) = d(-,r,d(q,\varphi q,d(p,\varphi p,-)))$ etc.

$\varphi'.\ d)\ \varphi'_p 0' = 0' \varphi'_p = 0$

$\varphi.\ e).\ \varphi'_r X_{p+q} = \varphi'_r X_{p.-} + (\varphi'_p X_{p.-}) X_{\sim.q}.$

Demonstrație. $\varphi'_r X_{p+q.-} = X_{p+q.-} (\cdot \varphi'_r) = X_{p+q.-} (\cdot \varphi'_r).$

Conform *k*. 4 I atunci $\varphi'_r X_{p+q} \overset{F}{=} X_{p.(\cdot \varphi'_r)} X_{\sim.q} + X_{p.\varphi'_r}.$

Se pot verifica și alte proprietăți de tipul *k* 4, *k*. 5 $\varphi' f)$; $f \in F$, $X \in \mathscr{X} \Rightarrow \varphi'(f X_{-.-}) = (\varphi^* f)(\varphi' X_{-.-})$

$\varphi \cdot g')$ φ' reprezintă un automorfism al L-algebrei $\mathscr{X}$:

$[\varphi' X_{-.-}, \varphi' X_{-.q}] = [X'_{-.-}, X'_{-.q}].$

Demonstrație

$[\varphi'_p X_{-.-}, \varphi'_p X_{\sim.q}]_p = [\varphi'_p X_{p.-}, \varphi'_p X_{\sim.q}] = [X'_{\varphi p,-}, X'_{-.q}].$

3. *Proprietățile reprezentării* (φ'). Cîmpul vectorial q-tangente caracterizat de transformarea $(\varphi'_p) = d(\varphi p, p, -) = X_{p.-} \varphi^P$. Proprietățile lui $\varphi'_{p.-}$ se deduc cu ajutorul celor ale lui $\mathscr{X}$.

(φ'), 1 : φ' este o reprezentare astfel ca

$[(\varphi'_P \cdot) + (\varphi'_Q \cdot)]p \overset{F}{=} (\varphi'_P \cdot) p + (\varphi'_Q \cdot) p.$

Demonstrație $[(\varphi'_P \cdot) + (\varphi'_Q \cdot)]\, p = (d(\varphi P, P, -) + d(\varphi Q, Q, -))p \overset{F}{=} d(\varphi P, P, p) + d(\varphi Q, Q, q)$

(φ'), 2.II $(\varphi'_p \cdot)(q + r) \overset{F}{=} (\varphi'_p \cdot) q + (\varphi'_p \cdot) r + X_{p.q} X_{\sim.r} \varphi p.$

Demonstrație $(\varphi'_p \cdot)(q + r) = d(\varphi p, p, q + r) = X_{p.q+r} \varphi p$. Conform *k*, 2. *II* : $(\varphi'_p \cdot)(q + r) = X_{p.q} \varphi p + X_{p.r} \varphi p + X_{p.q} X_{\sim.r} \varphi p$

$(\varphi' \cdot)$. 2.III $((\varphi'_p \cdot)(\varphi'_q \cdot) r) \overset{F}{=} ((\varphi'_p \cdot)(\varphi'_q \cdot)) r.$

Demonstrație $((\varphi'_p \cdot)((\varphi'_q \cdot) r) = d(\varphi p, p, d(\varphi q, q, r))$; $((\varphi'_p \cdot)(\varphi'_p)) r = d(\varphi p, p, d(\varphi q, q, -))$, etc.

$(\varphi' \cdot)$ 2. IV $0' (\varphi'_p \cdot) \overset{F}{=} (\varphi'_p \cdot) 0' = 0.$

Demonstrație $(\varphi'_p \cdot 0) = d(\varphi\, p, p, 0) = 0$, etc.

$(\varphi' \cdot)$ 2. V $(\varphi'_{p+q})\, r \overset{F}{=} X_{p\,.\,r}\, \varphi(p+q) + X_{p\,.\,r} X_{-\,.\,q}\, \varphi\,(p+q) \overset{F}{=} X_{q\,.\,r}\, \varphi(p+ + q) + X_{q\,.\,r} X_{-\,.\,q} \varphi\,(p+q)$.

Demonstrație

$(\varphi'_{p+q} \cdot)\, r \overset{F}{=} d(\varphi(p+q), p+q, r) = X_{p+q\,.\,r}\, \varphi(p+q) \overset{F}{=} X_{p\,.\,r} \varphi(p+q) + + X_{p\,.\,r} X_{-\,.\,q}\, \varphi(p+q)$

Corola. Dacă $(\varphi' \cdot)$ este o transformare liniară atunci $(\varphi'_{p+q} \cdot) r = = (\varphi'_p \cdot)\, r + X_{p\,.\,r}\, \varphi q + X_{p\,.\,r} X_{-\,.\,q}\, \varphi(p+q)$

φ'. 3. I $(\varphi'_p \cdot)\,(qr) \overset{F}{=} ((\varphi'_p \cdot)\, q) + q\, ((\varphi'_p \cdot)\, r) + (((\varphi'_p \cdot)\, q) \sim)\, (q'((\varphi'_p \cdot) \sim))$.

Demonstrație $(\varphi'_p \cdot)\,(qr) = X_{p\,.\,q\,r}\, \varphi p$. Conform *k*. 3. I. rezultă $(\varphi'_p \cdot)(qr) = X'_{p,q}\, \varphi p \cdot r + q\, X'_{p,r}\, \varphi p + (X'_{p,q}\, \varphi p \cdot r)\, (q\, X'_{p,r} \varphi p) = ((\varphi'_p \cdot)\, q) r + + q\, ((\varphi'_p \cdot)\, r) + (((\varphi'_p \cdot)\, q)\, r)\, (q\, ((\varphi'_p \cdot)\, r))$.

Se verifică, de asemenea, și alte proprietăți de tipul *k*.4.5. Vom mai stabili următoarele relații satisfăcute de $(\varphi' \cdot)$ pe care le vom denumi relații de fuziune

$$(\varphi'_p \cdot)\, q - (\varphi'_p \cdot)\, r = X_{p+r,\, q-r} \varphi p = - X_{p+q,\, r-q} \varphi p \text{ dacă } q,\ r \in E.$$

Demonstrație. $(\varphi'_p \cdot) q - (\varphi'_p \cdot)\, r = d(\varphi\, p, p, q) - d(\varphi p, p, r) =$
$= \varphi p\, (p+q) - \varphi p\, (p+r) = \varphi p\, (p+r+q-r) - \varphi p\, (p+r) =$
$= d(\varphi p, p, q) - d(\varphi p, p, r) = \varphi p\, (p+q) - \varphi p\, (p+q+r-q) =$
$= - d(\varphi p, p+q, r-q)$

$(\varphi'_P \cdot)\, v\, [p \vee q] - (\varphi'_P \cdot) v[p] = X_{P+v[p],\, v[q,\, p \wedge q]} \varphi P =$

$$= X_{P+v[p], v[p \vee q, p]} \varphi P \text{ cînd } p,\ q \in E_s.$$

Demonstrație. În baza proprietăților lui $(\varphi' \cdot)$ și de valorificare se deduce $(\varphi'_P \cdot)\, v\, [p \vee q] - (\varphi'_P \cdot)\, v\, [p] = d(\varphi\, P, P, v[p \vee q]) - d(\varphi\, P, P, v[p]) =$

$$= d(\varphi\, P, P, v\,[p] + v\,[q, p \wedge q]) - d(\varphi P, P, v\,[p]) =$$

$$= d(\varphi P,\ P + v\,[p], v\,[q, p \wedge q]) = X_{P+v[p],\, v[q,\, p \wedge q]} \varphi P = X_{P+v[p], [p \vee q,\, p]}$$

Același rezultat se obținea de altfel din relația precedentă demonstrată și condiția de valorificare. În cele ce urmează vom numi aceste relații, relații de „*fuziune*".

Vom mai stabili o așa numită relație de „*difuziune*"

$$(\varphi'_p \cdot)\, r - (\varphi'_s \cdot)\, r = X_{s,\, p-s}\, (\varphi'_- \cdot)\, r$$

Demonstrație. Primul membru se mai scrie $(\varphi'_{p-s+s} \cdot)\, r - (\varphi'_s \cdot)\, r = = d((\varphi'_- \cdot)\, r, s, p-s) = X_{s,\, p-s}\, (\varphi'_- \cdot)\, r$.

Observație. Asemenea relații (de fuziune și difuziune) se pot stabili și în cazul celorlalte spații ($\mathscr{X}$ de ex.). Astfel:

$\varphi'_Q\, X_{p,\,-} - \varphi'_P\, X_{p,\,-} = X_{p+(\cdot \varphi'_P),\, (\cdot \varphi'_Q) - (\cdot \varphi'_P)}$ sau $X_{p,-}(\sim)\,(q) - X_{p,-}(\sim)\, r = = X_{p+r, q-r}(\sim)$.

Demonstraţie. $\varphi'_Q X_{p,-} - \varphi'_P X_{p,-} = X_{p,-}(\cdot \varphi'_Q) - X_{p,-}(\cdot \varphi'_P) =$

$$= d(-, p, \cdot \varphi'_Q) - d(-, p, \varphi'_P) = d(-, p + \varphi'_P, (\cdot \varphi'_Q) - (\cdot \varphi'_P)) =$$

$$= X_{p+\varphi'_P, (\cdot\varphi'_Q) - (\cdot\varphi'_P)}.$$

$$X_{p,-}(\sim)(q - r) = X_{p-r,\, q}(\sim) - X_{p-r,\, r}(\sim).$$

Demonstraţie. $X_{p,-}(\sim)(q - r) = d(\sim, p, q - r) = \sim(p + q - r) -$

$$- \sim(p) = \sim(p - r + q) - \sim(p - r) + \sim(p - r) - \sim(p) =$$

$$= d(\sim, p - r, q) - d(\sim, p - r, r) = X_{\iota - r,\, q}(\sim) - X_{p-r,\, r}(\sim).$$

4. *Reprezentări F-diferenţiabile cvasiparametrice.* Vom considera în cele ce urmează reprezentări φ, F-diferenţiabile care satisfac următoarele condiţii suplimentare

$\oint$·1. Pentru orice $t \in E_s$, $v(t) \in R$ sînt date reprezentări φ_t ale varietăţii V_n F-diferenţiabile astfel ca $v[\varphi_t\, p] = \oint_t v[p]$ să inducă reprezentări de valori în R.

$\oint$· 2. Reprezentarea $(t, p) \in R \times V_n \to \varphi_t(p)$ e o reprezentare F-diferenţiabilă din $R \times V_n$ în V_n

$\oint$· 3. $\varphi_s\, \varphi_t = \varphi_{s+t-s\wedge t}$; $\oint_{s\vee t} v[p] = \oint_s v[p] + \oint_t v[p] - \oint_{s\wedge t} v[p]$

pentru orice $s, t \in E_s$.

Aceste reprezentări vor fi denumite reprezentări F-diferenţiabile cu un parametru sau cuasiparametrice. Înainte de a trece mai departe vom menţiona următoarele consecinţe ale definiţiilor date.

a. *O valorificare F-diferenţiabilă pe varietatea V_n admite reprezentări φ_t cuasiparametrice diferenţiabile.*

Demonstraţie. Vom defini $\oint_t$ şi φ_t prin formulele $\varphi_t\, p = p \vee t$, $\oint_t v[p] = v[\varphi_t\, p] = v[p \vee t] = v[p] + v[t] - v[p \wedge t]$. Atunci au loc următoarele egalităţi : $v[\varphi_s\, \varphi_t\, p] = v[\varphi_s(p \vee t)] = v[p \vee t \vee s] = v[\varphi_{s\vee t}\, p] =$

$$= \oint_{s\vee t} v[p] = v[p \vee t] + v[p \vee s] - v[(p \vee t) \wedge (p \vee s)] = \oint_t v[p] +$$

$$\oint_s v[p] - v[(p \vee t) \wedge (p \vee s)].$$

Dacă E_s este o latice distributivă atunci $(p \vee t) \wedge (p \vee s) = p \vee (t \wedge s)$.

În acest caz se deduce $\oint_{s \vee t} v\,[p] = \oint_s v\,[p] + \oint_t v\,[p] - \oint_{s \wedge t} v\,[p]$.

Totodată în E_s, $s \vee t = s + t - s \wedge t$,

b. *Spațiul $\mathcal{X}$-vectorial admite următoarea reprezentare cvasiparametrică* $\oint_t p - p \rightarrow X_{p\,.\,\oint_0 p - p}$ *pentru* $\oint_t p \rightarrow \oint_0 p$ pe orice V_n. $F_{\oint}$-*diferențiabil în* E_s

Demonstrație. În baza definiției lui $\mathcal{X}$ au loc relațiile $X_{p\,.\,\oint_t p - p}$

$$f = d\left(f, p, \oint_t p - p\right)$$

Pe de altă parte $\left| f\left(\oint_t p\right) - f(p) - d\left(f, p, \oint_t p - p\right)\right|_\alpha : \left|\oint_t p - \oint_0 p\right|_\beta \rightarrow 0$

$$\text{sau } d\left(f, p, \oint_t p - p\right)^F = f\left(\oint_t p\right) - f(p),$$

$$d\left(f, p, \oint_t p - p\right) \rightarrow d\left(f, p, \oint_0 p - p\right)$$

pentru $\oint_t p \rightarrow \oint_0 p$. Aplicînd acestea se deduce că $f\left(\oint_t p\right) - f(p) \rightarrow X_{p\,.\,\oint_0 p - p}$ sau, admițînd în notare funcția f, rezultă cele enunțate.

În exprimare generică, X induce $\oint$ și invers. Dacă valorificarea coincide cu elementele în E_s atunci

$$\oint_t p = v\,[\varphi_t p] = \varphi_t p\,; \quad \oint_t = \varphi_t .$$

Dacă elementele cvasiparametrice considerate sînt disjuncte în formulele precedente se va pune $s \wedge t = 0$.

c. *Dacă φ este o reprezentare F-diferențiabilă iar $X \in \mathcal{X}$ induce* $\oint_t$ *atunci* $\oint'$ *X induce reprezentarea* $\varphi\varphi_t\varphi^{-1}$. $\left(\oint' X(\;) = X\left((\;)\oint\right)\oint^{-1}\right)$.

Demonstrație. Ținînd seama de proprietățile F-diferențialelor rezultă relațiile: $\left(\oint' X_{\sim\,.\,\oint_t \sim - \sim}\right) f = \left(X_{\sim\,.\,\oint_t \sim - \sim} f \oint\right) \oint_{\sim}^{-1} = \left(f \oint\left(\oint_t \sim\right) -\right.$

$$-f\oint(\sim)\Big)\oint_{\sim}^{-1} = d\Big(f\oint,\sim,\oint_{t}\sim-\sim\Big)\oint_{\sim}^{-1} = d\Big(f\oint_{.}\oint_{\sim,}^{-1}\oint_{t}\oint_{\sim}^{-1}-\oint_{\sim}^{-1}\Big)=$$

$$=f\oint\oint_{t}\oint_{\sim}^{-1}-f\sim$$

ceea ce corespunde enunţului. Dacă $\oint$ comută cu $\oint_t$ atunci e clar că

$\oint' X_{\sim\cdot\oint_t\sim-\sim} = X_{\sim\cdot\oint_t\sim-\sim}$ fapt care indică o invariantă faţă de $\oint'$ a lui $X_{\sim\cdot\oint_t\sim-\sim}$. Dacă $f\in F$ e invariantă în raport cu $\oint_t$ rezultă că $X_{\sim\cdot\oint_t\sim-\sim}f = 0$.

d. *Dacă $f(t)\in F$ e o funcţie de clasă C^{u}, $u\geqslant 2$ în vecinătatea lui $O\in E_p$ astfel ca $f(0)=0$ atunci există o funcţie de clasă $C^{u'}$, $u'\geqslant 1$ $g(t)$ definită în aceeaşi vecinătate astfel ca $f(t)=tg(t)$, $g(s)=df(0,1,t)_{t=0}$.*

Demonstraţie. Se deduc relaţiile $\sum\limits_{m=0}^{N} d(f, p+\sum\limits_{i=1}^{m-1} q_i . q_m)= \sum\limits_{m=0}^{N}\Big(f(p+$

$$+\sum_{i=1}^{m} q_i\Big)-f\Big(p+\sum_{i=1}^{m-1} q_i\Big)=f\Big(p+\sum_{i=1}^{N} q_i\Big)-f(p)=f\Big(p+\sum_{i=1}^{N} q_i\Big).$$

Dacă $q_i = tr_i.\ \sum\limits_{1}^{n} r_i = 1$ atunci $g(t)=t^{-1}\sum\limits_{n=0}^{N} d\Big(f,\sum\limits_{i=1}^{m-1} tr_i.\ tr_m\Big)=g(t)$ atrage condiţia $f(t)=tg(t)$. De asemenea este clar că $g(0)=\Big[t^{-1}d\Big(f,\sum\limits_{i=1}^{m-1} tr_i,$ $tr_m\Big)\Big]_{t\to 0} = df(0,1,t)_{t=0}$ în sensul G-diferenţialei.

Această proprietate este generalizată în mod imediat prin următoarea.

e. Dacă $f(t,p)$ este o funcţie de clasă C^{u}, $u\geqslant 2$ pe $\mathcal{U}\times V_n$ $\mathcal{U}$ fiind o vecinătate a lui O în E_p iar V_n o varietate de clasă $C^{u'}$, $u'\geqslant 1$ astfel ca $f(o,p)=0$ pentru $p\in V_n$ oarecare, atunci există funcţia $g(t,p)$ de clasă $C^{u''}$, $u''\geqslant 1$ pe $\mathcal{U}\times V_n$ astfel ca $f(t,p)=tg(t,p)$, $g(0,p)=df(0,1,t)_{t=0}$ pentru orice $p\in V_n$.

f. Dacă $X\in\mathcal{X}(V_n)$ induce reprezentarea cvasiparametrică $\oint_t$ atunci pentru o funcţie $f\in F$ constantă există o funcţie definită pe $\mathcal{U}\times V_n$, $gt(p) = g(t,p)$ care pentru f de clasă C^{u} $u\geqslant 2$ e de clasă C^{v}, $v\geqslant 1$ astfel ca pe $V_n = f\Big(\oint_t p\Big)=f(p)+tg_t(p)$, $g_0(\sim)=df(\sim,1,t)_{t\to 0}=(t^{-1}X_{\sim\cdot\oint_t\sim-\sim}f)_{t\to 0}$.
Pentru demonstraţie e suficient de a considera pe $\mathcal{U}\times V_n$ funcţia $f(t,p)=$

$= f\left(\oint_t p\right) - f(p)$ și de a aplica proprietatea e) : $f\left(\oint_t p\right) - f(p) = tg(t, p) = tg_t(p)$ cu $g_t(p) = g(t, p)$ și $g(0, p) = df(0, 1, t)_{t \to 0} = \left[t^{-1}\left(f\left(\oint_t p\right) - f(p)\right)\right]_{t \to 0} = (t^{-1} X_{p \,.\, \oint_t p - p})_{t \to 0} f$ sau $tg(0, p) \to X_{p \,.\, \oint_0 p - p} f$.

g. Dacă $\oint_t$ și ψ_t sînt transformări cvasiparametrice în $p \in V'_n$ induse de $X, Y \in \mathcal{X}$ atunci $\left(Y - \oint_t' Y\right) p f \to [X, Y]_{p \,.\, \oint_0 p - p} = X_{\oint_0^{-1} p \,,\, p - \oint_0^{-1} p} Yf - Y X_{p \,.\, \oint_0 p - p} f$.

Demonstrație. Fie $f \in F$. În baza proprietății precedente există g_t pe V_n astfel ca f $\oint_t = f + tg_{t\,.}\, g_0(\sim) = (t^{-1} X_{p \,.\, \oint_t p - p} f)_{t \to 0}$ și deci $\left(\oint_t' - Y\right)_p f = Y\left(f \oint_t\right)\left(\oint_t^{-1} p\right) = (Yf)\left(\oint_t^{-1} p\right) + t\,(Yg_t)\,(\varphi_t^{-1} p)$ iar $\left(Y - \oint_t' Y\right)_p f = Yf(p) - Yf\left(\oint_t^{-1} p\right) - t\,(Yg_t)\left(\oint_t^{-1} p\right) = X_{\oint_t^{-1} p \,,\, p - \oint_t^{-1}}$

$$Yf - t\,(Y g_t)\left(\oint_t^{-1} p\right).$$

Ținînd seama de f, rezultă pentru $t \to 0$, $\oint_t \to \oint_0$, $\left(Y - \oint_t' Y\right)_p f \to$

$$\to X_{\oint_0^{-1} p \,,\, p - \oint_0^{-1} p}\, Yf - Y X_{p \,.\, \oint_0 p - p} f\left(\oint_0^{-1} p\right) = [XY]_{p \,.\, \oint_0 p - p} f.$$

Corolar. Dacă $\oint_{t.}$ ψ_s satisfac condițiile din g, atunci $[X, Y]_{p \,.\, \oint_0 p - p} = 0$ cînd $\oint_t \psi_s - \psi_s \oint_t$. Într-adevăr în acest caz, conform rezultatelor precedente Y e invariant în raport cu $\oint_t$ și $[X, Y]_{p \,.\, \oint_0 p - p} = 0$ și invers.

Vom înțelege printr-o curbă cvasiparametrică varietatea cu o dimensie dată de o transformare cvasiparametrică $\oint_r t = t'_r$. Vom mai defini prin vector contravariant $\oint$ — tangent mărimea definită prin relațiile : $t''_s = \oint_s\left(\oint_t\right) - \oint_s = \left(d_{\oint}\left(\oint, s, t\right)\right) = \oint_s' t_s\left(= X_{s \,,\, s \oint_t - s} \oint_\sim\right)$.

Transformarea $\oint_s'$ induce corespondența $t \to t''_s$.

5. *Corepere naturale*. Fie $P \in V_n$ şi o vecinătate $\mathcal{U}$ a lui precum şi elementele spaţiului d-vectorial (care este un E-modul unitar la stînga şi un F-modul unitar la stînga). O bază a unui E-modul unitar care este chiar spaţiul d-vectorial considerat este o familie de elemente $(e_\iota)_{\iota \in I.}$, I fiind o mulţime finită sau nu de indici pentru care, pentru orice element d-vectorial, d, există o exprimare a sa unică $d = \sum\limits_{\iota \in I} \lambda_\iota e_\iota$, pentru $\lambda_\iota \in E$ nuli în afara unui număr finit de indici. Pentru construcţia unei asemenea baze vom presupune definit în T un sistem local de coordonate $x^\iota = v\,[p^\iota]$, $p^\iota \in P^\iota$, $\iota \in$, P fiind elementele unei baze a structurii valorificate pe E_s care este un spaţiu local convex reticulat E_s astfel că $E_s = \mathop{\times}\limits_{\iota \in I} E_s^\iota, \mathcal{X}^\iota \in E_s^\iota$, E_s^ι fiind local convexe reticulate. În cele ce urmează vom omite notaţia v utilizînd în locul notaţiei x notaţia p sau invers.

Funcţiile $f \in F$ vor fi considerate drept aplicaţii $\mathop{\times}\limits_{\alpha \in I} E_s^\alpha \to F$. În acest caz, elementele d-vectoriale se scriu: $d\,(f;\, p^\iota, \dots p^\iota, \dots;\, q^1 \dots q^\iota, \dots) = f\,(p^1 + q^1, \dots p^\iota + q^\iota, \dots) - f\,(p^1, \dots p^\iota, \dots) = X_{p^1, \dots;\, q^1, \dots q^1, \dots}$ f pentru p^ι, $q^\iota \in P\,(E_s^\iota)$ $\iota \in \mathrm{I}$.

Într-o transformare $\varphi : p'^\iota = \varphi^\iota(p^1, \dots p^\iota, \dots)$, $\iota \in I$ *elementul* $d\,(f;\, p^1, \dots p^\iota, \dots;\, q^1, \dots, q^\iota, \dots)$ *este un invariant*: $d\,(f, p^\iota, q^\iota) = d\,(f, p'^\iota, q'^\iota)$.

Demonstraţie: Se calculează $d\,(f;\, p^1, \dots p^\iota, \dots :\, q^1, \dots, q^\iota \dots) = d\,(f;\, p^1, \dots p^\iota, \dots;\, p^1(p'^1 + q'^\iota), \dots, p'^\iota + q'^\iota, \dots) - p^1(p'^1, \dots p'^\iota, \dots), \dots), = f\,(p^1\,(p'^1 + q'^1), \dots, p'^\iota + q'^\iota, \dots), \dots) - f\,(p^1(p'^1, \dots, p'^\iota, \dots), \dots) =$

$$= f\,(p'^1 + q'^1, \dots p'^\iota + q'^\iota, \dots) - f\,(p'^1, \dots p'^\iota, \dots) =$$

$$= d\,(f;\, p'^1, \dots p'^\iota, \dots;\, q'^1, \dots q'^\iota, \dots).$$

La rîndul lor, elementele q-vectoriale sînt: $q^\iota = d\,(\mathrm{p}^\iota;\, p'^1, \dots p'^\iota, \dots;\, q'^1, \dots, q'^\iota \dots) = X_{p'^1, \dots p'^\iota, \dots;\, q'^1, \dots q'^\iota \dots}\ p^\iota$, $\iota \in I$ presupunîndu-se $P \in \mathcal{U}_\wedge\ \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ fiind o altă vecinătate a lui P în care este definit sistemul local de coordonate $x'^\iota = v\,[p'^\iota]$ sau omiţînd notaţia v, p'^ι. În general această aplicaţie nu e liniară. Valorile q^ι, $\iota \in I$ constituiesc aşa numitul *sistem de corepere naturale* pentru care se definesc aplicaţiile $d\,(p'^{\iota'};\, p^1, \dots p^\iota, \dots;\, q^1, \dots q^\iota, \dots) = (\varphi_\iota'^{\iota'} \cdot)[q^\iota] = q'^{\iota'}$ reprezentînd legea de transformare a coreperelor.

Astfel introdusă, legea ar avea un caracter formal. Se poate însă preciza natura transformării $(\varphi_\iota'^{\iota'} \cdot)$ după cum urmează:

Legea de transformare a coreperelor este definită prin următoarele condiţii:

$$(\varphi_\iota'^{\iota'}) = (\varphi'^{p'\iota'}_{\iota p \iota})_q = d\,(p'^{\iota'};\ p^1, \dots,\ p^\iota,\ p^{\iota+1} + q^{\iota+1},\ p^{\iota+2} + q^{\iota+2}, \dots;\ \underbrace{0, \dots 0, -}_{\text{de } \iota \text{ ori}},\ 0 \dots 0)$$

$$[q^\iota] = [\underbrace{0, \dots 0,\ q^\iota}_{\text{de } \iota \text{ ori}},\ 0, \dots 0];\quad (\varphi_\iota'^{\iota'})\,[q^\iota] = \sum_{\iota \in I} d\ \ (p'^{\iota'};\ p^1, \dots p^\iota,$$

$$p^{\iota+1} + q^{\iota+1},\ p^{\iota+2} + q^{\iota+2}, \dots -;\ \underbrace{0, \dots 0,\ q^\iota}_{\text{de } \iota \text{ ori}},\ 0, \dots)$$

Demonstrație. Se calculează $d\,[p'^{\iota'}\,;\,p^1,\dots p^\iota,\dots;\,q^1,\dots q^\iota,\dots]= = p'^{\iota'}\,(p^1+q^1,\dots,p^\iota+q^\iota,\dots)-p'^{\iota'}\,(p^1,\dots,p^\iota,\dots)=p'^{\iota'}\,(p^1+q^1,\dots, p^\iota+q^\iota,\dots)-p'^{\iota'}\,(p^1,p^2+q^2,\dots,p^\iota+q^\iota,\dots)+p'^{\iota'}\,(p^1,\,p^2+q^2,\dots, p^\iota+q^\iota,\dots)-p'^{\iota'}\,(p^1,p^2,p^3+q^3,\dots,p^\iota+q^\iota,\dots)+p'^{\iota'}\,(p^1,p^2,p^3+q^3,\dots, p^\iota+q^\iota,\dots)+\dots-p'^{\iota'}\,(p^1,\dots,p^\iota,\dots)=\sum_{\iota\in I} d\,(p'^{\iota'}\,;[p^1,\dots,p^\iota,\,p^{\iota+1}+ +q^{\iota+1},\;p^{\iota+2}+q^{\iota+2},\dots;\;\underbrace{0,\dots,0,\,q^\iota}_{\text{de }\iota\text{ ori}},\;0,\dots\;0]=\sum_{\iota\in I} d\;[(p'^{\iota'}\,;\,p^1,\dots, p^\iota,\;p^{\iota+1}+q_\iota^{+1},p^{\iota+2}+q^{\iota+2},\dots;\underbrace{0,\dots,0,-}_{\text{de }\iota\text{ ori}}0,\dots]\;[\underbrace{0,\dots,\;0,\;q^\iota}_{\text{de }\iota\text{ ori}},0\dots].$

De fapt, în cele precedente s-a folosit regula produsului tensorial, asupra căreia se va reveni. Mai este de remarcat faptul că din legea de transformare a coreperelor se deduce, înlocuind $p'^{\iota'}$ cu $f\in F$ formula cu un caracter mai general

$$d\;(f;\;p^1,\dots,\;p^\iota,\dots;\;q^1,\dots,\;\;q^\iota,\dots)=X_{p^1,\dots,p^\iota,\dots;\,q^1,\dots,q^\iota,\dots}\,f= =\sum_{\iota\in I} d\,(f;p^1,\dots,p^\iota,\;p^{\iota+1}+q^{\iota+1},\;p^{\iota+2}+q^{\iota+2},\dots;\;\;\underbrace{0,\dots 0,\,q^\iota}_{\text{de }\iota\text{ ori}},0,\dots)= =\sum_{\iota\in I} X_{p^1,\dots\,p^\iota,p^{\iota+1}+q^{\iota+1},\,p^{\iota+2}+q^{\iota+2},\dots;\,0\dots\,0,\,q^\iota;\dots}\,f=\sum_{\iota\in I} d\,(f;p^1,\dots,p^\iota,p^{\iota+1}+ +q^{\iota+1},\;p^{\iota+2}+q^{\iota+2},\dots;\;\underbrace{0,\dots,\,0,\,-}_{\text{de }\iota\text{ ori}}\,0,\dots]\;[\underbrace{0,\dots 0,\;q^\iota}_{\text{de }\iota\text{ ori}},\;0,\dots].$$

Transformarea (ψ') satisface condiția $(\varphi'^{\beta'}_{\alpha}\cdot)\;[(\varphi'^{\alpha}_{\gamma'}\cdot)\;[\;\;]]=$

$$=\delta^{\beta'}_{\gamma'};\;(\varphi'^{\beta}_{\alpha'}\cdot)\;[(\varphi'^{\alpha'}_{\gamma}\cdot)\;[\;\;]]=\delta^{\beta}_{\gamma}.$$

Demonstrație. Se calculează : $q'^{\alpha'}=d\,(p'^{\alpha'};p^1,\dots\;p^\iota,\dots;\;q^1,\dots, q^\iota,\dots)=(\varphi'^{\alpha'}_{\beta}\cdot)\;[q^\beta]=(\varphi'^{\alpha'}_{\beta}\cdot)\;[d\,(p^\beta;p'^1,\dots p'^{\iota'},\dots;q'^1,\dots q'^\iota,\dots]= =(\varphi'^{\alpha'}_{\beta})\;[(\varphi'^{\beta}_{\gamma'}\cdot)\,[q^{\gamma'}]]$, așadar $q^{\alpha'}=(\varphi'^{\alpha'}_{\beta}\cdot)\;[\varphi'^{\beta}_{\gamma'}\cdot)\;[q^{\gamma'}]]$ sau $-=(\varphi'^{\alpha'}_{\beta}\cdot)$ $[\varphi'^{\beta}_{\gamma'}\cdot)\;[-]^{\gamma'}]$, efectul aplicației $(\varphi'^{\alpha}_{\beta'})\;[(\varphi'^{\beta}_{\gamma'}\cdot)\;[\;\;]]$ fiind același cu al lui δ^{β}_{γ} etc.

În general, prin sisteme de corepere sa va înțelege elementele $\theta^\alpha\in\mathcal{T}_P$ pentru care au loc relațiile $\theta^{\;\alpha}=(\varphi'^{\alpha}_{\beta'}\cdot)\;[\theta^{\beta'}]$. În notație vectorială cu $\theta=\|\theta^\alpha\|,[\varphi']=\|[\varphi'^{\alpha'}_{\beta}\cdot]\|$ aceste relații se scriu $\theta=(\varphi'\cdot)\,[\theta']$.

În relațiile precedente și următoare se omite notația F în egalitatea $F=$.

6. *Repere naturale.* Vom considera în $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$ elementele r-vectoriale care în cazul aplicațiilor $\times_{\iota\in I} E_s\to F$ sînt definite de transformarea a reperelor.

$$r'_{\beta'}[\;\;]=r_\alpha\;[\cdot\;\varphi'^{\alpha}_{\beta'}\;[\;\;]].$$

În legea de transformare a reperelor avem :

$$r_\alpha[\;]=d\,(f;p^1,\dots,p^\alpha,\;p^{\alpha+1}+q^{\alpha+1},\;\dots,\;p^\iota+q^\iota,\dots;\underbrace{0,\dots 0,-}_{\text{de }\alpha\text{ ori}},0,\dots)$$

$$[\;\;]=(\varphi'^{f}_{p\alpha}\cdot)\;[\;\;];\;\;[\cdot\varphi'^{\alpha}_{\beta'}\;[\;\;]]=[\underbrace{0,\dots,\;0,\;(\varphi'^{\alpha}_{\beta'}\cdot)}_{\text{de }\beta'\text{ ori}}\;[\;\;],\;0,\dots]=$$

$$=[(\varphi'^{\alpha}_{\beta'}\cdot)]\;[\;\;].$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Demonstrație. Se calculează $r_\alpha\ [q^\alpha] = \sum_{\alpha\in I} d\ (f; p^1, \dots, p^\alpha, p^{\alpha+1} + q^{\alpha+1}, \dots, p^\iota + q^\iota, \dots; 0\underbrace{, \dots 0, -}_{\text{de } \alpha \text{ ori}}, 0, \dots]\ [\underbrace{0, \dots 0, q^\alpha}_{\text{de } \alpha \text{ ori}}, 0, \dots] = \sum_{\alpha\in I} d\,(f; p^1, \dots, p^\alpha, p^{\alpha+1} + q^{\alpha+1}, \dots, p^\iota + q^\iota, \dots; \underbrace{0, \dots, 0, q^\alpha}_{\text{de } \alpha \text{ ori}}, 0, \dots) = d(f; p^1, \dots, p^\iota, \dots; q^1, \dots q^\iota, \dots) = d(f; p'^1, \dots, p'^{\iota'}, \dots; q^1, \dots q'^{\iota'}, \dots)$ în baza invarianței elementelor $d\,(f;\ p^1, \dots p^\iota, \dots;\ q^1, \dots, q^\iota)$. Atunci $r_\alpha\,[q^\alpha] = r'_{\beta'}\ [q'^{\beta'}]$ și ținînd seama de legile de transformare ale elementelor q-vectoriale se deduce relația: $r_\alpha\,[(\varphi'^\alpha_{\beta'})\ \ [q'^{\beta'}]] = r'_{\beta'}\,[q'^{\beta'}]$. Așadar efectul aplicației $r_\alpha\,[(\varphi'^\alpha_{\beta'}\cdot)\ [\quad]]$ este același cu al lui $r'_{\beta'}\ [\quad]$ ceea ce justifică cele enunțate.

Dacă V_n e de clasă C^v atunci $(\varphi'^\alpha_{\beta'}\cdot)$, $(\cdot\,\varphi'^\alpha_{\beta'})$ sînt de clasă C^{v-1}.

În general, se numesc sisteme de repere elementele $e_\alpha \in \mathcal{T}^\alpha_P$ pentru care au loc relațiile $e'_\beta\ [\quad] = e_{\beta'}\ [\quad] = e_\alpha\ [\cdot\,\varphi'^\alpha_{\beta'}\ [\quad]]$ sau în notația vectorială cu $e = \|e_\alpha\|$, $\|[\cdot\,\varphi'^\alpha_{\beta'}\ [\quad]]\| = [\cdot\,\varphi']^\beta$, $e' = e\ [\cdot\ \varphi']$. Atunci $e\ \theta = e'\ \theta'$ în baza invarianței lui $r_\alpha\ [q^\alpha]$.

Vom observa că $(\varphi'^{\iota'}_\iota\cdot)\ [\sim] = p'^{\iota'}\ (p^1, \dots, p^{\iota-1}, p^\iota + \sim, p^{\iota+1} + q^{\iota+1}, p^{\iota+2} + q^{\iota+2}, \dots) - p'^{\iota'}\ (p^1, \dots, p^\iota, p^{\iota+1} + q^{\iota+1}, \dots) = (\varphi'^{\iota'}_\iota)_1\ (\sim) + (\varphi'^{\iota'}_\iota)_2\ (\sim)^2 + \dots + (\varphi'^{\iota'}_\iota)_n\ (\sim)^n + \dots$ unde $(\varphi'^{\iota'}_\iota)_n$ înmulțesc produsul de n ori al mărimii q^ι-vectoriale $(\sim)$. Vom nota $(\varphi'^{\iota'}_\iota)_1 + (\varphi'^{\iota'}_\iota)_2\ (\sim) + \dots + (\varphi'^{\iota'}_\iota)_n\ (\sim)^{n-1} + \dots = \psi'^{\iota'}_\iota\ (\sim)$ și $\mathcal{J} = det\ \psi'^{\iota'}_\iota\ (q^\iota)$ (fără sumare în ι).

Prin *pseudoscalar* în raport cu sistemele de repere $(r_\iota)_{\iota\in I}$ vom înțelege elementul $\psi \in F$ care se schimbă conform legii $\psi' = \text{sign}\ \mathcal{J}\cdot\psi$; sign $\mathcal{J} = +$ pentru $\mathcal{J} > 0$ și $= -$ pentru $\mathcal{J} < 0$. Este clar că produsul a doi pseudoscalari va fi un scalar. *Orientația* în $P \in V_n$ va fi un pseudoscalar ε al cărui patrat $\varepsilon^2 = 1 \in E$. Prin *cîmp de pseudoscalar* de clasă C^u, $u \leqslant v$ (sau pseudoscalari de clasă $(^u)$) într-un domeniu dat în V_n se va înțelege un pseudoscalar definit pentru orice $p \in V_n$ de clasă C^u în orice acoperire a domeniului presupus înzestrat cu repere în sensul dat mai sus. O varietate V_n va fi considerată *orientată* dacă se dă pe V_n o orientație $\varepsilon\ (\varepsilon^2 = 1)$.

7. *Tensori*. Fie $P \in V_n$ într-un domeniu dat a lui V_n pe care se definește o acoperire formată din mulțimi de vecinătăți ale lui P anume $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \dots$, înzestrate cu repere și corepere $(P \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}, \dots)$. T^β_α și $T^{\gamma'}_{\delta'}$ sînt componentele unui tensor de tip (1, 1) — o dată contravariant și o dată covariant — în raport cu coreperele și reperele în P în vecinătatea $\mathcal{U}$ respectiv $\mathcal{V}$ dacă

$$T^{\gamma'}_{\delta'}\ [\quad] = (\varphi'^{\gamma'}_\beta\cdot)\ [T^\beta_\alpha\ [\cdot\,\varphi'^\alpha_{\delta'}\ [\quad]]\cdots].$$

În mod echivalent vom spune că T este element al produsului $\mathcal{T}_P \otimes [\mathcal{T}^{\cdot}_P]$ în domeniul dat de clasă C^u $(u \leqslant v - 1)$. C^v fiind clasa funcțiilor componentelor reperelor în $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$.

În general un tensor T de tip (q, r) — de q ori contravariant și de r ori covariant — este definit într-un domeniu dat a lui V_n pe care se dă și o acoperire formată din vecinătăți ale lui $P : \mathcal{U}, \mathcal{V}, \ldots$ înzestrate cu repere și corepere astfel ca $P \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \wedge, \ldots$ prin legea de transformare

$$T^{\gamma'_1 \ldots \gamma'_q}_{\delta'_1 \ldots \delta'_r} = (\varphi'^{\gamma'_1}_{\beta_1} \cdot)\, [\ldots [(\varphi'^{\gamma'_q}_{\beta_q} \cdot)\, [T^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} [\cdot \varphi'^{\alpha_1}_{\delta'_1} [\cdot \varphi'^{\alpha_2}_{\delta'_2} [\ldots [\cdot \varphi'^{\alpha_r}_{\delta'_r} [\quad] \ldots] \ldots]$$

În alți termeni T aparține produsului tensorial în sens generalizat $\mathcal{T}_P \otimes \mathcal{T}_P \ldots$ de q ori $\ldots \otimes [\mathcal{T}_P \otimes [\mathcal{T}^*_P \otimes [\ldots$ de r ori $\ldots \otimes [\mathcal{T}^*_P] \ldots]$. Este de precizat că tensorii în sens generalizat au caracter operațional fiind de forma $T^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = T^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} (0\underbrace{, \ldots, 0, -}_{\text{de } \alpha_q \text{ ori}}, 0, \ldots ; \ldots ; \underbrace{0 \ldots 0 \sim}_{\text{de } \alpha_r \text{ ori}} 0 \ldots)$.

Dacă P e oarecare în V_n atunci tensorii definiți formează un cîmp de tensori pe V_n. Fie de asemenea elementele spațiului $\mathcal{X}$-vectorial. Un cîmp F-diferențial de tip (0,1) pe V_n este dat chiar de elementele din $\mathcal{X}$: $X'_{\beta'} = X_\alpha [\cdot \varphi'_{\beta'} [\quad]]$. În mod analog ca și mai sus se mai pot defini elementele tensoriale de tipul $(0, r)$ care se transformă conform legii $X'_{\beta_1' \ldots \beta'_r} = X_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} (\cdot \varphi'^{\alpha_1}_{\beta'_1} [\ldots [\varphi'^{\alpha_r}_{\beta_r} [\quad] \ldots]$, etc. aparținînd produsului $\mathcal{X}$ $[\otimes \ldots$ de r ori $\ldots \otimes [\mathcal{X}] \ldots]$.

Se mai pot defini și produsele $[\mathcal{T}_P] \otimes [\mathcal{T}_P] \ldots \otimes [\mathcal{T}^*_P] \otimes \ldots$ cărora le corespund elementele $(q^\alpha) \ldots (r^\beta)$ etc.

Primită la redacție la 24 februarie 1962.

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

РЕЗЮМЕ

Геометрическая теория реологических структур представляет собой распространение геометрической теории пространств с аффинной связностью на случай более общих пространств, соответствующих свойствам реальных реологических структур.

Пользуясь определением некоторых дифференциалов в смысле разностей в местно выпуклом частично упорядоченном или структурном топологическом пространстве, разрабатывается теория F- дифференцируемых многообразий. Рассматриваются свойства векторов на этих многообразиях. На основании этого анализа разрабатывается также теория так называемой оцениваемой связности.

В рамках этой теории рассматривается векторный параллелизм и выводится основное уравнение параллелизма, на котором основывается механика реологических структур, которая будет развита в будущих статьях.

STRUCTURES RHÉOLOGIQUES

RÉSUMÉ

La théorie géométrique des structures rhéologiques représente une extension de la théorie géométrique des espaces à connexion affine, au cas des espaces plus généraux, correspondant aux propriétés des structures rhéologiques réelles.

En utilisant une définition de certaines différentielles dans le sens de différences dans un espace topologique local, convexe, partiellement ordonné ou structural, l'auteur expose la théorie des variables F différentiables. Il analyse ensuite les propriétés des vecteurs dans ces variétés. En vertu de cette analyse, l'auteur élabore, en outre, la théorie de la connexion, du type appelé «de valeur». Dans le cadre de cette dernière, il étudie le parallélisme des vecteurs et déduit l'équation fondamentale du parallélisme, qui réside à la base de la mécanique des structures rhéologiques, et qui sera développée dans des articles ultérieurs.

BIBLIOGRAFIE

1. GARRETT BIRKHOFF, *Lattice theory*. Revised Edition, New York, 1948 ; Теория структур, ИЛ, Москва (1952).
2. CARTAN E., *Sur les variétés à connexion affine*. Ann. de l'Ec. N. Sup, t . **40** 325—412 (1923) ; *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*. Ann. Ec. Norm., (1924) 1—25 ; *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés*. Acta Math., 48 (1920) 1—42.
3. EHRESMAN C., *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*. Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950, 29—55.
4. EISENHART, L. F. *Non-Riemannian Geometry*. New York, 1927.
5. LEFSCHETZ S., *Algebraic topology, 1942*. Алгебраическая топология, 1949, ИЛ, Москва.
6. LICHNEROWICZ ANDRÉ, *Théories globales des connexions et des groupes d'holonomie*. Roma, Edizione Cremonese, 1955 ; Теория связностей в целом и группы годономии, ИЛ, Москва, 1960.
7. MARINESCU G., *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice*. Ed. Acad. R.P.R., 1959.
8. MICHAL A. D., *General Differential Geometries and Related Topics*. Bull. Amer. Math. Soc., **45** 529—563 (1939).
9. MIȘICU M., *Echilibrul mediilor continui cu deformări mari*. Studii și Cercetări de mecanică și metalurgie, *4* (1958) 31—53 (*Gleichgewicht kontinuierlicher Körper mit endlich grossen Verformungen*. Revue de Mécanique Appliquée, **1**, 175—183 (1956).
10. MOISIL GR. C., *La mécanique analytique des systèmes continus*. București, 1929.
11. NOMIZU K., *Lie groups and differential geometry*. The Mathematical Society of Japan, 1956. (Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИЛ, Москва, 1960.
12. DE RHAM, G., *Variétés différentiables*. Paris, Hermann, 1955, Дифференцируемые многообразия И, Москва, 1956.
13. RICCI G., T. LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu*. Mathem. Ann. 1901.
14. RICCI G., *Nozione di parallelismo in una varieta qualunque e consequente specificazione della curvatura della varieta*. Rend. Circ. Matem. di Palermo, 42 (1917).
15. SCHOUTEN J. A., STRUIK J., *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*. Nordhoff, 1935 ; 1938.
16. SCHOUTEN J. A., *Der Riccikalkül*. Berlin, Springer, 1924.
17. СКОРНЯКОВ Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. Госуд. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва, 1961.
18. WEIL H., *Reine Infinitesimal-geometrie*. Mathematische Zeitschrift, **2**, 388—411 (1918).

ELASTICITATE-PLASTICITATE-REZISTENȚA MATERIALELOR – REOLOGIE

STUDII ASUPRA STRUCTURILOR DE REZISTENȚĂ ALE CONSTRUCȚIILOR CU AJUTORUL MODELELOR DIN MASE PLASTICE

DE

M. ARCAN [1]) și ED. NICOLAU [1])

1. *Introducere.* Utilizarea modelelor la scară redusă a început încă din sec. al XIX-lea și a exprimat în fond îndoiala în capacitatea metodelor matematice de dimensionare, de a reflecta corect comportarea construcțiilor. Totuși, dezvoltarea și larga răspîndire a metodelor de calcul care au alcătuit știința rezistenței materialelor, ușurința cu care cunoașterea lor se poate transmite, succesele obținute prin varietatea formelor ușoare și zvelte, prin economia de material și muncă realizată, au asigurat o încredere nezdruncinată în valoarea lor. Accidentele și catastrofele produse au atras în repetate rînduri atenția asupra lipsurilor existente în aceste metode dar, în absența unui aparataj de măsură cu o precizie satisfăcătoare, ele au constituit numai un imbold la îmbrățișarea în formule matematice din ce în ce mai complicate a fenomenelor observate întîmplător în natură. Tratarea matematică a problemei dimensionării a devenit însă din ce în ce mai complicată, iar revoluția produsă de electronică în privința preciziei aparatelor de măsură a permis abordarea încercării modelelor ca o metodă de dimensionare experimentală. A fost elaborată și formulată o teorie a modelelor care permite interpretarea corectă, științifică a rezultatelor ; au fost concepute și experimentate cu succes numeroase metode de investigație pe modele iar laboratoarele de încercări s-au înmulțit.

Diversitatea mijloacelor de investigație se explică pe de o parte prin caracterul lor limitat prin incapacitatea vreuneia dintre metode, de a reflecta în întregime, în mod operativ și cu anticipație fenomenul complex al rezistenței structurii și pe de altă parte prin evidenta lor utilitate, fiecare dintre ele, cu tot caracterul lor limitat, furnizînd informații prețioase.

---

[1]) Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor INCERC — București.

În cercetările pe structuri de rezistență ce s-au efectuat în anii din urmă în Institutul de cercetări în construcții, INCERC, s-a acordat importanță utilizării maselor plastice pentru modele [1], [2], [3], [4] de dimensiuni reduse (pînă la un metru). Deși modelele de materiale plastice nu permit să se urmărească comportarea la rupere a construcțiilor, iar printr-un coeficient Poisson mare rezultatele cuprind — în general vorbind — erori, ele asigură prin omogenitatea și deformabilitatea lor mare în domeniul elastic informații prețioase asupra comportării de ansamblu a construcției.

2. *Utilizarea modelelor de ansamblu ale construcțiilor.* Interpretarea rezultatelor obținute experimental în cazul încercărilor făcute pe model, spre deosebire de cele efectuate pe construcții, necesită în prealabil stabilirea condițiilor de similitudine și evaluarea pe baza lor a coeficienților de similitudine. Cunoașterea acestor coeficienți, reprezentînd scările de transformare, permite să se deducă din rezultatele măsurătorilor pe model, valorile mărimilor omologe pe prototipul construcției.

Stabilirea condițiilor de similitudine constă în obținerea unui sistem de relații ce exprimă interdependența dintre coeficienții de scară ai mărimilor ce intervin în calculele construcției.

Acest sistem de relații se poate obține [5] folosind trei grupe de egalități :

— ecuațiile de echilibru ale unui paralelipiped elementar,
— relațiile geometrice dintre deformații și deplasări,
— relațiile fizice dintre tensiuni și deformații.

Toate aceste condiții furnizează un număr de ecuații mai mic decît numărul coeficienților de similitudine. Rezultă deci că parte din aceștia se aleg în funcție de condițiile de experimentare iar restul se deduc din ecuațiile de condiție.

În cazul cercetărilor pe modele lucrînd în stadiul elastic, la care măsurătorile se fac prin tensometrie rezistivă după alegerea materialului din care se execută modelul se alege scara configurației și scara deformațiilor unitare. În alegerea lungimilor se ține seama de spațiul disponibil pentru experimentare și de dimensiunile maxime posibile ale unui model din materialul stabilit. Scara deformațiilor unitare se alege astfel încît aparatajul de măsurare să permită o precizie satisfăcătoare în evaluarea mărimilor pe prototip.

Determinarea preliminară a tuturor coeficienților de similitudine permite ca pe baza măsurătorilor efectuate pe model să se deducă în întregime starea de eforturi și de deformații în structura de rezistență a construcției cînd solicitarea ei corespunde celei aplicate modelului.

Cercetarea pe modele a construcțiilor prezintă marele avantaj că permite experimentarea rapidă și compararea fundamentală a mai multor variante constructive. Un asemenea studiu experimental comparativ s-a făcut pentru elemente de armociment prefabricate [6]. Două asemenea elemente (fig. 1), alcătuiesc împreună cu un tirant care preia împingerile o boltă cu trei articulații cu deschiderea de 18—20 m și lățimea de 3 m. Ele se montează alături pentru acoperirea halelor de 18—20 m lățime oricare ar fi lungimea acestora. Profilele de boltă studiate[1]) au fost sinusoidă (*1*), în V cu dolia rectilinie (*2*) și în V cu dolie parabolică (*3*). Experimentarea celor trei variante a permis să se stabilească între ele o

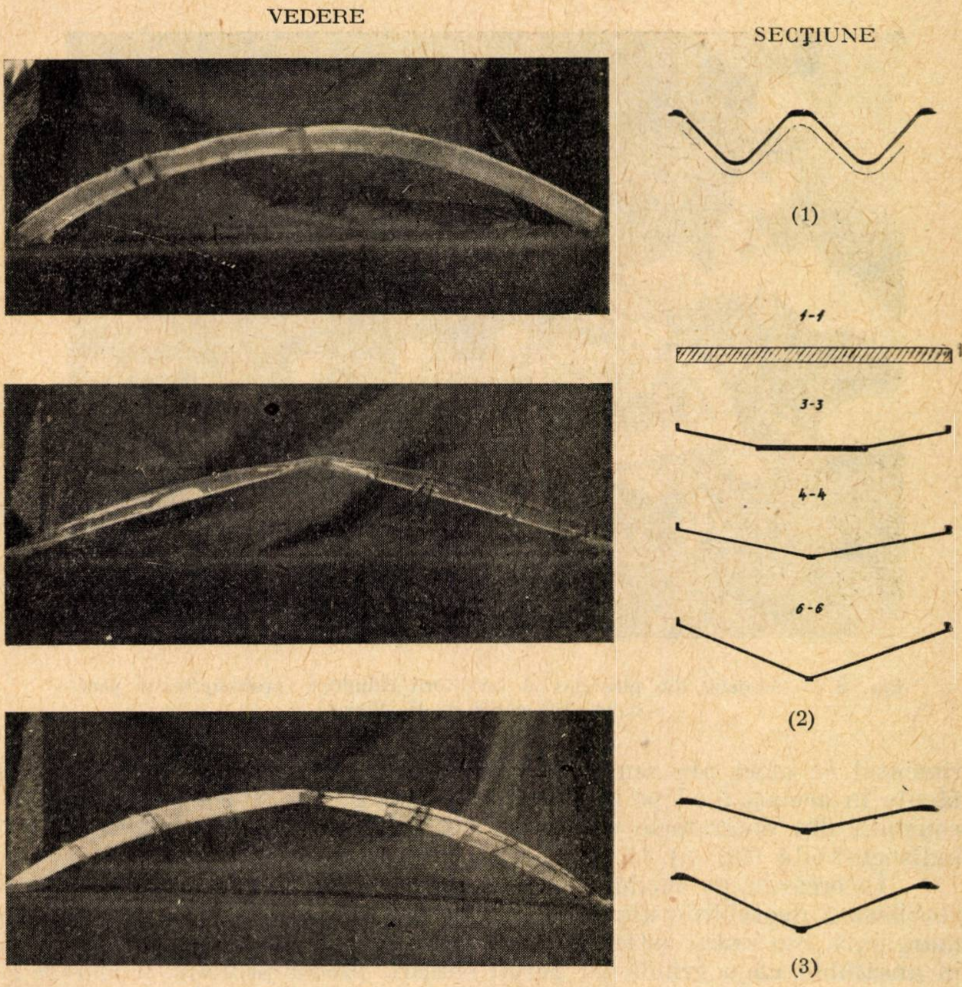


Fig. 1. — Modele ale elementelor din armociment cu diverse profile : (*1*) sinusoidă, (*2*) în *V* cu dolie rectilinie, (*3*) în *V* cu dolie parabolică.

ierarhie a capacității de rezistență și a deformabilității precum și factorii cari provoacă nestabilitatea pînzei ca de exemplu dezaxarea longitudinală a ei.

---

[1]) Ed. Nicolau, *Încercări pe modele de elemente prefabricate din armociment*. Referat cu concluzii, INCERC, 1960.

Un studiu comparativ experimental a fost efectuat [1] și pe modelul învelitorilor cilindrice precomprimate care acoperă halele tăbăcăriei de la Jilava (fig. 2). Avînd în vedere că pînza marginală este prevăzută cu o grindă longitudinală precomprimată, s-a urmărit să se determine experimental ce efect are renunțarea la această grindă. Încercările au fost făcute în același mod pe modelul cu și fără grindă și așa cum s-a putut constata din diagramele eforturilor pe pînza marginală, grinda rămîne indispensabilă (fig. 3).

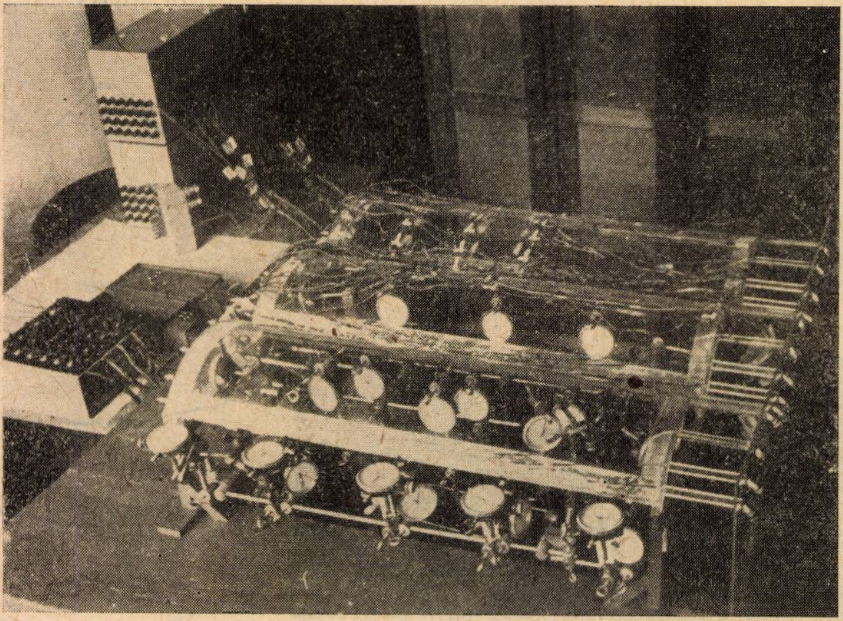


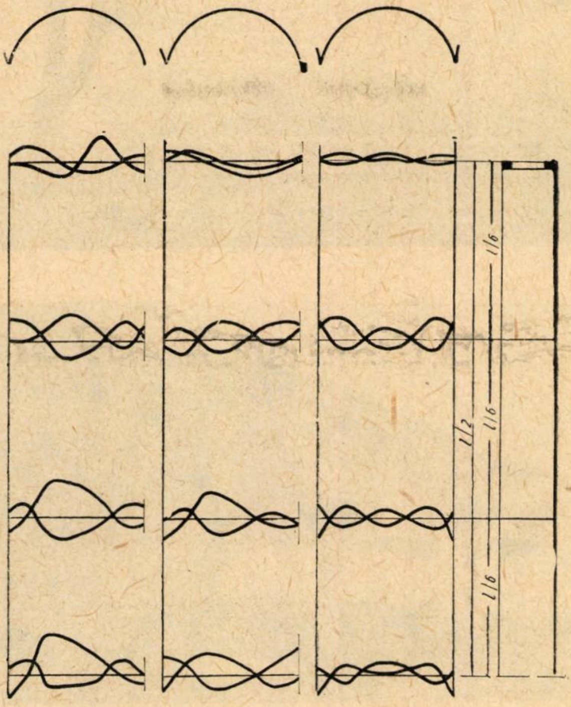
Fig. 2. — Modelul din plexiglas al învelitorii cilindrice precomprimate pentru halele tăbăcăriei de la Jilava.

Încercările pe modelul învelitorilor de la Jilava a permis să se stabilească deosebirile dintre stările de eforturi în pînza mijlocie și cea marginală. S-a putut astfel constata că în timp ce pînza mijlocie lucrează în ansamblu ca o grindă cu pereți subțiri, precomprimată și supusă la încovoiere, întreaga secțiune rămînînd comprimată, pînza marginală prezintă diagrame nesimetrice de eforturi unitare (fig. 3).

Un alt avantaj al încercării pe model constă în faptul că permite să se stabilească, separat, contribuția fiecărui tip de încărcare asupra eforturilor în construcție. Acest lucru este important mai ales cînd este vorba de efectul precomprimării. S-a putut de pildă stabili, la învelitorile halelor de la Jilava, starea de eforturi care apare în pînză datorită preîntinderii cablurilor şi măsura în care ele compensează pe cele provenite din sarcina permanentă verticală. S-a constatat, cu acest prilej, că la distanţa 1/6 *l* de la frontonul — portal efectul precomprimării este prea mic ceea ce se explică prin poziţionarea cablelor şi la suprapunerea încărcării permanente verticale momentele încovoietoare sînt mai mari decît în secţiunea mijlocie — aşa cum ar rezulta din teoria de grindă (fig. 3).

---

[1] Ed. Nicolau, *Încercarea pe model a învelitorii precomprimate a halei combinatului Jilava.* Referat cu concluzii, INCERC, 1960.

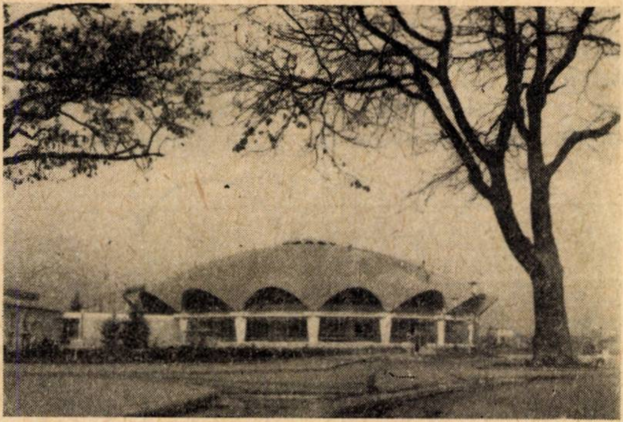


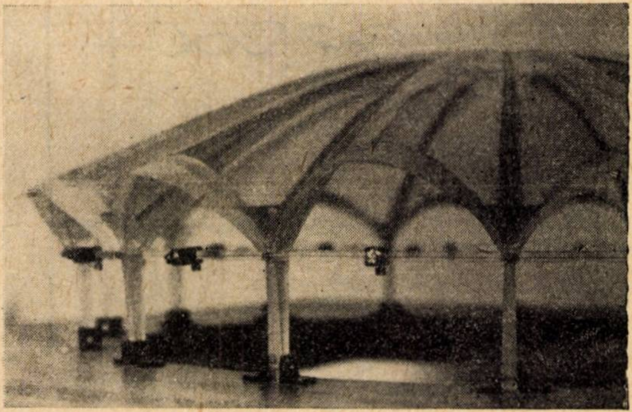
(1) (2) (3)

Fig. 3. — Diagrame de eforturi unitare în lungul a patru secţiuni transversale prin învelitoarea halelor tăbăcăriei de la Jilava : (*1*) pînză marginală fără grindă marginală ; (*2*) pînză marginală cu grindă marginală ; (*3*) pînză mijlocie în prezenţa grinzii marginale.

Efectul precomprimării a fost urmărit şi la studiul comportării de ansamblu a construcţiei circului. Cele 16 arce (dublouri) dispuse radial, care susţin 16 pînze cu dublă curbură sînt legate între ele printr-un inel central şi printr-unul periferic (fig. 4). Acesta din urmă, avînd drept scop să preia împingerile arcelor, este alcătuit din elemente de beton armat precomprimat. Încercările efectuate pe model au arătat [7] că efortul de întindere dat cablurilor este compensat de compresiunea din inel în proporţie de 67%, restul de 33% fiind preluat de cupolă prin rigiditatea ei proprie.

Încercările modelului construcţiei circului au permis să se stabilească şi comportarea stîlpilor de susţinere a cupolei. Astfel s-a constatat că


(1)


(2)

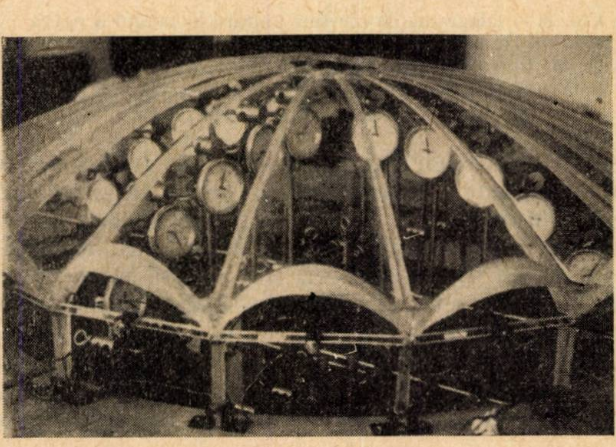

(3)

Fig. 4. — Construcția Circului de Stat din București și modelul ei din plexiglas.

sub acţiunea precomprimării şi a sarcinii permanente, rotirea stîlpilor articulaţi în fundaţie se face cu un unghi de 3′.

Problema deformării stîlpilor s-a pus mai ales la o altă construcţie monumentală unde s-a urmărit să se determine poziţia punctelor lor de inflexiune în diferite cazuri de orientare a forţelor seismice faţă de axa de simetrie (fig. 5). Aceasta dă o imagine a raportului între gradele de încastrare elastică la cele două capete ale stîlpilor.

Cu ajutorul modelului acestei construcţii s-a determinat pe cale experimentală frecvenţa proprie a construcţiei.

Cercetarea cu ajutorul modelelor a suprafeţei cu dublă curbură permite să se stabilească distribuţia de eforturi normale şi de momente în pînză. Astfel, studiul pe model [8] a unui restaurant (fig. 6) construit la Mamaia a arătat prin cîmpul de eforturi modul cum este tensionată pînza ca şi rolul reazimelor pe care le realizează pereţii exteriori (fig. 7).

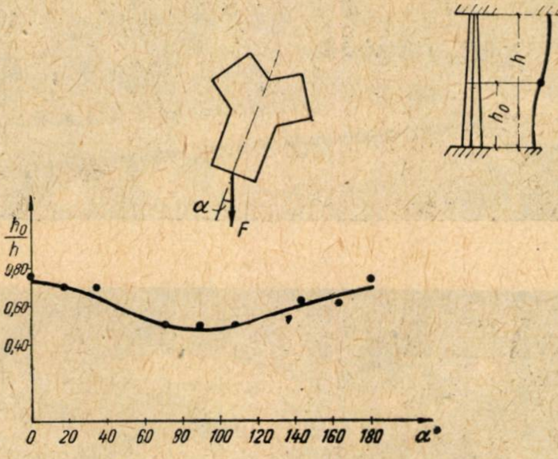


Fig. 5. — Diagrama poziţiilor punctelor de inflexiune la stîlpi în funcţie de orientarea forţei seismice faţă de axa de simetrie a stîlpului.

Experimentarea pe model permite să se stabilească modul şi măsura în care elementele componente ale structurilor de rezistenţă se influenţează reciproc. Astfel la elemente spaţiale prefabricate (fig. 8) din beton armat, menite să confere un înalt nivel de industrializare executării construcţiilor, s-a putut stabili gradul de încastrare a planşeului în pereţii laterali[2]).

3. *Modelarea conlucrării mai multor materiale în structura de rezistenţă.* Una din direcţiile specifice sectorului de construcţii a fost modelarea construcţiilor alcătuite din mai multe materiale. Preocupări de acest gen apar cu prilejul diferitelor probleme teoretice şi practice cum sînt :

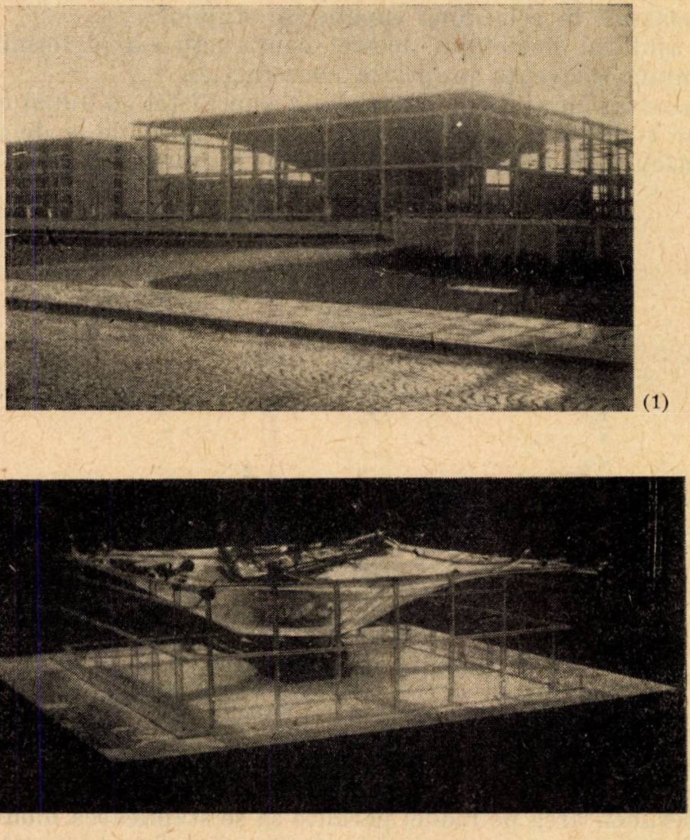
— studiul stării de eforturi în elementele sau structurile de beton armat şi precomprimat;

---

[1]) Ed. Nicolau, *Încercări pe modele de elemente spaţiale prefabricate*. Referat cu concluzii, INCERC, 1961.

— cercetarea repartiţiei tensiunilor în cazul contactului dintre două corpuri avînd moduli de elasticitate diferiţi (acţiunea reciprocă dintre teren şi fundaţie, de exemplu);

— simplificarea modelelor prin înlocuirea unor zone slăbite (de goluri, spre exemplu) cu fîşii avînd un modul de elasticitate redus, echivalent.


(1)

(2)

Fig. 6. — Construcţia restaurantului de la Mamaia şi modelul ei din plexiglas.

În cele ce urmează vor fi descrise pe scurt cîteva dintre cercetările efectuate în această direcţie precum şi rezultatele obţinute.

Au fost efectuate studii privind modelarea betonului armat, pe baza metodicei de modelare puse la punct în cadrul INCERC [9], [10], [11], [12].

Astfel s-au efectuat studii pentru a se elucida modul în care se realizează conlucrarea dintre armătură şi materialul plastic în modelele fotoelastice armate ale elementelor de beton armat sau beton precomprimat (fig. 8, 9). S-a verificat pe această cale că deplasarea axei neutre datorită armăturii, în cazul unei aderenţe perfecte la un element armat supus la încovoiere pură, corespunde cu mare precizie celei calculate cu formulele de calcul ale betonului armat (fig. 10).

De asemenea, tot pe modele fotoelastice s-a studiat distribuția eforturilor unitare în betonul solicitat prin aderență cu armătura tensionată precum și întinderea zonei de influență a armăturii în beton.

S-au mai efectuat cercetări pe modele de grinzi de beton armat în stadiul de dezvoltare a fisurilor în prezența lunecărilor relative locale ale armăturii în raport cu betonul, datorită pierderii treptate a aderenței pe distanța dintre fisuri.

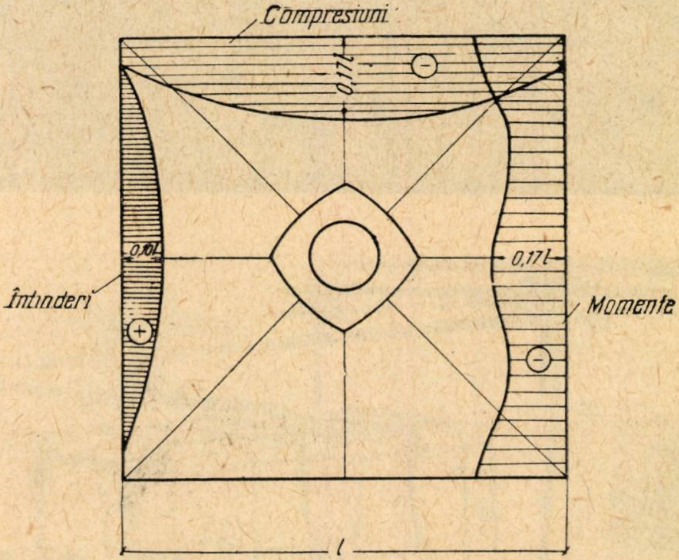


Fig. 7. — Restaurantul de la Mamaia. Zonele de întindere și compresiuni axiale și de momente negative produse de precomprimare.

Cercetările au pornit de la propunerea prof. A. A. Gvozdev [13] care a arătat că problema fundamentală de calcul a elementelor de beton armat poate fi rezolvată ca o problemă de contact. În acest scop zonele de moment constant pot fi înlocuite cu discuri avînd lungimea egală cu distanța dintre fisuri, presate între ele la partea superioară și unite la partea inferioară prin armătură. Rezolvarea acestei probleme creează posibilitatea îmbunătățirii metodelor de calcul ale betonului armat la stările limită. Cercetarea unui asemenea sistem de discuri cu solicitări pe contur după diagrame destul de complicate este dificil să fie efectuată prin mijloacele teoriei matematice a elasticității, cu atît mai mult cu cît aceste diagrame nu sînt nici ele cunoscute. De aceea, problema a fost atacată prin metode experimentale, pe calea modelării fotoelastice.

Problema modelării fotoelastice a fenomenelor ce se produc în elementele de beton armat fisurate se poate rezolva principial pe două căi :

a) Obținerea unui material pentru modele fotoelastice care să prezinte proprietăți mecanice analoage cu cele ale betonului — respectiv rezistență redusă la întindere față de cea la compresiune și o diagramă caracteristică conformă cu legile similitudinii mecanice la compresiune.

b) Crearea în mod artificial a fisurilor într-un model armat (prefisurare). În acest caz, direcţia şi dimensiunile fisurilor trebuie alese anticipat pe baza experienţei obţinute pe elemente reale de beton armat.

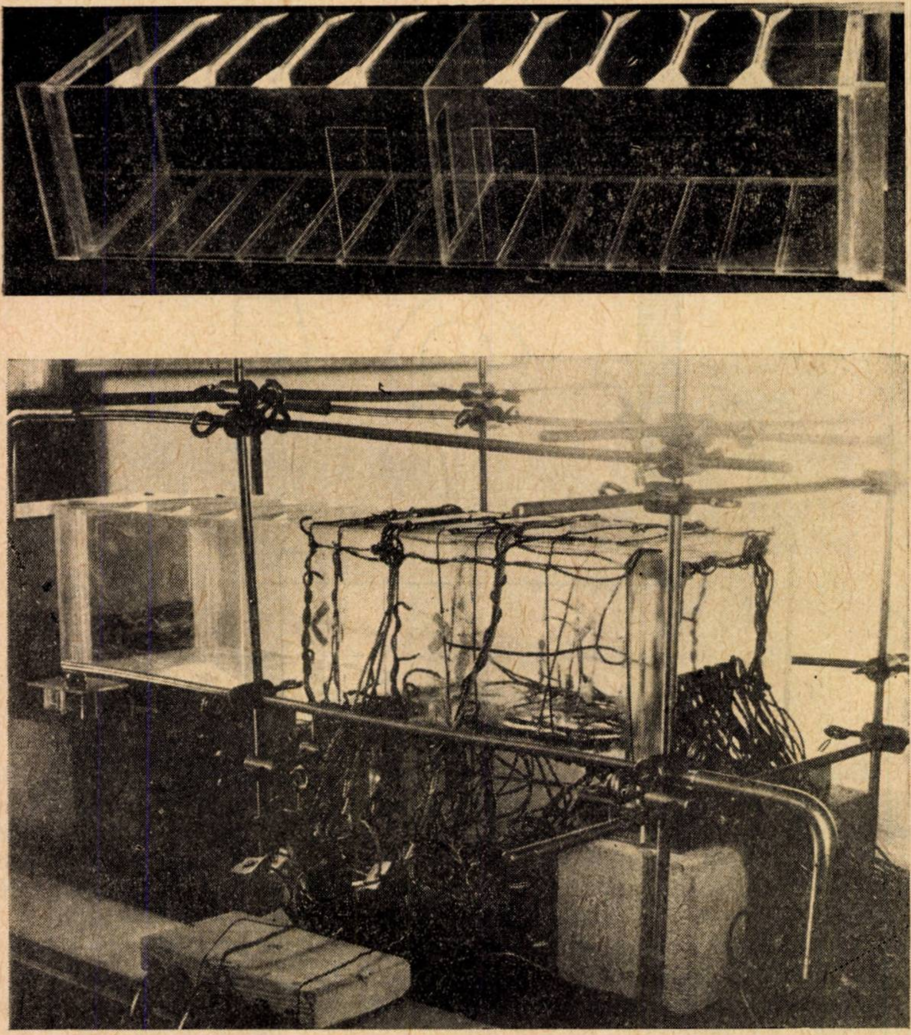


Fig. 8. — Model din plexiglas pentru elementul spaţial cu două încăperi.

Cercetările noastre au fost efectuate pe asemenea modele prefisurate. Materialul pentru modele trebuia să îndeplinească următoarele condiţii :

— activitate optică ridicată ;

— efect de margine redus pentru ca în timpul în care se realizează adeziunea cu armătura, modelul să nu prezinte acest fenomen de îmbătrînire ;

— posibilitatea de a fi lipit de armătură prin adezivi speciali, avînd proprietăți fizico-mecanice apropiate cu acele ale materialului pentru modele.

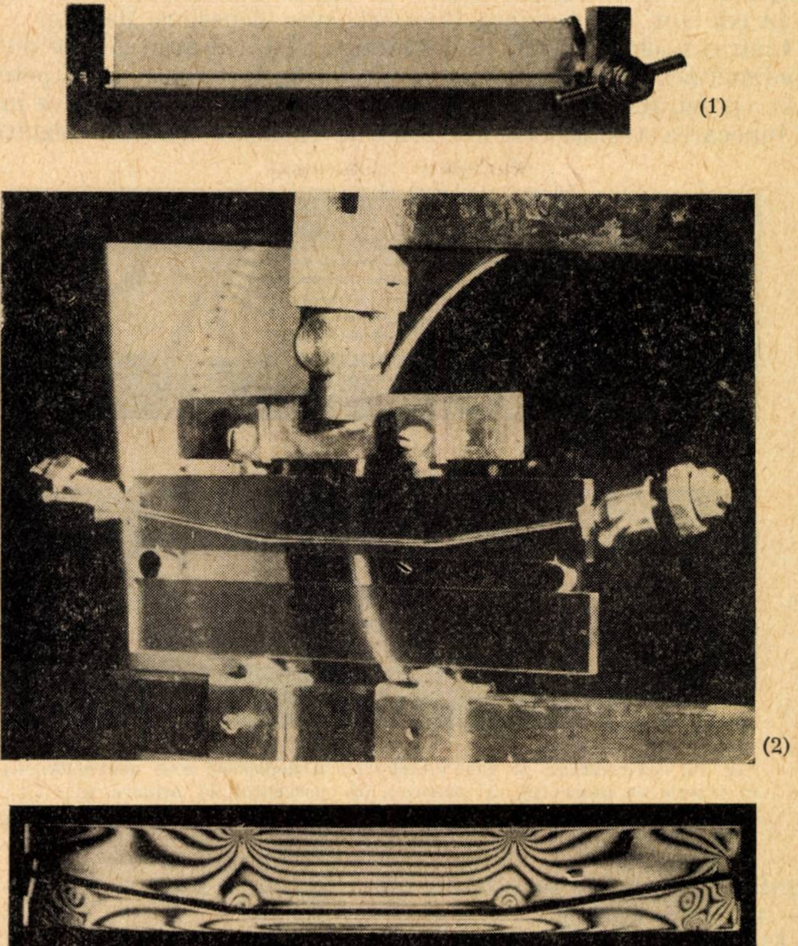


Fig. 9. — Modele fotoelastice de elemente precomprimate : (*1*) grindă cu armătură preîntinsă aderentă ; (*2*) grindă precomprimată cu armătură preîntinsă cu traseu neliniar ; (*3*) izocromatice la elementul precomprimat cu armătura postîntinsă.

Ținînd seama de aceste condiții, a fost pus la punct materialul Dinox F 110 [14].

Modelele au fost armate cu fire de oţel de înaltă rezistenţă, avînd limita de rupere $\sigma = 260$ kg/mm^2. De asemenea, au fost utilizate pentru comparaţie, fîşii de tablă subţire dintr-un aliaj de Cu, care datorită suprafeţei mari de contact, nu prezintă lunecări, spre deosebire de fire.

Lipirea firelor şi fîşiilor s-a făcut cu ajutorul unui adeziv de Araldit care polimerizează la rece. Capetele firelor au fost fixate de capetele grinzilor în aşa fel, încît să se modeleze ciocurile armăturii şi să se împiedice astfel lunecarea armăturilor din zona de capăt. După cum rezultă şi din fotografiile prezentate în această lucrare, lipirea nu a dat loc la nici un fel de tensiuni iniţiale.

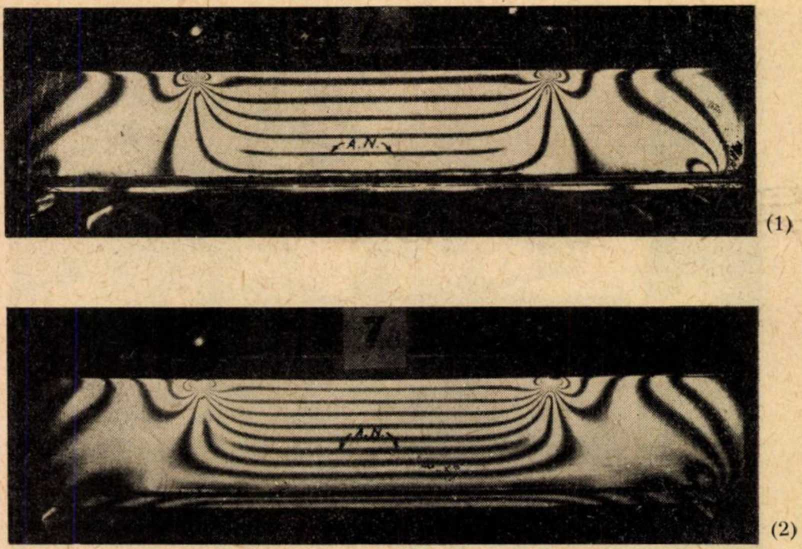


Fig. 10. — Urmărirea pe cale fotoelastică a deplasării axei neutre (A. N.) în funcţie de procentul de armare : (*1*) procentul de armare $\varphi = 1{,}1$; (*2*) procentul de armare $\varphi = 0{,}3$.

Fisurarea a fost realizată în mod artificial în două feluri :

a) cu ajutorul unei pînze de traforaj fine (0,3 mm) ; această tehnică de fisurare prezintă însă inconvenientul că zonele fisurate nu sînt capabile să preia compresiuni ;

b) modelul se prefisurează pe întreaga sa înălţime, iar fisurile astfel obţinute se umplu cu masă plastică de tip Araldit cu polimerizare la temperatura camerei (înainte de umplere cu masă plastică, se tratează conturul cu Silicon pentru a se impiedeca adeziunea Alralditului). În acest fel, s-au obţinut fisuri care nu rezistă la întindere dar sînt capabile să preia compresiuni.

Avantajul primei metode de fisurare constă în faptul că fisura avansează de fiecare dată numai atît cît doreşte experimentatorul şi deci se poate examina starea de tensiune pentru fiecare înălţime a fisurilor.

Avantajul celui de-al doilea tip de fisurare constă în faptul că înălțimea fisurii se realizează întotdeauna atît cît rezultă din condițiile de echilibru și de pierdere a aderenței. Așadar, este vorba de un mod de lucru mai apropiat de realitate, dar care nu permite un studiu suficient de amănunțit. Rezultatele obținute pînă în prezent prin cele două tehnici de fisurare, corespund între ele și se complectează reciproc.

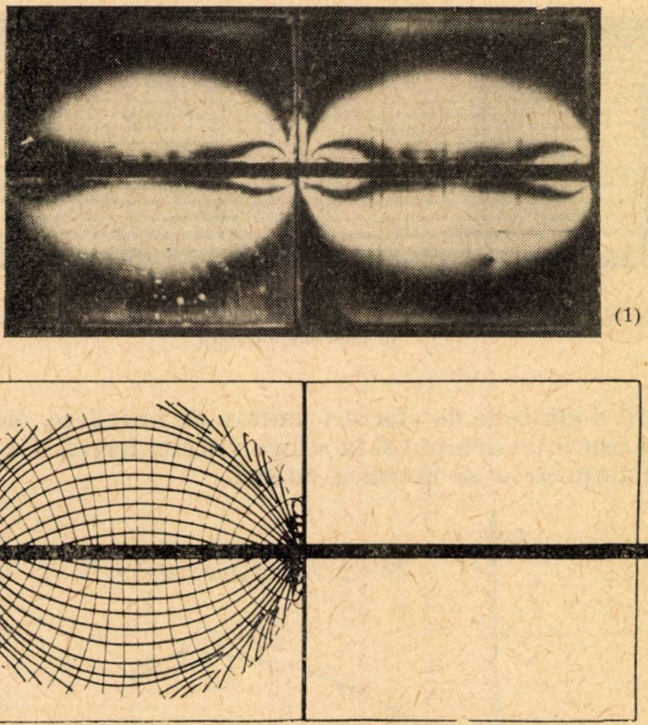


Fig. 11. — Determinarea pe cale fotoelastică a zonei tensionate din beton solicitat prin aderența cu armătura întinsă : (*1*) tabloul de izocromate ; (*2*) tablou de izostate.

Încercările s-au efectuat în paralel pentru trei tipuri de modele :

— tip I (armate cu fîșii de tablă, avînd fisuri care nu preiau compresiuni) ;

— tip II (armate cu fire, avînd fisuri care nu preiau compresiuni) ;

— tip III (armate cu fire, avînd fisuri care preiau compresiuni).

La ultimele două tipuri, apare fenomenul pierderii de aderență. Toate modelele au fost solicitate la încovoiere pură (fig. 12). Fisurile au fost extinse (pentru modele tip I și II) în paralel de la armătură spre fibra extremă comprimată a grinzii.

Studiile efectuate arată o apropiere foarte mare între fenomenele observate în grinda reală de beton armat și cele din modelele de tip II și III la care se manifestă o pierdere treptată a aderenței dintre armătură și beton. Aceste studii explică ridicarea excesivă a fisurilor în grinzi din beton armat, peste valoarea corespunzătoare poziției axei neutre calculată în stadiul II ca efect al lunecărilor locale între armătură și beton în dreptul fisurilor.

Pentru înălțimi mari ale fisurii, axa neutră coincide cu vîrful fisurii și ca urmare fisura nu mai are tendința de a avansa o dată cu creșterea solicitării. Sub efectul deschiderii puternice a fisurii, se dezvoltă însă în vîrful fisurii două zone de eforturi unitare de întindere, orientate paralel cu direcția fisurii, în dreapta și în stînga vîrfului fisurii. Ca urmare, fisura capătă tendința de a se ramifica lateral.

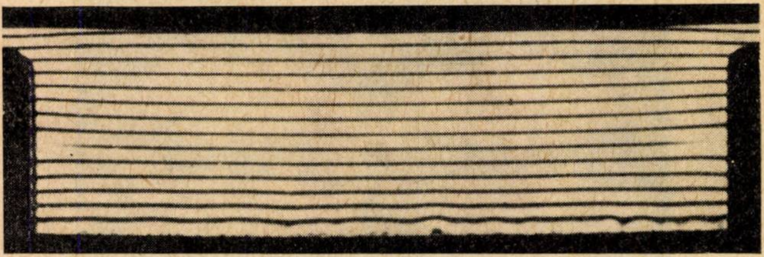


Fig. 12. — Tabloul izocromatelor pentru un model armat nefisurat supus la încovoiere curată.

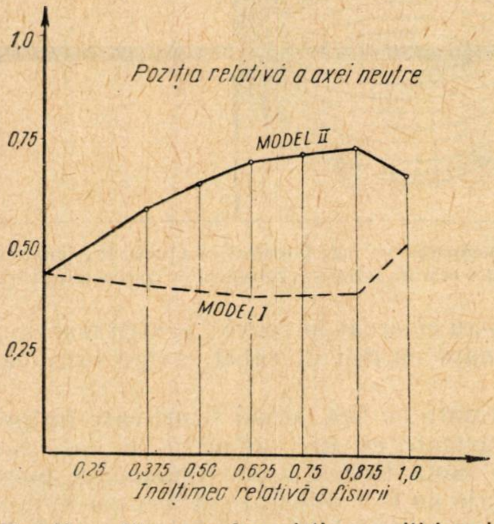


Fig. 13. — Diagrame de variație a poziției axei neutre în secțiunea de la jumătatea distanței dintre fisuri.

Această constatare este confirmată în multe cazuri de încercări la rupere efectuate pe elemente încovoiate din beton armat.

Dacă se analizează în continuare variația stării de eforturi o dată cu avansarea fisurilor, mai trebuie scoase în evidență următoarele aspecte importante :

a) Deplasarea axei neutre în secțiunea de la jumătatea distanței dintre fisuri, pe măsura avansării în înălțime a fisurilor are un caracter diferit în funcție de condițiile de aderență (fig. 13).

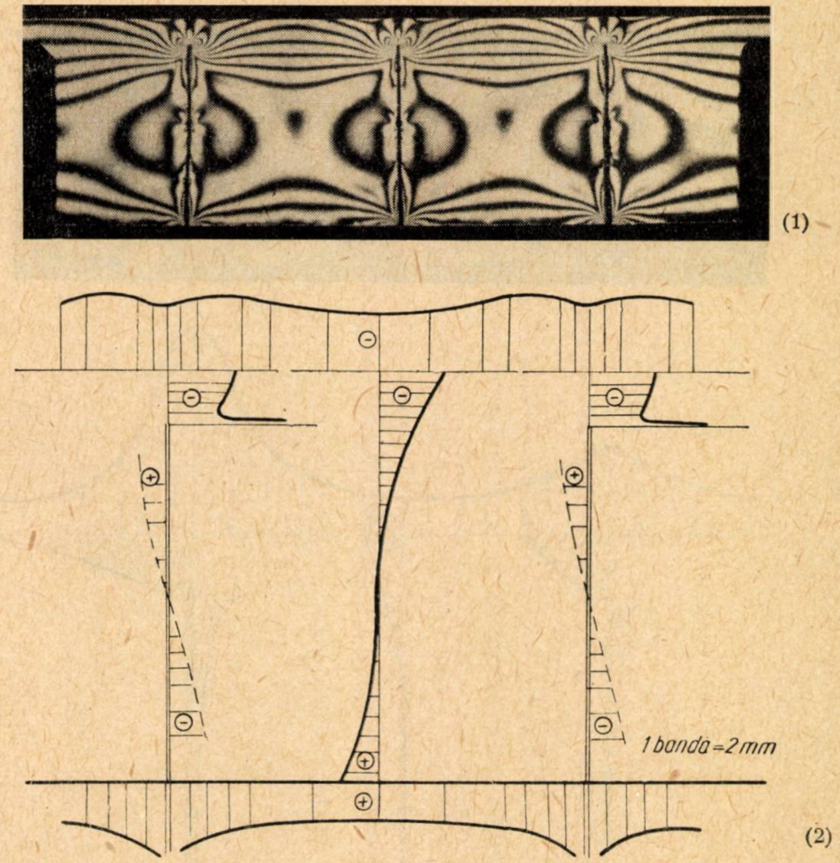


Fig. 14. — Tabloul de izocromate pentru un model de tip I (*1*). Diagrama eforturilor unitare pe conturul unui disc din modelul respectiv (*2*).

b) Datorită pierderii treptate a aderenței, o dată cu avansarea fisurilor, se modifică substanțial distribuția eforturilor unitare în zona întinsă a secțiunii de la mijlocul distanței dintre fisuri.

c) Prin pierderea treptată a aderenței, se constată la modelul de tip II, o diferență accentuată, care crește cu înălțimea fisurii, între deformația medie a fibrei extreme comprimate și deformația maximă a acesteia în dreptul fisurii.

Pe baza metodicei de modelare precizate s-au putut trasa diagramele de eforturi unitare pe conturul discurilor. În concordanţă cu propunerea prof. A. A. Gvozdev asemenea diagrame de eforturi unitare atît pe conturul discurilor cît şi în secţiunea mediană a acestora sînt date în figurile 14, 15 şi 16.

Diagramele dau posibilitatea unei analize complete a stării de eforturi din elementele fisurate de beton armat. În cazul grinzii armate cu sîrme,

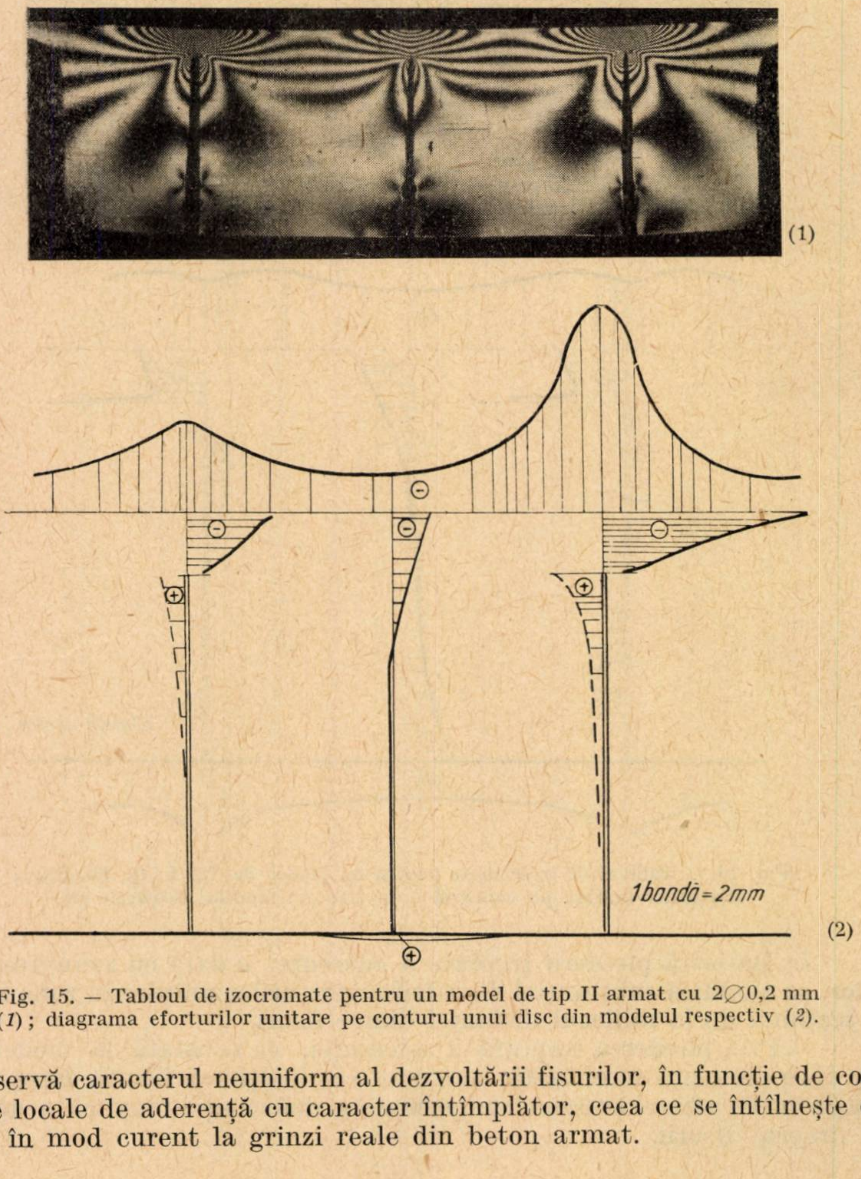


Fig. 15. — Tabloul de izocromate pentru un model de tip II armat cu 2∅0,2 mm (*1*); diagrama eforturilor unitare pe conturul unui disc din modelul respectiv (*2*).

se observă caracterul neuniform al dezvoltării fisurilor, în funcţie de condiţiile locale de aderenţă cu caracter întîmplător, ceea ce se întîlneşte de altfel în mod curent la grinzi reale din beton armat.

Se remarcă, de asemenea, aspectul stării de eforturi pe conturul fisurii.

În cazul aderenței perfecte, distribuția eforturilor unitare prezintă aspectul caracteristic pentru conturul vertical al golurilor dreptunghiulare înguste [15], [16], cu punct de schimbare de semn pe la mijlocul înălțimii fisurii. Prin pierderea treptată a aderenței, punctul de schimbare de semn pe conturul fisurii se deplasează spre armătură și la limită, pe acest contur se dezvoltă numai eforturi unitare de întindere.

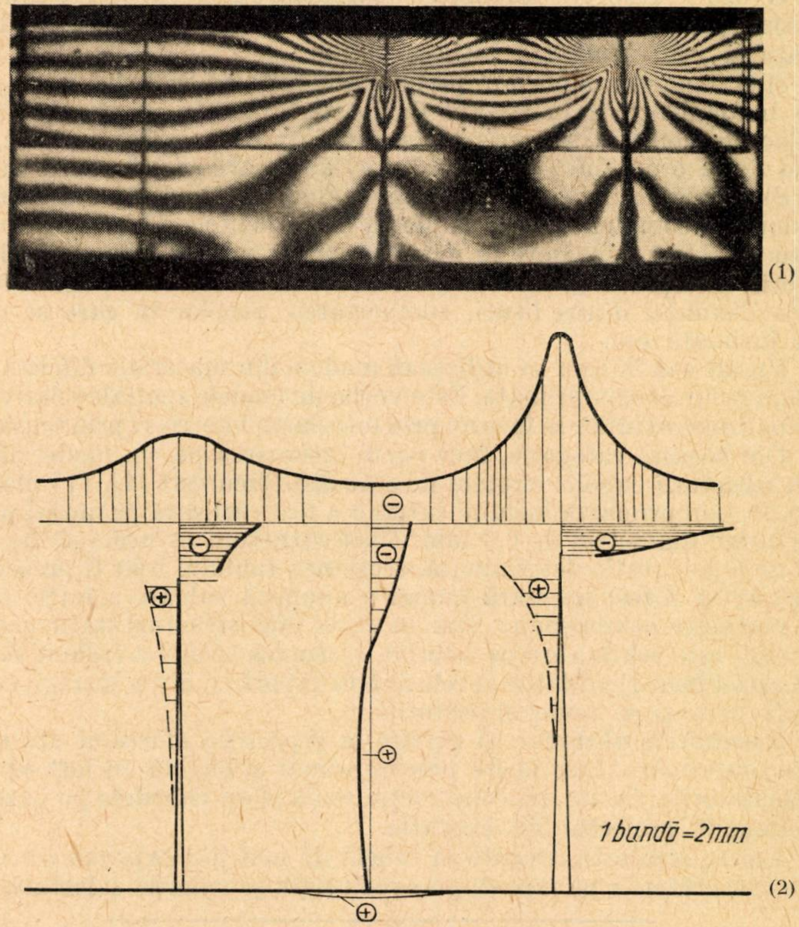


Fig. 16. — Tablou de izocromate pentru un model de tip III armat cu 2 Ø 0,3 mm (*1*); diagrama eforturilor unitare pe conturul unui disc din modelul respectiv (*2*).

Referindu-ne la ansamblul problemei modelării fotoelastice a betonului armat, trebuie subliniat faptul că această problemă este mult mai largă decît a putut fi cuprinsă în cercetările efectuate pînă în prezent. Totuși se pot trage o serie de concluzii importante :

a) Modelarea fotoelastică a betonului armat este posibilă în limite destul de largi, ținînd seama de variația condițiilor de aderență dintre armătură și beton.

b) Modelarea fotoelastică este o metodă practică pentru rezolvarea problemei fundamentale a betonului armat astfel cum a fost pusă de către A. A. Gvozdev, respectiv analiza elementelor de beton armat ca ansambluri de discuri plane separate prin fisuri și unite între ele prin zonele lor comprimate și prin armătură întinsă.

c) O asemenea modelare permite cunoașterea modului cum se comportă betonul armat în stadiul de fisurare (starea de eforturi la vîrful fisurilor, dezvoltarea acestora, ca și tendința de ramificare a fisurilor începînd de la o anumită înălțime a lor, deplasarea axei neutre etc.).

d) Există posibilitatea studierii pe modele fotoelastice a unui număr de fenomene complexe ce se manifestă în elementele de beton armat, care nu sînt pe deplin elucidate în mod teoretic și nu pot fi în general clarificate prin interpretarea directă a rezultatelor încercărilor; astfel sînt: influența distanței dintre fisuri, comportarea zonelor în care se dezvoltă fisuri înclinate etc.

Un alt caz în care se utilizează modele din materiale diferite este cel al structurilor precomprimate. Este vorba de modele spațiale relativ mari în care analiza eforturilor se face nu prin fotoelasticimetrie ci prin tensiometrie.

Din această categorie, face parte încercarea pe un model din plexiglas a structurii cupolei circului de stat din București [4], [7] (deschidere 61 m). Precomprimarea inelului exterior a fost realizată pe model printr-un cablu avînd diametrul de 0,3 mm. Dacă structura ce urma să fie comprimată ar fi fost static determinată, secțiunea cablului n-ar fi prezentat importanță; ar fi fost necesară numai o anumită valoare a forței de întindere, respectiv compresiune. Dar în cazul unei structuri static nedeterminate, cum este cea la care ne referim, secțiunea sîrmei a trebuit să fie stabilită astfel încît rigiditatea ei relativă în raport cu cea a întregii construcții să fie aceeași pe model și prototip.

Rezultatele obținute cu privire la repartiția efortului din cablurile de precomprimare între inelul precomprimat și cupolă au fost comparate cu măsurătorile făcute pe construcția reală și cu calculele pe baza cărora s-a întocmit proiectul de execuție.

Aceste rezultate, trecute în tabela de mai jos, exprimă concordanța dintre măsurătorile pe model, pe construcție și valorile calculate.

	pe model	în natură	calculată
cupolă	67%	71%	60%
inel	33%	29%	40%

Pe aceeași linie de utilizare a modelelor alcătuite din mai multe materiale, s-au studiat diafragmele de rigidizare antiseismică ale construcțiilor.

În studiul unor asemenea diafragme cu un șir de goluri s-a pornit de la ipoteza simplificatoare că zona de goluri poate fi înlocuită în calcul și

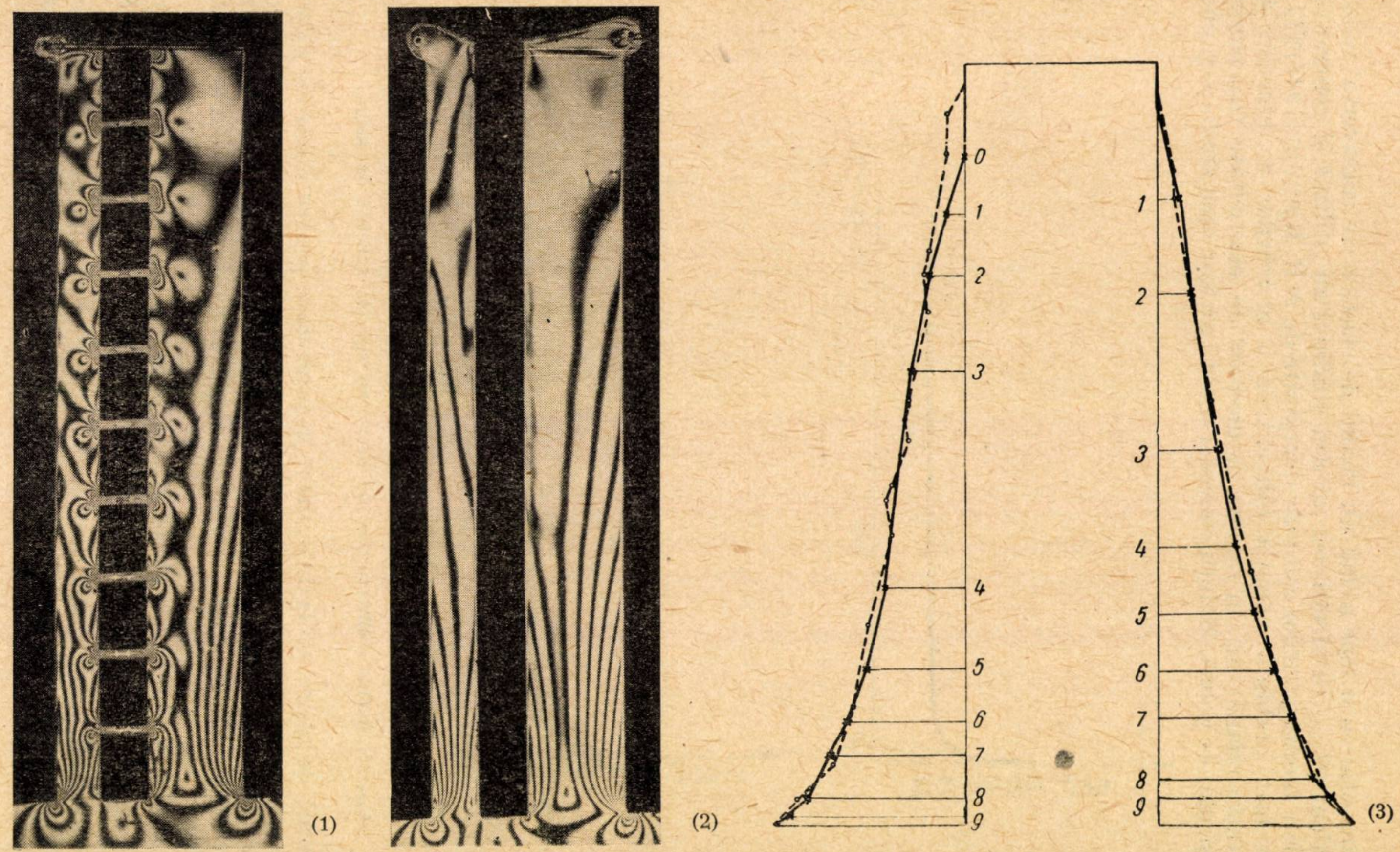
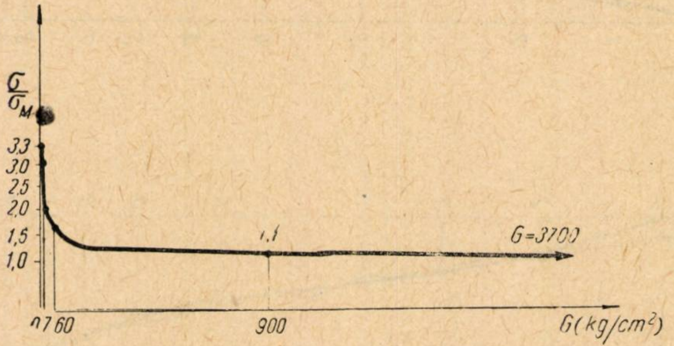


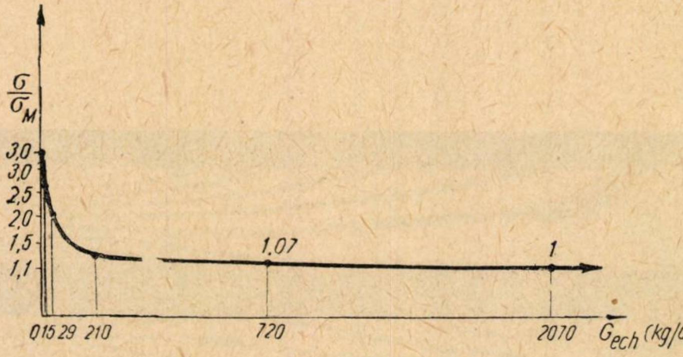
Fig. 17. — Tablouri de izocromate pentru două diafragme echivalente din care una cu şir de goluri (*1*) şi alta cu fişie echivalentă (*2*) solicitate de o forţă concentrată la capăt ; diagramele corespunzătoare de eforturi unitare în fibrele extreme (*3*).

experimental cu o fîşie avînd un modul de elasticitate transversal redus, echivalent (G_{ech}). În efectuarea acestui studiu s-au utilizat şi generalizat metodele teoriei grinzilor compuse dezvoltate de A.R. Rjaniţîn (1948) [17].

A fost stabilită ecuaţia diferenţială a eforturilor de lunecare în montanţi (buiandrugi), în funcţie de modulul de elasticitate G_{ech} pentru zona şirului de goluri. Soluţiile acestei ecuaţii au fost apoi studiate şi puse



(1)



(2)

Fig. 18.— Diagrame de $\frac{\sigma}{\sigma_M}$ într-un punct funcţie de G (*1*), respectiv de G_{ech} (*2*), pentru diafragme de rigidizare cu un şir simetric de goluri.

sub formă de abace utilizabile direct în proiectare pentru diferitele cazuri practice.

A fost stabilită de asemenea (pe cale teoretică şi apoi verificată experimental) o formulă de calcul a lui G_{ech} funcţie de dimensiunile buiandrugilor.

Au fost studiate diferite cazuri de încărcare (de ex. încărcarea uniformă, cea de tip seismic triunghiulară cu maximum la capătul liberal al consolei etc.).

Cercetările experimentale s-au efectuat în paralel pentru grinzi cu goluri şi grinzi cu fîşii avînd un modul de elasticitate redus faţă de cel al ansamblului diafragmei (fig. 17, 18).

Avantajele introducerii lui G_{ech} în calculul diafragmelor de rigidizare sînt următoarele:

— oferă un criteriu de apreciere simplu a flexibilității buiandrugilor și deci a conlucrării tălpilor;

— oferă un criteriu de delimitare a grinzilor ce se calculează ca monolite de cele ce se calculează după teoria grinzilor compuse;

— valorile lui G_{ech} sînt comparabile cu cele ale unor materiale cunoscute și deci există un autocontrol pentru proiectanți;

— deformația diafragmelor se calculează foarte ușor după această metodă (după cum se știe această problemă prezintă o importanță deosebită deoarece repartizarea la diferitele diafragme a sarcinei orizontale ce acționează asupra unei construcții, se face în funcție de rigiditatea acestora;

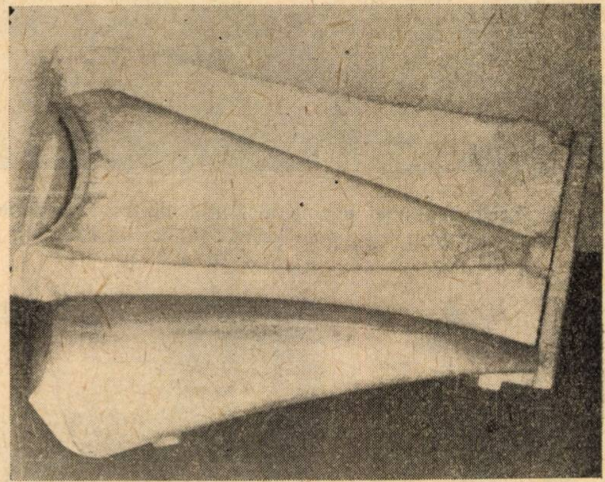


Fig. 19. — Mulaje din ipsos și lemn pentru învelitoarea modelului Circului de Stat.

— reprezintă o metodă simplă de modelare a grinzilor compuse.

Un studiu complet teoretic și experimental al diafragmelor de rigidizare cu goluri precum și abacele care ușurează calculul acestora se dă în lucrarea [18], [19].

Tipurile de probleme de modelare prezentate mai sus, arată că metoda utilizării modelelor alcătuite din mai multe materiale este pe deplin posibilă și fructuoasă.

În vederea dezvoltării acestei direcții de activitate este necesar a se pune la punct o gamă întreagă de materiale avînd moduli de elasticitate variați astfel încît domeniul de necesități (între 20 kg/cm^2 și 40 000 kg/cm^2) să poată fi acoperit. În laboratorul de încercări pe modele al institutului nostru ce efectuează asemenea cercetări reușindu-se a se răspunde într-o măsură importantă, problemelor pe care practica le ridică.

4. *Executarea și experimentarea modelelor*. Executarea modelelor de ansamblu a ridicat o serie de probleme de tehnologie care se deosebesc

de cele ce se pun la execuţia construcţiei reale ţinînd seama de dimensiunile modelului, de materialul folosit, de condiţiile şi dispozitivele de experimentare.

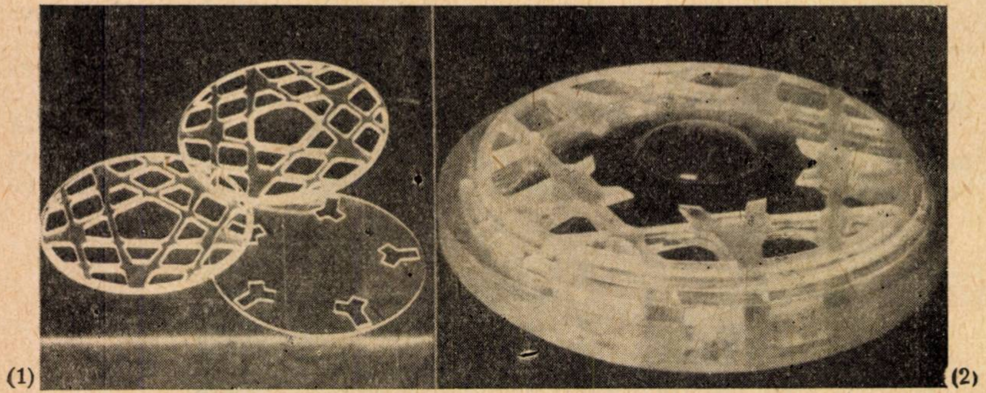


Fig. 20. — Faze din executarea unei cupole alcătuite dintr-o reţea de grinzi înalte : (*1*) secţiuni orizontale prin reţeaua de grinzi ; (*2*) cupola realizată parţial.

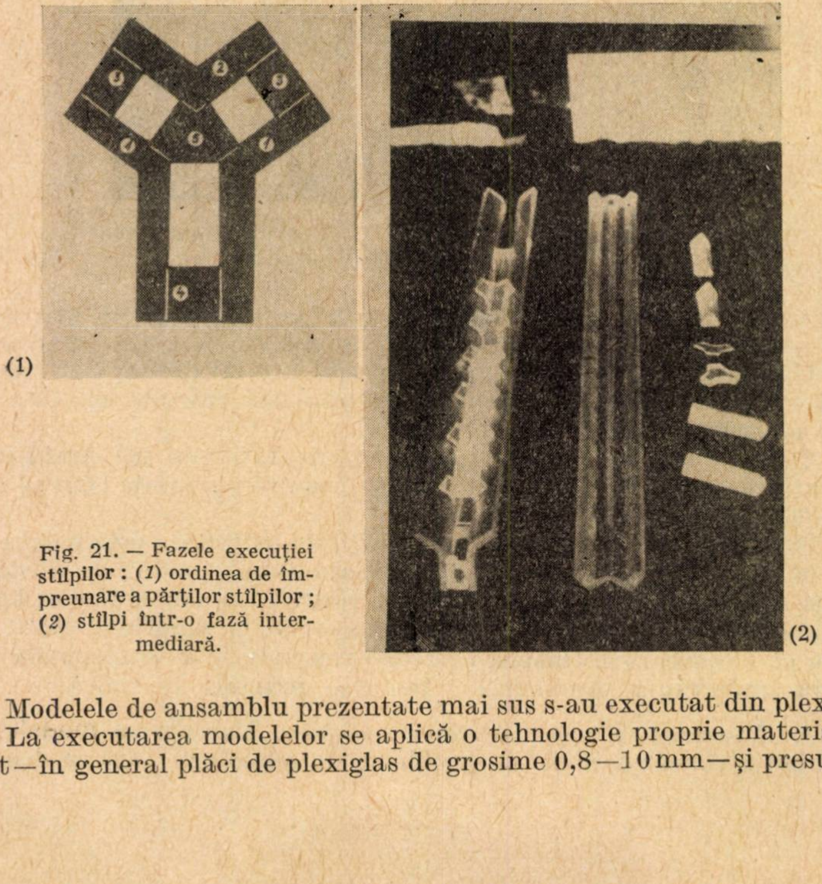
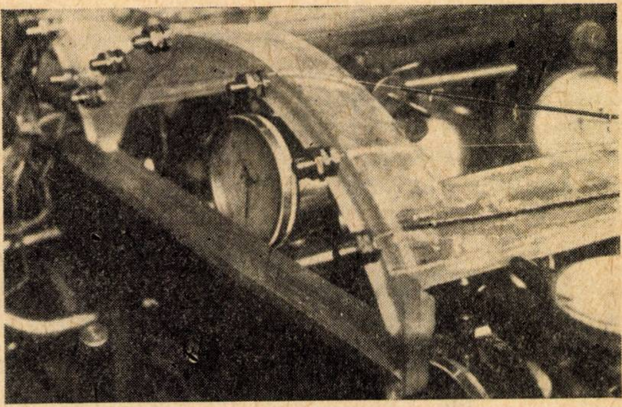
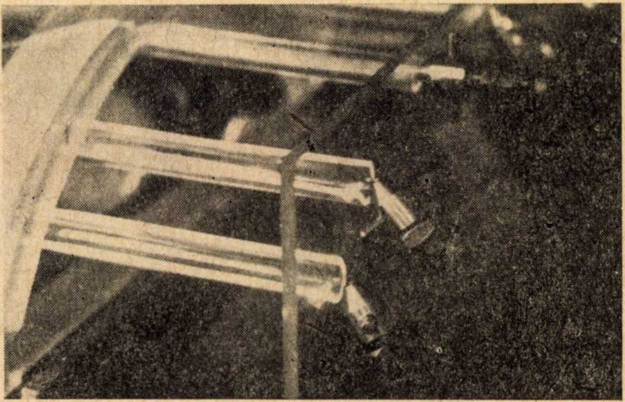


Fig. 21. — Fazele execuţiei stîlpilor : (*1*) ordinea de împreunare a părţilor stîlpilor ; (*2*) stîlpi într-o fază intermediară.

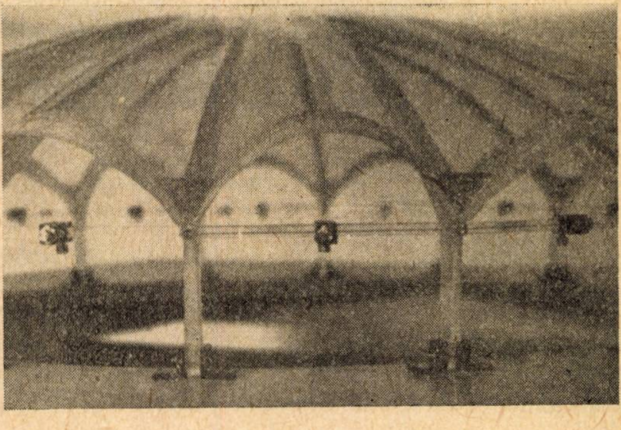
Modelele de ansamblu prezentate mai sus s-au executat din plexiglas. La executarea modelelor se aplică o tehnologie proprie materialului folosit — în general plăci de plexiglas de grosime 0,8 — 10 mm — şi presupune



(1)



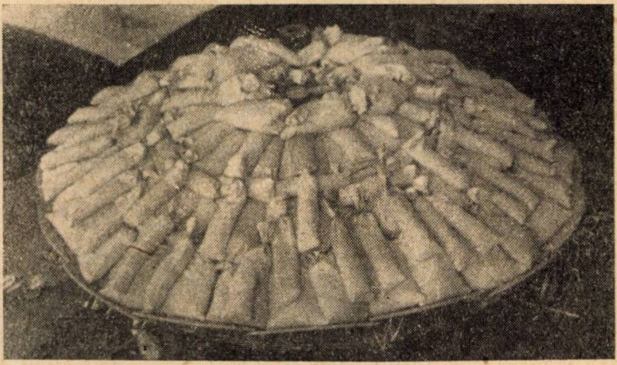
(2)



(3)

Fig. 22. — Fixarea cablelor de precomprimare : (*1*) Blocarea capetelor de cablu (modelul halelor Jilava) ; (*2*) Capetele cablelor unde acţionează presa de întindere (modelul halelor Jilava) ; (*3*) Cablu de precomprimare exterior la modelul Circului de Stat.

o metodologie de asamblare specifică pentru fiecare model în parte. Tehnologia de prelucrare a plexiglasului în vederea obținerii modelelor de structură se referă la tăierea, îndoirea și lipirea foilor de plexiglas. Tăierea se execută în general cu pînze de traforaj sau cu ferăstrău de contur (0,5 mm). Îndoirea se face prin încălzirea plăcii la o temperatură de circa 150°C în etuva termostat după care ea se mulează, prin presare între forme de lemn sau ipsos (fig. 19). Lipirea plăcilor în general a elementelor componente ale structurii se face cu ajutorul unui solvent al plexiglasului ca de exemplu dicloretanul.


(1)

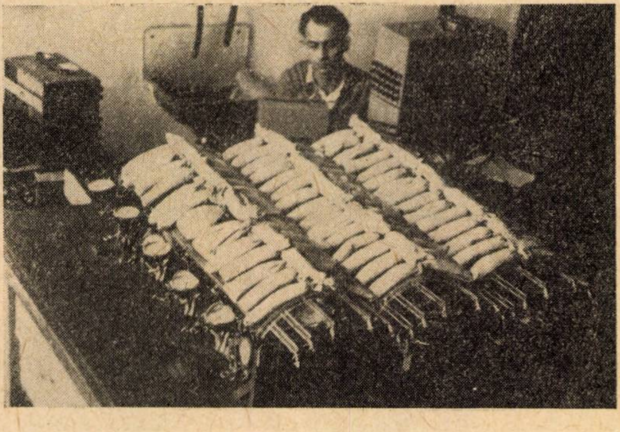

(2)

Fig. 23. — Încărcarea modelelor : (*1*) Modelul Circului de Stat ; (*2*) Modelul halelor de la Jilava.

Metodologia de asamblare a părților componente diferă de la o structură la alta. Ea este determinată de particularitățile structurii și este condiționată de faptul că spre deosebire de construcția reală care în majoritatea cazurilor fiind din beton se toarnă în cofraje, modelul se execută din plăci de plexiglas de grosime maximă 10 mm. Astfel, executarea rețelei de grinzi care alcătuiește o boltă casetată în care sînt încastrați niște stîlpi din cauza înălțimii mari a acestor grinzi precum și a întrepătrunderii lor foarte complicate, a fost executată dintr-o serie de 8 plăci de plexiglas de 10 mm grosime reprezentînd fiecare o secțiune orizontală corespunzătoare prin rețea.

După decuparea lor (fig. 20) cele opt plăci au fost suprapuse și lipite alcătuind bolta casetată, conform proiectului. Chiar și executarea stîlpilor care conform proiectului au fiecare cîte trei șiruri de goluri întrerupte de diafragme, a ridicat probleme. Acești stîlpi au fost executați din fîșiile îndoite nr. 1 și 2 și lipite cu vergelele 3, 4, 5. Fazele executării stîlpilor se pot urmări în figura 21.

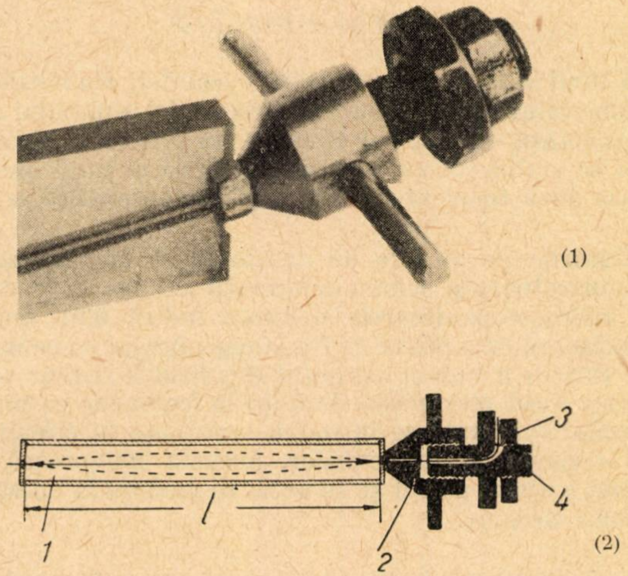


Fig. 24. — Dispozitivul de efectuare a preîntinderii cablelor de precomprimare : (*1*) presă de întindere a cablului ; (*2*) schema de funcționare a presei.

Precomprimarea se efectuează cu sîrme de mare rezistență introducîndu-se în teci de material plastic (izolarea sîrmelor de conexiuni). Aceste teci sînt lipite în interiorul sau la suprafața elementelor ce urmează a fi precomprimate (fig. 22).

O problemă importantă a tehnicii de încercare a modelelor este și cea a încărcării. Modelul de plexiglas are o greutate proprie foarte redusă în raport cu sarcina prevăzută a-l solicita, iar măsurătorile nu pot pune în evidență influența greutății proprii pe un model la scară redusă. În aceste condiții greutatea proprie este tratată ca o sarcină utilă — permanentă — aplicată deasupra. În cazul unei construcții cu o rigiditate mai redusă, repartiția continuă a acestei sarcini se asigură cu grijă prin straturi de vată sau pîslă iar încărcarea se face cu saci cu alice de plumb (fig. 23).

Solicitarea cablelor de precomprimare se face prin prese speciale (fig. 24) iar măsurarea forței de întindere constă în determinarea frecvenței sunetului emis de sîrma pusă în vibrație prin ciupire. În acest scop, cablul se scoate afară pe o lungime determinată și se întinde cu ajutorul pieselor menționate mai sus pînă ce frecvența obținută corespunde forței dorite după relația.

$$F = \pi \cdot l^2 \cdot d^2 \cdot \rho \cdot \nu^2$$

l, d, ρ și ν fiind lungimea de vibrație a coardei, diametrul, densitatea și frecvența sunetului emis. Măsurarea frecvenței sunetului se face aducîndu-l în consonanță cu sunetul emis de un generator de audiofrecvențe. Consonanța se stabilește cu precizie cu ajutorul unui osciloscop pe care interferă cele două frecvențe, astfel încît la consonanță se obține o curbă închisă.

Măsurătorile pe modele de ansamblu se efectuează pentru săgeți cu microcomparatoare și pentru deformații unitare cu traductori rezistivi. De obicei microcomparatoarele utilizate indică 0,01 mm. Deformațiile unitare se măsoară cu o punte de tip Huggenberger cu comutatoare pentru 24 puncte. Pentru a reduce curentul din firul rezistent al traductorului care încălzește local plexiglasul dînd loc la fenomene ce provoacă instabilitatea valorilor măsurate se introduc rezistențe în circuit de ordinul de mărime al rezistenței traductorilor. Aceasta micșorează însă valoarea unei diviziuni a scalei punții și de aceia se recurge la acest adaus numai cînd e absolut necesar.

5. *Concluzii.* Din cele prezentate mai sus, reflectînd activitatea depusă în Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor, — INCERC — pentru introducerea și dezvoltarea metodei de încercare a construcțiilor cu ajutorul modelelor, se desprinde contribuția importantă pe care o aduce această metodă în clarificarea stării de eforturi din structurile de rezistență ale construcțiilor. Metoda cercetării pe modele are perspective favorabile de lărgire a domeniului de utilizare datorită ajutorului prețios pe care a început să-l furnizeze în etapa de proiectare a construcțiilor. Aceste perspective decurg din numeroasele aspecte ale comportării construcțiilor pe care metoda le elucidează. Într-adevăr s-a arătat în cele expuse în lucrarea de față că cercetările cu ajutorul modelelor la scară redusă permit :

— să se studieze, comparativ, diferite variante constructive ;

— să se stabilească contribuția fiecărui element constructiv la rezistența generală a construcției ;

— să se descompună aportul adus la starea de rezistență a construcției de către fiecare tip de încărcare în parte, greutatea proprie, precomprimare, sarcini disimetrice etc. ;

— să se stabilească deformata structurii corespunzătoare fiecărui tip de sarcină;

— să se traseze diagrame liniare și plane de eforturi unitare, momente încovoietoare, puncte de inflexiune pentru orice tip de solicitare compatibil cu modul de alcătuire a construcției;

— să se stabilească frecvența proprie a construcției precum și eforturile ce iau naștere în cazul unor forțe oscilante sau seismice;

— să se clarifice unele aspecte ale comportării betonului armat în stadiul de fisurare;

— să se fundamenteze noi metode de calcul a construcțiilor complexe;

— să se verifice ipoteze de calcul.

În sfîrșit, unul dintre factorii care contribuie la utilizarea din ce în ce mai largă a modelelor este faptul că din punct de vedere economic studiul pe model este un mijloc ieftin de investigație, el reprezentînd un procent infim din costul proiectării. În general, cercetările intreprinse pînă acum în institutul nostru au arătat că costul studiului pe un singur model al unei construcții se ridică la circa 10 000 lei, din care 1 000 lei este costul materialelor întrebuințate. Timpul necesar efectuării studiului este în jur de 2—3 luni, dintre care una lună jumătate necesită execuția modelului. Este evident deci că rezultatele încercărilor pot fi puse la dispoziția proiectantului chiar în timpul definitivării proiectului. Totodată orice modificare intervenită în structura proiectată și care este suficient de limitată pentru a păstra în linii mari structura inițială, se poate face cu ușurință pe model și urmări apoi efectul acestei modificări în redistribuirea eforturilor.

★

Metodele experimentale de cercetare a construcțiilor cu ajutorul modelelor reprezintă un mijloc prețios de reflectare și studiere a naturii dar nu ireproșabil. Diversitatea lor decurge din incapacitatea fiecăreia dintre ele: tensometrie rezistivă, fotoelasticimetrie, lacuri casante, măsurători de săgeți cu microcomparatoare, de a reflecta în întregime și cu precizie fenomenul rezistenței materialelor. De aceea ele se utilizează împreună completîndu-se astfel reciproc.

Diversitatea mijloacelor moderne de investigație experimentală a structurilor de rezistență, exprimă în fond concepția actuală cu privire la fundamentarea previziunii comportării construcțiilor. Fără să se reducă sau să se minimalizeze aportul hotărîtor pe care îl au metodele de calcul și experiența generațiilor trecute, fixate în reguli tradiționale, în concepția inginerească contemporană, o dată cu dezvoltarea tehnicii de execuție și în strînsă legătură cu înmulțirea materialelor utilizate, au apărut din ce în ce mai evidente limitele previziunii implicate într-o dimensionare rațională. Dimensionarea experimentală efectuată pe baza încercărilor pe modele care numai aparent se opun dimensionării raționale cuprinde și fundamentarea experimentală, sistematică, necesară ipotezelor de calcul, alegerii schemei de calcul și stabilirii ponderii fiecărui factor ce intervine în stabilitatea şi funcţionarea normală a construcţiei în timpul exploatării.

O concluzie valabilă care se poate desprinde din cele de mai sus, este că dimensionarea raţională trebuie să fie verificată printr-o cercetare experimentală care la rîndul ei trebuie să sugereze un mod mai apropiat de realitate, de stabilire a condiţiilor şi datelor iniţiale în problema matematică a dimensionării.

Primită la redacţie la 21 februarie 1962

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРОЧНОСТНЫМ КОНСТРУКЦИЯМ СООРУЖЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПЛАСТМАССОВЫХ МОДЕЛЕЙ

РЕЗЮМЕ

Работа содержит краткое изложение деятельности Научно-исследовательского института строительства и экономии сооружений (INCERC) в области внедрения, развития и применения экспериментальных исследований на моделях с целью оказания помощи проектным институтам.

Приводятся работы и исследования на моделях сооружений в целом, изготовленных из плексигласа, для которых применяются тензометры сопротивления, а также на моделях из аралдита для измерений фотоупругим способом.

В работе указываются основные исследования, проведенные в связи с некоторыми важными сооружениями как, например, Государственным цирком, цехами дубильного завода в Жилаве, рестораном в Мамае, пространственными сборными элементами в виде камер.

В работе приводятся основные результаты, полученные путем фотоупругих исследований по противосейсмическим диафрагмам жесткости с одним рядом отверстий.

В работе также указывается техника изготовления моделей, предварительного напряжения, нагружения и измерения усилий и деформаций.

STUDIES ON STRENGTH STRUCTURES OF BUILDING BY MODEL OF PLASTICS

ABSTRACT

Paper outlines the activity of the Research Institute for Construction and Economy of Construction, aiming at the introduction, development and utilization of model studies for Designing Institutes.

Investigations and studies on plexiglass model for which resistive tensometry has been used as well as Araldit model for photoelastic measurements are presented.

Main studies carried out for some important constructions as for example : the dome of the State Circus, Jilava industrial enterprises, the structure of a restaurant at Mamaia, spatial prefabricated elements for dwelling are mentioned.

Main results of photoelastic investigations on stiffening antiseismic diaphragms with a row of holes are given.

Models execution technique, prestressing, loading and stress measurements are also presented.

BIBLIOGRAFIE

1. St. Bălan, S. Răutu, M. Arcan, V. Petcu, *Studiul comportării construcţiilor prin încercări pe modele din masă plastică.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, X, *1* (1959).

2. M. Arcan, N. Iosipescu, Ed. Nicolau, *Realizări în domeniul încercărilor pe modele.* Buletin INCERC, ISCAS, *1—2* (1960).

3. M. Arcan, Ed. Nicolau, *Cercetări pe modele de structuri ale construcţiilor.* Revista construcţiilor şi materialelor de construcţii, *9* (1961).

4. M. Arcan, Ed. Nicolau, *Experimental Stress analysis on shells by models, of plastics.* RILEM. — Symposium on Shell Research, sept. (1961).

5. Eduard Nicolau, *Similitudinea modelului cu prototipul la cercetările pe modele de structuri funcţionînd în stadiul elastic.* Buletin INCERC, ISCAS, *1* (1962).

6. M. Soare, St. Enescu, *Elemente de construcţii din armociment.* Buletin INCERC, ISCAS, *4* (1961) ; *1* (1962).

7. M. Arcan, Ed. Nicolau, F. Hann, *Încercări pe model şi în natură la structura cupolei circului de Stat.* Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii. *11* (1961).

8. Eduard Nicolau, *Studiul comportării de ansamblu a construcţiilor pe modele.* Construcţia Restaurantului R. 1 Mamaia. Buletin INCERC, ISCAS, *4* (1961).

9. M. Arcan, M. Tannenbaum, *Unele aspecte ale problemei fisurării betonului armat studiate fotoelastic.* Studii şi cercetări dn mecanică aplicată, *2*, **XI** (1960).

10. M. Arcan, M. Tannenbaum, *Photoelastic Model Studies on Cracked Reinforced Concrete Beams.* Revue de Mécanique Appliquée, **V**, *4*, (1960) (Comunicare la Congresul de mecanică aplicată, 1960, Moscova).

11. Ed. Nicolau, *Unele probleme ale modelării fotoelastice a betonului armat.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *2*, (1960).

12. — *Quelques problèmes soulevés par l'exécution des modèles photo-élastiques pour le béton armé.* Revue de Mécanique Appliquée, **V**, *4* (1960).

13. А. А. Гвоздев, *Некоторые механические свойства бетона, существенно важные для строительной механики железобетонных конструкций.* Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций, Труды ФИИЖБ, **V**, *4*, Москва, 1959.

14. M. Arcan, F. Stoenescu, R. Mihail, *Cercetări cu privire la introducerea unui nou material pentru modele în fotoelasticitate : Dinox 110.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII** *4* (1957).

15. M. Arcan, *Cercetări cu privire la încovoierea grinzilor cu şir de goluri rectangulare.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XI**, *5* (1960).

16. — *Исследования по изгибу балок с однородными прямоугольными отверстиями.* Revue de Mécanique Appliquée, **VI**, *4* (1961).

17. А. Р. Ржаницын, *Теория составных стержней строительных конструкций.* Стройиздат, 1948.

18. M. Arcan, *O metodă de calcul al diafragmelor de rigidizare cu goluri.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **XIII**, *2* (1962).

19. — *Berechnungsverfahren für Wandscheibe mit einer Reihe Öffnungen. Spannungsoptische Untersuchungen.* Revue de Mécanique Appliquée, **VII** (1962).

CAPACITATEA PORTANTĂ A GRINZILOR CURBE DE BETON ARMAT SOLICITATE LA TORSIUNE CU ÎNCOVOIERE

DE

VALERIU PETCU [1]

Grinzile curbe plane, solicitate normal pe planul lor şi grinzile curbe în spaţiu sînt elemente de construcţii adoptate adesea în alcătuirea structurilor de rezistenţă din beton armat.

Solicitările principale ale acestor grinzi sînt torsiunea şi încovoierea.

Elaborarea teoriei rezistenţei la torsiune cu încovoiere a elementelor de beton armat cu axa dreaptă, bazată pe proprietăţile reale ale betonului şi armăturii în stadiul de rupere, este de dată relativ recentă [1], [2], [3], [4], [5].

Scopul prezentului studiu îl constituie extinderea acestei teorii la cazul general al grinzilor de beton armat cu axa curbă, în vederea stabilirii capacităţii portante a acestor elemente de construcţie la acţiunea simultană a torsiunii şi încovoierii.

Studiul se limitează la grinzile armate cu bare longitudinale şi etrieri, întrucît acesta este cazul frecvent întîlnit în practică.

Rezultatele deduse pe cale teoretică sînt comparate cu cele obţinute în cadrul unui program experimental privind comportarea pînă la rupere a unei serii de grinzi curbe de beton armat solicitate la torsiune cu forţă tăietoare.

1. SCHEME DE RUPERE

Numeroase studii experimentale au demonstrat că solicitarea la torsiune cu încovoiere conduce la apariţia unor fisuri înclinate în raport cu axa elementelor de beton armat, care se continuă de pe o faţă pe alta, înclinarea lor fiind aceeaşi pe toate feţele elementelor.

---

[1] Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

Dacă între armăturile longitudinală și transversală se respectă o anumită proporție, atunci ruperea elementelor de beton armat cu axa dreaptă, solicitate la torsiune cu încovoiere, se caracterizează prin curgerea armăturii intersectate de o fisură continuă pe trei fețe ale grinzii. Pe a patra față se situează zona comprimată, dirijată după un anumit unghi în raport cu axa grinzii [1], [4].

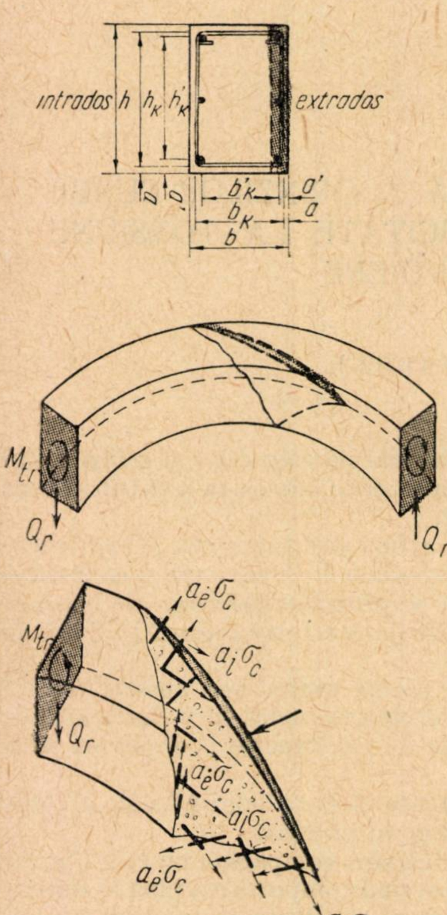

intrados
h
h_k
h'_k
extrados
a
a
b'_k
b_k
b
a'
a
M_{tr}
Q_r
Q_r
$a_e\sigma_c$
$a_l\sigma_c$
$a_e\sigma_c$
$a_l\sigma_c$
$a_e\sigma_c$
$a_l\sigma_c$

Fig. 1

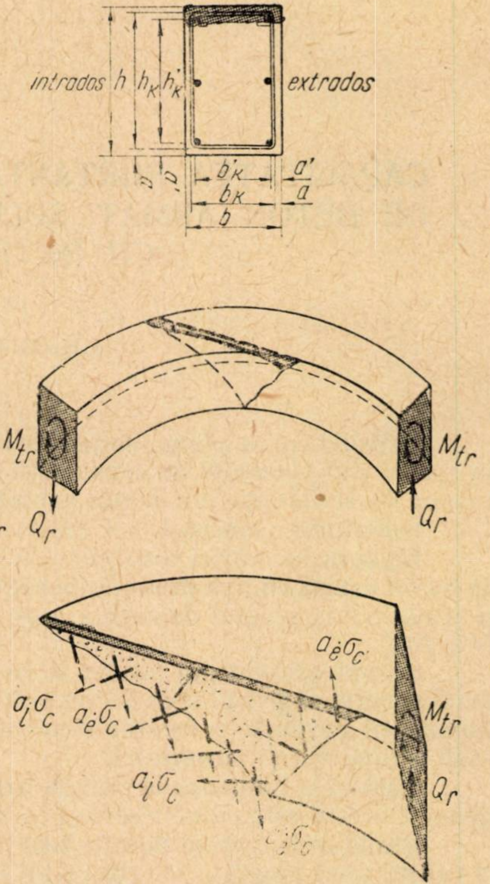

intrados
h
h_k
h'_k
extrados
a
a
b'_k
b_k
b
a'
a
M_{tr}
M_{tr}
Q_r
Q_r
$a_e\sigma_c$
$a_l\sigma_c$
$a_e\sigma_c$
$a_l\sigma_c$
$a_l\sigma_c$
M_{tr}
Q_r

Fig. 2

Ruperea elementelor de beton armat cu axa dreaptă, sub acțiunea solicitării compuse considerate, se produce, prin urmare, într-o secțiune spațială, a cărei solicitare este identică cu cea din cazul încovoierii simple.

Încercările efectuate în cadrul programului experimental amintit au arătat că aceste concluzii rămîn valabile în totalitate și în cazul grinzilor curbe de beton armat solicitate la torsiune cu încovoiere.

Ca urmare a acestui fapt, schemele posibile de rupere ale acestor grinzi vor fi identice cu cele ale grinzilor cu axa dreaptă și anume [1]:

Schema I, în care axa neutră este situată într-un plan normal pe planul de curbură al grinzii (fig. 1);

— Schema II, în care axa neutră este situată într-un plan paralel cu planul de curbură al grinzii (fig. 2).

Schema de rupere în care axa neutră este situată într-un plan oblic în raport cu planul de curbură nu este reală, întrucît nu a fost obținută nici în cazul grinzilor cu axa dreaptă [1] și nici în cazul grinzilor curbe încercate în cadrul programului experimental.

Atît în reprezentarea schemelor de rupere cît și în considerațiile teoretice și experimentale ce urmează s-a admis că planul de curbură corespunzător secțiunii de rupere este orizontal.

2. IPOTEZE DE RUPERE

Pentru rezolvarea teoretică a problemei propuse se fac în prealabil următoarele ipoteze:

a) În momentul care precede ruperea grinzii, în toată armătura intersectată de fisura care delimitează secțiunea de rupere se realizează limita de curgere;

b) Tangenta în orice punct al traseului fisurii care delimitează secțiunea de rupere are aceeași înclinare în raport cu tangenta la axa grinzii corespunzătoare punctului considerat;

c) În momentul care precede ruperea, betonul întins din secțiunea spațială se consideră complet ieșit din lucru;

d) Armătura longitudinală se presupune uniform distribuită pe perimetrul sîmburelui de beton;

e) Armătura transversală se presupune uniform distribuită pe porțiunea de grindă corespunzătoare secțiunii de rupere;

f) În limitele zonei corespunzătoare secțiunii de rupere nu se aplică nici o sarcină;

g) Între aceleași limite se consideră că raza de curbură a grinzii este constantă.

★

Studiul teoretic ce urmează se referă exclusiv la grinzi curbe de beton armat solicitate la torsiune cu încovoiere, la care vectorul momentului încovoietor este situat în planul de curbură al grinzii.

Cazul în care vectorul momentului încovoietor este perpendicular pe planul de curbură nu prezintă deosebiri principiale față de primul caz, tratarea teoretică fiind analogă.

3. SCHEMA I DE RUPERE

În general, pentru determinarea capacității portante a grinzii, corespunzătoare schemei I de rupere (fig. 1), sînt necesare două ecuații de echilibru.

— ecuația de proiecții pe direcția normalei la axa neutră, situată în planul ce trece prin axa neutră și este perpendicular pe planul de curbură;

— ecuația de momente în raport cu dreapta care trece prin punctul de aplicație al forței de compresiune din beton, paralelă cu axa neutră.

Celelalte patru ecuații de echilibru care apar la soluționarea problemelor spațiale nu sînt necesare în acest caz, întrucît solicitarea la torsiune cu încovoiere conduce la apariția unei articulații plastice cilindrice.

Determinarea capacității portante pe baza celor două ecuații amintite este o operație laborioasă din punct de vedere matematic, iar rezultatele sînt prea complicate pentru a putea fi aplicate în practică.

În vederea obținerii unor rezultate susceptibile de prelucrare și de prezentare într-o formă ușor accesibilă, se face observația că schema I de rupere se caracterizează printr-o lățime mare a zonei comprimate. Aceasta face ca pentru procentele obișnuite de armare zona comprimată să aibă o înălțime relativă destul de mică.

Observația de mai sus permite să se adopte ipoteza simplificatoare conform căreia punctul de aplicație a forței de compresiune din beton coincide cu punctul de intersecție dintre suprafața pe care este distribuită armătura longitudinală și dreapta care împarte zona comprimată în două părți egale.

Această ipoteză elimină ecuația de proiecții, problema devenind rezolvabilă exclusiv pe baza ecuației de momente.

Ipoteza simplificatoare adoptată conduce în general la o capacitate portantă teoretică mai mare decît cea reală.

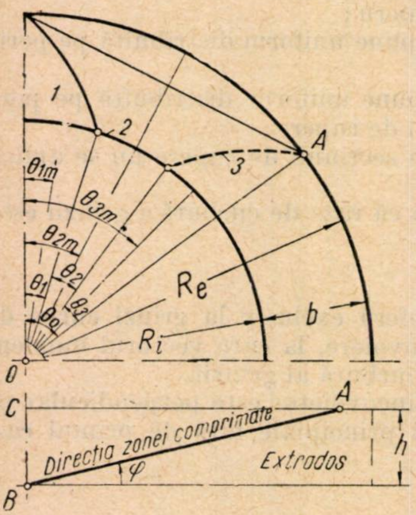


Fig. 3

Procedeul de eliminare a acestei neconcordanțe are la bază următoarele considerații.

Efortul total din armătura longitudinală situată pe fiecare din fețele grinzii paralele cu planul de curbură dau în raport cu punctul de aplicație al forței de compresiune din beton un moment rezultant, obținut din compunerea unui vector-moment perpendicular pe planul de curbură cu un vector-moment situat în planul de curbură al grinzii.

Studiul experimental efectuat a demonstrat că se realizează o coincidență satisfăcătoare între capacitatea portantă teoretică cu cea reală dacă la stabilirea ecuației de momente se neglijează componentele pe direcția axei neutre a celor doi vectori-moment situați în planul de curbură al grinzii, corespunzători armăturii longitudinale de pe cele două fețe ale grinzii.

Pe baza ipotezelor generale de calcul și a simplificărilor admise pentru schema studiată, ecuația de momente conduce la următoarea valoare a momentului de torsiune de rupere:

$$M_{tr} = \frac{\nu_{1l} \cdot A'_{bs} \cdot a_l \cdot \sigma_{cl} + \nu_{1t} \cdot A_{bs} \cdot a_t \cdot \sigma_{ct}}{1 + \delta}. \qquad (1)$$

În relația (1) s-au folosit următoarele notații și formule (fig. 3):

M_{tr} — momentul de torsiune de rupere;

Q_r — forța tăietoare de rupere;

θ_1 — unghiul, situat în planul de curbură, sub care se vede fisura de pe fața orizontală superioară;

θ_2 — unghiul, situat în planul de curbură, sub care se vede fisura de pe fața verticală interioară a grinzii;

θ_3 — unghiul, situat în planul de curbură, sub care se vede fisura de pe fața orizontală inferioară a grinzii ($\theta_3 = \theta_1$);

$\theta_0 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$;

$\theta_{1m} = \dfrac{\theta_1}{2}$; $\theta_{2m} = \theta_1 + \dfrac{\theta_2}{2}$;

φ — unghiul dintre axa neutră și planul de curbură;

ω — unghiul dintre tangenta la traseul fisurii într-un punct și direcția razei de curbură crespunzătoare acestui punct pentru fețele paralele cu planul de curbură, respectiv unghiul dintre tangenta la traseul fisurii într-un punct și perpendiculara pe planul de curbură, pentru fața perpendiculară pe planul de curbură.
Conform ipotezei (*b*), unghiul ω este același de-a lungul fisurilor care delimitează secțiunea de rupere;

b, h — dimensiunile secțiunii transversale ale grinzii;

b_K, h_K, $A_{bs} = b_K \cdot h_K$ — caracteristicile geometrice ale sîmburelui de beton delimitat de axele ramurilor etrierilor;

b'_K, h'_K, $A'_{bs} = b'_K \cdot h'_K$ — caracteristicile geometrice ale sîmburelui de beton delimitat de axele centrelor de greutate ale armăturii longitudinale;

R — raza medie de curbură;

$R_e = R + \dfrac{b_K}{2}$ — raza exterioară;

$R_i = R - \dfrac{b_K}{2}$ — raza interioară;

a_l — densitatea armăturii longitudinale pe unitatea de lungime a perimetrului sîmburelui de beton A'_{bs};

a_t — densitatea armăturii transversale pe unitatea de lungime a axei grinzii, pentru fiecare față a grinzii;

σ_{cl} — limita de curgere a armăturii longitudinale ;
σ_{ct} — limita de curgere a armăturii transversale ;

$$\theta_1 = \theta_3 = \mathrm{tg}\,\omega \cdot L \frac{R_e}{R_i}. \tag{2}$$

$$\theta_2 = \frac{h_K}{R_i} \cdot tg\,\omega, \tag{3}$$

$$\theta_0 = \left(2L\frac{R_e}{R_i} + \frac{h_K}{R_i}\right) \cdot \mathrm{tg}\,\omega, \tag{4}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{\overline{AB}} = \frac{b}{R_e \cdot \left(2L\frac{R_e}{R_i} + \frac{h_K}{R_i}\right) \cdot \mathrm{tg}\,\omega}. \tag{5}$$

Mărimile unghiurilor $\theta_1 = \theta_3$ s-au obținut din soluția

$$r = R_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{\mathrm{tg}\,\omega}} \tag{6}$$

a ecuației diferențiale :

$$\frac{r \cdot d\theta}{dr} = -\,\mathrm{tg}\,\omega, \tag{7}$$

a traseului fisurilor pe fețele grinzii paralele cu planul de curbură (fig. 4), în care parametrii R_0 și α se obțin pe baza condițiilor la limită

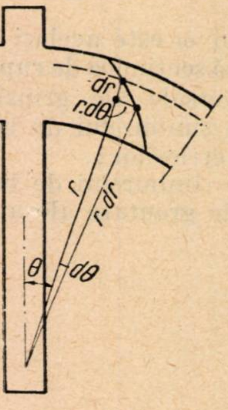


Fig. 4

$$\nu_{1l} = \left(\frac{b'_K}{h_K} + 1\right) \cdot \mathrm{tg}\,\varphi, \tag{8}$$

$$\nu_{1t} = \left[\theta_1 + \theta_2 \cdot \frac{b_K}{h_K} - \theta_1 \cdot (\theta_1 + \theta_2)\frac{R_e}{h_K} \cdot \mathrm{tg}\,\varphi\right] \cdot \frac{R}{b_K}, \tag{9}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{b'_K \cdot Q_r}{M_{tr}}. \tag{10}$$

De asemenea, la stabilirea relației (1) s-au făcut aproximațiile

$$\cos\,(\theta_{2m} - \theta_{1m}) \approx 1,$$

$$\sin\,(\theta_{2m} - \theta_{1m}) \approx \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

Relația (1) exprimă capacitatea portantă a grinzilor curbe de beton armat solicitate la torsiune cu încovoiere la care ruperea are loc după schema I.

Capacitatea portantă este funcție de valoarea unghiului ω și anume corespunde acelei valori a acestui unghi pentru care momentul de torsiune M_{tr} dat de relația (1) are valoarea minimă.

Prin anularea primei derivate a relației (1) în raport cu tg ω se obține :

$$\mathrm{tg}^2\,\omega = \frac{b\cdot(b_K'^2 + A_{bs}')}{R\cdot R_e\cdot\Big[\Big[\left(2\cdot L\frac{R_e}{R_i}+\frac{h_K}{R_i}\right)\left(h_K L\frac{R_e}{R_i}+b_K\frac{h_K}{R_i}\right)-b\left(L\frac{R_e}{R_i}+\frac{h_K}{R_i}\right)L\frac{R_e}{R_i}\Big]}\cdot\frac{a_l\cdot\sigma_{cl}}{a_t\cdot\sigma_{ct}}$$

care se poate scrie

$$\mathrm{tg}^2\,\omega = \nu_\omega\cdot\frac{a_l\cdot\sigma_{cl}}{a_t\cdot\sigma_{ct}}, \tag{11}$$

în care

$$\nu_\omega = \frac{\frac{b}{R}\cdot\frac{b_K'}{R_e}\left(\frac{b_K'}{h_K}+\frac{h_K'}{h_K}\right)}{\left(2\cdot L\frac{R_e}{R_i}+\frac{h_K}{R_i}\right)\left(L\frac{R_e}{R_i}+\frac{b_K}{R_i}\right)-\frac{b}{h_K}\left(L\frac{R_e}{R_i}+\frac{h_K}{R_i}\right)L\frac{R_e}{R_i}}\,. \tag{12}$$

Observație : Relația (11) este valabilă atîta timp cît $\mathrm{tg}^2\,\omega \leqslant 1$. Dacă din calcul rezultă $\mathrm{tg}^2\,\omega > 1$, atunci se va considera $\mathrm{tg}^2\,\omega = 1$, întrucît valoarea maximă a unghiului ω, care are loc în cazul solicitării la torsiune cu forță tăietoare, este 45°.

Această concluzie a fost confirmată de studiul experimental efectuat.

În concluzie, determinarea capacității portante a grinzilor curbe de beton armat solicitate la torsiune cu încovoiere, la care ruperea are loc după schema I, necesită următoarele operații :

— stabilirea tuturor elementelor geometrice care intervin în calcul, precum și ale caracteristicilor armăturii (densități și limite de curgere) ;

— determinarea lui tg ω cu formula (11) ;

— determinarea unghiurilor θ_1, θ_2 și θ_0 și a lui tg φ cu formulele (2) — (5) ;

— stabilirea valorilor coeficienților ν_{1l}, ν_{1t} și δ cu formulele (8) — —(10) ;

— determinarea capacității portante cu formula (1).

Observații : 1. Dimensiunile sîmburelui de beton delimitat de axele etrierilor, respectiv de axele centrelor de greutate ale armăturii longitudinale se determină în mod obișnuit cu formulele :

$$b_K = 0{,}90\ b\,; \qquad b_K' = 0{,}80\ b\,;$$

$$h_K = 0{,}90\ h\,; \qquad h_K' = 0{,}80\ b\,;$$

2. Ținînd seama de observația precedentă, rezultă că valorile coeficienților ν_{1l}, ν_{1t} și ν_ω depind de rapoartele $\frac{b}{R}$ și $\frac{h}{R}$, valorile acestor coeficienți putînd fi date în tabele, o astfel de prezentare constituind o simplificare substanțială a calculelor.

4. SCHEMA II DE RUPERE

Pentru obținerea capacității portante corespunzătoare acestui caz se presupune că punctul de aplicație al forței de compresiune din beton este situat la nivelul axei armăturii longitudinale de pe fața pe care se formează zona comprimată a secțiunii de rupere.

Această ipoteză simplificatoare este acceptabilă atîta timp cît zona comprimată a betonului este suficient de mare.

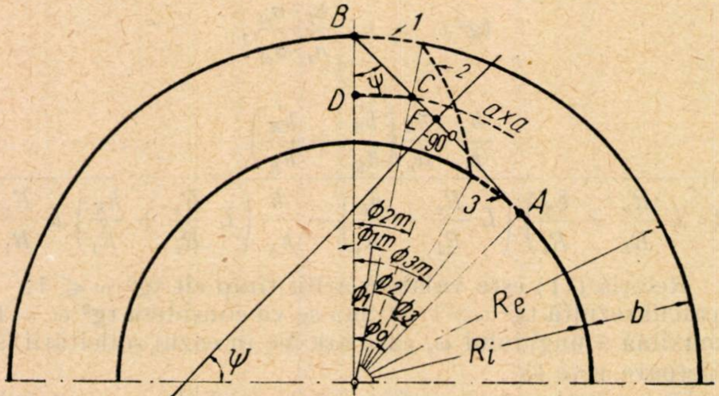


Fig. 5

Practic, pentru procentele obișnuite de armare, valabilitatea ipotezei poate fi admisă pentru toate cazurile pentru care lungimea zonei comprimate este mai mare sau cel puțin egală cu 1,5 *b* (fig. 5)

$$\overline{AB} \geqslant 1{,}5 . b. \tag{13}$$

Admițîndu-se $a' = 0{,}10\ h$, unde a' este distanța de la axa armăturii longitudinale pînă la fața grinzii, atunci ipoteza admisă indică o înălțime a zonei comprimate :

$$x = 0{,}20\ h.$$

Dacă suprafața zonei comprimate se raportează la lățimea *b* a grinzii, rezultă :

$$x = 0{,}30\ h,$$

fapt care justifică limitarea, prin condiția (13), a domeniului de valabilitate al ipotezei.

Pentru cazurile în care $\overline{AB} < 1{,}5b$ devine aplicabilă teoria torsiunii cu încovoiere a grinzilor drepte, influența curburii asupra capacității portante fiind neglijabilă.

În consecință, determinarea capacității portante corespunzătoare acestei scheme de rupere se bazează exclusiv pe ecuația de momente în raport cu dreapta care trece prin punctul de aplicație al forței de compresiune din beton, paralelă cu axa neutră.

Pentru rezolvarea problemei propuse se fac în prealabil notațiile (fig. 5) :

M_{ir} — momentul încovoietor de rupere al grinzii ;

$\varnothing_1$ — unghiul, situat în planul de curbură, sub care se vede fisura situată pe fața verticală exterioară ;

$\varnothing_2$ — unghiul, situat în planul de curbură, sub care se vede fisura situată pe fața orizontală inferioară ;

$\varnothing_3$ — unghiul, situat în planul de curbură, sub care se vede fisura situată pe fața verticală interioară ;

$\varnothing_0 = \varnothing_1 + \varnothing_2 + \varnothing_3$;

$\varnothing_{1m} = \frac{\varnothing_1}{2}$; $\varnothing_{2m} = \varnothing_1 + \frac{\varnothing_2}{2}$; $\varnothing_3 = \varnothing_1 + \varnothing_2 + \frac{\varnothing_3}{2}$;

$\varnothing_{CD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_K}{R} \cdot \operatorname{tg} \psi,$

$\eta = \frac{M_{tr}}{M_{ir}}.$

Celelalte notații folosite sînt date la punctul precedent.

Elementele geometrice definite mai sus sînt legate prin relațiile :

$$\varnothing_1 = \frac{h_K}{R_e} \cdot \operatorname{tg} \omega, \tag{14}$$

$$\varnothing_2 = \operatorname{tg} \omega \cdot L \frac{R_e}{R_i}, \tag{15}$$

$$\varnothing_3 = \frac{h_K}{R_i} \cdot \operatorname{tg} \omega, \tag{16}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R_i \cdot \sin \varnothing_0}{R_e - R_i . \cos \varnothing_0}. \tag{17}$$

Ecuația de momente conduce la următoarea valoare a momentului încovoietor de rupere :

$$M_{ir} = \frac{\nu_{2l} \cdot h_K'^2 \cdot a_l \cdot \sigma_{cl} + \nu_{2t} \cdot R^2 \cdot a_t \cdot \sigma_{ct}}{\nu_{20}}, \tag{18}$$

în care :

$$\nu_{2l} = \frac{1}{2}\left[\cos(\varnothing_{1m} + \psi) + 2 \cdot \frac{b_K'}{h_K'} \cdot \cos(\varnothing_{2m} + \psi) + \cos(\varnothing_{3m} + \psi)\right], \tag{19}$$

$$\nu_{2t} = \frac{1}{2}\left[\varnothing_1^2 \cdot \frac{R_e}{R} . \cos(\varnothing_{1m} + \psi) + 2 \cdot \varnothing_2 \cdot \frac{h_K}{2} \cos(\varnothing_{2m} + \psi) + \right.$$
$$\left. + \varnothing_3^2 \cdot \frac{R_i}{R} \cdot \cos(\varnothing_{3m} + \psi)\right], \tag{20}$$

$$\nu_{20} = \cos(\varnothing_{CD} + \psi) + \eta . \sin(\varnothing_{CD} + \psi). \tag{21}$$

Relația (18) exprimă capacitatea portantă a grinzilor curbe de beton armat solicitate la torsiune cu încovoiere, la care ruperea se produce după schema II.

Capacitatea portantă poate fi de asemenea exprimată prin momentul de torsiune de rupere, utilizîndu-se în acest caz relația

$$M_{t_r} = \eta \, . \, M_{i_r} .$$

Ca și în cazul precedent, capacitatea portantă este funcție de valoarea unghiului ω și anume corespunde acelei valori a acestui unghi pentru care momentul înconvoietor M_{i_r} dat de relația (18) are valoarea minimă.

Obținerea directă a unghiului ω corespunzător capacității portante, prin derivarea expresiei (18), întîmpină dificultăți de ordin matematic. Problema este însă mult ușurată dacă se ține seama de faptul că variațiile unghiului ω în jurul valorii lui corespunzătoare minimului expresiei (18) are o influență mică aspura capacității portante [4]. În această situație este suficient dacă se dau valori unghiului ω cuprinse între 0,2 și 0,785 ($\omega \leqslant 45°$) și dacă se sistematizează în tabele calculul coeficienților ν_{2l}, ν_{2t} și ν_{20}.

În acest caz verificarea capacității portante constă în determinarea momentului înconvoietor M_{i_r} pentru cîteva valori ale unghiului ω situate în domeniul care cuprinde valoarea exactă a acestui unghi, păstrîndu-se valoarea minimă dintre rezultatele obținute.

Trebuie subliniat faptul că limita superioară a unghiului ω este funcție de valoarea maximă pe care o poate avea lungimea zonei comprimate. Această valoare maximă este egală cu lungimea tangentei dusă la cercul interior al grinzii dintr-un punct al cercului exterior (fig. 6).

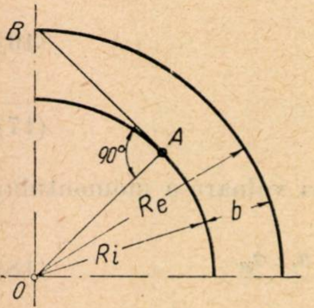


Fig. 6

Un calcul simplu, în care se păstrează doar primii doi termeni ai dezvoltării în serie a lui $\cos \varnothing_0$ conduce la următoarea condiție pe care trebuie s-o îndeplinească unghiul ω :

$$\mathrm{tg}^2 \omega \leqslant 2 \cdot \frac{\dfrac{b}{R_e}\left(2\,\dfrac{R}{R_i} - \dfrac{b}{R_i}\right)}{\left(\dfrac{h_K}{R_e} + \dfrac{h_K}{R_i} + L\,\dfrac{R_e}{R_i}\right)^2} . \tag{22}$$

Valoarea minimă a unghiului ω, rezultată din condiția (13), este dată de relația :

$$\mathrm{tg}^2 \omega = \frac{2{,}5 \cdot \dfrac{b^2}{R_e \cdot R_i}}{\left(\dfrac{h_K}{R_e} + \dfrac{h_K}{R_i} + L\,\dfrac{R_e}{R_i}\right)^2} . \tag{23}$$

În concluzie, unghiul ω trebuie să îndeplinească condițiile

$$\frac{2{,}5\,.\,\frac{b^2}{R_e\,R_i}}{\left(\frac{h_K}{R_e}+\frac{h_K}{R_i}+L\,\frac{R_e}{R_i}\right)^2}\leqslant \operatorname{tg}^2\omega\leqslant\frac{2\cdot\frac{b}{R_e}\left(2\,\frac{R}{R_i}-\frac{b}{R_i}\right)}{\left(\frac{h_K}{R_e}+\frac{h_K}{R_i}+L\,\frac{R_e}{R_i}\right)^2}\qquad(24)$$

cu observația că tg ω nu poate depăși valoarea tg $\omega = 1$ (respectiv $\omega = 45°$).

★

Un aspect important al problemei studiate este acela al stabilirii prealabile a schemei de rupere.

Dificultățile de ordin matematic fac imposibilă o delimitare riguroasă a domeniilor celor două scheme de rupere studiate.

Se poate preciza însă că schema I de rupere este caracteristică secțiunilor solicitate de momente de torsiune mari în raport cu momentele încovoietoare corespunzătoare, în timp ce schema II de rupere este caracteristică secțiunilor solicitate de momente încovoietoare mari în raport cu momentele de torsiune respective.

În cazurile în care o astfel de delimitare nu este posibilă, se impune verificarea capacității portante pentru ambele scheme de rupere, păstrîndu-se valoarea cea mai mică dintre rezultatele obținute.

5. STUDIU EXPERIMENTAL

Unul dintre scopurile studiului experimental efectuat a fost acela de a verifica rigurozitatea teoriei elaborate pentru cazul grinzilor curbe de beton armat solicitate la torsiune cu forță tăietoare.

Programul experimental a constat în încercarea pînă la rupere a unor grinzi în formă de sfert de cerc, avînd raza medie $R = 1{,}00$ m, încastrate perfect la unul din capete.

La celălalt capăt grinzile au fost prevăzute cu cîte o consolă dreaptă, prin intermediul căreia s-a transmis asupra grinzilor acțiunea unei forțe concentrate, normală pe planul de curbură, aplicată în centrul de curbură (fig. 7). În acest mod s-a realizat un moment de torsiune și o forță tăietoare constante pe toată lungimea grinzilor.

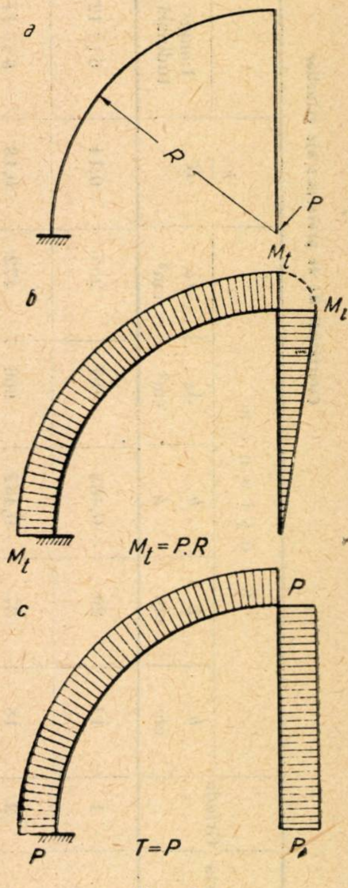


Fig. 7

Tabela 1

Caracteristicile de proiectare ale grinzilor

Seria	Grinda	Secţiunea					$\frac{b}{R}$	Armătura				
		b cm	h cm	$\frac{b}{h}$	A_b cm²	A_{bs} cm²		Longitudinală	μ_l %	Transversală	μ_t %	$\frac{\mu_t}{\mu_l}$
I	1	14	29	0,483	407	255	0,14	6 ∅ 12	2,64	∅ 8/8 cm	1,81	0,685
	2	18	37	0,487	666	472	0,18	6 ∅ 14	1,96	,,	1,31	0,670
	3	23	45	0,512	1 035	780	0,23	6 ∅ 16	1,53	,,	0,99	0,645
II	4	20	20	1	400	256	0,20	8 ∅ 10	2,39	,,	1,63	0,682
	5	26	26	1	676	503	0,26	8 ∅ 12	1,83	,,	1,18	0,645
	6	32	32	1	1024	795	0,32	8 ∅ 14	1,55	,,	0,92	0,593
III	7	29	14	2,07	407	255	0,29	6 ∅ 12	2,64	,,	1,81	0,685
	8	37	18	2,05	666	472	0,37	6 ∅ 14	1,96	,,	1,31	0,670
	9	45	23	1,96	1 035	780	0,45	6 ∅ 16	1,53	,,	0,99	0,645

Au fost încercate trei serii de cîte trei grinzi, numerotate de la 1 la 9, armate exclusiv cu bare longitudinale și etrieri.

Caracteristicile de proiectare ale grinzilor sînt date în tabela 1, în care s-au folosit notațiile :

$\mu_l = \dfrac{2\,(b'_K + h'_K)\cdot a_l}{A_{bs}}$ — procentul de armare al armăturii longitudinale ;

$\mu_t = \dfrac{2\,(b_K + h_K)\cdot a_t}{A_{bs}}$ — procentul de armare al armăturii transversale.

Marca betonului a fost B 152, iar limita de curgere a armăturii a variat între 2 610 și 3060 kg/cm^2.

Grinzile fiecărei serii au avut practic același raport al dimensiunilor secțiunii transversale. Pentru cele trei serii valoarea acestui raport a fost $\dfrac{b}{h} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{1}$, respectiv $\dfrac{2}{1}$.

Pentru exemplificare, în figura 8 se prezintă detaliile grinzii 2.

Experiențele efectuate au arătat că ruperea grinzilor curbe de beton armat solicitate la torsiune cu forță tăietoare se produce după schema I de rupere.

În tabela 2 se prezintă atît valorile momentelor de torsiune de rupere obținute experimental (M'_{tr}), cît și cele deduse pe baza teoriei dezvoltate la punctul 3 al acestui studiu (M_{tr}).

Rezultatele obținute au arătat că raportul $\dfrac{M_{tr}}{M'_{tr}}$ variază, cu excepția grinzii 4, între 0,89 și 1,09. Aceasta reprezintă o bună coincidență a rezultatelor teoretice cu cele experimentale și confirmă justețea teoriei elaborate privind capacitatea portantă a grinzilor curbe de beton armat solicitate la torsiune cu forță tăietoare.

★

Teoria dezvoltată este valabilă atîta timp cît se realizează ipoteza (a) privind atingerea limitei de curgere în toată armătura intersectată de fisurile care delimitează secțiunea de rupere.

Studiul experimental efectuat a permis să se deducă raportul optim al procentelor de armare pentru care este asigurată realizarea ipotezei (a), a cărui valoare este dată de relația :

$$\left(\frac{\mu_t}{\mu_l}\right)_{\text{optim}} = \frac{R_i}{R}\cdot\frac{\sigma_{cl}}{\sigma_{ct}}\cdot\frac{A'_{bs}}{A_{bs}}. \qquad (25)$$

Acest raport este caracteristic exclusiv secțiunilor solicitate la torsiune cu forță tăietoare.

Pentru realizarea ipotezei (a) în cazul general al grinzilor curbe solicitate la torsiune cu încovoiere, se recomandă următorul procedeu aproximativ :

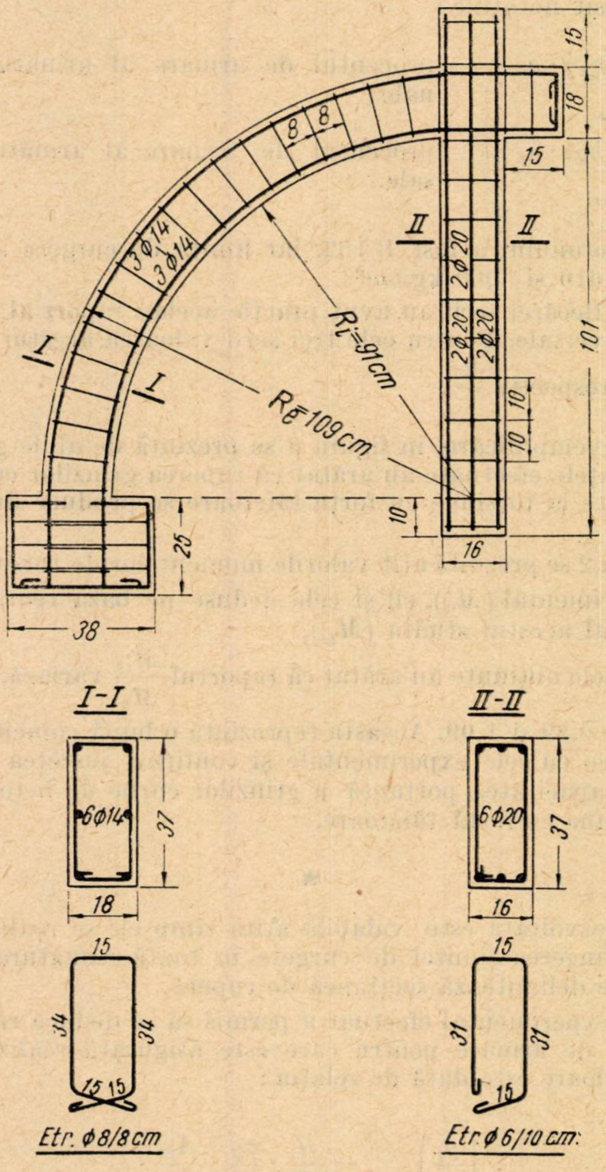

15
18
8
8
15
II
II
3ϕ14
3ϕ14
2ϕ20
2ϕ20
2ϕ20
2ϕ20
Ri=91cm
Re=109cm
I
I
101
10
10
10
25
16
38
I-I
II-II
6ϕ14
37
6ϕ20
37
18
16
15
34
34
15 15
15
31
31
15
Etr. ϕ8/8cm
Etr. ϕ6/10cm

Fig. 8

— se determină procentul de armare longitudinală μ_{il} în ipoteza acționării grinzii exclusiv de momentul încovoietor ;

Tabela 2

Momente de rupere teoretice şi experimentale

Seria	I			II			III		
Grinda	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_K/R	0,100	0,142	0,192	0,163	0,224	0,282	0,250	0,332	0,404
b_K	10,0	14,2	19,2	16,3	22,4	28,2	25,0	33,2	40,4
h_K	25,0	33,4	40,6	15,8	22,5	28,2	10,0	13,9	19,2
b'_K	8,0	12,0	16,8	14,5	20,4	26,0	23,0	31,0	38,0
h'_K	23,0	31,2	38,2	14,6	20,5	26,0	8,0	11,7	16,8
A_{bs}	250	475	780	258	505	795	250	462	775
A'_{bs}	184	374	642	203	418	676	184	363	638
$a_l \cdot \sigma_{cl}$	252	289	266	266	261	325	252	293	267
$a_t \cdot \sigma_{ct}$	193	193	193	193	193	193	193	193	193
M_{tr}	720	1 500	3 050	940	1 800	3 060	860	1 740	2 680
M'_{tr}	810	1 690	2 940	765	1 735	2 940	790	1 846	2 990
M_{tr}/M'_{tr}	0,89	0,89	1,04	1,23	1,04	1,04	1,09	0,94	0,90

Observaţie: Lungimile sînt date în cm, suprafeţele în cm², eforturile unitare în kg/cm² iar momentele în kg. m.

— se determină procentele de armare longitudinală (μ_{tl}) și transversală (μ_{tt}) necesare pentru preluarea exclusiv a momentului de torsiune și a forței tăietoare, raportul acestor două procente respectînd relația (25);

— stabilirea armăturilor necesare pentru preluarea solicitării la torsiune cu încovoiere printr-una din formulele (1) sau (18) se va face astfel încît procentele de armare să îndeplinească condiția :

$$\frac{\mu_t}{\mu_l} = \frac{\mu_{tt}}{\mu_{il} + \mu_{tl}} \qquad (26)$$

★

Studiul prezentat constituie o parte din lucrarea de disertație elaborată de autor în vederea obținerii titlului de candidat în științe tehnice.

Lucrarea a fost efectuată în cadrul catedrei de beton armat a Institutului de construcții din București, sub conducerea prof. dr. ing. M. Hangan, căruia autorul îi exprimă mulțumirile sale.

Autorul mulțumește de asemenea conf. ing. D. Dumitrescu, candidat în științe tehnice, pentru sprijinul acordat în vederea efectuării lucrărilor experimentale.

Primită la redacție la 25 ianuarie 1962

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ КРИВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК, ПОДВЕРЖЕННЫХ КРУЧЕНИЮ И ИЗГИБУ

РЕЗЮМЕ

В работе излагается теория сопротивления кривых железобетонных балок, подверженных кручению и изгибу.

Устанавливаются соотношения, необходимые для определения несущей способности этих балок, причем указываются их пределы применимости.

Рассматриваются основные практические аспекты исследуемой задачи и указываются возможности упрощения решения этих задач.

Разработанная теория проверяется экспериментальным исследованием на серии из девяти кривых железобетонных балок, подверженных кручению от срезывающей силы.

CARRYING CAPACITY OF CURVED REINFORCED CONCRETE BEAMS SUBJECTED TO TORSION AND BENDING

ABSTRACT

Paper deals with strength theory of curved reinforced concrete beams subjected to torsion and bending.

Necessary relations for determining the carrying capacity of these beams are established, their valability limits being indicated.

Principal pratical aspects of the studied problem are examined. Possibilities of simplification in solving this problem are pointed out.

The developed theory is verified experimentally on a set of 9 curved reinforced concrete beams subjected to torsion and shear.

BIBLIOGRAFIE

1. Н. Н. ЛЕССИГ, *Теоретические и экспериментальные исследования железобетонных балок при совместном действии изгиба и кручения.* Теория расчета и конструирования железобетонных конструкций, гос. изд. лит. по строит., арх. и строит. мат., Москва, 1958.
2. — *Определение несущей способности железобетонных элементов прямоугольного сечения, работающих на изгиб с кручением.* Исследование прочности элементов железобетонных конструкций. Труды НИИЖБ, выпуск 5, гос. изд. лит. по строит., арх. и строит. мат., Москва, 1959.
3. — *Определение несущей способности железобетонных элементов прямоугольного сечения при совместном действии изгиба и кручения.* Бетон и железобетон, *3*, 1959.
4. Ю. В. ЧИНЕНКОВ, *Исследование работы железобетонных элементов при совместном действии изгиба и кручения.* Исследование прочности элементов железобетонных конструкций. Труды НИИЖБ, выпуск 5, гос, изд. лит. по строит. арх. и строит. мат., Москва, 1959.
5. И. М. ЛЯЛИН, *Экспериментальные исследования работы железобетонных балок прямоугольного сечения, подверженных совместному действию поперечной силы, изгибающего и крутящего моментов,* Исследование прочности элементов железобетонных конструкций, Труды НИИЖБ, выпуск 5, гос. изд. лит. по строит. арх. и строит. мат., Москва, 1959.

STUDII

ELASTICITATE—PLASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR — REOLOGIE

ASUPRA ECUAŢIILOR NELINIARE DE MIŞCARE A UNUI MEDIU CONTINUU DEFORMABIL ÎN COORDONATE CURBILINII OARECARE

DE

V. MANEA

1. INTRODUCERE

Într-un articol anterior [1], am studiat aceeaşi problemă referindu-ne însă la un sistem de coordonate rectiliniu şi triortogonal. În articolul de faţă vom încerca să dăm o generalizare a modului de tratare, referindu-ne la un sistem de coordonate curbilinii oarecare. Pentru diversele chestiuni legate de geometria deformaţiilor ne vom referi la cunoscutele lucrări [2], [3], [4], [5] şi [6].

2. VITEZELE DE DEFORMAŢIE A UNUI MEDIU CONTINUU DEFORMABIL OARECARE

Considerăm o porţiune limitată dintr-un mediu continuu deformabil, oarecare, care la momentul t are volumul V delimitat de suprafaţa S, iar la momentul $t^\star$ volumul $V^\star$ şi suprafaţa $S^\star$, rezultate prin deformare continuă din V, respectiv S. Presupunem că t şi $t^\star$ definesc două momente de timp separate prin intervalul Δt, astfel încît

$$t^\star = t + \Delta t. \tag{1}$$

Un punct P de coordonate x_i într-un spaţiu tridimensional rectiliniu şi ortogonal va deveni $P^\star$ de coordonate

$$\xi_i = x_i + v_{x_i} \Delta t, \tag{2}$$

unde v_{xi} sînt proiecţiile vectorului viteză pe axele de coordonate Ox_i.

În locul sistemului de coordonate rectiliniu și ortogonal (Ox_1, x_2, x_3), putem utiliza un sistem de coordonate curbilinii oarecare (Oy_1, y_2, y_3). Prin urmare putem pune

$$x_i = x_i(y_1, y_2, y_3). \tag{3}$$

Dacă punctului P îi corespund coordonatele curbilinii y_j, punctului P^* îi vor corespunde coordonatele curbilinii η_j. În mod analog putem scrie

$$\xi_i = \xi_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3). \tag{4}$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă că coordonatele ξ_i pot fi considerate ca funcții de coordonatele y_j, iar ca urmare, din (4), rezultă că coordonatele curbilinii η_k pot fi exprimate în funcție de coordonatele curbilinii y_j.

Să definim poziția punctului curent P prin vectorul de poziție $\bar{r}\,(x_i)$ iar a punctului P^* prin vectorul

$$\bar{r}^*(\xi_i) = \bar{r}(x_i) + \bar{V}\,\Delta t, \tag{5}$$

$\bar{V}$ fiind vectorul viteză (Δt este presupus atît de mic încît variația vitezei în acest interval să fie neglijabilă).

Vom nota vectorii fundamentali, tangenți la liniile de coordonate y_j, prin

$$\bar{r}_j = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y_j}, \tag{6}$$

iar pe cei tangenți la liniile η_k prin

$$\bar{\rho}_k = \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial \eta_k}. \tag{7}$$

Utilizînd (5) rezultă de asemenea

$$\bar{r}_j^* = \frac{\partial \bar{r}^*}{\partial y_j} = \bar{r}_j + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y_j}\,\Delta t, \tag{8}$$

ce reprezintă vectorii fundamentali tangenți la liniile de coordonate ce se obțin prin deformarea liniilor y_j. Sînt evidente relațiile

$$\bar{r}_j^* = \bar{\rho}_k \frac{\partial \eta_k}{\partial y_j}, \tag{9}$$

respectiv

$$\bar{\rho}_k = \bar{r}_j^* \frac{\partial y_j}{\partial \eta_k}. \tag{10}$$

În aceste relații, cît și în cele ce vor urma, vom subînțelege prin indice repetat într-un monom operația de sumare în raport cu acel indice.

După cum se ştie, [4], [5] şi [6], componentele tensorului metric fundamental, referitor la cele două sisteme de coordonate, sînt date de relaţiile

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \bar{r}_i \bar{r}_j , \\ \gamma_{kl} &= \bar{\rho}_k \bar{\rho}_l . \end{aligned} \tag{11}$$

Ţinînd seama de (5) obţinem

$$g^{*}_{ij} = g_{ij} + \left(\bar{r}_i \frac{\partial \bar{V}}{\partial y_j} + \bar{r}_j \frac{\partial \bar{V}}{\partial y_i} \right) \Delta t, \tag{12}$$

ce reprezintă componentele covariante ale tensorului metric fundamental referitor la sistemul de coordonate curbilinii rezultat prin deformarea celui iniţial, exprimate în aproximaţia liniară în raport cu Δt. De aici rezultă componentele covariante ale tensorului viteză de deformare a elementului de arc

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\bar{r}_i \frac{\partial \bar{V}}{\partial y_j} + \bar{r}_j \frac{\partial \bar{V}}{\partial y_i} \right). \tag{13}$$

Vectorii reciproci vectorilor fundamentali $\bar{r}_i$ sînt daţi de relaţiile

$$\bar{r}^i = g^{ij} \bar{r}_j = \frac{1}{\sqrt{g}} (\bar{r}_l \wedge \bar{r}_m) \qquad (i \neq l \neq m), \tag{14}$$

unde g^{ij} sînt componentele contravariante ale tensorului metric fundamental, iar g determinantul format cu elementele acestui tensor.

Derivatele vectorilor fundamentali în raport cu coordonatele y_j rezultă printr-un calcul direct

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial y_i} = \Gamma^s_{ij} \bar{r}_s , \tag{15}$$

unde

$$\Gamma^s_{ij} = g^{ks} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial y_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} \right), \tag{16}$$

reprezintă simbolii lui Christoffel de speţa a doua. De asemenea, pentru derivatele vectorilor reciproci avem

$$\frac{\partial \bar{r}^i}{\partial y_j} = - \Gamma^i_{js} \bar{r}^s . \tag{17}$$

Exprimînd vectorul viteză în funcţie de componentele sale contravariante sau covariante sub forma

$$\bar{V} = v^i \bar{r}_i = v_i \bar{r}^i , \tag{18}$$

vom avea

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{V}}{\partial y_j} &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial y_j} + v^s\,\Gamma^i_{sj}\right)\overline{r}_i = \nabla_j\, v^i \cdot \overline{r}_i \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} - v_s\,\Gamma^s_{ij}\right)\overline{r}^i = \nabla_j\, v_i \cdot \overline{r}^i\end{aligned} \tag{19}$$

unde Δ_j reprezintă simbolul derivatei covariante. Înlocuind în (13) obținem

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\,(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j). \tag{20}$$

Pentru stabilirea componentelor vectorului viteză de deformare a suprafeței, considerăm elementul de suprafață situat pe suprafața de coordonate $y_k = \text{const.}$, a cărui expresie la momentul t este

$$d\overline{S}^k = (\overline{r}_i \wedge \overline{r}_j)\, dy_i\, dy_j\,, \tag{21}$$

iar la momentul $t^\star$

$$d\overline{S}^{\star k} = (\overline{r}^\star_i \wedge \overline{r}^\star_j)\, dy_i\, dy_j\,, \tag{22}$$

Modulul acestor elemente de suprafață este

$$dS^k = r_i\, r_j \sin(\overline{r}_i,\ \overline{r}_j)\, dy_i\ dy_j\,, \tag{21'}$$

respectiv

$$dS^{\star k} = r^\star_i\, r^\star_j \sin(\overline{r}^\star_i,\ \overline{r}^\star_j)\, dy_i\, dy_j\,. \tag{22'}$$

Ținînd seama de faptul că

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{g_{i'i'}} \\ r^\star_i &= \sqrt{g_{i'i'} + 2\dot{\varepsilon}_{i'i'}\,\Delta t} = \sqrt{g_{i'i'}}\left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}_{i'i'}}{g_{i'i'}}\,\Delta t\right),\end{aligned} \tag{23}$$

cosinușii directori ai tangentei la linia de coordonate y_i, căreia la momentul t îi corespunde arcul s_i, iar la $t^\star$ arcul $s^\star_i$, sînt dați de expresiile

$$\cos\,(s_i\,,\ x_l) = \frac{1}{\sqrt{g_{i'i'}}}\frac{\partial x_l}{\partial y_i}\,, \tag{24}$$

respectiv

$$\cos\,(s^\star_i,\ \xi_l) = \frac{(\overline{r}^\star_i)_{\xi_l}}{r^\star_i} = \frac{1}{\sqrt{g_{i'i'}}}\left[\left(1 + \frac{\dot{\varepsilon}_{i'i'}}{g_{i'i'}}\,\Delta t\right)\delta^m_i + \nabla_i\, v^m\,\Delta t\right]\frac{\partial x_l}{\partial y_m}\,, \tag{25}$$

unde δ^m_i este simbolul lui Kronecker. Semnul′ (prim) — pus la un indice arată că sumarea nu are loc în raport cu acel indice.

Din (24) și (25) rezultă că

$$\cos(\bar{r}_i, \bar{r}_j) = \cos(s_i, x_l) \cdot \cos(s_j, x_l), \tag{26}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \cos(\bar{r}_i^\star, \bar{r}_j^\star) &= \cos(s_i^\star, \xi_l) \cdot \cos(s_j^\star, \xi_l) = \\ &= \cos(\bar{r}_i, \bar{r}_j) + \left(\frac{2\dot{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{g_{i'i'}\, g_{j'j'}}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{i'i'}}{g_{i'i'}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{j'j'}}{g_{j'j'}} \right) \Delta t. \end{aligned} \tag{27}$$

Rezultă că

$$\sin(\bar{r}_i^\star, \bar{r}_j^\star) = \sin(\bar{r}_i, \bar{r}_j) \left[1 - \frac{\Delta t}{tg(\bar{r}_i, \bar{r}_j)} \left(\frac{2\dot{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{g_{i'i'}\, g_{j'j'}}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{i'i'}}{g_{i'i'}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{jj}}{g_{j'j'}} \right) \right]. \tag{28}$$

Înlocuind în (22′) conform cu (23) și (28) obținem

$$dS^{\star k} = dS^k (1 + \dot{\alpha}_k \Delta t), \tag{29}$$

unde am notat

$$\dot{\alpha}_k = \frac{\dot{\varepsilon}_{i'i'}}{g_{i'i'}} + \frac{\dot{\varepsilon}_{j'j'}}{g_{j'j'}} - \frac{1}{\operatorname{tg}(\bar{r}_i, \bar{r}_j)} \left(\frac{2\dot{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{g_{i'i'}\, g_{j'j'}}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{i'i'}}{g_{i'i'}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{j'j'}}{g_{j'j'}} \right), \tag{30}$$

componentele vectorului de deformare superficială.

Într-un mod analog putem stabili expresia vitezei de deformare volumetrică. La momentul t avem elementul de volum

$$dV = (\bar{r}_1\, \bar{r}_2\, \bar{r}_3)\, dy_1\, dy_2\, dy_3, \tag{31}$$

iar la momentul $t^\star$

$$dV^\star = (\bar{r}_1^\star\, \bar{r}_2^\star\, \bar{r}_3^\star)\, dy_1\, dy_2\, dy_3. \tag{32}$$

Înlocuind conform cu (8) rezultă

$$dV^\star = dV (1 + \dot{k}\, \Delta t), \tag{33}$$

unde am notat

$$\dot{k} = \nabla_i v^i, \tag{34}$$

viteza de deformare volumetrică.

3. VARIAȚIA ÎN TIMP A TENSIUNILOR ÎNTR-UN MEDIU CONTINUU DEFORMABIL

Pe fiecare din suprafețele de coordonate $y_i = \text{const.}$, ce trec prin punctul P, la momentul t va acționa un efort

$$\bar{\sigma}_{y_i} = \sigma_{y_i y_k} \frac{\bar{r}_k}{r_{k'}}, \tag{35}$$

unde am notat prin $\sigma_{y_i v_k}$ componentele oblice pe direcțiile tangentelor la liniile de coordonate y_k. Expresia tensorului tensiunii scrisă sub formă diadică va fi

$$T = r^{i'} \bar{\sigma}_{y_i} \bar{r}_i . \tag{36}$$

Se observă că înmulțind acest tensor cu vectorul unitar $\bar{n} = n_j \dfrac{\bar{r}^j}{r^{j'}}$, normal la o suprafață oarecare, obținem vectorul tensiune ce acționează pe acea suprafață. Acest tensor poate fi exprimat cu ajutorul componentelor contravariante sub forma

$$T = P^{ik} \bar{r}_i \bar{r}_k \tag{36'}$$

și prin urmare

$$P^{ik} = \frac{r^{i'}}{r_{k'}} \sigma_{y_i v_k} . \tag{37}$$

La momentul $t^\star$ în punctul P vectorul tensiunii $\bar{\sigma}_{v_i}$ și tensorul T vor deveni

$$\bar{\sigma}^\star_{v_i} = \sigma^\star_{v_i v_k} \frac{\bar{r}^\star_k}{r^\star_{k'}} , \tag{38}$$

respectiv

$$T^\star = r^{\star i'} \bar{\sigma}^\star_{v_i} \bar{r}^\star_i . \tag{39}$$

În același moment și punct putem defini tensorul $T^\star$ referindu-ne la sistemul de coordonate curbilinii $(O_{\eta_1, \eta_2, \eta_3})$ atașat mediului deformat. Vom scrie analog cu (35) și (36)

$$\bar{\tau}_{\eta_l} = \tau_{\eta_l \eta_m} \frac{\bar{\rho}_m}{\rho_{m'}} , \tag{40}$$

unde am notat cu $\tau_{\eta_l \eta_m}$ componentele oblice pe direcțiile tangentelor la liniile de coordonate η_m, respectiv

$$T^\star = \rho^{l'} \bar{\tau}_l \bar{\rho}_l . \tag{41}$$

Revenind la relația (38) o vom scrie sub forma

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{v_i} &= (\sigma_{v_i v_k} + \dot{\sigma}_{v_i v_k} \Delta t)(\bar{r}_k + \nabla_k v^j \bar{r}_j \Delta t) \frac{1}{r_{k'}} \left(1 - \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}} \Delta t\right) = \\ &= \bar{\sigma}_{v_i} + \left[\dot{\sigma}_{v_i v_k} \frac{\bar{r}_k}{r_{k'}} + \left(\frac{\sigma_{v_i v_j}}{r_{j'}} \nabla_j v^k - \frac{\sigma_{v_i v_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right) \bar{r}_k\right] \Delta t. \end{aligned} \tag{42}$$

De asemenea $\bar{\sigma}^{\star}_{v_i}$ poate fi exprimat în funcție de $\bar{\tau}_{\eta_l}$. Într-adevăr, utilizînd relația

$$\bar{r}^{\star i} = \bar{\rho}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial \eta_n}, \tag{43}$$

unde $\bar{\rho}^n$ reprezintă vectorii reciproci vectorilor fundamentali (7), rezultă

$$\bar{\sigma}^{\star}_{v_i} = T^{\star} \frac{\bar{r}^{\star i}}{r^{\star i'}} = \frac{\rho^{l'}}{r^{\star i'}} \bar{\tau}_{\eta_l} \bar{\rho}_l \cdot \bar{\rho}^n \frac{\partial y_i}{\partial \eta_n} = \frac{\rho^{l'}}{r^{\star i'}} \bar{\tau}_{\eta_l} \frac{\partial y_i}{\partial \eta_l}, \tag{44}$$

sau

$$r^{\star i'} \bar{\sigma}^{\star}_{v_i} = \rho^{l'} \bar{\tau}_{\eta_l} \frac{\partial y_i}{\partial \eta_l}. \tag{44'}$$

Relațiile obținute pînă acum le vom utiliza la scrierea ecuațiilor de echilibru.

4. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

Vom scrie ecuația de echilibru al forțelor ce acționează asupra unui element infinitezimal de volum pentru cele două momente de timp succesive. Expresia acestei ecuații, [4], [6], la momentul t este

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sqrt{g}\, r^{i'} \bar{\sigma}_{v_i}\right) + \sqrt{g}\, \rho \left(\bar{F} - \frac{d\bar{V}}{dt}\right) = 0, \tag{45}$$

sau înlocuind

$$\begin{aligned} r^{i'} \bar{\sigma}_{v_i} &= P^{ik} \bar{r}_k, \\ \bar{F} &= F^k \bar{r}_k, \\ \frac{d\bar{V}}{dt} &= \left(\frac{\partial v^k}{dt} + v^l \nabla_l v^k\right) \bar{r}_k = \frac{dv^k}{dt} \cdot \bar{r}_k, \end{aligned} \tag{46}$$

ecuația (45) se scrie sub forma

$$\nabla_i P^{ik} + \rho \left(F^k - \frac{dv^k}{dt}\right) = 0\,^{1)}. \tag{47}$$

La momentul $t^{\star} = t + \Delta t$ ecuația de echilibru al forțelor ce acționează asupra unui element de volum delimitat de suprafețele de coordonate η_k şi $\eta_k + d\eta_k$, are forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta_l}\left(\sqrt{\gamma}\, \rho^{l'} \bar{\tau}_{\eta_l}\right) + \sqrt{\gamma}\, \rho^{\star} \left(\bar{F}^{\star} - \frac{d\bar{V}^{\star}}{dt}\right) = 0\,^{1)}, \tag{48}$$

---

1) Prin ρ şi $\rho^{\star}$ am notat densitatea mediului.

unde $\sqrt{\gamma}$ este determinantul format cu elementele tensorului metric fundamental relativ la sistemul de coordonate $(O\eta_1, \eta_2, \eta_3)$.

Înlocuind derivata în raport cu η_l, în primul termen al acestei ecuații, prin cea în raport y_i și înmulțind ambii termeni cu determinantul funcțional transformării de coordonate

$$D = \frac{D(\eta_1, \eta_2, \eta_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} \tag{49}$$

și ținînd seama de relațiile

$$\begin{gathered}\sqrt{g^\star} = \sqrt{\gamma}\, D\\ D\frac{\partial y_i}{\partial \eta_l} = \frac{\partial \eta_m}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial \eta_n}{\partial y_k} - \frac{\partial \eta_n}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial \eta_m}{\partial y_k}\\ \frac{\partial}{\partial y_i}\left(D\frac{\partial y_i}{\partial \eta_l}\right) = 0,\end{gathered} \tag{50}$$

obținem

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(\sqrt{g^\star}\, r^{\star i'}\, \bar{\sigma}_{v_i}) + \sqrt{g^\star}\, \rho^\star\left(\bar{F}^\star - \frac{d\bar{V}^\star}{dt}\right) = 0. \tag{51}$$

După cum se observă, această ecuație rezultă direct din (45), înlocuind mărimile ce intervin prin corespondentele lor în starea la momentul $t^\star$.

Din relațiile (14), (21), (22) și (29) rezultă că

$$\sqrt{g^\star}\, \bar{r}^{\star i'} = \sqrt{g}\, r^{i'}(1 + \dot{\alpha}_{i'}\, \Delta t), \tag{52}$$

care împreună cu (42), precum și cu relațiile

$$\begin{gathered}\bar{F}^\star = \bar{F} + \frac{d\bar{F}}{dt}\,\Delta t,\\ \bar{V}^\star = \bar{V} + \frac{d\bar{V}}{dt}\,\Delta t,\\ \sqrt{g^\star}\,\rho^\star = \sqrt{g}\,\rho,\end{gathered} \tag{53}$$

înlocuite în ecuația (51) ne conduc, ținînd seama de ecuația (45) și de faptul că Δt este arbitrar, la ecuația

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\sqrt{g}\, r^{i'}\left(\frac{\sigma_{v_i v_k}}{r_{k'}} + \frac{\sigma_{v_i v_k}}{r_{k'}}\,\dot{\alpha}_{i'} + \frac{\sigma_{v_i v_j}}{r_{j'}}\,\nabla_j v^k - \frac{\sigma_{v_i v_k}}{r_{k'}}\,\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right] +\\ + \sqrt{g}\,\rho\,\frac{d}{dt}\left(\bar{F} - \frac{d\bar{V}}{dt}\right) = 0.\end{gathered} \tag{54}$$

Scriind ecuația a treia din (53) sub forma

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v^i = 0,$$

sînt evidente relațiile

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\overline{F}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\rho \overline{F}) - \nabla_i v^i \rho \overline{F}, \\ \rho \frac{d^2\overline{V}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\rho \frac{d\overline{V}}{dt}\right) - \nabla_i v^i \rho \frac{d\overline{V}}{dt}, \qquad (55) \\ \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sqrt{g}\, r^{i'} \frac{d\sigma_{y_i y_k}}{dt} \overline{r}_k\right) &= \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}(\sqrt{g}\, r^{i'} \overline{\sigma}_{y_i}) + \frac{\partial v^l}{\partial y_i} \frac{\partial(\sqrt{g}\, r^{i'} \overline{\sigma}_{y_i})}{\partial y_l}. \end{aligned}$$

În virtutea lor ecuația (45) poate fi încă scrisă sub forma

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(\sqrt{g}\, r^{i'} \overline{\sigma}_{y_i})}{\partial y_i} + \sqrt{g}\, \rho \left(\overline{F} - \frac{d\overline{V}}{dt}\right)\right] + \frac{\partial v^k}{\partial y_i} \frac{\partial(\sqrt{g}\, r^{i'} \sigma_{y_i})}{\partial y_k} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_i}\left[\sqrt{g}\, r^{i'} \left(\frac{\sigma_{y_i v_k}}{r_{k'}} \dot{\alpha}_{i'} + \frac{\sigma_{y_i v_j}}{r_{j'}} \nabla_j v^k - \frac{\sigma_{y_i v_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right) \overline{r}_k\right] + \\ &+ \sqrt{g}\, \nabla_i v^i \rho \left(\overline{F} - \frac{d\overline{V}}{dt}\right) = 0 \qquad (56) \end{aligned}$$

în care primul termen îl constituie ecuația (45) sub semnul derivării în raport cu timpul.

Dacă dorim să studiem mișcarea în punctul P, vom menține fixe coordonatele y_i; în acest caz putem integra ecuația (56) în raport cu t. Presupunînd că la momentul t_0 a fost satisfăcută ecuația (45), pentru $t > t_0$ vom avea

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(\sqrt{g}\, r^{i'} \overline{\sigma}_{y_i}) + \sqrt{g}\, \rho \left(\overline{F} - \frac{d\overline{V}}{dt}\right) + \int_{t_0}^{t} \sqrt{g}\, \overline{M}(y_i, t)\, dt, \qquad (57)$$

unde am notat

$$\begin{aligned} \sqrt{g}\, \overline{M} = &\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\sqrt{g}\, r^{i'} \left(\frac{\sigma_{y_i v_k}}{r_{k'}} \dot{\alpha}_{i'} + \frac{\sigma_{y_i v_j}}{r_{j'}} \nabla_j v^k - \frac{\sigma_{y_i v_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right) \overline{r}_k\right] + \\ &+ \frac{\partial v^l}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial(\sqrt{g}\, r^{i'} \overline{\sigma}_{y_i})}{\partial y_l} + \sqrt{g}\, \nabla_i v^i \rho \left(\overline{F} - \frac{d\overline{V}}{dt}\right), \end{aligned} \qquad (58)$$

sau înlocuind componentele fizice ale tensorului tensiunii prin cele contravariante conform cu (37) și (46), obținem pentru componentele contravariante ale vectorului $\overline{M}$ următoarea expresie :

$$\begin{aligned} M^k = &\nabla_i\left(P^{ik} \dot{\alpha}_{i'} + P^{ij} \nabla_j v^k - P^{ik} \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right) + \frac{\partial v^l}{\partial y_i}\left(\frac{\partial P^{ik}}{\partial y_l} + P^{is} \Gamma^k_{sl} + P^{ik} \Gamma^s_{sl}\right) + \\ &+ \nabla_i v^i \rho \left(F^k - \frac{dv^k}{dt}\right). \qquad (59) \end{aligned}$$

În mod asemănător ca în [1], se pot face anumite simplificări în funcție de natura fizică a mediului deformabil considerat. În cazul mediilor incompresibile ultima paranteză dispare, deoarece $\nabla_i v^i = 0$, iar în cazul celor relativ tari, de exemplu elastice, pentru care deplasările au loc în jurul poziției din starea nedeformată, se poate înlocui $\frac{d}{dt}$ cu $\frac{\partial}{\partial t}$, ceea ce conduce la dispariția penultimei paranteze.

Asupra ecuațiilor de echilibru al momentelor forțelor ce acționează asupra elementului de volum nu am insistat, deoarece după cum se știe, [4], acestea conduc la condiția de simetrie a tensorului tensiunii exprimat în funcție de componentele sale contravariante.

5. APLICAȚIE

Deoarece sistemele de coordonate curbilinii ortogonale sînt frecvent utilizate, vom deduce expresiile componentelor vectorului $\overline{M}$ pentru acest caz. Pentru acest caz vom înlocui, urmînd raționamentul din [5],

$$
\begin{aligned}
&r_{k'} = H_k\,; \qquad \Gamma^{k'}_{ik'} = \frac{\partial \ln H_k}{\partial y_i}\,; \quad \dot{\varepsilon}_{i'i'} = \nabla_{i'} v_{i'} \\
&r^{k'} = \frac{1}{H_k}\,; \qquad \Gamma^{i}_{k'k'} = -\frac{H_k}{H_i^2}\cdot\frac{\partial H_k}{\partial y_i}\,; \quad \dot{\alpha}_{i'} = \frac{\dot{\varepsilon}_{j'j'}}{H_j^2} + \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{H_k^2}, \ \ldots\ (i' \neq j' \neq k') \\
&g_{ik} = 0, \text{ pentru } i \neq k\,; \ v^i = \frac{v_{v_i}}{H_i}\,; \\
&\sqrt{g} = H_1\,H_2\,H_3\,; \qquad v_i = v_{v_i} H_i\,; \quad \dot{k} = \dot{\varepsilon}_{ii} \\
&\Gamma^{i}_{jk} = 0, \text{ pentru } i \neq j \neq k\,; \quad P^{ik} = \frac{\sigma_{v_i v_k}}{H_i H_k}\,.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Vom scrie componentele vectorului $\overline{M}$ sub forma

$$
M^k = \nabla_i A^{ik} + B^k + \nabla_i v^i \rho \left(F^k - \frac{dv^k}{dt}\right) = \frac{M_{v_k}}{H_k}, \tag{61}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
A^{ik} = P^{ik}\dot{\alpha}_{i'} + P^{ij}\nabla_j v^k - P^{ik}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}} = \frac{A_{v_i v_k}}{H_i H_k} = \\
= \frac{\sigma_{v_i v_k}}{H_i H_k}\left(\frac{1}{H_p}\frac{\partial v_{v_p}}{\partial y_p} - \frac{3 v_{v_p}}{H_p^2}\frac{\partial H_p}{\partial y_p} + \frac{1}{H_p^2}\sum_{s=1}^{3}\frac{v_{v_s}}{2H_s}\cdot\frac{\partial H_p^2}{\partial y_s} + \frac{1}{H_q}\frac{\partial v_{v_q}}{\partial y_q} - \frac{3 v_{v_q}}{H_q^2}\frac{\partial H_q}{\partial y_q} + \right. \\
\left. + \frac{1}{H_q^2}\sum_{s=1}^{3}\frac{v_{v_s}}{2H_s}\cdot\frac{\partial H_q^2}{\partial y_q}\right) + \sum_{j=1}^{3}\left\{\frac{\sigma_{v_i v_j}}{H_i H_j}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial v_{v_k}}{\partial y_j} - \frac{v_{v_j}}{H_k^2}\cdot\frac{\partial H_j}{\partial y_k}\right) + \frac{\sigma_{v_i v_k}}{H_i H_k}\frac{v_{v_j}}{H_j^2}\cdot\frac{\partial \ln H_k}{\partial y_j}\right\} - \\
- \frac{\sigma_{v_i v_k}}{H_i H_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial v_{v_k}}{\partial y_k} - \frac{3 v_{v_k}}{H_k^2}\frac{\partial H_k}{\partial y_k} + \frac{1}{H_k^2}\sum_{s=1}^{3}\frac{v_{v_s}}{2H_s}\cdot\frac{\partial H_k^2}{\partial y_s}\right);\ i \neq p \neq q\,;\ p, q = 1, 2, 3.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

iar

$$\nabla_i A^{ik} = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{A_{y_i v_k}}{H_i H_k}\right) + \frac{A_{v_i v_k}}{H_i H_k} \frac{\partial \ln (H_1 H_2 H_3)}{\partial y_i} - \frac{A_{v_i v_k}}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial y_k} + \right.$$

$$\left. + \frac{A_{v_i v_k}}{H_i H_k} \frac{\partial \ln H_k}{\partial y_i} + \frac{A_{v_k v_i}}{H_k H_i} \frac{\partial \ln H_k}{\partial y_i} \right\}, \tag{63}$$

$$B^k = \frac{\partial v^l}{\partial y_i}\left(\frac{\partial P^{ik}}{\partial y_l} + P^{is}\,\Gamma^k_{sl} + P^{ik}\,\Gamma^s_{sl}\right) = \frac{B_{y_k}}{H_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{v_{v_l}}{H_l}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\frac{\sigma_{y_i v_k}}{H_i H_k}\right) + \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{v_{v_k}}{H_k}\right) \frac{\sigma_{v_i v_l}}{H_i H_l} \frac{\partial \ln H_k}{\partial y_l} + \right. \tag{64}$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial_{v_l}}{H_l}\right)\left(- \frac{\sigma_{k_i v_l}}{H_i H_k} \frac{\partial H_l}{\partial y_k} + \frac{\sigma_{v_i v_k}}{H_i H_k} \frac{\partial \ln H_k}{\partial y_l}\right\}, \right.$$

$$\nabla_i v^i \rho \left(F^k - \frac{dv^k}{dt}\right) = \frac{\rho}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial\,(v_{v_1} H_2 H_3)}{\partial y_1} + \frac{\partial\,(v_{v_2} H_3 H_1)}{\partial y_2} + \frac{\partial\,(v_{v_3} H_1 H_2)}{\partial y_3}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{F_{v_k}}{H_k} - \frac{1}{H_k} \frac{\partial v_{v_k}}{\partial t} - \sum_{l=1}^{3} \left[\frac{\partial v_{v_l}}{H_l} \left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial v_{v_k}}{\partial y_l} - \frac{v_{v_l}}{H_k^2} \frac{\partial H_l}{\partial y_k} \right) + \frac{v_{v_k}}{H_k} \cdot \frac{v_{v_l}}{H_l} \frac{\partial \ln H_k}{\partial y_l} \right] \right\}. \tag{65}$$

Suma ultimelor trei expresii constituie tocmai expresia în coordonate curbilinii ortogonale a componentelor vectorului $\overline{M}$. În cazul cînd liniile de coordonate sînt rectilinii şi ortogonale regăsim rezultatele obţinute în [1].

Primită la redacţie la 22 februarie 1962

О НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье приводятся нелинейные уравнения движения сплошной деформируемой среды в новом виде в произвольных криволинейных координатах, обобщая, таким образом, результаты, полученные в предыдущей работе.

В качестве приложения рассматривается случай, когда координатные линии являются ортогональными.

SUR LES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES DU MOUVEMENT D'UN MILIEU CONTINU DÉFORMABLE, EN COORDONNÉES CURVILIGNES QUELCONQUES

RÉSUMÉ

Dans cet article on présente les équations non linéaires du mouvement d'un milieu continu déformable, sous une nouvelle forme, en coordonnées curvilignes quelconques, en généralisant de cette manière les résultats obtenus dans un travail antérieur.

On étudie, comme application, le cas où les lignes de coordonnées sont orthogonales.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Manea, *Asupra ecuațiilor neliniare de mişcare a unui mediu continuu deformabil.* S.C.M.A., 2 (1962).
2. F. D. Murnaghan, *Finite deformation of an elastic solid.* New York, John Wiley & Sons, 1951.
3. И. И. Гольденблат, *Некоторые вопросы деформируемых сред.* Госуд. изд. технико-теоретической литературы, Москва, 1955.
4. И. Н. Снедон, Д. С. Берри, *Классическая теория упругости.* Перевод с английского. Госуд. изд. физико-математической литературы, Москва, 1961.
5. N. E. Kocin, *Calculul vectorial și introducere în calculul tensorial.* Ed. tehnică, București, 1954.
6. А. И. Лурие, *Общая теория упругих тонких оболочек.* Прикл. мат. и мех., t. IV—в 2 — 1940, Москва.

STUDII

ELASTICITATE-PLASTICITATE-REZISTENȚA MATERIALELOR – REOLOGIE

ASUPRA FLATERULUI NELINIAR AL STRUCTURILOR CILINDRICE, SUBȚIRI, NEOMOGENE

DE

LIVIU LIBRESCU

1. INTRODUCERE

În proiectarea rachetelor și a vehiculelor spațiale sînt utilizate pe o scară din ce în ce mai largă materiale noi cum ar fi de exemplu plastice armate și metale armate cu fibre. Materialele de acest fel sînt asimilate ca materiale omogene și elastic—ortotrope în sensul clasic al cuvîntului [1].

Este deci foarte important a studia stabilitatea aeroelastică a structurilor construite din astfel de materiale.

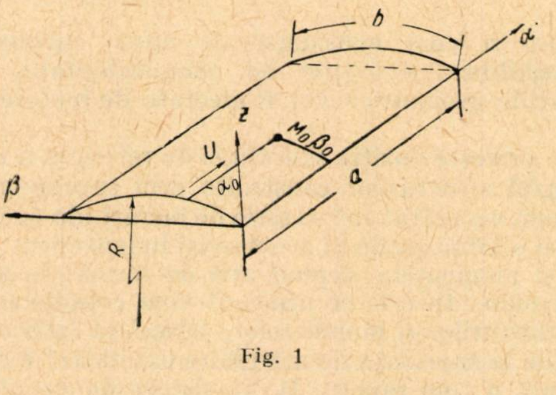


Fig. 1

În cele ce urmează vom considera problema flaterului neliniar al panourilor cilindrice circulare construite prin suprapunerea arbitrară a *s* straturi elastic ortotrope.

Se consideră că curentul fluid de viteză supersonică mare se scurge pe o singură față a panoului, cealaltă față a panoului fiind plasată în aer liniştit[1]), vectorul vitezei curentului neperturbat $\overline{U}$ fiind paralel la axa 0α (fig. 1) Menţionăm că monografia [2], datorită lui V. V. Bolotin precum şi lucrările [3], [4] ale aceluiaşi autor privind flaterul neliniar a învelitorilor subţiri izotrope au constituit sursa de bază în abordarea problemei studiate de noi.

2. IPOTEZE ŞI CONSIDERAŢII GEOMETRICE

Pentru aceste structuri vom adopta ipotezele utilizate de noi într-o serie de lucrări anterioare, ipoteze ce se reduc la a admite că:

a) straturile care alcătuiesc structura sînt împreunate rigid astfel încît aceasta se deformează ca un tot;

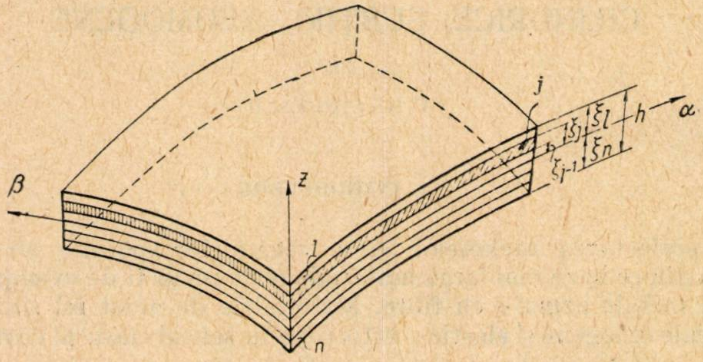


Fig. 2

b) pentru structura în ansamblu rămîne valabilă ipoteza Love-Kirchoff;

c) structura o vom considera de mică curbură, astfel încît ecuaţiile de echilibru, ecuaţiile de compatibilitate, ecuaţiile fizice precum şi ecuaţiile geometrice vor fi afectate de ipotezele proprii acestei teorii.

În ceea ce priveşte poziţia suprafeţei de referinţă a eforturilor şi momentelor, în cazul structurilor construite prin suprapunerea arbitrară a *s* straturi, aşa cum s-a arătat într-o serie de lucrări (de exemplu în lucrarea [5] unde se dă şi o bibliografie în acest sens) independent de alegerea acesteia eforturile şi momentele depind atît de formaţiile tangenţiale cît şi de cele de încovoiere. În cele ce urmează vom considera drept suprafaţă de referinţă a eforturilor şi momentelor, suprafaţa inferioară a celui de-al *l*-lea strat luat de la suprafaţa de mărginire exterioară a structurii (fig. 2). Această suprafaţă o vom raporta la un sistem de coordonate curbiliniu ortogonal α, β sistem ce coincide cu liniile de curbură principale ale suprafeţei de referinţă nedeformate. În ceea ce priveşte neliniaritatea considerată în lucrare ea este geometrică şi aerodinamică.

---

[1] Flaterul ce rezultă în acest caz se numeşte *flater de panou*.

3. ECUAȚIILE PRIVIND ELASTICITATEA STRUCTURILOR CONSTRUITE DIN STRATURI

În baza ipotezelor proprii teoriei structurilor de mică curbură precum și a ipotezelor enunțate anterior, ecuațiile de echilibru, ecuațiile geometrice, deformații — deplasări, ecuațiile de compatibilitate precum și ecuațiile fizice sînt date de relațiile:

a. *Ecuațiile de echilibru*

În cazul considerării numai a componentei normale a sarcinii exterioare, ecuațiile de echilibru sînt

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial T_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_\beta}{\partial \beta} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} + T_\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + T_\beta\left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) + 2T_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} + Z = 0, \tag{1b}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta}, \quad Q_\beta = \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta}, \tag{1c}$$

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}. \tag{1d}$$

Eliminînd în ecuațiile (1 b) și (1 c) eforturile tansversale se obține ecuația

$$\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{\partial^2 M_\beta}{\partial \beta^2} + T_\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + T_\beta\left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) +$$

$$+ 2T_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} + Z = 0.$$

Ecuația (1 d) în cele ce vor urma o vom ignora deoarece aceasta este identic satisfăcută de ecuațiile fizice.

În felul acesta, sistemul ecuațiilor de echilibru sub forma pe care o vom utiliza este dat de ecuațiile (1 a) și (1 e).

Considerînd numai vibrațiile transversale ale structurii, expresia componentei normale Z este dată de relația

$$Z = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t} + p_0 - p_e, \tag{2}$$

unde m — masa structurii corespunzînd ariei unitare a suprafeței de re-referință, ε — coeficientul de amortizare, p_0 — presiunea interioară, p_e — presiunea gazului a cărei expresie pentru valori ale vitezei corespunzînd la numere Mach $M \geqslant 2$ poate fi determinată aproximativ prin formula

$$p_e = p_\alpha\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{v_z}{c_\infty}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \tag{3}$$

dedusă pe baza *analogiei pistonului.*

Reținînd în dezvoltarea binomului dat de relația (3) doar trei termeni iar din termenii ce dau amortizarea aerodinamică reținînd numai termenul liniar, se obține pentru p_e următoarea expresie [3]:

$$p_e = p_\infty + \varkappa p_\infty \left[\frac{1}{c_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{\varkappa + 1}{4} M_\infty^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa + 1}{12} M_\infty^3 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^3 + \ldots \right]. \tag{4}$$

În relațiile anterioare cu $v_z \cong \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial \alpha}$ s-a notat componenta normală a vitezei pe suprafață, p_∞ — presiunea curentului neperturbat, c_∞ — viteza sunetului corespunzînd curentului neperturbat, $\varkappa$ — coeficientul politropic, M_∞ — numărul Mach corespunzînd curentului neperturbat.

În cele ce urmează vom considera că $p_0 - p_\infty = 0$.

b. *Relațiile geometrice deformații — deplasări*

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2,$$
$$\omega = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \tag{5a}$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}; \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \, \partial \beta} \tag{5b}$$

c. *Ecuații de compatibilitate*

Prin eliminarea lui u și v din ecuațiile (5 a) se obține ecuația de compatibilitate

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \, \partial \beta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}. \tag{6}$$

d. *Ecuațiile fizice.*

Considerînd materialul fiecărui strat omogen și ortotrop și presupunînd că sistemul de coordonate ales coincide cu direcțiile principale de ortotropie pe baza ipotezelor enunțate anterior, eforturile unitare corespunzînd unui strat j exprimate prin legea fizică a lui Hoocke sînt date de relațiile

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^j &= B_{11}^j \varepsilon_1 + B_{12}^j \varepsilon_2 - z \left(B_{11}^j \varkappa_1 + B_{12}^j \varkappa_2 \right) \\ \sigma_\beta^j &= B_{22}^j \varepsilon_2 + B_{12}^j \varepsilon_1 - z \left(B_{22}^j \varkappa_2 + B_{12}^j \varkappa_1 \right) \\ \tau_{\alpha\beta}^j &= G^j (\omega - 2 z \tau), \end{aligned} \tag{7}$$

unde

$$B_{11}^j = \frac{E_\alpha^j}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}, \quad B_{12}^j = \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} = \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}, \quad B_{22}^j = \frac{E_\beta^j}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}$$
$$G^j = K^j \frac{\sqrt{E_\alpha^j E_\beta^j}}{2 \left(1 + \sqrt{\mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \right)}, \tag{8}$$

K^j fiind o constantă adimensională (egală cu 1 în cazul izotrop).

Considerîndu-se structura construită din $(l + n)$ straturi (l și n reprezintă numărul de straturi plasate deasupra și respectiv dedesubtul suprafeței de referință), prin reducerea eforturilor unitare la suprafața de referință definită anterior, se obțin următoarele ecuații fizice:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \overset{1}{F}_\alpha (\varepsilon_1 + \overset{1}{\mu}_\beta \varepsilon_2) - \overset{1}{K}_\alpha (\varkappa_1 + \overset{5}{\mu}_\beta \varkappa_2), \\ T_\beta &= \overset{1}{F}_\beta (\varepsilon_2 + \overset{1}{\mu}_\alpha \varepsilon_1) - \overset{1}{K}_\beta (\varkappa_2 + \overset{5}{\mu}_\alpha \varkappa_1), \\ T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} &= \frac{\overset{2}{F}_\alpha}{2} (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)\, \omega - \overset{2}{K}_\alpha (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)\, \tau, \end{aligned} \tag{9'a}$$

$$\begin{aligned} M_\alpha &= - \overset{1}{G}_\alpha (\varkappa_1 + \overset{3}{\mu}_\beta \varkappa^2) + \overset{1}{K}_\alpha (\varepsilon_1 + \overset{5}{\mu}_\beta \varepsilon_2), \\ M_\beta &= - \overset{1}{G}_\beta (\varkappa_2 + \overset{3}{\mu}_\alpha \varkappa_1) + \overset{1}{K}_\beta (\varepsilon_2 + \overset{5}{\mu}_\alpha \varepsilon_4), \\ M_{\alpha\beta} &= \frac{\overset{2}{K}_\alpha}{2} (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)\, \omega - \overset{2}{G}_\alpha (1 - \overset{4}{\mu}_\beta)\, \tau, \end{aligned} \tag{9b}$$

unde expresiile parametrilor mecanici și a coeficienților Poisson reduși sînt dați în lucrarea [6].

4. ECUAŢIILE REZOLVENTE

În cele ce urmează vom reduce ecuațiile date anterior la un sistem rezolvent în funcția potențială c și deplasarea normală w. În acest scop vom deduce în prealabil cîteva relații utile.

Astfel din ecuațiile fizice (9 a) vom deduce expresiile deformațiilor tangentiale ε_1, ε_2 și ω în care vom ține seama și de relațiile geometrice (5 b). Acestea sînt date de

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{T_\alpha - \overset{1}{\mu}_\alpha T_\beta}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} - \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{T_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta T_\alpha}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} - \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1)}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \\ \omega &= \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} T_{\alpha\beta} + \frac{2 \overset{2}{K}_\alpha (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta}. \end{aligned} \tag{10}$$

Ținînd seama de relațiile (10) și (5 b) în ecuațiile fizice (9 b) se obține exprimarea momentelor prin intermediul eforturilor tangențiale și a deplasării normale w conform relațiilor

$$
\begin{aligned}
M_\alpha &= \frac{\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}} T_\alpha + \frac{\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{F}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}} T_\beta - \\
&- \left[\overset{1}{G}_\alpha - \frac{(\overset{1}{K}_\alpha)^2 (\overset{1}{F}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta)^2 + \overset{1}{F}_\beta - 2\overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \overset{5}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}}\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\
&- \left[\overset{1}{G}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta + \frac{\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{K}_\beta (1 + \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta) \overset{1}{F}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - (\overset{1}{K}_\alpha)^2 \overset{1}{F}_\beta \overset{5}{\mu}_\beta - (\overset{1}{K}_\beta)^2 \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{F}_\alpha}{\mathcal{F}}\right] \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \\
M_\beta &= \frac{\overset{1}{K}_\beta \overset{1}{F}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha - \overset{1}{\mu}_\alpha)}{\mathcal{F}} T_\alpha + \frac{\overset{1}{K}_\beta \overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}} T_\beta - \qquad (11)^{*)} \\
&- \left[\overset{1}{G}_\beta - \frac{(\overset{1}{K}_\beta)^2 [\overset{1}{F}_\alpha - 2\overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \overset{5}{\mu}_\alpha + (\overset{5}{\mu}_\alpha)^2 \overset{1}{F}_\beta]}{\mathcal{F}}\right] \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \\
&- \left[\overset{1}{G}_\beta \overset{3}{\mu}_\alpha + \frac{\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{K}_\beta (1 + \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta) \overset{1}{F}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - (\overset{1}{K}_\alpha)^2 \overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{F}_\beta - (\overset{1}{K}_\beta)^2 \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{F}_\alpha}{\mathcal{F}}\right] \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \\
M_{\alpha\beta} &= \frac{\overset{2}{K}_\alpha (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} T_{\alpha\beta} + \left[\frac{(\overset{2}{K}_\alpha)^2 (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)^2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} - \overset{2}{G}_\alpha (1 - \overset{4}{\mu}_\beta)\right] \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta}.
\end{aligned}
$$

Luînd în considerare primele două ecuații de echilibru se vede că acestea sînt identic satisfăcute exprimînd eforturile tangențiale prin relațiile:

$$
T_\alpha = \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2}; \quad T_\beta = \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2}; \quad T_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha\, \partial \beta}. \qquad (12)
$$

Exprimînd în ecuațiile de echilibru (1e) momentele prin relațiile (11) și ținînd sema de (12) se obține una din ecuațiile căutate

$$
\begin{aligned}
& g_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 2 g_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + g_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} = q_{11} \frac{\partial^4 c}{\partial \alpha^4} + q_{12} \frac{\partial^4 c}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\
& + q_{22} \frac{\partial^4 c}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} + \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha\, \partial \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \qquad (13\,\mathrm{a}) \\
& - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \varkappa p_\infty \left[\frac{1}{c_\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) + \frac{\varkappa + 1}{4} M_\infty^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{\varkappa + 1}{12} M_\infty^3 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^3\right].
\end{aligned}
$$

---

*) $\mathcal{F} = \overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)$.

Considerînd pe de altă parte ecuația de compatibililitate (6) și ținînd seama de relațiile (10) și (12) se obține a doua ecuație a problemei

$$\frac{\overset{1}{F}_\alpha}{\mathcal{F}}\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4} - 2\left[\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{F}_\beta - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right]\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2} + \frac{\overset{1}{F}_\beta}{\mathcal{F}}\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4} = -\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - \tag{13b}$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2 - q_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} - q_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2} - q_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}.$$

În aceste ecuații coeficienții q_{ik} și g_{ik} $(i,\ \mathrm{k} = 1, 2)$ sînt dați de relațiile

$$q_{11} = \frac{\overset{1}{K}_\alpha\overset{1}{F}_\alpha(\overset{5}{\mu}_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}};\quad q_{22} = \frac{\overset{1}{K}_\beta\overset{1}{F}_\beta(\overset{5}{\mu}_\alpha - \overset{1}{\mu}_\alpha)}{\mathcal{F}},$$

$$q_{12} = \frac{\overset{1}{K}_\alpha\overset{1}{F}_\beta + \overset{1}{K}_\beta\overset{1}{F}_\alpha - 2\,\overset{1}{K}_\alpha\overset{1}{F}_\beta\overset{5}{\mu}_\beta\overset{1}{\mu}_\alpha}{\mathcal{F}} - 2\,\frac{\overset{2}{K}_\alpha(1-\overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)},$$

$$g_{11} = \overset{1}{G}_\alpha - \frac{(\overset{1}{K}_\alpha)^2[\overset{1}{F}_\beta + \overset{1}{F}_\alpha(\overset{5}{\mu}_\beta)^2 - 2\overset{1}{F}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\overset{5}{\mu}_\beta]}{\mathcal{F}}$$

$$g_{22} = \overset{1}{G}_\beta - \frac{(\overset{1}{K}_\beta)^2[\overset{1}{F}_\alpha + \overset{1}{F}_\beta(\overset{5}{\mu}_\alpha)^2 - 2\,\overset{1}{F}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\overset{5}{\mu}_\alpha]}{\mathcal{F}}, \tag{14}$$

$$g_{12} = \overset{1}{G}_\alpha\overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha(1-\overset{4}{\mu}_\beta) - \frac{(\overset{2}{K}_\alpha)^2(1-\overset{6}{\mu}_\beta)^2}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)} +$$

$$+\frac{\overset{1}{K}_\alpha\overset{1}{K}_\beta(1+\overset{5}{\mu}_\alpha\overset{5}{\mu}_\beta)\overset{1}{F}_\beta\overset{1}{\mu}_\alpha - (\overset{1}{K}_\alpha)^2\overset{1}{F}_\beta\overset{5}{\mu}_\beta - (\overset{1}{K}_\beta)^2\overset{5}{\mu}_\alpha\overset{1}{F}_\alpha}{\mathcal{F}}.$$

5. METODA DE SOLUȚIONARE A SISTEMULUI DE ECUAȚII

Complexitatea sistemului de ecuații (13) impune adoptarea unei metode de rezolvare aproximative. În cele ce urmează vom adopta o asemenea metodă de rezolvare care să permită în particular satisfacerea condițiilor neliniare pe contur pentru deformațiile tangențiale [2], [3], [4]. Exprimînd pe $w(\alpha, \beta, t)$ sub forma

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\, w_j(\alpha, \beta), \tag{15}$$

unde funcțiile $w_j(\alpha, \beta)$ satisfac toate condițiile la limită în ceea ce privește deplasarea normală iar $f_j(t)$ sînt funcții de timp ce urmează a fi determinate. Presupunînd funcţiile $w_j(\alpha, \beta)$ construite şi introducînd în ecuaţia (13 b) expresia (15) se obţine o ecuaţie liniară în raport cu funcţia de efort c (α, β, t)). Din cauza complexităţii condiţiilor de conlucrare dintre structura şi elementele de rigidizare, formularea exactă a condiţiilor la limită pentru funcţia $c(\alpha, \beta, t)$ este lipsită de sens. De aceea le vom formula ,,în medie'' [2], [3], [4].

Vom exprima funcţia de efort în mod aproximativ sub forma

$$c(\alpha, \beta, t) = c_1(\alpha, \beta, t) + \frac{1}{2}\left(T^0_\alpha \beta^2 + T^0_\beta \alpha^2 - 2\, T^0_{\alpha\beta}\, \alpha\beta\right), \tag{16}$$

unde $c_1(\alpha, \beta_1 t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei considerate iar T^0_α, T^0_β, $T^0_{\alpha\beta}$ parametrii ce se determină astfel încît condiţiile la limită pentru funcţia $c(\alpha, \beta, t)$ să fie satisfăcute ,,în medie''.

Cerînd ca funcţia $c_1(\alpha, \beta, t)$ să satisfacă la condiţiile

$$\begin{aligned}
&\int_0^b \left.\frac{\partial^2 c_1}{\partial \beta^2}\right|_{\alpha=0} d\beta = \int_0^b \left.\frac{\partial^2 c_1}{\partial \beta^2}\right|_{\alpha=a} d\beta = 0,\\
&\int_0^a \left.\frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha^2}\right|_{\beta=0} d\alpha = \int_0^a \left.\frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha^2}\right|_{\beta=b} d\alpha = 0,\\
&\int_0^b \left.\frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right|_{\alpha=0} d\beta = \int_0^b \left.\frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right|_{\alpha=a} d\beta =\\
&= \int_0^a \left.\frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right|_{\beta=0} d\alpha = \int_0^a \left.\frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right|_{\beta=b} d\alpha = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

parametrii T^0_α, T^0_β, $T^0_{\alpha\beta}$ capătă sensul unor eforturi medii de-a lungul reazemelor[1]),

$$\begin{aligned}
&T^0_\alpha = \frac{1}{b}\int_0^b \left.\frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2}\right|_{\alpha=0}, \quad T^0_\beta = \frac{1}{a}\int_0^a \left.\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2}\right|_{\beta=0},\\
&T^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{a}\int_0^a \left.\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right|_{\beta=0}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Vom introduce de asemenea pe lîngă eforturile medii şi apropierile medii relative ale suporţilor

$$\begin{aligned}
&\Delta_\alpha = -\frac{1}{ab}\int_0^a \int_0^b \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\, d\alpha\, d\beta, \qquad \Delta_\beta = -\frac{1}{ab}\int_0^a \int_0^b \frac{\partial v}{\partial \beta}\, d\alpha\, d\beta\\
&\Delta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{ab}\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) d\alpha\, d\beta.
\end{aligned} \tag{19}$$

---

[1]) Se face evident presupunerea că reazemele sînt distribuite de-a lungul liniilor coordonate.

Condițiile la limită pentru funcția $c\,(\alpha, \beta, t)$ pot fi puse acum sub forma

$$T_{\alpha}^{0} = c_{\alpha}\,\Delta_{\alpha}, \quad T_{\beta}^{0} = c_{\beta}\,\Delta_{\beta}, \quad T_{\alpha\beta}^{0} = c_{\alpha\beta}\,\Delta_{\alpha\beta}. \tag{20}$$

unde c_{α}, c_{β}, $c_{\alpha\beta}$ sînt constante ce caracterizează rigiditatea ,,în medie'' a suporților.

Aceste condiții sînt suficiente pentru determinarea celor trei parametrii T_{α}^{0}, T_{β}^{0}, $T_{\alpha\beta}^{0}$. Expresia potențialului $c\,(\alpha, \beta, t)$ este astfel complet determinată.

Ținînd seama de expresia lui $w\,(\alpha, \beta, t)$ [rel (15)] și de a lui $c\,(\alpha, \beta, t)$ (rel (16)) în ecuația (13 a), aceasta scrisă prescurtat sub forma $L\,(w) = 0$ trebuie să satisfacă aproximativ în sensul metodei Galerkin

$$\int_0^a \int_0^b L\,(w)\, w_j\,(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = 0 \qquad (j = 1, 2 \ldots n). \tag{21}$$

De aici se obține un sistem de ecuații diferențiale neliniare în raport cu coeficienții seriei (15) sistem ce se pretează mai ușor la o analiză calitativă decît sistemul (13)

$$\frac{d^2 f_j}{dt^2} + \varepsilon \frac{df_j}{dt} + \Omega_j^2 f_j + F_j\,(f_1, f_2, \ldots f_n, M) = 0 \qquad (j = 1, 2 \ldots n). \tag{22}$$

În cele ce urmează vom considera cazul panoului simplu rezemat pe întreg conturul.

După cum se știe, în absența curentului fluid, pierderea de stabilitate a panoului cilindric se produce atît de-a lungul generatoarei cît și de-a lungul circomferinței după o singură semiundă. În cazul existenței curentului fluid se observă o disimetrie. De aceea în prima aproximație vom considera pe $w\,(\alpha, \beta, t)$ sub forma

$$w\,(\alpha, \beta, t) = f_1\,(t) \sin\frac{\pi\alpha}{a} \sin\frac{\pi\beta}{b} + f_2\,(t) \sin\frac{2\pi\alpha}{a} \sin\frac{\pi\beta}{b}. \tag{23}$$

În baza considerării lui w sub forma dată de relația (23) din ecuația (13 b) rezultă drept soluție particulară

$$\begin{aligned} c_1\,(\alpha, \beta, t) = {} & A_1\,(t) \cos\frac{\pi\alpha}{a} + A_2\,(t) \cos\frac{2\pi\alpha}{a} + A_3\,(t) \cos\frac{3\pi\alpha}{a} + \\ & + A_4\,(t) \cos\frac{4\pi\alpha}{a} + A_5\,(t) \cos\frac{\pi\alpha}{a} \cos\frac{2\pi\beta}{b} + A_6\,(t) \cos\frac{3\pi\alpha}{a} \cos\frac{2\pi\beta}{b} + \qquad (24) \\ & + A_7\,(t) \sin\frac{\pi\alpha}{a} \sin\frac{\pi\beta}{b} + A_8\,(t) \sin\frac{2\pi\alpha}{a} \sin\frac{\pi\beta}{b} + A_9\,(t) \cos\frac{2\pi\beta}{b}, \end{aligned}$$

unde coeficienții $A_j(t)$ $(j = 1 \dots 9)$ sînt dați prin relațiile

$$A_1(t) = -\frac{\varphi^2}{4\overset{1}{N}_\beta} f_1 f_2, \quad A_2(t) = \frac{\varphi^2}{32\overset{1}{N}_\beta} f_1^2, \quad A_3(t) = \frac{\varphi^2}{36\overset{1}{N}_\beta} f_1 f_2,$$

$$A_4(t) = \frac{\varphi^2}{4 \times 32\overset{1}{N}_\beta} f_2^2, \quad A_5(t) =$$

$$= \frac{\varphi^2}{4\left[\overset{1}{N}_\beta + 4^2 \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 2 \times 4^2 \varphi^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\right]} f_1 f_2,$$

$$A_6(t) = -\frac{\varphi^2}{4\left[9^2 \overset{1}{N}_\beta + 4^2 \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 4 \times 18 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right) \varphi^2\right]} f_1 f_2$$

$$A_7(t) = \frac{b^2 \varphi^2 f_1}{R\pi^2 \left[\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 2\left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\varphi^2\right]} - \tag{25}$$

$$- \frac{q_{11} + q_{12}\varphi^2 + q_{22}\varphi^4}{\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 2\varphi^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)} f_1$$

[1]

$$A_8(t) = \frac{4 b^2 \varphi^2 f_2}{R\pi^2 \left[4^2 \overset{1}{N}_\beta + \varphi^4 \overset{1}{N}_\alpha - 2 \times 4^2 \varphi^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\right]} -$$

$$- \frac{2^4 q_{11} + 2^2 \varphi^2 q_{12} + \varphi^4 q_{22}}{4^2 \overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 2 \times 4^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\varphi^2} f_2$$

$$A_9(t) = \frac{f_1^2 + 4 f_2^2}{32 \varphi^2 \overset{1}{N}_\alpha}$$

iar $\varphi = \dfrac{a}{b}$.

---

[1] Pentru simplificarea scrisului s-a introdus notația

$$\overset{1}{N}_\alpha = \frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}; \quad \overset{1}{N}_\beta = \frac{1}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}$$

Funcția $c_1\,(\alpha,\,\beta,\,t)$ se observă că satisface identic condițiile exprimate prin relațiile (17).

Pentru satisfacerea condițiilor (20) este necesar a exprima $\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}$ și $\dfrac{\partial v}{\partial \beta}$ în relațiile (19) prin intermediul funcțiilor c și w. În acest scop vom porni de la relațiile geometrice

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \varepsilon_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial \beta} = \varepsilon_2 + \frac{w}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2$$

în care folosind relațiile (10), (12), (16) se deduce că

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha = &-\frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta)}\Bigg\{T_\alpha^0 - \overset{1}{\mu}_\alpha\,T_\beta^0 - \frac{4\,A_7\,(t)}{a^2}\,(\varphi^2 - \overset{1}{\mu}_\alpha) + \\ &+ \frac{4\,f_1}{a^2}\,[\overset{1}{K}_\beta\,(\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha)\,\varphi^2 + \overset{1}{K}_\alpha\,(\overset{5}{\mu}_\beta\,\overset{1}{\mu}_\alpha - 1)]\Bigg\} + \frac{\pi^2}{8a^2}\,(f_1^2 + 4\,f_2^2), \\ \Delta_\beta = &-\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta)}\Bigg\{T_\beta^0 - \overset{1}{\mu}_\beta\,T_\alpha^0 - \frac{4\,A_7\,(t)}{a_2}\,(1 - \overset{1}{\mu}_\beta\,\varphi^2) + \\ &+ \frac{4f_1}{a^2}\,[\overset{1}{K}_\alpha\,(\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta) + \overset{1}{K}_\beta\,(\overset{5}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta - 1)\,\varphi^2]\Bigg\} - \frac{4\,f_1}{R\,\pi^2} + \frac{\pi^2}{8\,b^2}\,(f_1^2 + f_2^2),\end{aligned} \tag*{(26) 1)}$$

de unde prin folosirea condițiilor la limită (20) se obțin următoarele relații pentru parametrii T_α^0 și T_β^0.

$$\begin{aligned}T_\alpha^0 = &-\frac{4\beta_\alpha\,f_1}{\pi^2\,R\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta\,\beta_\alpha\,\beta_\beta)}\,(A_\alpha + \overset{1}{\mu}_\alpha\,\beta_\beta\,A_\beta) - \frac{4\beta_\alpha\,f_1}{a^2\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta\,\beta_\alpha\,\beta_\beta)}\,(B_\alpha + \\ &+ \overset{1}{\mu}_\alpha\,\beta_\beta\,B_\beta) + \frac{\pi^2\,\beta_\alpha\,\overset{1}{F}_\alpha\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta)}{8\,a^2\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta\,\beta_\alpha\,\beta_\beta)}\,[f_1^2 + 4\,f_2^2 + \varphi^2\,\beta_\beta\,\overset{1}{\mu}_\beta\,(f_1^2 + f_2^2)] \\ T_\beta^0 = &-\frac{4\beta_\beta\,f_1}{\pi^2\,R\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta\,\beta_\alpha\,\beta_\beta)}\,(A_\beta + \overset{1}{\mu}_\beta\,\beta_\alpha\,A_\alpha) - \frac{4\,\beta_\beta\,f_1}{a^2\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta\,\beta_\alpha\,\beta_\beta)}\,(B_\beta + \\ &+ \overset{1}{\mu}_\beta\,\beta_\alpha\,B_\alpha) + \frac{\pi^2\,\beta_\beta\,\overset{1}{F}_\beta\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta)}{8\,a^2\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{1}{\mu}_\beta\,\beta_\alpha\,\beta_\beta)}\,[\varphi^2\,(f_1^2 + f_2^2) + \overset{1}{\mu}_\alpha\,\beta_\alpha\,(f_1^2 + 4\,f_2^2)]\end{aligned} \tag{27}$$

---

1) Expresia lui $\Delta_{\alpha\beta}$ nu o vom calcula deoarece în cele ce urmează vom considera $c_{\alpha\beta} = 0$.

unde

$$A_\alpha = -\frac{\varphi^2 - \overset{1}{\mu}_\alpha}{\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 2\left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\varphi^2},$$

$$A_\beta = \frac{1}{\overset{1}{N}_\beta} - \frac{1 - \varphi^2 \overset{1}{\mu}_\beta}{\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 2\left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\varphi^2},$$

$$B_\alpha = \frac{(\varphi^2 - \overset{1}{\mu}_\alpha)(q_{11} + q_{12}\varphi^2 + q_{22}\varphi^4)}{\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 2\varphi^2\left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)} + \overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha)\varphi^2 + \tag{28}$$

$$+ \overset{1}{K}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1),$$

$$B_\beta = \frac{(1 - \overset{1}{\mu}_\beta \varphi^2)(q_{11} + q_{12}\varphi^2 + q_{22}\varphi^4)}{\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 2\varphi^2\left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)} + \overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta) +$$

$$+ \overset{1}{K}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1)\varphi^2,$$

iar

$$\beta_\alpha = \frac{1}{1 + \dfrac{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}{c_\alpha}}, \quad \beta_\beta = \frac{1}{1 + \dfrac{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}{c_\beta}}.$$

Din ultimele relații se vede ușor că în cazul legăturilor rigide ($c_\alpha \to \infty$, $c_\beta \to \infty$), $\beta_\alpha = \beta_\beta = 1$ iar în cazul legăturilor libere ($c_\alpha = c_\beta = 0$), $\beta_\alpha = \beta_\beta = 0$.

Ținînd seama de relațiile (23) și (24) în ecuația (13 a) și utilizînd metoda lui Galerkin, după calcule simple dar laborioase se ajunge la următorul sistem de ecuații diferențiale

$$\frac{d^2\zeta_1}{d\tau^2} + g\frac{d\zeta_1}{d\tau} + \zeta_1 [1 + S_1 a'_{11} + S_5 (a'_{15} + a_{15})] + P\left[-\frac{2}{3}\nu\zeta_2 + \right.$$

$$\left. + \nu^2 (\varkappa + 1)\left(\frac{2}{9}\zeta_1^2 + \frac{56}{45}\zeta_2^2\right) + \nu^3 \zeta_2 (b_{11}\zeta_1^2 + b_{12}\zeta_2^2)\right] +$$

$$+ \zeta_1 [(S_1 c_{111} + S_2 c_{112})\zeta_1^2 + (S_1 c_{121} + S_2 c_{122} + S_3 c_{123} +$$

$$+ S_4 c_{124})\zeta_2^2] + \zeta_1^2 [S_1 (d_{111} + d'_{111}) + S_2 (d_{112} + d'_{112}) +$$

$$+ S_5 (d_{115} + d'_{115})] + \zeta_2^2 [S_1 d_{121} + S_2 (d_{122} + d'_{122}) + S_6 (d_{126} + d'_{126})] = 0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 \zeta_2}{d\tau^2} + g \frac{d\zeta_2}{d\tau} + \zeta_2 [\omega_2^2 + S_6 (a'_{26} + a_{26})] + P \biggl[\frac{2}{3} \nu \zeta_1 + \\ &+ \frac{16}{45} \nu^2 (\varkappa + 1) \zeta_1 \zeta_2 + \nu^3 \zeta_1 (b_{21} \zeta_1^2 + b_{22} \zeta_2^2) \biggr] + \\ &+ \zeta_2 [(S_1 c_{211} + S_2 c_{212} + S_3 c_{213} + S_4 c_{214}) \zeta_1^2 + (S_1 c_{221} + \\ &+ S_2 c_{222}) \zeta_2^2] + \zeta_1 \zeta_2 [S_1 (d_{221} + d'_{221}) + S_2 (d_{222} + \\ &+ d'_{222}) + S_3 (d_{223} + d'_{223}) + S_4 (d_{224} + d'_{224}) + \\ &+ S_5 (d_{225} + d'_{225}) + S_6 (d_{226} + d'_{226})] = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

În aceste ecuații au fost introduse variabilele adimensionale prin relațiile

$$\zeta_1 = \frac{f_1}{h}, \quad \zeta_2 \frac{f_2}{h}, \quad \tau = \Omega_1 t. \tag{30}$$

precum și parametrii adimensionali

$$g = \frac{\varepsilon}{\Omega_1} \left(1 + \frac{\varkappa p_\infty}{m c_\infty}\right), \quad \omega_j = \frac{\Omega_j}{\Omega_1}, \quad \nu = M \frac{h}{a},$$

$$P = \frac{4 \varkappa p_\infty}{m h \Omega_1^2}, \quad S_1 = \frac{\pi^4 h^2}{16 m \Omega_1^2 a^4 \overset{1}{N}_\alpha}, \quad S_2 = \frac{\pi^4 h^2}{16 m \Omega_1^2 a^4 \overset{1}{N}_\beta},$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{\pi^4 h^2}{16 m \Omega_1^2 a^4 \left[\overset{1}{N}_\beta + 4^2 \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 8 \varphi^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\right]}, \\ S_4 &= \frac{\pi^4 h^2}{16 m \Omega_1^2 a^4 \left[9^2 \overset{1}{N}_\beta + 4^2 \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 72 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right) \varphi^2\right]}, \\ S_5 &= \frac{\pi^4 h^2}{16 m \Omega_1^2 a^4 \left[\overset{1}{N}_\beta + \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4 - 2 \varphi^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N} - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\right]}, \\ S_6 &= \frac{\pi^4 h^2}{16 m \Omega_1^2 a^4 \left[4^2 \overset{1}{N}_\beta + \varphi^4 \overset{1}{N}_\alpha - 8 \varphi^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\right]}, \end{aligned} \tag{31}$$

iar Ω_1 şi Ω_2 sînt daţi prin relaţiile

$$\Omega_1^2 = \frac{\pi^4}{a^4 m}(g_{11} + 2g_{12}\varphi^2 + g_{22}\varphi^4), \quad \Omega_2^2 = \frac{\pi^4}{a^4 m}(16\, g_{11} + 8g_{12}\varphi^2 + g_{22}\varphi^4).$$

Expresiile coeficienţilor sistemului de ecuaţii (29) sînt daţi în tabelul (1). Coeficienţii care sînt marcaţi cu prim, conţin drept factor pe $k = \frac{1}{R}$. Pentru cazul structurilor plane aceşti coeficienţi devin nuli. În cele ce urmează ne vom limita la acest caz.

6. FLATERUL STRUCTURILOR PLANE NEOMOGENE

În cazul structurilor plane $\left(\frac{1}{R} = 0\right)$, ecuaţiile (29) se transcriu anulînd coeficienţii care au semnul prim. În acest caz ecuaţiile (29) devin

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\zeta_1}{d\tau^2} + g\frac{d\zeta_1}{d\tau} + \zeta_1(1 + S_5 A_{15}) + P\Big[-\frac{2}{3}\nu\zeta_2 + \nu^2(\varkappa + 1)\Big(\frac{2}{9}\zeta_1^2 + \\
&\quad + \frac{56}{45}\zeta_2^2\Big) + \nu^3\zeta_2(b_{11}\zeta_1^2 + b_{12}\zeta_2^2)\Big] + \zeta_1[(S_1 c_{111} + S_2 c_{112})\zeta_1^2 + \\
&\quad + (S_1 c_{121} + S_2 c_{122} + S_3 c_{123} + S_4 c_{124})\zeta_2^2] + \zeta_1^2[S_1 d_{111} + \\
&\quad + S_2 d_{112} + S_5 d_{115}] + \zeta_2^2(S_1 d_{121} + S_2 d_{122} + S_6 d_{126}) = 0, \\
&\frac{d^2\zeta_2}{d\tau^2} + g\frac{d\zeta_2}{d\tau} + \zeta_2(\omega_2^2 + S_6 a_{26}) + P\Big[\frac{2}{3}\nu\zeta_1 + \qquad\qquad (32) \\
&\quad + \frac{16}{45}\nu^2(\varkappa + 1)\zeta_1\zeta_2 + \nu^3\zeta_1(b_{21}\zeta_1^2 + b_{22}\zeta_2^2) + \\
&\quad + \zeta_2[(S_1 c_{211} + S_2 c_{212} + S_3 c_{213} + S_4 c_{214}]\zeta_1^2 + \\
&\quad + (S_1 c_{221} + S_2 c_{222})\zeta_2^2] + \zeta_1\zeta_2(S_1 d_{221} + S_2 d_{222} + \\
&\quad + S_3 d_{223} + S_4 d_{224} + S_5 d_{225} + S_6 d_{226}) = 0.
\end{aligned}$$

Sistemul liniar corespunzător admite soluţii de forma

$$\zeta_j = Z_j \exp(\sigma\tau), \tag{33}$$

iar ecuaţia caracteristică ce se obţine este dată de

$$\begin{aligned}
&\sigma^4 + 2g\sigma^3 + (g^2 + \omega_2^2 + S_6 a_{26} + 1 + S_5 a_{15})\sigma^2 + \\
&+ (\omega_2^2 + S_6 a_{26} + S_5 a_{15})\sigma + (1 + S_5 a_{15})(\omega_2^2 + S_6 a_{26}) + \frac{4}{9}P^2\nu^2 = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Pentru valori suficient de mici ale lui ν toate rădăcinile ecuației caracteristice se găsesc în semiplanul stîng al variabilei complexe și soluția banală a sistemului este asimptotic stabilă în raport cu perturbațiile mici. Valorile parametrului $\nu = \nu_*$ pentru care două rădăcini ale ecuației caracteristice sînt pur imaginare iar celelalte două sînt complex conjugate și rămîn în semiplanul stîng al variabilei complexe este critică și în cazul considerării problemei liniare corespunde vitezei critice de flater (pe panou).

Valorea critică a parametrului ν este dată de

$$\nu_* = \frac{3}{4P}(\omega_2^2 + S_6 a_{26} - 1 - S_5 a_{15})\sqrt{1 + \frac{2g^2(1+\omega_2^2 + S_6 a_{26} + S_5 a_{15})}{\omega_2^2 - 1 + S_6 a_{26} - S_5 a_{15}}} \qquad (35)$$

În cele ce urmează vom ignora termenii ce conțin pe g la puteri superioare și deci pentru ν_* vom utiliza expresia aproximativă

$$\nu_* = \nu_0 = \frac{3}{4P}(\omega_2^2 - 1 + S_6 a_{26} - S_5 a_{15}). \qquad (36)$$

Soluțiile periodice ale sistemului (32)în vecinătatea valorii critice le vom căuta prin metoda aproximațiilor succesive. În prima aproximație vom considera

$$\begin{aligned} \zeta_1^{(1)} &= -A^{(1)} \cos \omega \tau, \\ \zeta_2^{(2)} &= -A^{(1)} \cos \omega \tau, \end{aligned} \qquad (37)$$

unde $A^{(1)}$ reprezintă amplitudinea vibrațiilor de flater în prima aproximație. Prin dezvoltări simple rezultă

$$A^{(1)} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{4(\nu - \nu_*)}{S_1 C_1 + S_2 C_2 + S_3 C_3 + S_4 C_4 - \nu^3 P B_0}}, \qquad (38)$$

unde

$$C_1 = c_{211} + c_{221} - c_{111} - c_{121},$$

$$C_2 = c_{222} + c_{212} - c_{112} - c_{122},$$

$$C_3 = c_{213} - c_{213}, \quad C_4 = c_{214} - c_{124},$$

$$B_0 = b_{21} + b_{22} + b_{11} - b_{12}.$$

Din formula (38) se deduce ușor caracterul mișcării în apropierea mărimii critice ν. În apropierea acestei valori sînt posibile două cazuri :

a) Dacă pentru $\nu \geqslant \nu_*$, $\sum_{i=1}^{4} S_i C_i - \nu^3 P B_0 > 0$, atunci amplitudinea vibrațiilor care este nulă pe frontiera domeniului de flater începe să crească o dată cu creșterea parametrului ν (fig. 3, curba *1*).

b) Dacă $\sum_{i=1}^{4} S_i\, C_i - \nu^3\, P\, B_0 < 0$ pentru $\nu \leqslant \nu_*$ amplitudinea începe să scadă o dată cu creşterea parametrului ν, însă în momentul în care ν devine mai mare ca ν_* se obţine o trecere bruscă de la stabilitatea formei neperturbate, la instabilitate (fig. 3, curba 2).

În cele ce urmează vom da expresiile eforturilor unitare pe baza cărora se pot determina valorile maxime ale acestora după depăşirea vitezei critice de flater în oricare punct al mediului tridimensional al structurii.

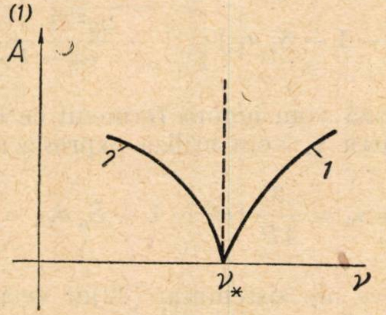


Fig. 3

În acest scop se porneşte de la relaţiile (7) în care se ţine seama de expresiile (10). Se obţine în acest fel

$$\sigma_\alpha^j = \frac{(B_{11}^j - B_{12}^j \overset{1}{\mu}_\alpha)\, \overset{1}{F}_\beta}{\mathcal{F}}\, T_\alpha + \frac{(B_{12}^j - \overset{1}{\mu}_\beta\, B_{11}^j)\, \overset{1}{F}_\alpha}{\mathcal{F}}\, T_\beta -$$

$$- \left[z\, B_{11}^j + \frac{B_{11}^j \overset{1}{F}_\beta \overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta - 1) + B_{12}^j \overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_3)}{\mathcal{F}} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} -$$

$$- \left[z\, B_{12}^j + \frac{B_{11}^j \overset{1}{F}_\beta \overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha) + B_{12}^j \overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{K}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1)}{\mathcal{F}} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}. \qquad (39)$$

$$\sigma_\beta^j = \frac{(B_{12}^j - \overset{1}{\mu}_\alpha\, B_{22}^j)\, \overset{1}{F}_\beta}{\mathcal{F}}\, T_\alpha + \frac{(B_{22}^j - \overset{1}{\mu}_\beta\, B_{12}^j)\, \overset{1}{F}_\alpha}{\mathcal{F}}\, T_\beta -$$

$$- \left[z\, B_{12}^j + \frac{B_{22}^j \overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta) + B_{12}^j \overset{1}{F}_\beta \overset{1}{K}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1)}{\mathcal{F}} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} -$$

$$- \left[z\, B_{22}^j + \frac{B_{22}^j \overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{K}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1) + B_{12}^j \overset{1}{F}_\beta \overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha)}{\mathcal{F}} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}.$$

Ţinînd seama în continuare de expresiile eforturilor tangenţiale deduse pe baza relaţiilor (12) (16) şi (24) şi de a lui w (rel. (23)) şi ţinînd seama şi de expresiile în prima aproximaţie a lui ζ_1 şi ζ_2 se poate calcula valoarea maximă a eforturilor σ_α şi σ_β.

Menţionăm că relaţiile obţinute prin particularizări corespunzătoare sînt aplicabile evident şi structurilor construite din straturi izotrope arbitrar dispuse pe grosime, structurilor construite din straturi ortotrope simetric, dispuse pe grosime, precum şi structurilor omogene ortotrope. Particularizările necesare pentru fiecare caz în parte sînt indicate în lucrarea [6] iar expresiile parametrilor mecanici şi coeficienţilor Poisson reduşi ce corespund fiecărei structuri în parte sînt date în lucrările [5], [6], [7].

Mulţumesc călduros prof. A. Halanay cu care m-am consultat în probleme de stabilitate a ecuaţiilor diferenţiale neliniare.

Tabela 1

$$a'_{11} = \frac{4 \times 16^2 \beta_\beta a^4 \overset{1}{N}_\beta}{h^2 R^2 \pi^8 (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta)} (A_\beta + \beta_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta A_\alpha) + \frac{4 \times 16\, a^2 \beta_\beta \overset{1}{N}_\alpha}{h^2 R \pi^6 (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta)} (\mathrm{B}_\beta +$$

$$+ \beta_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta B_\alpha), \quad a'_{15} = \frac{16\, a^4}{\pi^4 h^2 R^2} - \frac{32\, a^2 (q_{11} + q_{12} \varphi^2 + q_{22} \varphi^4)}{h^2 R \pi^2},$$

$$a_{15} = \frac{16 (q_{11} + q_{12} \varphi^2 + q_{22} \varphi^4)^2}{h^2}, \quad a'_{26} = \frac{16^2 a^4}{h^2 R \pi^4} - \frac{16 \times 8\, a^2 (2^4 q_{11} + 4 q_{12} \varphi^2 + q_{22} \varphi^4)}{h^2 R \pi^2}$$

$$a_{26} = \frac{16 (2^4 q_{11} + 4 q_{12} \varphi^2 + q_{22} \varphi^4)}{h^2}; \quad b_{11} = b_{21} = \frac{\pi^2 (\varkappa + 1)}{40},$$

$$b_{12} = \frac{9 \pi^2 (\varkappa + 1)}{70}, \quad b_{222} = \frac{11 \pi^2 (\varkappa + 1)}{70}$$

$$c_{111} = 1 + \frac{2 (\beta_\alpha + \varphi^2 \beta_\alpha \beta_\beta \overset{1}{\mu}_\beta)}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta}; \quad c_{112} = \varphi^4 + 2 \varphi^2 \beta_\beta \frac{\varphi^2 + \overset{1}{\mu}_\alpha \beta_\alpha}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta}$$

$$c_{121} = 4 + \frac{2 \beta_\alpha (4 + \varphi^2 \beta_\beta \overset{1}{\mu}_\beta)}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta}; \quad c_{122} = 4 \varphi^4 + \frac{2 \beta_\beta \varphi^2 (\varphi^2 + 4 \overset{1}{\mu}_\alpha \beta_\alpha)}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta}$$

$$c_{123} = c_{213} = 81 \varphi^4, \quad c_{214} = c_{124} = \varphi^4, \quad c_{211} = 4 + \frac{8 \beta_\alpha (1 + \varphi^2 \beta_\beta \overset{1}{\mu}_\beta)}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta}$$

$$c_{212} = 4 \varphi^4 + 2 \varphi^2 \beta_\beta \frac{\varphi^2 + \overset{1}{\mu}_\alpha \beta_\alpha}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta}$$

$$c_{221} = 16 + \frac{8 \beta_\alpha (4 + \varphi^2 \beta_\beta \overset{1}{\mu}_\beta)}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta}; \quad c_{222} = \varphi^4 + \frac{2 \beta_\beta \varphi^2 (\varphi^2 + 4 \overset{1}{\mu}_\alpha \beta_\alpha)}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta}$$

Tabela 1 (continuare)

$$d_{111} = \frac{16^2 \varphi^2 q_{22}}{6 \pi^2 h} + \frac{4 \times 16 \overset{1}{N}_\alpha}{\pi^2 h (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta)} [\beta_\alpha (B_\alpha + \beta_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha B_\beta) + \beta_\beta \varphi^2 (B_\beta + \beta_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta B_\alpha)],$$

$$d_{112} = \frac{16^2 q_{11} \varphi^2}{6 \pi^2 h}; \quad d'_{111} = -\frac{4 \times 16 a^2 \overset{1}{N}_\alpha}{R \pi^4 (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta)} [\beta_\alpha (A_\alpha + \beta_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha A_\beta) +$$

$$+ \beta_\beta \varphi^2 (A_\beta + \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha A_\alpha)],$$

$$d'_{112} = -\frac{32 \varphi^2 a^2}{3 R \pi^4 h} - \frac{32 a^2 \beta_\beta (\varphi^2 + \overset{1}{\mu}_\alpha \beta_\alpha)}{R \pi^4 h (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta)},$$

$$d_{115} = -\frac{16 \times 32 \varphi^2 a^2}{3 \pi^4 h R}, \quad d'_{115} = \frac{16 \times 32 \varphi^2 (q_{11} + q_{12} \varphi^2 + q_{22} \varphi^4)}{3 \pi^4 h}$$

$$d_{121} = \frac{4^5 \varphi^2 q_{22}}{6 \pi^2 h}, \quad d_{122} = \frac{16^2 \times 2 \varphi^2 q_{11}}{15 \pi^2 h}$$

$$d'_{122} = \frac{32 a^2 \varphi^2}{15 R h \pi^2} - \frac{32 \beta_\beta a^2 (4^2 + 4 \beta_\alpha \overset{1}{\mu}_\alpha)}{\pi^4 h R (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta)}$$

$$d_{126} = \frac{4^3 \times 288 (2^4 q_{11} + 4 \varphi^2 q_{12} + \varphi^4 q_{22})}{45}, \quad d'_{126} = -\frac{4^4 \times 288 a^2 \varphi^2}{45 \pi^4 R h}$$

$$d_{221} = -16 \overset{1}{N}_a \frac{16 \beta_\alpha (B_\alpha + \overset{1}{\mu}_\alpha \beta_\beta B_\beta) + 4 \varphi^2 \beta_\beta (B_\beta + \beta_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta B_\alpha)}{\pi^2 h (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta)}$$

$$d'_{221} = -16 \overset{2}{N}_\alpha a^2 \frac{16 \beta_\alpha (A_\alpha + \overset{1}{\mu}_\alpha \beta_\beta A_\beta) + 4 \varphi^2 \beta_\beta (A_\beta + \beta_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta A_\beta)}{R \pi^4 h (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \beta_\alpha \beta_\beta)}$$

$$d_{222} = \frac{16^3 \varphi^2 q_{11}}{15 \pi^2 h}, \quad d'_{222} = -\frac{4 \times 16^2 a^2 \varphi^2}{15 \pi^4 R h}$$

$$d_{223} = \frac{16^2 \varphi^2 (q_{11} + 4 q_{12} \varphi^2 + 2^4 q_{22} \varphi^4),}{2 \pi^2 h.}$$

$$d'_{223} = -\frac{16^2 a^2 \varphi^2}{2 \pi^4 h R}, \quad d'_{224} = \frac{16 \times 8 (81 q_{11} + 36 q_{12} \varphi^2 + 16 q_{22} \varphi^4)}{15 \pi^2 h.},$$

$$d'_{224} = -\frac{16 \times 24 a^2 \varphi^2}{5 \pi^4 R h}, \quad d_{225} = \frac{24 \times 16^2 \varphi^2 (q_{11} + q_{12} \varphi^2 + q_{22} \varphi^4)}{15 h},$$

$$d'_{225} = -\frac{24 \times 16^2 \varphi^2 a^2}{15 \pi^4 h R.}.$$

Primită la redacție la 24 februarie 1962

О НЕЛИНЕЙНОМ ФЛАТТЕРЕ НЕОДНОРОДНЫХ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается задача нелинейного флаттера тонких цилиндрических панелей, построенных произвольным наложением s упруго — ортотропных слоев.

Поток жидкости большой сверхзвуковой скорости течет как показано на рис. 1.

Вводя в рассмотрение геометрическую и аэродинамическую нелинейность, разрешающие уравнения задачи сводятся к нелинейной системе (13) в потенциальной функции $c(\alpha, \beta, t)$ и нормальном перемещении $w(\alpha, \beta, t)$, сложность которой обязывает применить приближенный метод решения. Для этой цели нормальное перемещение $w(\alpha, \beta, t)$ выражается в виде, данном соотношением (15), где функции $w_j(\alpha, \beta)$ удовлетворяют всем граничным условиям относительно нормального перемещения, а функция усилия $c(\alpha, \beta, t)$ — в виде, данном соотношением (16), где $c_1(\alpha, \beta, t)$ является частным решением уравнения (13 b), а $T^0_\alpha\, T^0_\beta\, T^0_{\alpha\beta}$ — параметры, определяющиеся так, чтобы граничные условия для функции усилия c удовлетворялись бы ,,в среднем".

Пользуясь методом Галеркина, получается нелинейная система дифференциальных уравнений (22).

В продолжении рассматривается случай цилиндрической панели, свободно опертой по всему контуру, для которой получается нелинейная система дифференциальных уравнений (29). Эта система уравнений, будучи применена к частному случаю плоских конструкций, ведет к системе (32). Для этого случая получается критическое значение параметра $\nu = \nu_*$, соответствующее линейной системе и, наконец, отыскивая периодические решения нелинейной системы (32) вблизи критического значения, находится выражение амплитуды $A^{(1)}\, a$ колебаний при флаттере, из которого легко выводится характер движения вблизи критической величины ν_*.

В конце работы приводятся выражения единичных усилий, на основании которых можно определить максимальные значения последних в любой точке трехмерной среды конструкции после критической скорости флаттера.

SUR LE FLATTER NON LINÉAIRE DES STRUCTURES CYLINDRIQUES, MINCES, NON HOMOGÈNES

RÉSUMÉ

Dans le présent travail on aborde le problème du flatter non linéaire des panneaux cylindriques minces, construits par la superposition arbitraire de s couches élastiques orthotropes. Le courant fluide, à grande vitesse supersonique, s'écoule ainsi que l'indique la figure 1.

En tenant compte de la non-linéarité géométrique et aérodynamique, les équations résolvantes du problème sont réduites au système non linéaire (13), dans la fonction potentielle c (α, β, t) et le déplacement normal w (α, β, t), système dont la complexité impose l'adoption d'une méthode approximative pour le résoudre. A cet effet, le déplacement normal $w(\alpha, \beta, t)$ est exprimé sous la forme donnée par la relation (15), où les fonctions w_j (α, β) satisfont à toutes les conditions aux limites, en ce qui concerne le déplacement normal. La fonction de force $c(\alpha, \beta, t)$ a la forme donnée par la relation (16), où c_1 (α, β, t) est une solution particulière de l'équation (13 b), et T^0_α, T^0_β, $T^0_{\alpha\beta}$ sont des paramètres que l'on détermine de façon que l'on satisfasse en «moyenne» aux conditions aux limites pour la fonction de force c.

En utilisant la méthode de Galerkine, on obtient le système d'équations différentielles, non linéaires (22).

On prend en considération, ensuite, le cas du panneau cylindrique simple appuyé sur tout le contour, pour lequel on obtient le système d'équations différentielles, non linéaires (29). Ce système d'équations appliqué au cas particulier des structures planes nous conduit au système (32). Dans ce cas, on obtient la valeur critique du paramètre $\nu = \nu_*$, correspondant au système linéaire. Enfin, en tâchant d'obtenir des solutions périodiques du système non linéaire (32), au voisinage de la valeur critique, on trouve l'expression de l'amplitude $A^{(1)}$ des vibrations de flatter, d'où l'on déduit facilement le caractère du mouvement au voisinage de la grandeur critique ν_*.

Pour finir, l'article contient les expressions des contraintes, qui permettent de déterminer leurs valeurs maxima dans n'importe quel point du milieu à trois dimensions de la structure, après avoir dépassé la vitesse critique de flatter.

BIBLIOGRAFIE

1. T.E. HESS, *Stability of orthotropic cylindrical shells under combinate loading.* American Rocket Society Journal, **31**, *2* (1961).
2. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.* Государственное издательство физико-математ. литературы, Москва, 1961.
3. В. В. БОЛОТИН, Ю. В. ГАВРИЛОВ, Б. П. МАКАРОВ, Ю. Ю. ШВЕНКО, *Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях.* Изв. АН СССР ОТН, механика и Машиностроение, *3* (1959).
4. В. В. БОЛОТИН, *Нелинейный латтер пластин и оболочек.* Инженерный сборник, *28* (1960).
5. L. LIBRESCU, *Elastische Mehrschichtenschallen.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., V, 5 (1960).
6. — *Vibration of non-homogeneous circular cylindrical shells in compressible fluid flow.* Revue de Mécanique appliquée, Acad. R.P.R., **VI**, *5* (1961).
7. Л. ЛИБРЕСКУ, *К теории тонкостенных конструкций, симметрично построенных из ортотропных слоев.* Revue de Méchanique appliquée, V, *1* (1960).

STUDII

AEROMECANICĂ

PROBLEMA MIȘCĂRII UNUI GAZ VÎSCOS ELECTROCONDUCTIBIL ÎN APROPIEREA UNEI PLĂCI POROASE INFINITE

DE

V. P. ȘIDLOVSKI[1]

La studierea problemelor de magnetohidrodinamică un rol foarte important îl pot juca unele probleme particulare, care permit să se obțină soluția lor exactă pentru un număr minim de condiții restrictive. De regulă, aceste probleme sînt o generalizare a anumitor probleme ale dinamicii clasice a gazelor. Mai jos se dă generalizarea problemei scurgerii în apropierea unei plăci poroase infinite, studiată de Illingworth [1], pentru cazul unui gaz electroconductibil.

Fie o placă poroasă infinită în jurul căreia se scurge un curent staționar uniform de gaz vîscos electroconductibil, iar la depărtare infinită de placă componentele tangențială și normală ale vitezei sînt egale respectiv cu u_1 și v_1. Admitem, de asemenea, că există un cîmp magnetic exterior de intensitate H_1, orientat după normala la placă. Viteza normală pe suprafața plăcii este egală cu v_0 și caracterizează sucțiunea gazului din spațiul exterior. Se presupun date, de asemenea, și valorile entalpiei la infinit și pe suprafață, i_1 și i_0, și valoarea densității ρ_1. Gazul se presupune perfect. În aceste condiții se cere să se determine scurgerea și cîmpul magnetic în apropierea plăcii.

Ecuațiile generale ale gazodinamicii magnetice, valabile în cazul dat sînt binecunoscute și sînt date, de exemplu, în lucrarea noastră [2]. Orientînd axa x de-a lungul plăcii și axa y după normala la ea, observăm că pe baza faptului că placa este infinită, toate derivatele în raport cu x

---

[1] Institut Mehaniki Akad. Nauk SSSR.

se anulează. Atunci, pentru cazul studiat, ecuaţiile de bază se vor scrie sub forma :

$$
\begin{gathered}
\rho v \frac{du}{dy} - \mu_e g \frac{dh}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\mu \frac{du}{dy}\right), \\
\rho v \frac{dv}{dy} + \mu_e h \frac{dh}{dy} = - \frac{dp}{dy} + \frac{4\,d}{3\,dy}\left(\mu \frac{dv}{dy}\right), \\
\frac{dA}{dy} \equiv \frac{d}{dy}\left(ug - vh + \frac{1}{\mu_e \sigma}\frac{dh}{dy}\right) = 0, \ \frac{dg}{dy} = 0, \qquad (1) \\
v\left(\rho \frac{di}{dy} - \frac{dp}{dy}\right) = \frac{1}{P}\frac{d}{dy}\left(\mu \frac{di}{dy}\right) + \mu\left[\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2\right] + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{dh}{dy}\right)^2, \\
\frac{d(\rho v)}{dy} = 0, \ p = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\rho i.
\end{gathered}
$$

În afară de notaţiile deja menţionate, aici sînt date următoarele : h şi g — proiecţiile vectorului intensităţii cîmpului magnetic pe axele x şi y ; μ — coeficientul de vîscozitate ; μ_e — coeficientul de permeabilitate magnetică ; p — presiunea ; P — numărul lui Prandtl ; $\varkappa$ — raportul căldurilor specifice.

Din ecuaţiile (1) se obţine uşor

$$
\begin{gathered}
\rho v = \text{const.} = - a, \quad g = H_1, \\
u H_1 - vh + \frac{1}{\mu_e \sigma}\frac{dh}{dy} = A. \qquad (2)
\end{gathered}
$$

Soluţia completă a sistemului (1) este foarte dificilă în cazul general. În scopul simplificării problemei, vom considera cazul conductibilităţii electrice infinit mari, $\sigma \rightarrow \infty$, important pentru multe aplicaţii practice. Pentru acest caz obţinem

$$
uH_1 - vh = A = u_1 H_1, \quad h = H_1 \frac{u - u_1}{v}. \qquad (3)
$$

Introducem noua variabilă independentă

$$
\eta = \int_0^y \frac{a}{\mu}\, dy, \qquad (4)
$$

şi notăm $\alpha = \mu_e H_1/a$. Atunci din ecuaţiile (1) obţinem

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2u}{d\eta^2} + \frac{du}{d\eta} + \alpha \frac{dh}{d\eta} = 0, \\
\frac{4}{3}\frac{d^2 v}{d\eta^2} + \frac{dv}{d\eta} - \frac{1}{a}\frac{dp}{d\eta} - \alpha \frac{h}{H_1}\frac{dh}{d\eta} = 0, \qquad (5) \\
\frac{1}{P}\frac{d^2 i}{d\eta^2} + \frac{di}{d\eta} + \frac{v}{a}\frac{dp}{d\eta} + \left(\frac{du}{d\eta}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{dv}{d\eta}\right)^2 = 0.
\end{gathered}
$$

Integrînd prima din ecuațiile (5) şi înmulțind toți termenii ecuației obținute cu v, ajungem la relația

$$v \frac{du}{d\eta} + v (u - u_1) + \alpha H_1 (u - u_1) = 0. \tag{6}$$

A doua din ecuațiile (5), pe o cale analogă, dă rezultatul

$$\frac{4}{3} v \frac{dv}{d\eta} + v^2 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} i - \frac{\alpha}{2} h (u - u_1) = Bv, B = v_1 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{i_1}{v_1}. \tag{7}$$

Apoi, eliminînd derivata $dp/d\eta$ din ecuațiile a doua şi a treia din (5) şi integrînd ecuația obținută, obținem

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta}\left(\frac{i}{P} + \frac{2}{3} v^2\right) + i + \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} (u - u_1)^2 - \alpha (u - u_1) h = \\ = i_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \equiv C. \end{aligned} \tag{8}$$

În scopul obținerii unei expresii analitice pentru funcția u vom efectua încă o schimbare de variabilă independentă:

$$z = \int_0^{\eta} \frac{v + \alpha H_1}{v} d\eta. \tag{9}$$

Atunci din ecuația (6) se obține

$$u = u_1 (1 - e^{-z}), \tag{10}$$

şi în conformitate cu (3) va avea loc relația

$$h = - \frac{H_1 u_1}{v} e^{-z}. \tag{11}$$

Mersul ulterior al rezolvării problemei va fi următorul: Trecînd în ecuațiile (7) şi (8) la argumentul z şi eliminînd din ele funcția i, obținem o singură ecuație diferențială de ordinul doi pentru determinarea lui $v(z)$. Această ecuație se rezolvă pentru condițiile la limită $v(0) = v_0$, $v(\infty) = v_1$, iar cînd se cunoaşte $v(z)$ se determină uşor $h(z)$ şi $i(z)$. Pentru trecerea la argumentul fizic y este necesar să cunoaştem dependența $\mu [i(z)]$, după care relația între y şi z va fi dată de formula

$$y = \frac{1}{a} \int_0^z \frac{v(z) \mu(z)}{v(z) + \alpha H_1} dz. \tag{12}$$

Dacă numărul lui Prandtl $P = 3/4$ (aceasta se apropie de valoarea reală pentru aer), atunci operațiunile necesare pentru deducerea ecuației diferențiale de bază, se simplifică în mare măsură. Din ecuațiile (7) şi

(8) se obţine în acest caz următoarea ecuaţie (cu semnul prim se notează derivata în raport cu z):

$$\begin{gathered}\frac{16}{9}(v+\alpha H_1)^2 v'' + \frac{16}{9}(v+\alpha H_1)\, v'^2 - \frac{4}{3}(v+\alpha H_1)\left(B-\frac{\varkappa+1}{\varkappa}v\right)v' + \\ + \frac{4}{3}\alpha H_1 u_1^2 \frac{v+\alpha H_1}{v}\left(1+\frac{v'}{2v}\right)e^{-2z} + \frac{4}{3}v(v+\alpha H_1)\,v' + \\ + \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}v^3 - \frac{\alpha}{2}H_1 u_1^2 e^{-2z} - Bv^2 + \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}u_1^2 v e^{-2z} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}Cv + \\ + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\alpha u_1^2 H e^{-2z} = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Soluţia ecuaţiei neliniare (13) pentru condiţiile la limită menţionate mai sus nu poate fi obţinută sub formă analitică; în acelaşi timp soluţia numerică este incomod de utilizat aici datorită numărului mare de parametri. În scopul explicării caracterului variaţiei funcţiilor căutate putem construi dezvoltări asimptotice de forma

$$v = v_1 + D_1 e^{-2z} + \ldots + D_n e^{-2nz} + \ldots \tag{14}$$

Coeficienţii D_1, D_2 etc. se determină uşor din ecuaţia (13), în particular

$$\begin{gathered}D_1 = v_1 \operatorname{ctg}^2 \beta \times \\ \times \frac{(M_{1m}^2-1)\,[8\varkappa-3(\varkappa-1)M_{1m}^2]-3M_{1m}^2}{\frac{128}{3}\varkappa(M_{1m}^2-1)^2+16\frac{M_{1m}^2}{M_{1h}^2}(M_{1m}^2-1)\,[1-(\varkappa+1)M_{1h}^2]-6\frac{M_{1m}^4}{M_{1h}^2}(1-M_{1h}^2)},\end{gathered} \tag{15}$$

unde

$$\beta = \operatorname{arctg}\left|\frac{v_1}{u_1}\right|,\; M_{1h} = \frac{v_1}{c_1},\; c_1 = \sqrt{\varkappa\frac{p_1}{\rho_1}},\; M_{1m} = \frac{v_1}{H_1}\sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_e}}.$$

Din formula (15) rezultă că caracterul variaţiei vitezei verticale v departe de placă depinde în mod esenţial de valorile numerelor Mach hidrodinamic şi magnetic, M_{1h} şi M_{1m}. Pentru anumite combinaţii ale acestor numere viteza v poate creşte sau descreşte pe măsura apropierii de placă. Necesită un studiu special cazul cînd numitorul din membrul al doilea al formulei (15) devine zero şi dezvoltările asimptotice propuse nu mai sînt valabile.

Trebuie să menţionăm că pe baza formulei de transformare (9) şi a expresiei $\alpha = -\mu_e H_1/\rho_1 v_1$ mişcările cu perturbaţii amortizate la infinit există numai pentru $M_{1m} > 1$.

Dacă intensitatea cîmpului magnetic la infinit H_1 este suficient de mare, astfel încît $M_{1m} < 1$, atunci perturbaţiile care au apărut în apropierea suprafeţei plăcii nu se mai pot amortiza pe seama influenţei vîscozităţii şi se vor propaga la distanţe nelimitat de mari. Acest fapt a fost descoperit pentru prima oară de V. V. Sîcev [3] la rezolvarea mişcării unui fluid electroconductibil vîscos incompresibil în apropierea unui disc în rotaţie într-un cîmp magnetic.

Pentru cercetarea comportării funcţiilor care ne interesează în vecinătatea plăcii (pentru $z \to 0$) putem lua dezvoltările ale acestor funcţii în serii de puteri ale lui z. De exemplu, pentru funcţia $v(z)$ obţinem

$$v = v_0 + E_1 z + E_2 z^2 + \dots \tag{16}$$

Coeficientul E_1 se exprimă după formula

$$E_1 = \frac{4}{3} v_0 \, \frac{\dfrac{M_{1m}^2}{M_{1h}^2}\left(M_{1h}^2 + \dfrac{1}{\varkappa}\right) + b\,\dfrac{M_{1m}^2}{M_{1h}^2}\left(M_{0h}^2 + \dfrac{1}{\varkappa}\right) - \dfrac{1}{2b^2}\operatorname{cotg}^2\beta}{b\,M_{1m}^2 - 1}, \tag{17}$$

unde

$$b = \frac{v_0}{v_1}, \quad M_{0h} = \frac{v_0}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\varkappa\,\frac{p_0}{\rho_0}}.$$

După cum se vede din formula (17), termenul principal al dezvoltării are o singularitate pentru $M_{1m}^2 = v_1/v_0$ şi în cazul îndeplinirii acestei egalităţi soluţia necesită un studiu suplimentar.

Pentru rezolvarea completă a problemei s-ar putea să fie necesare expresiile densităţii de curent şi intensităţii cîmpului electric creat în gaz. Aceste expresii se determină din ecuaţiile vectoriale

$$\mathbf{j} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = \mu_e (\mathbf{H} \times \mathbf{V}), \tag{18}$$

care în cazul considerat dau formulele

$$j \equiv j_z = \frac{dh}{dy}, \; E \equiv E_z = \mu_e (hv - uH_1) = -\mu_e u_1 H_1.$$

Primită la redacţie la 28 decembrie 1961

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО ВЯЗКОГО ГАЗА ВБЛИЗИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОРИСТОЙ ПЛАСТИНЫ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается течение электропроводящего сжимаемого вязкого идеального газа, проходящего через бесконечную пористую пластину в присутствии магнитного поля, нормального к пластине. Проводимость считается бесконечной. Задача является обобщением случая без проводимости [1].

Проводя некоторые замены переменных (4), (9), уравнения задачи (5) сводятся в конце концов к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, функцией которого является нормальная составляющая скорости; при числе Прандтля $P = 3/4$ (соответствующего воздуху) это есть уравнение (13). Так как аналитическое решение нельзя найти, то рассматриваются асимптотические решения (14) или справедливые вблизи пластинки (16). Оказывается, что движение существенно зависит от гидродинамического M_h и магнитного M_m чисел Маха, являющихся переменными в определенных случаях, причем возмущения затухают или нет, а нормальная скорость уменьшается или возрастает по мере удаления от пластины.

При определенном частном значении M_m решение единственно и требует специального исследования.

Приводятся также выражения плотности тока и напряженности электрического поля, создаваемого в газе.

THE FLOW OF AN ELECTRICALLY CONDUCTING GAS IN THE VICINITY OF A POROUS INFINITE PLATE

ABSTRACT

Paper deals with the flow of a perfect viscous compressible gas having infinite electrical conductivity, through a porous infinite plate, in a magnetic field perpendicular to the plate.

By changing some variables (4) (9), the equations of the problem (5) are reduced to a single non-linear second order differential equation, where the unknown function is the normal component of velocity; when Prandtl number $P = 3/4$ (corresponding to air), one obtains equation (13). Since it is impossible to find an analytical solution, approximate solutions are studied, either valid in the vicinity of the plate (16), or asymptotic (14).

It is found that the flow depends on the hydrodynamic and magnetic Mach numbers, M_h and M_m respectively; in some cases the perturbations may fadden out or not, while the normal velocity may either decrease or increase in a direction normal to the plate.

When M_m has a certain particular value, the solution is a singular one, and deserves a special study.

Expressions for the current density and the magnetic field intensity are given.

BIBLIOGRAFIE

1. C. R. Illingworth, *Some solutions of the equations of flow of a viscous compressible fluid.* Proc. of the Cambridge Phil. Soc., **46**, 469—478 (1950).
2. В. П. Шидловский, *Некоторые задачи о движении проводящего вязкого газа при наличии магнитного и электрического полей.* Прикладная мех. и техн. физ., 5 (1961).
3. В. В. Сычев, *О движении вязкой электропроводной жидкости под действием вращающегося диска в присутствии магнитного поля.* Прикл. матем. и мех., **XXIV**, 5 (1960).

AEROMECANICĂ

DETERMINAREA APROXIMATIVĂ A PRESIUNII ȘI DEBITULUI CURENTULUI ASCENDENT ÎN FORAJUL CU GAZE

DE

H. PASCAL

Utilizarea gazelor ca fluid de circulație în foraj s-a dovedit că prezintă mari avantaje tehnico-economice, comparativ cu fluidul de foraj utilizat în prezent, acolo unde bineînțeles există condiții compatibile cu aplicarea sa.

Pentru a se putea asigura acestui procedeu de foraj o eficiență maximă, din punct de vedere energetic, apare necesar să determinăm valoarea vitezei de suspensie a particulei aflată în curentul ascendent, precum și pierderile de presiune din sistemul de circulație, prăjini de foraj și spațiul inelar.

Dispunînd de date cît mai complete cu privire la comportarea hidrodinamică a unui amestec bifazic constituit dintr-o fază solidă, detritusul, și una gazoasă, agentul de circulație, în cazul curgerii prin țevi verticale, apare posibilitatea alegerii în mod judicios a puterii și a regimurilor de lucru ale compresoarelor, asigurîndu-se în felul acesta regimul optim de foraj.

Spre deosebire de situația obișnuită, unde se utilizează fluidul de foraj vîscoplastic, incompresibil, pentru stabilirea caracteristicilor hidrodinamice ale curentului ascendent în forajul cu gaze apar dificultăți matematice foarte mari, datorită efectului de compresibilitate, cînd curgerea gazelor necesită diferențe relativ mari de presiune, astfel încît acest efect să nu poată fi neglijat. În afară de aceasta, în cazul curgerii ascendente a amestecului de detritus și gaze, pe lîngă frecările obișnuite, mai apar pierderi suplimentare de presiune, inerente curgerii fluidelor heterogeue, produse de efectul alunecării, respectiv de mișcarea relativă dintre faze.

Dacă ne referim la varietatea formelor și dimensiunilor particolelor din detritus, întîlnite frecvent în practică, atunci evident că amestecul de gaze și detritus prezintă în general un pronunțat caracter de neomogeneitate.

Scopul lucrării de față este de a analiza unele concluzii fundamentale, obținute în lucrările anterioare [1], [2], [3], [4], referitoare la utilizarea gazelor ca agent de circulație în foraj, pentru realizarea evacuării detritusului de la talpa sondei cu un randament energetic cît mai ridicat.

★

După cum s-a arătat în lucrările [2], [3], ecuațiile care descriu mișcarea fazei solide, considerată discontinuă, și a fazei gazoase, avînd dispersat în masa sa detritusul, au forma

$$u\frac{du}{dx} = g\left[\frac{v_0}{v_{kp0}^2}\frac{(v-u)^2}{v} - 1\right], \tag{1}$$

pentru mișcarea particulei, de o formă oarecare, și

$$\left(v - \frac{gR\overline{T}z}{v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + g + \frac{\lambda v^2}{2\,d_e} + \mu\frac{v}{u}\left[1 + \frac{u}{g}\frac{du}{dx} + \frac{v_0}{v_{kp0}^2}\frac{(v-u)^2}{v}\right] = 0, \tag{2}$$

pentru faza gazoasă, presupunînd că evoluția termodinamică este izotermică.

Notațiile utilizate în ecuațiile de mai sus au următoarele semnificații fizice[1]) : u — viteza particulei de o formă oarecare, v — viteza curentului ascendent de gaze, v_{kp} — viteza curentului ascendent de gaze care asigură starea de suspensie a particulei, R — constanta universală a gazelor, d_e — diametrul echivalent al spațiului inelar, $\overline{T}$ — temperatura medie, z — factorul de abatere de la legea Boyle-Mariotte, λ — coeficientul de frecare hidrodinamic în spațiul inelar și $\mu = \frac{Q_m}{\rho v F}$, reprezintă concentrația detrisului în gaz.

După cum au arătat majoritatea cercetătorilor, care au studiat curgerea gazelor în țevi verticale, căderea de presiune în sistem datorită variației energiei cinetice are o influență neglijabilă asupra pierderii totale de presiune. Din acest motiv, termenul inerțial $v\frac{\partial v}{\partial x}$, din ecuația (2), poate fi eliminat cu o bună aproximație.

Condițiile inițiale pe care trebuie să le satisfacă funcțiile $u(x)$ și $v(x)$, la talpa sondei, sînt : particula pleacă din starea de repaus și deci $u(0) = 0$, iar curentul ascendent are în acest punct viteza v_0. Cu toate că în realitate particula este supusă unei acțiuni de azvîrlire de către sapă, și în consecință viteza la talpa sondei va avea o valoare diferită de zero, la admiterea condiției inițiale pentru particulă s-a ținut seamă că efectul menționat este foarte greu de estimat cantitativ. În ceea ce privește căderea de presiune suplimentară, exprimată în ecuția (2) prin termenul din paranteză, aceasta se datorește alunecării, greutății detritusului și accelerației rezultată în urma variației vitezei gazelor cu adîncimea.

---

[1]) Indicele zero se referă la presiunea de referință p_0, care reprezintă valoarea presiunii la talpa sondei, unde s-a considerat originea axei.

Examinînd ecuaţiile (1) şi (2) este uşor de observat caracterul neliniar al acestora. Acest fapt conduce la dificultăţi matematice foarte mari pentru rezolvarea exactă a sistemului de ecuaţii, singura modalitate de a obţine graficele funcţiilor $u\,(x)$ şi $v\,(x)$ fiind metodele de calcul numeric. Pe de altă parte, în cazul vitezelor de foraj care conduc la valori relativ mici ale concentraţiei fazei solide, după unele transformări, arătate în lucrarea [2], se obţine din ecuaţiile (1) şi (2) tot o ecuaţie neliniară de tip Abel

$$u\,\frac{du}{dx} = \varphi_3(x)\,u^2 + \varphi_2(x)\,u + \varphi_1(x), \tag{3}$$

unde expresiile funcţiilor $\varphi_3\,(x)$, $\varphi_2\,(x)$ şi $\varphi_1\,(x)$ au fost redate în lucrarea [2].

Datele practice, redate în literatură [6], [7], [8], înregistrate la forajul sondelor, menţionează, chiar în cazul adîncimilor de 2 000—3 000 m, căderi de presiune în spaţiul inelar variind între 2—8 at. În această situaţie este evident că efectul de compresibilitate nu poate introduce erori importante, dacă se consideră în calcul valoarea medie ponderată a vitezei după adîncimea sondei. În felul acesta, rezolvarea ecuaţiilor (1) şi (2) se simplifică substanţial, ceea ce permite obţinerea unor concluzii extrem de utile, într-o primă aproximaţie, pentru alegerea valorii debitului şi presiunii curentului ascendent.

Astfel, relaţia fundamentală care exprimă dependenţa vitezei mecanice de foraj în funcţie de viteza curentului ascendent şi de gradientul de presiune devine

$$h = \frac{u\left[\xi - \bar{\gamma}_\Gamma\left(1 + \frac{\lambda \bar{v}^2}{2gd_e}\right)\right] d_2^2 - d_1^2)}{\gamma_m\, d_2^2\left[1 + \frac{\bar{v}^2 - \bar{v}_{kp}^2}{\bar{v}_{kp}^2} + \frac{\bar{v} - u}{v_{kp}}\Big)^2\right]}, \tag{4}$$

h fiind viteza mecanică de foraj.

Ecuaţia (4) se deosebeşte de cea stabilită în lucrarea [3] prin faptul că se consideră şi gradientul de presiune datorită greutăţii coloanei de gaze.

În cazul vitezelor obişnuite, necesare antrenării particulelor, valoarea gradientului de presiune rezultat în urma frecării gazelor de pereţii sondei depăşeşte cu mult gradientul de presiune datorit greutăţii coloanei de gaze şi în consecinţă din ecuaţia (4) nu se vor obţine valori sensibil diferite faţă de relaţia redată în lucrarea [3].

Aplicarea ecuaţiei (4) pentru calculul vitezei curentului ascendent, care asigură evacuarea detritusului produs de sapă la o viteză mecanică de foraj impusă, implică stabilirea în prealabil a vitezei de suspensie, gradientului de presiune total ξ şi a vitezei particulei u. În acest scop, apare necesar să ne referim la o particulă ipotetică în ceea ce priveşte greutatea acesteia.

După cum s-a menţionat mai sus, datorită caracterului neomogen al detritusului, formele şi dimensiunile particulelor avînd aceeaşi greutate specifică, pot varia într-o gamă foarte largă. Admițînd în calculele numerice particula cea mai grea, atunci este evident că debitul de gaze, necesar antrenării, ar putea să devină nerațional din punct de vedere energetic. Din acest motiv, soluționarea judicioasă a problemei necesită în prealabil o analiză statistică asupra probabilității ca în masa gazelor să existe numărul maxim de particule de o anumită greutate, dispersate în mod uniform. Deoarece problema determinării vitezei de suspensie a fost discutată în mod detaliat în lucrarea [4] în cele ce urmează nu o vom mai reda. În ceea ce privește calculul vitezei particulei, trebuie să remarcăm în cazul cînd antrenarea acesteia se efectuează la o viteză constantă a curentului ascendent de gaze că mișcarea particulei devine uniformă, după o distanță relativ mică de la talpa sondei.

Astfel, după integrarea ecuației (1) rezultă ecuația

$$u(t) = (\bar{v} - \bar{v}_{kp}) \frac{\exp\frac{2gt}{\bar{v}_{kp}} - 1}{\exp\frac{2gt}{\bar{v}_{kp}} + \frac{\bar{v}_{kp} - \bar{v}}{\bar{v}_{kp} + \bar{v}}} \qquad (5)$$

de unde este ușor să observăm că viteza particulei tinde după un timp relativ mic către o valoare constantă și egală cu $u = \bar{v} - \bar{v}_{kp}$.

Dacă reprezentăm grafic ecuația (4), unde în locul vitezei mecanice de foraj introducem debitul detritusului $Q_m = \frac{\pi}{4} d_2^2 h \gamma_m$, obținem, pentru o valoare constantă a gradientului de presiune ξ, curba redată în figura 1.

Diagrama 1 a fost construită pentru o sondă ipotetică, avînd următoarele caracteristice: H — adîncimea sondei = 2 000 m; $\lambda = 0{,}02$; Δp — căderea de presiune în spațiul inelar = 4 ata; $v_{kp} = 7$ m/s, ceea ce corespunde în condiții normale de 1 ata și 15°C unei viteze de 14 m/s, γ_r — greutatea specifică exprimată în condiții normale = 1,1 kg/m^3; d_2 — diametrul sapei = 0,168 m și d_1 — diametrul prăjinilor de foraj = 0,114 m.

Examinînd aspectul curbei, se observă existența unei valori a vitezei curentului ascendent care asigură evacuarea detritusului de la talpa sondei cu un debit maxim. Creșterea vitezei curentului ascendent, peste această limită, conduce la o porțiune descendentă a curbei și deci la micșorarea debitului detritusului evacuat. Există, de asemenea, și o viteză optimă a curentului ascendent care asigură evacuarea detritusului cu un randament maxim de liftare, fără ca debitul detritusului să fie maxim. Această valoare este dată de proiecția punctului de tangență a dreptei dusă din originea sistemului de referință la curba $Q_m = f(\bar{v})$. Punctele de intersecție ale curbei cu axa vitezei se obțin anulînd numărătorul ecuației (4). Prima valoare exprimă condiția de suspensie, iar a doua arată imposibilitatea antrenării detritusului, cînd gradientul de presiune necesar devine mai mic decît cel disponibil, o dată cu creșterea vitezei.

Într-adevăr, dacă ţinem seama de expresia randamentului [3] şi de ecuaţia (4), avem

$$\eta = \frac{4\,Q_m H}{\pi\,(d_2^2 - d_1^2)\,\bar{v}\,[(\Delta p)_{\Gamma} + (\Delta p)_m]} = \frac{(\bar{v} - \bar{v}_{kp})\left(\xi - \dfrac{\lambda \bar{v}^2 \bar{\gamma}_{\Gamma}}{2\,g d_e}\right)}{\xi\,\bar{v}\left(2 + \dfrac{\bar{v}^2 - \bar{v}_{kp}^2}{\bar{v}_{kp}^2}\right)}, \qquad (6)$$

unde prin $\xi = \left(\frac{\Delta p}{H}\right)_m + \left(\frac{\Delta p}{H}\right)_{\Gamma}$ s-a notat gradientul total, rezultat din pierderile de presiune datorite prezenţei detritusului în curentul ascendent şi a frecării gazelor de pereţii sondei.

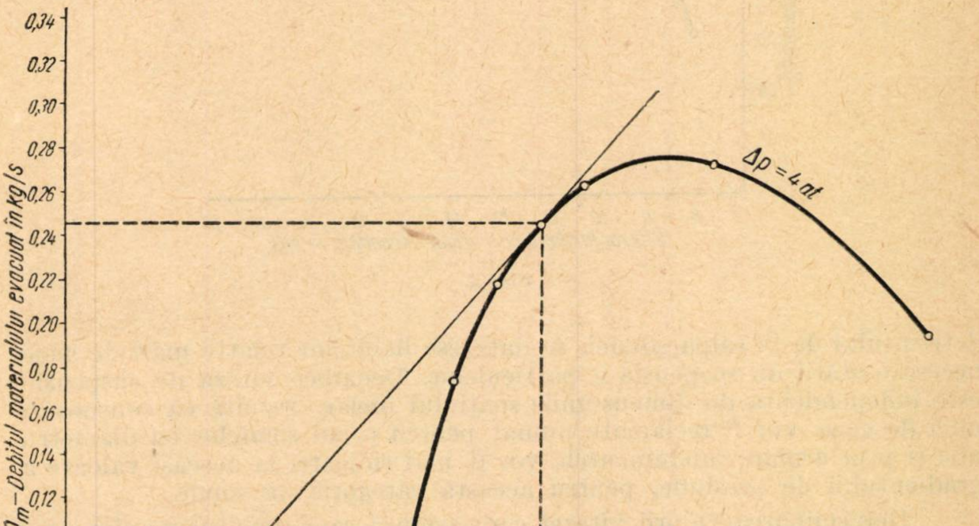


Fig. 1

În figura 2 s-a redat variaţia randamentului în funcţie de viteza curentului ascendent, pentru aceleaşi date care au fost utilizate la construirea figurii 1, cînd gradientul de presiune ξ are o valoare constantă.

Din grafic se poate remarca că valoarea randamentului maxim se obține pentru viteza de 11 m/s, ceea ce corespunde proiecției punctului de tangență a curbei din figura 1.

În general, randamentele de liftare foarte scăzute, întîlnite în cazul utilizării gazelor comprimate ca agent de circulație pentru evacuarea detritusului de la talpa sondei, se datoresc debitelor relativ mari de gaze necesare stării de suspensie a particulelor. Deoarece viteza de suspensie este independentă de dimensiunile spațiului inelar, rezultă că consumuri mici de gaze vor fi reclamate numai pentru cazul sondelor cu diametru mic și prin urmare randamentele vor fi mai ridicate, la aceeași valoare a gradientului de presiune, pentru această categorie de sonde.

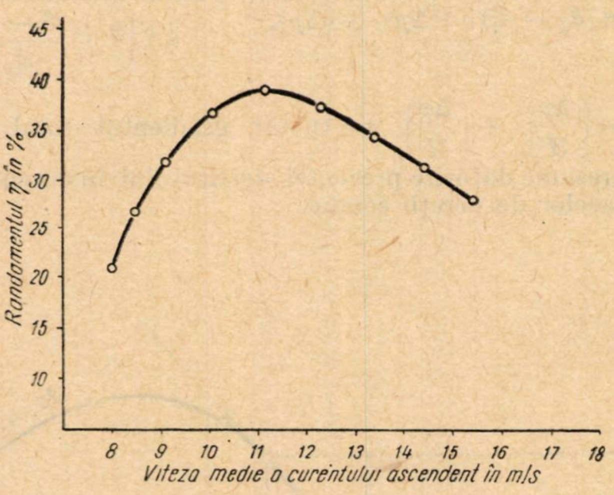


Fig. 2

Determinarea valorii vitezei care asigură randamentul maxim conduce la o ecuație de gradul cinci și în consecință este mult mai comod pentru scopurile practice să utilizăm procedeul grafic indicat.

Este interesant de menționat că rezultatele redate mai sus sînt similare cu cele care se obțin în mod curent în practica exploatării sondelor de țiței prin gas-lift. Din acest motiv, concluziile obținute din practica și teoria gas-liftului se regăsesc și în cazul antrenării detritusului cu ajutorul gazelor comprimate.

Trecem acum la determinarea pierderilor de presiune în sistemul de circulație, prăjinile de foraj și spațiul inelar.

Dacă ne referim la curgerea gazelor prin prăjinile de foraj și admitem evoluția izotermică, atunci pierderile de presiune se deduc din integrarea ecuației (2), anulînd valoarea concentrației μ [5]

$$p_1^2 = p_2^2 e^{\frac{0,06833\,\gamma H}{\bar{z}\,\bar{T}}} + \frac{1,583\ \lambda\,\bar{z}^2\,\bar{T}\,Q^2}{d^2}\left(e^{\frac{0,06833 H\gamma}{\bar{z}\,\bar{T}}} - 1\right), \tag{7}$$

unde: p_1 — presiunea la suprafaţa sondei, măsurată în prăjini, în ata; p_2 — presiunea la adîncimea H, respectiv la talpa sondei, în ata în amontele duzelor sapei; Q — debitul gazelor exprimat în condiţii normale; γ — greutatea specifică relativă a gazelor în raport cu aerul; $\bar{T}$ — temperatura absolută medie, exprimată în grade Kelvin; $\bar{z}$ — factorul de abatere de la legea Boyle-Mariotte, corespunzător presiunii şi temperaturii medii; λ — coeficientul de frecare hidrodinamic şi d — diametrul interior al prăjinilor de foraj.

În cazul mişcării gazelor în spaţiul inelar, avînd detritusul dispersat în masa acestora, este necesar să integrăm ecuaţia (2). În acest sens putem presupune într-o primă aproximaţie, ţinînd seamă de ecuaţia (5), că mişcarea particulei este uniformă şi prin urmare aceasta se deplasează cu o viteză constantă, egală cu diferenţa dintre viteza de antrenare şi cea de suspensie.

Pe de altă parte, pierderea de presiune din sistem datorită scoaterii particulelor din starea de repaus, respectiv a inerţiei acestora, se obţine calculînd valoarea derivatiei funcţiei (5) la momentul $t = 0$. Mai departe, cu ajutorul ecuaţiilor de stare şi continuitate, admiţînd curgerea staţionară, avem

$$\bar{v} = \frac{\rho_0}{\rho} v_0, \quad \bar{v}_{kr} = \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} v_{kp0} \text{ şi } \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{G R \bar{T} \bar{z}}{v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{8}$$

G — fiind debitul gravimetric, iar mărimile afectate de indicele zero se referă la condiţiile normale de presiune şi temperatură.

Introducînd relaţiile (8) în ecuaţia (2), şi efectuînd unele calcule simple, rezultă în cele din urmă

$$\frac{dp}{dx} + \frac{p}{\bar{z} R T}\left(1 + \frac{\mu b}{g}\right) + a = 0, \tag{9}$$

unde s-a notat

$$b = \frac{v_0}{v_0 - v_{kpo}}\left(1 + \frac{v_0^2}{v_{kpo}^2}\right); \; a = \frac{\lambda \rho_0^2 v_0^2 \bar{z} \bar{R} T g}{2\, d_e}, \tag{10}$$

şi concentraţia

$$\mu = \frac{4\, Q_m}{\rho\, v\, \pi\, (d_2^2 - d_1^2)}.$$

Integrînd ecuaţia (9) şi notînd cu p_3 valoarea presiunii la talpa sondei, în avalul duzelor sapei, şi cu p_4 valoarea presiunii la suprafaţa sondei, măsurată în spaţiul inelar, se obţine

$$p_3^2 = p_4^2 e^{2\alpha H} + \frac{a}{\alpha}(e^{2\alpha H} - 1), \tag{11}$$

unde

$$\alpha = \left(1 + \frac{b\mu}{g}\right)\frac{1}{\bar{z} R \bar{T}}.$$

După cum se observă, pentru calculul pierderilor de presiune în spațiul inelar, unde are loc antrenarea detritusului la suprafața sondei, avem o relație identică cu (8), cu deosebirea coeficienților care în acest caz depind de caracteristicile geometrice și fizice ale detritusului și de concentrația acestuia.

În figura 3 s-au redat curbele de variație a presiunii în spațiul inelar pentru diferite adîncimi ale sondei, cînd în curentul ascendent se deplasează detritusul cu un debit de $Q_m = 0{,}248$ kg/s și în absența acestuia, ceea ce permite să stabilim influența prezenței detritusului în masa gazelor asupra căderii de presiune în sistemul de circulație.

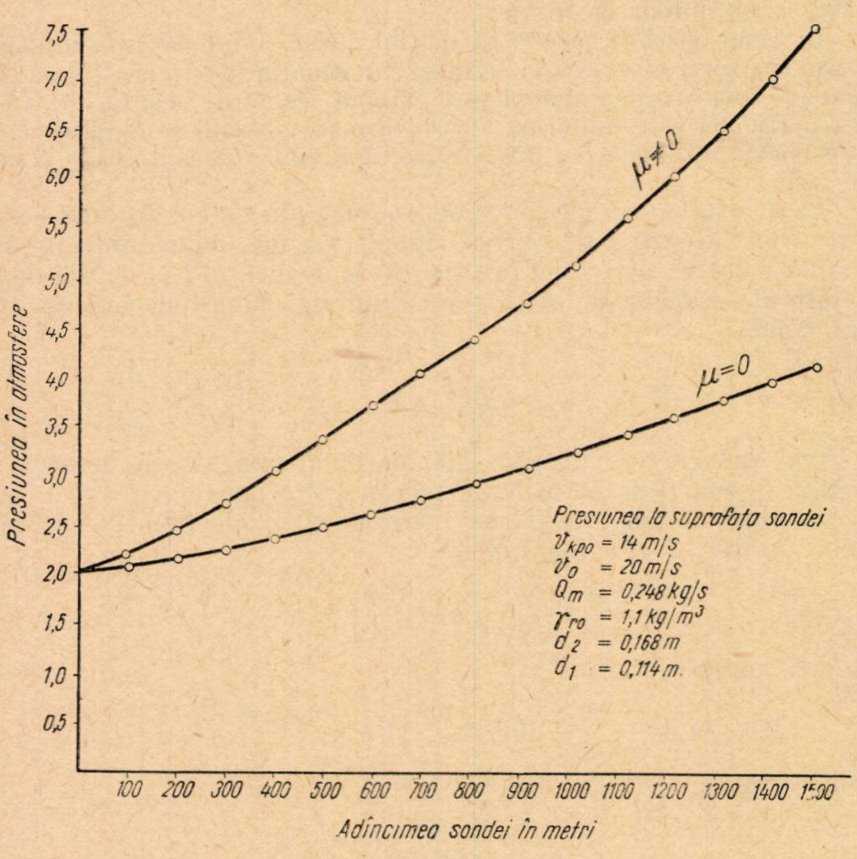


Fig. 3

APENDICE

Cunoscînd acum distribuția presiunii în funcție de adîncimea sondei putem determina, pe baza relației (12), valoarea vitezei medii ponderate după adîncime, precum și valoarea gradientului de presiune.

În acest scop, utilizînd ecuația de stare termodinamică și de continuitate, ecuația (11) devine

$$v\,(x) = \frac{\beta}{\left[k \exp 2\,\alpha\, x - \dfrac{a}{\alpha}\right]^{1/2}}, \tag{12}$$

unde prin β și k s-a notat

$$k = \frac{\beta^2}{v_4^2} + \frac{a}{\alpha} \quad \text{și} \quad \beta = \frac{GR\,\overline{T}\,\overline{z}\; 4}{\pi\,(d_2^2 - d_1^2)}, \tag{13}$$

v_4 — fiind valoarea vitezii la suprafața sondei, G — debitul gravimetric, iar semnificațiile fizice ale notațiilor a și α s-au arătat mai sus.

Deoarece viteza medie ponderată după adîncime se definește prin ecuația

$$\bar{v} = \frac{1}{H}\int_0^H v\,(x)\,dx \equiv \frac{\beta}{H}\int_0^H \frac{dx}{\left[k \exp 2\,\alpha x - \dfrac{a}{\alpha}\right]^{1/2}} \tag{14}$$

rezultă după efectuarea integralei următoarea relație

$$\bar{v} = \frac{\beta}{H\sqrt{a\,\alpha}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\alpha k}{a}\,e^{\alpha H} - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k\alpha}{a} - 1}\right]. \tag{15}$$

Este ușor de observat din relația (15) că determinarea efectivă a vitezei medii ponderate implică cunoașterea debitului gravimetric, respectiv valoarea vitezei curentului ascendent la talpa sondei, care după cum s-a arătat depinde de debitul detritusului evacuat și de valoarea gradientului de presiune $\xi = \dfrac{p_3 - p_4}{H}$. Datorită acestui fapt, apare necesar să rezolvăm problema prin metoda încercării și erorii, considerînd într-o primă aproximație pentru viteza particulei o anumită valoare, de exemplu 2—4 m/s, și admițînd că mișcarea acesteia se efectuează uniform.

În acest caz putem scrie, ținînd seama de rezultatele precedente,

$$\bar{v} = \bar{v}_k + u, \tag{16}$$

care introdusă în ecuația (15) permite calculul debitului gravimetric G, rezolvînd această ecuație transcendentă prin încercări și prin urmare vom determina valoarea vitezei la talpa sondei.

Dacă viteza particulei a fost corect aleasă atunci valoarea gradientului de presiune, obținută cu ajutorul ecuației (11), și a vitezei medii calculată din (16), trebuie să satisfacă relația fundamentală (5) pentru valoarea vitezei mecanice de foraj impusă, care asigură evacuarea detritusului la suprafața sondei în condițiile randamentului optim. În caz contrar calculul se va repeta, reconsiderînd valoarea vitezei particulei.

Primită la redacție la 12 ianuarie 1962

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ И РАСХОДА ВОСХОДЯЩЕГО ПОТОКА ПРИ БУРЕНИИ ГАЗАМИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются результаты, полученные автором в предыдущих работах [1], [2], [3], [4] в связи с задачей определения расхода и давления восходящего потока для случая, когда устранение детрита в забое скважины осуществляется сжатыми газами вместо бурового раствора.

Приводятся основные уравнения, описывающие течение газов в вертикальных трубах, когда в массе последних взвешены твердые частицы нерегулярной формы с учетом эффекта сжимаемости, соответственно с изменением скорости потока газа с глубиной скважины.

Задача решается эффективно только для случая, когда течение газов имеет место при сравнительно малых разностях давлений, позволяющих пренебречь влиянием эффекта сжимаемости, соответственно, с изменением удельной массы с давлением.

Что касается перепада давлений в системе от изменения кинетической энергии, то он оказывает практически пренебрежимое влияние и, следовательно, не был учтен в уравнении баланса потерь давления.

На основании принятой физической схемы устанавливается основное соотношение, необходимое для численных расчетов, выражающее функциональную зависимость между механической скоростью бурения, скоростью восходящего потока, градиентом давления, скоростью взвешивания частицы, с определенными физическими, геометрическими и остальными факторами.

Полученные результаты дали возможность выявить существование оптимальной скорости восходящего потока газов, при определенном постоянном значении градиента давлений, обеспечивающей устранение детрина в забое скважины с максимальным энергетическим к.п.д. Это значение изображается проекцией точки касания прямой, проведенной в начале системы отсчета, кривой $Q = f(\overline{v})$. Также приводятся соотношения для расчета потерь давления в циркуляционной системе бурильные штанги — кольцевой зазор, причем предполагается стационарное течение и изотермическое развитие. В приложении приводится расчет средневзвешенной скорости по глубине, причем рекомендуется применение метода попыток и погрешностей для эффективного расчета характеристик восходящего потока.

DÉTERMINATION APPROXIMATIVE DE LA PRESSION ET DU DÉBIT DU COURANT ASCENDANT, LORS DU FORAGE À GAZ

RÉSUMÉ

L'auteur fait une analyse des résultats obtenus dans ses travaux antérieurs [1], [2], [3], [4] sur le problème de la détermination du débit et de la pression du courant ascendant au cas où l'évacuation du détritus

accumulé à la semelle de la sonde est effectuée à l'aide de gaz comprimés au lieu du fluide de forage.

On y expose les équations fondamentales de l'écoulement dans les conduites verticales des gaz, contenant, dispersées dans leur masse, des particules solides, de forme irrégulière, en tenant compte de l'effet de compressibilité, implicitement de la variation de la vitesse du courant de gaz avec la profondeur de la sonde.

Le problème n'est effectivement résolu que dans le cas où l'écoulement des gaz se produit à des différences relativement faibles de pression, permettant de négliger l'influence de l'effet de compressibilité, respectivement la variation de la masse spécifique avec la pression. En ce qui concerne la chute de pression dans le système due à la variation de l'énergie cinétique, son influence est pratiquement négligeable et, par conséquent, elle n'a pas été prise en considération dans l'équation du bilan des pertes de pression.

En vertu du schéma physique admis, l'auteur a établi la relation fondamentale, nécessaire aux calculs numériques, exprimant l'interdépendance fonctionnelle entre la vitesse mécanique de forage, la vitesse du courant ascendant, le gradient de pression, la vitesse de suspension d'une particule ayant certaines caractéristiques physiques et géométriques, ainsi que les autres facteurs.

Les résultats obtenus ont permis de mettre en évidence l'existence d'une vitesse optimum du courant ascendant de gaz, pour une certaine valeur constante du gradient de pression, qui assure l'évacuation du détritus de la semelle de la sonde avec le rendement énergétique maximum.

Cette valeur est représentée par la projection du point de contact de la tangente menée par l'origine du système de référence à la courbe $Q_m = f(\bar{v})$. En outre, il donne aussi les relations pour le calcul des pertes de pression dans le système de circulation, tiges et espace annulaire, en admettant un écoulement stationnaire et une évolution isotherme.

Dans l'appendice, l'auteur indique le calcul de la vitesse moyenne pondérée suivant la profondeur, et conseille d'appliquer la méthode des approximations successives, pour le calcul effectif des caractéristiques du courant ascendant.

BIBLIOGRAFIE

1. M. CONSTANTINESCU, H. PASCAL, *Forajul cu aer.* Petrol şi gaze, *5* (1957).
2. Г. ПАСКАЛ, *Расчетный метод для определения дебита и давления восходящего потока в бурении газом.* Нефтяное хозяйство, *8* (1958).
3. — *К вопросу приближенного определения дебита и давления восходящего потока при бурении с продувкой газом.* Известия Высших Учебных заведений. Нефть и газ, *4* (1961).
4. H. PASCAL, *Determinarea vitezei de suspensie în forajul cu gaze.* Petrol şi gaze, *10* (1958).
5. G. IOACHIM, *Extracţia ţiţeiului şi gazelor.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1961, 161.
6. S. N. STEARUS, *Shallow hole air drilling technique proves successful.* World Oil, 224–246 (1959).
7. R. ANGEL, *Volume requirements for air and gas drilling.* Transaction of A.I.M.E., **210**, 325 (1957)
8. R. E. LARSON, O. PETERS, *Air drilling is possible through long intervals, of open hole.* Oil and Gas, **56**, *6*, 105, (1958).

BUDAPEST MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

STUDII

HIDROMECANICĂ

UN CAZ LIMITĂ DE DEZLOCUIRE A PETROLULUI DE CĂTRE APĂ ÎN MEDII POROASE FISURATE

DE

T. OROVEANU

1. *Introducere.* Într-o lucrare anterioară [2], am studiat problema determinării debitului de apă care pătrunde într-un mediu poros fisurat, saturat inițial cu petrol. Reamintim că am presupus că fenomenul este plan și am considerat un singur bloc poros, de secțiune transversală dreptunghiulară, care se mărginește pe una din fețele sale cu o fisură verticală. De asemenea, am admis că poziția contactului inițial dintre apă și petrol coincide cu planul orizontal corespunzător feții inferioare a blocului. În sfîrșit, am presupus că extracția petrolului se face numai prin fisură, celelalte fețe ale blocului fiind deci frontiere impermeabile (fig. 1).

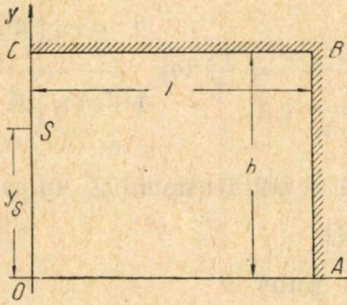


Fig. 1

Din cauza geometriei destul de complicate a sistemului, fenomenul de avansare a apei de talpă în mediul poros a fost studiat în lucrarea citată cu ajutorul metodei simplificate care a fost propusă de M. Muskat. În afară de aceasta, am neglijat efectul pe care scurgerea îl are asupra variației presiunii pe frontierele permeabile OA și OC ale blocului, fapt care ne-a permis să scriem cu ușurință condițiile la limite corespunzătoare. Calculele ne-au condus la o expresie a debitului Q_i care pătrunde prin fața inferioară a blocului precum și la o estimare a debitului Q_f care intră în bloc prin fisură. Formulele găsite, care nu pot fi considerate cantitativ exacte din cauza aproximațiilor de metodă și de calcul, pun însă în evidență parametrii fizici care influențează fenomenul, interesul lor calitativ fiind cert.

În cele ce urmează, vom relua această problemă pentru a urmări ce devin formulele deduse în [2] atunci cînd raportul $\frac{l}{h}$ (fig. 1) ia valori mari. La limită, vom considera și cazul în care acest raport devine infinit, situație care permite o tratare mai simplă a problemei.

2. *Cazul în care raportul* $\frac{l}{h}$ *este mare.* În lucrarea [2], am dedus pentru debitul Q_i expresia

$$Q_i = \frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,l\,\frac{y_s}{l}\log\frac{1+\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)}{1-\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)}, \qquad (1)$$

în care k este permeabilitatea, μ — vîscozitatea[1]; γ_a — greutatea specifică a apei; γ_t — aceea a petrolului; y_s — înălțimea apei în fisură; cn — funcția cosinus amplitudine a lui Jacobi; K — integrala eliptică de specia întîia completă relativă la modulul $\varkappa$; iar $\varkappa'$ — modulul complementar[2]. Pentru simplificare, vom scrie acest debit sub forma adimensională

$$\overline{Q}_i = \frac{Q_i}{\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,l} = \frac{y_s}{l}\log\frac{1+\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)}{1-\mathrm{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)}. \qquad (2)$$

Se observă că debitul adimensional $\overline{Q_i}$ nu este altceva decît funcția $g_i\left(\frac{y_s}{l}\right)$ introdusă în [2].

Mai departe vom pune

$$y_s = \alpha h \qquad (3)$$

---

[1] Datorită ipotezelor admise, avem $\frac{k_t}{\mu_t} = \frac{k_a}{\mu_a}$ indicele t referindu-se la petrol (țiței) iar indicele a la apă.

[2] Am adoptat pentru module notațiile $\varkappa$ și $\varkappa'$ pentru a evita confuzia cu permeabilitatea k.

cu $0 < \alpha < 1$, ceea ce ne dă

$$\frac{y_s}{l} = \alpha \frac{h}{l} = \alpha \frac{K'}{K}, \tag{4}$$

unde K' este integrala eliptică de specia întîia completă relativă la modulul complementar $\varkappa'$. În felul acesta, expresia (2) devine

$$\bar{Q}_i = \alpha \frac{h}{l} \log \frac{1 + \operatorname{cn}(\alpha K', \varkappa')}{1 - \operatorname{cn}(\alpha K', \varkappa')}, \tag{5}$$

fiind o funcție de raportul $\frac{h}{l}$. Într-adevăr, valoarea acestui raport determină și pe aceea a integralei complete K' prin intermediul mărimii

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} = e^{-\pi \frac{h}{l}}. \tag{6}$$

Atunci cînd raportul $\frac{h}{l}$, respectiv $\frac{K'}{K}$, tinde către zero, integrala completă K tinde către infinit iar integrala completă K' către $\frac{\pi}{2}$. Se știe că în acest caz modulul $\varkappa$ tinde către unitate, iar modulul complementar $\varkappa'$ către zero. În realitate, K' are valori foarte apropiate de $\frac{\pi}{2}$ chiar atunci cînd raportul $\frac{h}{l}$ este încă destul de departe de a se anula și, corespunzător, $\varkappa'$ este foarte aproape de zero. Astfel, din tabele [3] rezultă că pentru $\varkappa^2 = 0{,}99999$ avem $q = 0{,}50515$, ceea ce, conform relației (6) corespunde la $\frac{h}{l} = 0{,}217$. Obținem, de asemenea, $\varkappa'^2 = 0{,}00001$ și $K' = 1{,}5708$; prin urmare, pentru $\frac{h}{l} \leqslant 0{,}2$ putem lua cu o foarte bună aproximație $K' = \frac{\pi}{2}$ și $\varkappa' = 0$. În acest caz însă, funcția $\operatorname{cn}(\alpha K', \varkappa')$ degenerează în funcția $\cos \alpha K'$ și formula (5) devine

$$\bar{Q}_i = \alpha \frac{h}{l} \log \frac{1 + \cos \alpha \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \alpha \frac{\pi}{2}}, \tag{7}$$

ceea ce înseamnă că, pentru o valoare dată a lui α, debitul adimensional este o funcție liniară de raportul $\frac{h}{l}$.

Considerații asemănătoare putem face și asupra formulei deduse în [2] pentru valoarea aproximativă a debitului Q_f, ce intră în bloc prin fisură

$$Q_f = 2\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,l\,\frac{y_s}{l}\log\frac{\left[\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{2l},\,\varkappa'\right)+\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)\right]\left[1-\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]}{\left[\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{2l},\,\varkappa'\right)-\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)\right]\left[1+\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)\right]}. \tag{8}$$

Sub formă adimensională, avem

$$\overline{Q}_f = \frac{Q_f}{\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a-\gamma_t}{\pi}\,l} = 2\,\frac{y_s}{l}\log\frac{\left[\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{2l},\,\varkappa'\right)+\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)\right]\left[1-\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]}{\left[\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{2l},\,\varkappa'\right)-\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\,\varkappa'\right)\right]\left[1+\operatorname{cn}\left(K\frac{y_s}{l},\varkappa'\right)\right]} \tag{9}$$

sau, dacă ținem seama de (3) și (4)

$$\overline{Q}_f = 2\,\alpha\,\frac{h}{l}\log\frac{\left[\operatorname{cn}\left(\frac{\alpha}{2}K',\,\varkappa'\right)+\operatorname{cn}\,(\alpha K',\varkappa')\right][1-\operatorname{cn}\,(\alpha K',\varkappa')]}{\left[\operatorname{cn}\left(\frac{\alpha}{2}K',\,\varkappa'\right)-\operatorname{cn}\,(\alpha K',\,\varkappa')\right][1+\operatorname{cn}\,(\alpha K'\varkappa')]} \tag{10}$$

debitul adimensional fiind deci funcția $g_f\left(\frac{y_s}{l}\right)$ introdusă în [2].

Pentru $\frac{h}{l} \leqslant 0,\,2$, putem scrie

$$\overline{Q}_f = 2\,\alpha\,\frac{h}{l}\log\frac{\left(\cos\alpha\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\alpha\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{11}$$

și prin urmare pentru o valoare dată a lui α, $\overline{Q}_f$ este de asemenea o funcție liniară de $\frac{h}{l}$.

După cîteva calcule simple, formula (7) devine

$$\overline{Q}_i = \alpha\,\frac{h}{l}\log\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\pi}{4}} \tag{12}$$

în timp ce în loc de (11) obținem

$$\overline{Q}_f = 2\,\alpha\,\frac{h}{l}\log\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\alpha\frac{3\pi}{8}\,\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{8}}. \tag{13}$$

Dacă facem acum raportul celor două debite adimensionale

$$\frac{\bar{Q}_f}{\bar{Q}_i} = 2\left[\frac{\log\left(\operatorname{tg}\alpha\frac{3\pi}{8}\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{8}\right)}{\log\operatorname{tg}^2\alpha\frac{\pi}{4}} - 1\right], \tag{14}$$

se observă că acesta depinde numai de valoarea lui α. Astfel, pentru $\alpha = 0{,}5$ avem $\frac{\bar{Q}_f}{\bar{Q}_i} = 0{,}29026$.

3. *Cazul în care raportul* $\frac{l}{h}$ *este infinit.* Situația considerată în cele ce preced are drept caz limită pe acela în care raportul $\frac{l}{h}$ devine infinit, respectiv baza blocului, poros este infinită (fig. 2). Cu aceleași ipoteze ca și în [2] introducem funcția

$$\varphi = -\frac{k}{\mu}(p + \gamma y), \tag{15}$$

care este armonică precum și funcția de curent ψ conjugată armonic cu φ. Condițiile la limite, stabilite în lucrarea citată, sînt

$$\varphi = -\frac{k}{\mu}(p_C + \gamma_t h), \tag{16}$$

pe CS,

$$\varphi = -\frac{k}{\mu}[p_C + \gamma_t h + (\gamma_a - \gamma_t)\, y_S], \tag{17}$$

pe SO și OA precum și

$$\psi = 0 \tag{18}$$

pe BC, p_C fiind presiunea din punctul C considerată constantă.

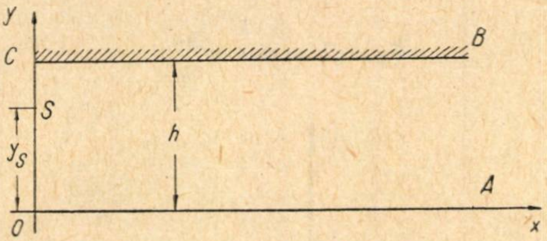


Fig. 2

Cu ajutorul funcției [1]

$$\zeta = \operatorname{ch} \pi \frac{z}{h} - 1, \tag{19}$$

fîșia semiinfinită din planul z se reprezintă pe semiplanul superior ζ (fig. 3), corespondența punctelor de pe frontieră fiind $z = \infty$ cu $\zeta = \infty$, $z = 0$, cu $\zeta = 0$ și $z = ih$ cu $\zeta = -2$.

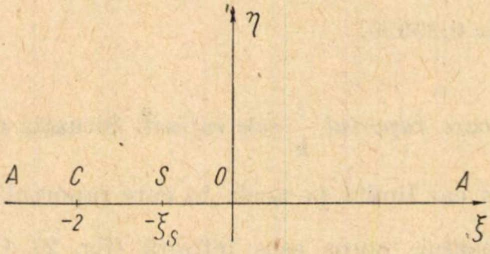


Fig. 3

Pentru punctul S $(z = iy_S)$ avem

$$\zeta = -\xi_S \tag{20}$$

cu

$$\xi_S = 1 - \cos \pi \frac{y_S}{h}. \tag{21}$$

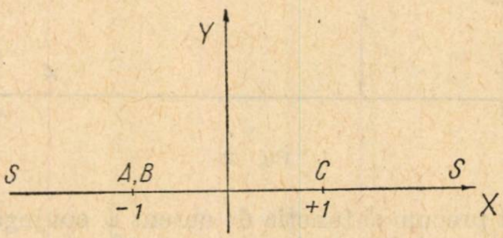


Fig. 4

Mai departe, prin funcția

$$Z = \frac{\xi_S - 4 - \zeta}{\zeta + \xi_S}, \tag{22}$$

obținem reprezentarea semiplanului superior ζ pe semiplanul superior Z, punctul $\zeta = \infty$ corespunzînd cu $Z = -1$, $\zeta = -2$ cu $Z = +1$ și $\zeta = -\xi_S$ cu $Z = \infty$ (fig. 4).

În acest ultim plan, considerăm funcția de variabilă complexă

$$F(Z) = \Phi + i\,\Psi \tag{23}$$

şi observăm că trebuie să avem

$$\Phi = -\frac{k}{\mu}\,[p_C + \gamma_t h + (\gamma_a - \gamma_t)\, y_s] \quad \text{pe} \quad (-\infty,\, -1),$$

$$\Psi = 0 \quad \text{pe} \quad (-1,\, +1),$$

$$\Phi = -\frac{k}{\mu}(p_C + \gamma_t\, h) \quad \text{pe} \quad (+1,\, +\infty).$$

Soluţia acestei probleme este de aceeaşi formă cu cea utilizată în [2] şi anume

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\, y_s \arccos Z - \frac{k}{\mu}(p_C + \gamma_t\, h) = \\ &= i\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\, y_s \log (Z + \sqrt{Z^2 - 1}) - \frac{k}{\mu}\,(p_C + \gamma_t\, h). \end{aligned} \tag{24}$$

Revenind la planul z găsim

$$f(z) = -\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\, y_s \arccos \frac{\cos \pi\dfrac{y_S}{h} + 2 + \operatorname{ch} \pi\,\dfrac{z}{h}}{\cos \pi\,\dfrac{y_S}{h} - \operatorname{ch}\, \pi\,\dfrac{z}{h}} - \frac{k}{\mu}(p_C + \gamma_t h). \tag{25}$$

Viteza de filtrare, sub formă complexă, se calculează uşor în planul ζ, în care avem

$$f(\zeta) = -\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\, y_S \arccos \frac{\xi_S - 4 - \zeta}{\zeta + \xi_S} - \frac{k}{\mu}\,(p_C + \gamma_t h), \tag{26}$$

respectiv

$$\frac{df}{d\zeta} = -\, i\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\, y_S\, \frac{1}{\zeta + \xi_S}\sqrt{\frac{2 - \xi_S}{2 + \zeta}}\,. \tag{27}$$

În planul z, obţinem

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= v_x - i v_y = \frac{df}{d\zeta}\,\frac{1}{\dfrac{dz}{d\zeta}} = \\ &= -\, i\,\frac{k}{\mu}(\gamma_a - \gamma_t)\,\frac{y_{.}}{h}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\, \pi\,\dfrac{z}{h} - \cos \pi\,\dfrac{y_S}{h}}\sqrt{\left(\operatorname{ch}\, \pi\,\frac{z}{h} - 1\right)\left(\cos \pi\,\frac{y_S}{h} + 1\right)}. \end{aligned} \tag{28}$$

Pe axa reală ($x \geqslant 0$, $y = 0$), componenta v_z este nulă, iar v_y are expresia

$$v_y = \frac{k}{\mu}(\gamma_a - \gamma_t)\frac{y_S}{h}\frac{1}{\operatorname{ch}\pi\frac{x}{h} - \cos\pi\frac{y_S}{h}}\sqrt{\left(\operatorname{ch}\pi\frac{x}{h} - 1\right)\left(\cos\pi\frac{y_S}{h} + 1\right)}. \quad (29)$$

De asemenea, pe axa imaginară ($x = 0$, $y \geqslant 0$) numai componenta v_x a vitezei are o expresie diferită de zero şi anume

$$v_x = \frac{k}{\mu}(\gamma_a - \gamma_t)\frac{y_S}{h}\frac{1}{\cos\pi\frac{y}{h} - \cos\pi\frac{y_S}{h}}\sqrt{\left(1 - \cos\pi\frac{y}{h}\right)\left(1 + \cos\pi\frac{y_S}{h}\right)}. \quad (30)$$

Se constată imediat că pentru $y < y_S$, v_x este pozitivă, în timp ce pentru $y > y_S$ v_x este negativă, fapt care corespunde cu schema fizică a problemei.

Trecînd la calculul debitului, întîmpinăm aceeaşi dificultate semnalată şi în [2], datorită singularităţii pe care o au în punctul $z = iy_S$ atît $f(z)$ cît şi derivata sa, respectiv viteza. Vom proceda deci ca şi în lucrarea citată, determinînd mai întîi debitul Q_i care pătrunde prin faţa inferioară a blocului poros. În acest scop, este suficient să găsim valoarea funcţiei de curent în punctul $z = 0$. După un calcul analog cu cel expus în [2], obţinem

$$\psi\Big|_{z=0} = \frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}y_S \log\frac{1 - \cos\frac{\pi}{2}\frac{y_S}{h}}{1 + \cos\frac{\pi}{2}\frac{y_S}{h}}, \quad (31)$$

iar debitul căutat are expresia

$$Q_i = \frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}h\frac{y_S}{h}\log\frac{1 + \cos\frac{\pi}{2}\frac{y_S}{h}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}\frac{y_S}{h}}, \quad (32)$$

care se mai scrie, cu ajutorul relaţiei (3),

$$Q_i = \frac{k}{\mu}\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}h\,\alpha\log\frac{1 + \cos\alpha\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\alpha\frac{\pi}{2}}. \quad (33)$$

Putem introduce și aici un debit adimensional

$$\overline{Q}_i = \frac{Q_i}{\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\,h} = \alpha \log \frac{1 + \cos \alpha \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \alpha \frac{\pi}{2}}, \tag{34}$$

și este ușor de constatat că, dacă înlocuim în formula (1) factorul $l \frac{y_S}{l}$ cu $h \frac{y_S}{h}$, debitul adimensional pentru cazul blocului de dimensiuni finite este dat, dacă $\frac{l}{h}$ este mare, tot de formula și (34).

Pentru estimarea debitului Q_f care pătrunde în mediul poros prin fisură, vom aplica același procedeu ca și în [2], scriind

$$Q_f = 2 \int_0^{\frac{y_S}{2}} v_x \, dy. \tag{35}$$

Cu expresia (30) a vitezei v_x, găsim după calcule simple

$$Q_f = 2\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\gamma_a - \gamma_t}{\pi}\,h\,\alpha \log \frac{\left(\cos \alpha \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos \alpha \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right)\left(1 + \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right)} \tag{36}$$

și

$$\overline{Q}_f = 2\,\alpha \log \frac{\left(\cos \alpha \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos \alpha \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right)\left(1 + \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right)}\,. \tag{37}$$

Și aici observăm că, dacă înlocuim în formula (8) factorul $l \frac{y_S}{l}$ cu $h \frac{y_S}{h}$, expresia precedentă reprezintă debitul adimensional și pentru blocul de dimensiuni finite atunci cînd $\frac{l}{h}$ este mare.

Prin urmare, dacă $\frac{h}{l} \leqslant 0{,}2$ putem efectua calculele în ipoteza că blocul este infinit, fără a introduce prin aceasta nici o eroare.

Primită la redacție la 27 februarie 1962

ОДИН ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ В ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

РЕЗЮМЕ

В продолжении предыдущей работы [2], автор рассматривает случай, когда основание пористого блока становится значительным по сравнению с высотой. Далее показывается, что полученные результаты совпадают с полученными для случая, когда блок является бесконечным.

UN CAS LIMITE DE DÉPLACEMENT DU PÉTROLE PAR L'EAU DANS UN MILIEU POREUX AYANT DES FISSURES

RÉSUMÉ

L'auteur reprend le problème déjà traité dans un travail précédent [2] et envisage le cas où la base du bloc poreux est grande par rapport à la hauteur. Il montre ensuite que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux que l'on trouve lorsqu'on suppose que le bloc poreux est infini.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor*. II. Ed. Acad. R.P.R., București, 1955, 126.
2. T. OROVEANU, *Asupra dezlocuirii petrolului de către apă în medii poroase fisurate*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *2* (1962).
3. Б. И. СЕГАЛ, К. А. СЕМЕНДЯЕВ, *Пятизначные математические таблицы*. Издательство Академии Наук СССР, Москва-Ленинград, 1950, 420.

HIDROMECANICĂ

MIŞCAREA IMPULSIVĂ DE ROTAŢIE A UNEI SFERE ÎNTR-UN FLUID VÎSCOS

DE

S. R. MAJUMDER[1]

1. INTRODUCERE

Scopul acestei lucrări este de a determina mişcarea într-un fluid vîscos, iniţial în repaus, rezultată ca urmare a rotaţiei bruşte $\Omega\cdot\delta(t)$ a unei sfere avînd raza a în jurul axei z $\delta(t)$ fiind funcţia delta a lui Dirac. Fluidul este supus unei forţe externe $z\omega^2$ acţionînd pe unitatea de masă a fluidului de-a lungul axei de rotaţie, unde ω este viteza unghiulară a fluidului.

Presiunea în orice punct al fluidului este dată de

$$p = \int \rho\, r\omega^2\, dr + \text{o constantă} \tag{1}$$

unde $\omega \equiv \omega(r,\ t)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ şi componentele vitezei în orice punct al cîmpului $(x,\ y,\ z)$ sînt presupuse a fi $u = -\,\omega y$, $v = \omega x$, $w = 0$.

Utilizînd funcţii Bessel modificate, de ordin fracţionar, s-a obţinut o soluţie analitică exactă a problemei şi s-a prezentat grafic raportul ω/Ω pentru diferite valori ale lui r.

2. ECUAŢIILE DE MIŞCARE ŞI REZOLVAREA LOR

În cazul de faţă ecuaţiile de mişcare ale unui lichid incompresibil vîscos, omogen se reduc la

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\, r\omega^2 \tag{3}$$

unde $\nu = \mu/\rho$ este coeficientul cinematic de viscozitate [1].

---

[1] Facultatea de matematică, Universitatea Jadavpur, Calcutta.

Condițiile la limită care trebuie satisfăcute sînt

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & \omega(a,\ t) = \Omega \cdot \delta(t), \\ \text{(b)} & \omega(r,\ 0) = 0, \\ \text{(c)} & \lim\limits_{r \to \infty} \ \omega(r,\ t) = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Să definim pe $\delta(t)$ în felul următor : [2]

$$\left.\begin{aligned} \delta(t) &= 0, \quad t \leqq 0 \\ &= \frac{1}{\epsilon}, \quad 0 < t < \epsilon \\ &= 0, \quad t \geqq \epsilon \end{aligned}\right\}$$

unde ϵ poate fi făcut oricît de mic dorim. Această funcție are prima proprietate că, pentru orice ϵ, se anulează pentru $t \leqslant 0$; și este zero cînd $\epsilon \to 0$ pentru toate valorile lui t, exceptînd acele din regiunea infinitesimală a lui ϵ la dreapta originii, unde este foarte mare.

Punînd $\nu t = T$ și $\omega(r,\ T) = \dfrac{W(r,\ T)}{r^{3/2}}$ în (2) și (4) obținem

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{9W}{4r^2} \tag{5}$$

și

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & W(a,\ T) = a^{3/2}\ \Omega\ \delta(T), \\ \text{(b)} & W(r,\ o) = 0, \\ \text{(c)} & \lim\limits_{r \to \infty} W(r,\ T) = 0. \end{array}\right\}. \tag{6}$$

Înmulțind cu e^{-pT} întreaga ecuație (5) și integrînd de la o la ∞, obținem

$$\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \overline{W}}{\partial r} - \left(p + \frac{9}{4r^2}\right)\overline{W} = 0 \tag{7}$$

unde $\overline{W}$ este transformata Laplace a lui W și este definită de relația

$$\overline{W}(r,\ p) = \int_0^\infty W(r,\ T)\ e^{-pT}\ dT.$$

Soluția ecuației (7) este

$$\overline{W}(r, p) = C\, I_{3/2}(r\, p^{1/2}) + D K_{3/2}(r\, p^{1/2}), \tag{8}$$

unde $I_{3/2}$ și $K_{3/2}$ sînt funcții Bessel modificate de ordinul 3/2.

Condițiile la limită (6a) și (6b) sînt echivalente cu

$$\overline{W}(a,\ p) = a^{3/2}\Omega \qquad \text{deoarece} \int_0^\infty \delta(T)\, e^{-pT}\, dT = 1.$$
$$\overline{W}(r,\ 0) = 0$$

Condițiile la limită dau

$$C = 0,\ D = \frac{a^{3/2}\,\Omega}{K_{3/2}(a\,p^{1/2})},$$

$$\overline{W}(r,\ p) = a^{3/2}\,\Omega\,\frac{K_{3/2}(rp^{1/2})}{K_{3/2}(ap^{1/2})}. \tag{9}$$

Din inversarea formulei Laplace obținem

$$W(r,\ T) = \frac{a^{3/2}\Omega}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{K_{3/2}(rp^{1/2})}{K_{3/2}(ap^{1/2})}\, e^{pT}\, dp. \tag{10}$$

Pentru ordinul $\left(n + \frac{1}{2}\right)$ unde n este un întreg, funcțiile Bessel și funcțiile Bessel modificate se reduc ambele la o formă finită.

Acum este cunoscut că [3]

$$K_{n+\frac{1}{2}}^{(z)} = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}\cdot z^{n+1}\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{e^{-z}}{z},$$

Punînd $n = 1$, $z = rp^{1/2}$ și $z = ap^{1/2}$ obținem după unele simplificări

$$\frac{K_{3/2}(rp^{1/2})}{K_{3/2}(ap^{1/2})} = \frac{1 + rp^{1/2}}{1 + ap^{1/2}}\cdot\frac{a^{3/2}}{r^{3/2}}\, e^{(a-r)\,p^{1/2}}.$$

Astfel avem

$$\begin{aligned}
\omega(r,\ T) &= \frac{W(r,\ T)}{r^{3/2}} = \frac{a^3\Omega}{r^3}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1 + rp^{1/2}}{1 + ap^{1/2}}\, e^{-(r-a)\,p^{1/2}}\cdot e^{pT}\, dp = \\
&= \frac{a^3\Omega}{r^3}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{a}(a^{-1} + p^{1/2})^{-1}\, e^{-(r-a)\,p^{1/2}}\cdot e^{pT}\, dp\, + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{r}{a}\, p^{1/2}(a^{-1} + p^{1/2})^{-1}\cdot e^{-(r-a)\,p^{1/2}}\, e^{pT}\, dp\right] = \\
&= \frac{a^3\Omega}{r^3}\left[\frac{1}{a}I_1 + \frac{r}{a}I_2\right]
\end{aligned} \tag{11}$$

unde I_1 și I_2 sînt inversele transformatelor Laplace

$$(a^{-1} + p^{1/2})^{-1}\, e^{-(r-a)\,p^{1/2}}$$

și

$$p^{1/2}(a^{-1} + p^{1/2})^{-1}\, e^{-(r-a)\,p^{1/2}}.$$

Din tabelele de transformări integrale [4] avem

$$I_1 = \pi^{-1/2} T^{-1/2} e^{-1/4 (r-a^2)/T} - \frac{1}{a} e^{\left(\frac{r-a}{a} + \frac{T}{a^2}\right)} \text{Erfc.} \left(\frac{r-a}{2T^{1/2}} + \frac{T^{1/2}}{a}\right) \tag{12}$$

$$I_2 = \pi^{-1/2} T^{-1} \left(\frac{r-a}{2T^{1/2}} - \frac{T^{1/2}}{a}\right) e^{-\frac{1}{4}(r-a)^2/T} +$$

$$+ \frac{1}{a^2} e^{\left(\frac{r-a}{a} + \frac{T}{a^2}\right)} \text{Erfc.} \left(\frac{r-a}{2T^{1/2}} + \frac{T^{1/2}}{a}\right) \tag{13}$$

unde

$$\text{Erfc.}\,(u) = 1 - \text{Erf.}\,(u)$$

și

$$\text{Erfc.}\,(u) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^u e^{-x^2}\, dx,$$

$$\therefore\ \omega(r,\ T) = \frac{a^3 \Omega}{r^3} \left[\frac{1}{a} \left\{ \pi^{-1/2} T^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}(r-a)^2/T} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{a} e^{\left(\frac{r-a}{a} + \frac{T}{a^2}\right)} \text{Erfc.} \left(\frac{r-a}{2T^{1/2}} + \frac{T^{1/2}}{a}\right) \right\} + \frac{r}{a} \left\{ \pi^{-1/2} T^{-1} \left(\frac{r-a}{2T^{1/2}} - \frac{T^{1/2}}{a}\right) e^{-\frac{1}{4}(r-a)^2/T} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{a^2} e^{\left(\frac{r-a}{a} + \frac{T}{a^2}\right)} \text{Erfc.} \left(\frac{r-a}{2T^{1/2}} + \frac{T^{1/2}}{a}\right) \right\} \right].$$

Această valoare a lui $\omega\,(r,\ T)$ reprezintă soluția completă a probleme noastre.

3. EXEMPLU NUMERIC DE CALCUL

Pentru un calcul numeric se introduce integrala de probabilitate $P\,(x)$ dată de

$$P\,(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Se poate ușor deduce că

$$\text{Erfc.} \left(\frac{r-a}{2T^{1/2}} + \frac{T^{1/2}}{a}\right) = 2 \left[1 - P \left\{ \frac{r-a}{(2T)^{1/2}} + \frac{(2T)^{1/2}}{a} \right\} \right],$$

a fiind unitatea de măsură și $2T = 1$, atunci (12) și (13) se reduc la

$$I_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-(r-1)^2/2} - 2e^{(r-1/2)} \{1 - P\,(r)\}.$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (r-2)\, e^{-(r-1)^2/2} + e^{(r-1/2)} \{1 - P\,(r)\}.$$

Înlocuind aceste valori ale lui I_1 şi I_2 (11) se reduce la

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{r^3}\Bigg[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-(r-1)^2/2}\{1 + r(r-2)\} + e^{(r-1/2)}\cdot(r-2)\cdot\{1 - P(r)\}. \quad (14)$$

Valorile raportului ω/Ω sînt trasate în funcţie de valorile lui r în figura 1.

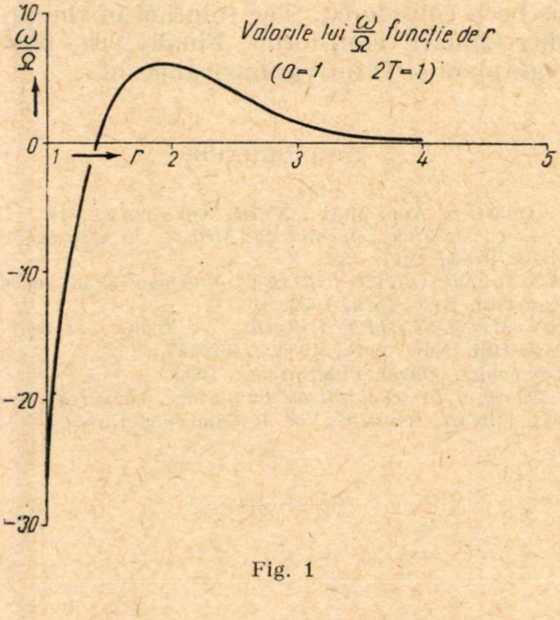


Fig. 1

În încheiere, aş vrea să exprim mulţumiri prof. B. Sen, D. Sc., F.N.I., pentru ajutorul său binevoitor în pregătirea acestei lucrări.

Primită la redacţie la 23 ianuarie 1962

ИМПУЛЬСИВНОЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ СФЕРЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается импульсивное вращательное движение сферы вязкой жидкости. Решение задачи получено путем применения преобразования Лапласа. В конце работа дополнена построением диаграммы ω/Ω при различных значениях r.

THE IMPULSIVE ROTATORY MOTION OF A SPHERE IN A VISCOUS FLUID

ABSTRACT

In this paper the impulsive rotatory motion of a sphere in a viscous fluid has been considered. The solution of the problem has been obtained by using Laplace Transforms. Finally, the paper is completed by drawing the graph of ω/Ω for various values of r.

BIBLIOGRAFIE

1. C. D. GHILDYAL, Quart. of App. Math., **XVIII**, 396–399 (1961).
2. H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Operational Methods in Applied Mathematics*. Oxford University Press, 1947, 232.
3. * * * *BATEMAN MANUSCRIPT PROJECT – Higher Transcendental functions*. Vol. **2**, Mc Graw-Hill, New York, 1954, 10–11.
4. * * * *BATEMAN MANUSCRIPT PROJECT – Tables of Integral transforms*. Vol. **1**, Mc Graw-Hill, New York, 1954, 246, 247.
5. H. LAMB, *Hydrodynamics*. Dover Publications, 1932.
6. G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions*. Cambridge, University Press, 1944.
7. N. L. JOHNSON, H. TETLEY, *Statistics*. Vol. **1**. Cambridge University Press, 1951, 280.

STUDII

HIDROMECANICĂ

ASUPRA MIȘCĂRII LONGITUDINALE A UNUI CILINDRU CIRCULAR ÎNTR-UN LICHID VÎSCOS CONȚINUT ÎNTR-UN CILINDRU CIRCULAR COAXIAL

DE

T. K. CHAUDHURY ¹)

INTRODUCERE

Scurgerea vîscoasă, laminară și permanentă într-un inel cu pereți poroşi a fost cercetată de Berman (1958) [1]. Khamrui (1960) [2] a studiat oscilația unui cilindru circular într-un lichid vîscos conținut într-un cilindru circular poros coaxial.

În acest articol vom considera în primul rînd scurgerea unui lichid vîscos între doi cilindri circulari poroși coaxiali, cînd cilindrul interior începe să se miște la $t = 0$ cu viteza constantă U, în direcția lungimii lui. Se obține transformata Laplace a soluției ca funcții de funcțiile Bessel modificate. Transformata inversă, în cazul general, fiind complicată, se examinează soluția în două cazuri extreme ale coeficienților de vîscozități foarte mari și foarte mici. Ca un caz special, s-a obținut soluția mișcării longitudinale a unui piston care pornește din repaos într-un lichid vîscos conținut într-un cilindru circular, făcînd componenta radială a vitezei egală cu zero. De asemenea, s-a considerat soluția în cazul în care numărul Reynolds al scurgerii transversale are o valoare particulară egală cu unitatea. În continuare, se examinează soluțiile corespunzătoare pentru lichidul vîscos conținut între doi cilindri circulari coaxiali, în cazul în care se dă cilindrului interior o viteză impulsivă în direcția lungimii sale.

1. Vom considera mişcarea unui lichid vîscos conținut între doi cilindri circulari, poroşi și concentrici, avînd razele a și b ($b > a$), în cazul în care cilindrul interior începe să se miște longitudinal la $t = 0$ cu viteza constantă U, cilindrii fiind presupuşi a fi suficient de lungi. Să presupunem

---

¹) Facultatea de matematică, Colegiul Vidyasagar, Calcutta.

că debitul de injecție al fluidului la un perete este egal cu debitul de sucțiune al fluidului la celălalt perete și că aceste debite sînt independente de poziția axială din tub. Dacă alegem coordonate polare cilindrice, cu axa de-a lungul axei tubului, ecuațiile de mișcare și continuitate sînt

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right], \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \tag{3}$$

unde u, v sînt componentele vitezei în direcțiile x și r, care cresc respectiv, ν este coeficientul cinematic de viscozitate iar ρ este densitatea lichidului.

Condiția ca debitul de sucțiune la un perete să fie egal cu debitul de injecție la celălalt perete este satisfăcută dacă

$$Cv_b = av_a, \tag{4}$$

unde v_a, v_b sînt respectiv vitezele scurgerii transversale la pereții tubului mai mic și la aceia ai tubului mai mare. Toate cantitățile fizice sînt independente de x și atunci ecuațiile (3) și (4) dau

$$v \cdot r = av_a = Cv_b,$$

$$v = \frac{av_a}{r} = \frac{Cv_b}{r}. \tag{5}$$

Deci, presupunînd că viteza scurgerii transversale este independentă de timp, din (2) obținem

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{v_a^2}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \tag{6}$$

unde $p = p_0$ cînd $r = a$.

Ecuația (1) devine acum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{av_a}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

sau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1 - \mathfrak{R}}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial u}{\partial t}; \quad a < r < b,\ t > 0 \tag{7}$$

unde $\mathfrak{R} = \frac{av_a}{\nu}$ este numărul Reynolds al scurgerii transversale.

Condiţiile la limită şi iniţiale pentru $u\,(r,\,t)$ sînt

$$\begin{aligned} &u\,(r,\,t) = 0 && \text{pentru } t < 0,\ a \leqslant r \leqslant b, \\ &\left.\begin{aligned} u\,(a,\,t) &= U.\,H\,(t) \\ u\,(b,\,t) &= 0 \end{aligned}\right\} && \text{pentru } t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{8}$$

unde $H\,(t)$ este definit de

$$\begin{aligned} H\,(t) &= 0 && \text{pentru } t \leqslant 0, \\ &= 1 && \text{pentru } t > 0. \end{aligned}$$

Transformata Laplace $\bar{u}\,(r,\,p)$ al lui $u\,(r,\,t)$ satisface relaţia

$$\frac{d^2\bar{u}}{dr^2} + \frac{1-\mathfrak{R}}{r}\,\frac{d\bar{u}}{dr} = \frac{p}{\nu}\,\bar{u}, \tag{9}$$

cu condiţiile la limită

$$\begin{aligned} \bar{u}\,(a,\,p) &= \frac{U}{p} \\ \bar{u}\,(b,\,p) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Pentru a rezolva ecuaţia (9) efectuăm substituţia

$$\bar{u}\,(r,\,p) = (r)^{\mathfrak{R}/2}.\,F\,(r,\,p), \tag{11}$$

şi obţinem

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dF}{dr} - \left\{q^2 + \frac{(\mathfrak{R}/2)^2}{r^2}\right\}F = 0, \qquad (12$$

unde

$$q^2 = p/\nu.$$

Soluţia lui (12) este

$$F\,(r,\,p) = AI_{\mathfrak{R}/2}\,(qr) + BK_{\mathfrak{R}/2}\,(qr), \tag{13}$$

unde $I_{\mathfrak{R}/2}\,(qr)$ şi $K_{\mathfrak{R}/2}\,(qr)$ sînt funcţii Bessel modificate, respectiv de prima şi a doua speţă, de argumentul (qr).

De aceea, din (11) obţinem

$$\bar{u}\,(r,\,p) = (r)^{\mathfrak{R}/2}.\,\{AI_{\mathfrak{R}/2}\,(qr) + BK_{\mathfrak{R}/2}\,(qr)\}. \tag{14}$$

Din condiţiile la limită (10) avem

$$\begin{aligned} AI_{\mathfrak{R}/2}\,(qa) + BK_{\mathfrak{R}/2}\,(qa) &= \frac{U}{a^{\mathfrak{R}/2}.\,p}, \\ AI_{\mathfrak{R}/2}\,(qb) + BK_{\mathfrak{R}/2}\,(qb) &= 0. \end{aligned}$$

Obținînd A și B și substituind în (14) obținem

$$\bar{u}(r,\ p)=\frac{U}{p}\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2}\cdot\frac{I_{\mathfrak{R}/2}(qr)\,K_{\mathfrak{R}/2}(qb)-K_{\mathfrak{R}/2}(qr)\,I_{\mathfrak{R}/2}(qb)}{I_{\mathfrak{R}/2}(qa)\,K_{\mathfrak{R}/2}(qb)-K_{\mathfrak{R}/2}(qa)\,I_{\mathfrak{R}/2}(qb)}. \tag{15}$$

Obținem din nou relația ([3], p. 78)

$$K_n(z)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{-n}(z)-I_n(z)}{\sin n\pi},$$

unde prin n s-a notat ordinul funcțiilor Bessel. De aceea, $\bar{u}(r,\ p)$ poate fi de asemenea dat sub froma

$$\bar{u}(r,\ p)=\frac{U}{p}\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2}\frac{I_{\mathfrak{R}/2}(qr)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(qb)-I_{\mathfrak{R}/2}(qb)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(qr)}{I_{\mathfrak{R}/2}(qa)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(qb)-I_{\mathfrak{R}/2}(qb)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(qa)}. \tag{16}$$

2. *Două cazuri extreme* a) Pentru coeficienți mari de vîscozitate, q este mic. Avem ([3], p. 77)

$$I_{\mathfrak{R}/2}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\mathfrak{R}/2}(a_0+a_1z^2+\ldots),$$

$$I_{-\mathfrak{R}/2}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\mathfrak{R}/2}(b_0+b_1z^2+\ldots),$$

unde

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mathfrak{R}}{2}+1\right)},\quad a_1=\frac{1}{4\Gamma\left(\frac{\mathfrak{R}}{2}+2\right)},\ \ldots,\\ b_0&=\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+1\right)},\quad b_1=\frac{1}{4\Gamma\left(-\frac{\mathfrak{R}}{2}+2\right)},\ \ldots.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Deci, neglijînd termenii care conțin puteri ale lui q mai mari decît doi, avem

$$I_{\mathfrak{R}/2}(ql)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(qm)-I_{\mathfrak{R}/2}(qm)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(ql)=$$

$$=\left(\frac{l}{m}\right)^{\mathfrak{R}/2}(a_0b_0+a_0b_1q^2m^2+a_1b_0q^2l^2)-\left(\frac{m}{l}\right)^{\mathfrak{R}/2}\cdot(a_0b_0+a_0b_1q^2l^2+a_1b_0q^2n^2)=$$

$$=a_0b_0\left[\left(\frac{l}{m}\right)^{\mathfrak{R}/2}-\left(\frac{m}{l}\right)^{\mathfrak{R}/2}\right]+q^2\left[(a_0b_1m^2+a_1b_0l^2)\left(\frac{l}{m}\right)^{\mathfrak{R}/2}-\right.$$

$$\left.-(a_0b_1l^2+a_1b_0m^2)\left(\frac{m}{l}\right)^{\mathfrak{R}/2}\right].$$

Astfel încît, reţinînd numai puterile pînă la ordinul doi ale lui q şi substituind apoi valorile lui q, obţinem din (16)

$$\bar{u}\,(r,\ p) = U\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} \times \Bigg[\frac{\left(\frac{b}{r}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}} \times \frac{1}{p} + \frac{1}{\nu\, a_0 b_0 \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\right\}^2} \times$$

$$\times \Bigg(\Bigg\{(a_0 b_1 r^2 + a_1 b_0 b^2)\left(\frac{b}{r}\right)^{\mathfrak{R}/2} - (a_0 b_1 b^2 + a_1 b_0 r^2)\left(\frac{r}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\Bigg\} \times$$

$$\times \Bigg\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\Bigg\} - \Bigg\{(a_0 b_1 a^2 + a_1 b_0 b^2)\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} -$$

$$- (a_0 b_1 b^2 + a_1 b_0 a^2)\left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\Bigg\} \times \Bigg\{\left(\frac{b}{r}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\Bigg\}\Bigg)\Bigg].$$

De aceea

$$U\,(r,\ t) = U\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} \cdot \Bigg[\frac{\left(\frac{b}{r}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}} \cdot H\,(t) + \frac{\delta\,(t)}{\nu\, a_0 b_0 \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2}\right\}^2} \times$$

$$\times \Bigg(\Bigg\{(a_0 b_1 r^2 + a_1 b_0 b^2)\left(\frac{b}{r}\right)^{\mathfrak{R}/2} - a_0 b_1 b^2 + a_1 b_0 r^2)\left(\frac{r}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\Bigg\} \times$$

$$\times \Bigg\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\Bigg\} - \Bigg\{(a_0 b_1 a^2 + a_1 b_0 b^2)\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} -$$

$$- (a_0 b_1 b^2 + a_1 b_0 a^2)\left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\Bigg\} \times \Bigg\{\left(\frac{b}{r}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\Bigg\}\Bigg)\Bigg], \tag{18}$$

unde $\delta\,(t)$ este funcţia delta a lui Dirac, definită de

$$\frac{d}{dt}\{H\,(t)\} = \delta\,(t).$$

b) Pentru coeficienţii mici de viscozitate, q este mare şi avem formulele asimptotice ([3], p. 202—203)

$$K_n\,(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} \cdot e^{-z} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n,\ m)}{(2z)^m},$$

$$I_n\,(z) \sim \frac{e^z}{(2\pi\, z)^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,(n,\ m)}{(2z)^m} + \frac{e^{-z-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{(2\pi\, z)^{1/2}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n,\ m)}{(2z)^m}.$$

De aceea, pentru valori foarte mari ale lui q, avem

$$K_{\mathfrak{R}/2}(ql)\, I_{\mathfrak{R}/2}(qm) - I_{\mathfrak{R}/2}(ql)\, K_{\mathfrak{R}/2}(qm) = \frac{1}{2q\,(lm)^{1/2}}\, e^{q(l-m)}.$$

Substituind în (15) obținem aproximativ dacă $l > m$

$$\bar{u}(r,\ p) = \frac{U}{p}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\mathfrak{R}-1}{2}} \cdot \left\{\exp - (r-a)\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right\};\quad r > a$$

$$\therefore\quad u(r,\ t) = U\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\mathfrak{R}-1}{2}} \operatorname{erfc} \frac{r-a}{2\sqrt{\nu t}} \ldots \tag{19}$$

unde

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

3. *Soluția cazului $R = 0$.* Dacă punem $v_a = v_b = 0$, atunci $R = 0$. În acest caz cei doi cilindri sînt cilindri rigizi şi mişcarea este datorită mişcării longitudinale uniforme a unui piston care porneşte din repaus într-un lichid vîscos, conținut într-un cilindru circular.

Ecuația (7) se reduce la

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial u}{\partial t};\quad a < r < b,\ t > 0,$$

şi condițiile la limită pentru u sînt aceleaşi ca în (8).

Astfel, transformata Laplace $\bar{u}(r, p)$ a $u(r, t)$ în acest caz este dată de

$$\bar{u}(r, p) = \frac{U}{p} \cdot \frac{I_0(q\,r)\, K_0(qb) - K_0(qr)\, I_0(qb)}{I_0(qa)\, K_0(qb) - K_0(qa)\, I_0(qb)};\ \left(q = \sqrt{\frac{p}{\nu}}\right),$$

$$\therefore\ u(r, t) = \frac{U}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{I_0(q'r)\, K_0(q'b) - K_0(q'r)\, I_0(q'b)}{I_0(q'a)\, K_0(q'b) - K_0(q'a)\, I_0(q'b)} \cdot \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda,$$

unde $q' = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\nu}}$.

Integrantul este o funcție uniformă de λ şi are polii săi $\lambda = 0$ şi $\lambda = -\nu\alpha_1^2, -\nu\alpha_2^2, \ldots$ unde α_1, α_2, sînt rădăcinile ecuației

$$J_0(\alpha\, a)\, Y_0(\alpha b) - J_0(\alpha b)\, Y_0(\alpha\, a) = 0.$$

Să alegem conturul de integrare: porțiunea din linia dreaptă $\lambda = r$ şi porțiunea din cercul $|\lambda| = C$ pe care nu există nici un pol. Astfel, integrala de-a lungul cercului tinde către zero cînd raza $C \to \infty$. Reziduul integrant în $\lambda = -\nu\alpha_1^2$ este

$$\pi \cdot \frac{J_0(r\alpha_1)\,Y_0(b\alpha_1) - Y_0(r\alpha_1)\,J_0(b\alpha_1)}{J_0^2(a\alpha_1) - J_0^2(b\alpha_1)} \cdot J_0(a\alpha_1)\,J_0(b\alpha_1)\,e^{-\nu\alpha_1^2 t}.$$

De asemenea, deoarece

$$I_0(z) = 1 + \frac{1}{4}z^2 + \ldots$$

$$k_0(z) = -\left\{\log\left(\frac{z}{2}\right) + r_1 + \frac{1}{4}z^2\left(\log\frac{z}{2} + r_1 - 1\right)\right\} + \ldots$$

unde r_1 este constanta lui Euler, reziduul în $\lambda = 0$ este

$$\frac{\log\left(\frac{b}{r}\right)}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

De aceea,

$$U(r,t) = U\left[\frac{\log\left(\frac{b}{r}\right)}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} + \pi\sum_{s=1}^{\infty}\frac{I_0(r\alpha s)\,J_0(b\alpha s) - J_0(r\alpha s)\,J_0(b\alpha s)}{J_0^2(a\alpha s) - J_0^2(b\alpha s)} \times \right.$$

$$\left. \times\, J_0(a\alpha s)\,J_0(b\alpha s)\,e^{-\nu\alpha^2 s t}\right]\ldots \qquad (20)$$

Soluţia pentru cazurile vîscozităţii mari poate fi obţinută din (18) prin procesul de trecere la limită, pentru $R \to 0$.

Avem ([4], p. 94)

$$\Gamma'(1) = -\gamma_1,\ \Gamma(2) = -r_1 + 1,$$

unde r_1 este constanta lui Euler.

Astfel, cînd $\mathfrak{R} \to 0$, avem din (17)

$$a_0 \to 1,\ b_0 \to 1;\ a_1 \to \frac{1}{4},\ b_1 \to \frac{1}{4},$$

$$a_0' \to \frac{r_1}{2},\ b_0' \to \frac{r_1}{2};\ a_1' \to \frac{r_1 - 1}{8}\ b_1' \to -\frac{r_1 - 1}{8},$$

unde liniile reprezintă diferenţierea faţă de $\mathfrak{R}$.

Deci, din (18) trecînd la limită $\mathcal{R} \to 0$ obținem

$$U(r \cdot t) = U\left[\frac{\log\left(\dfrac{b}{r}\right)}{\log\left(\dfrac{b}{a}\right)} H(t) + \frac{\delta(t)}{4\nu\left(\log\dfrac{b}{a}\right)^2}\left\{(r^2 - a^2)\log\frac{b}{r}\cdot\log\frac{b}{a} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (b^2 - r^2)\log\frac{b}{a} + (b^2 - a^2)\log\frac{b}{r}\right\}\right]. \tag{21}$$

Forța de întîrziere pe unitatea din suprafața cilindrului interior

$$-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{U}{a}\left[\frac{\mu H(t)}{\log\dfrac{b}{a}} - \frac{p\,\delta(t)}{4\left(\log\dfrac{b}{a}\right)^2}\left\{2a^2\left(\log\frac{b}{a}\right)^2 + 2a^2\log\frac{b}{a} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (b^2 - a^2)\right\}\right],$$

unde $\mu = \nu\rho$.

Pentru cazurile viscozității mici, punînd $\mathcal{R} = 0$ în (19) obținem

$$u(r, t) = U\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{erfc}\frac{r - a}{2\sqrt{\nu t}} \cdots$$

Aici (22)

$$\overline{U}(r, p) = U.\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{p} e^{-(r-a)\sqrt{\frac{p}{\nu}}}.$$

De aceea, transformata forțelor de întîrziere pe unitatea de suprafață pe cilindrul interior

$$= -\mu\left[\frac{\delta\bar{u}}{\delta r}\right]_{r=a} = U\mu\left[\frac{1}{2ap} + \frac{1}{\sqrt{p\nu}}\right].$$

De aceea, forța de întîrziere pe unitatea de suprafață pe cilindrul interior

$$= U\mu\left[\frac{H(t)}{2a} + \frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}}\right].$$

4. *Soluția pentru cazul* $\mathcal{R} = 1$. Este interesant să se considere cazul particular, cînd numărul Reynolds al scurgerii transversale este egal cu unitatea.

Cînd $\mathcal{R} = 1$, ecuaţia (7) devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial u}{\partial t}; \quad a < r < b,\ t > 0\ldots \tag{23}$$

Ecuaţia transformată, este

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{p}{\nu}\,\bar{u}.$$

Soluţia $\bar{u}(r, p)$ a acestei ecuaţii, satisfăcînd condiţiile la limită (10) este

$$\bar{u}(r, p) = \frac{U}{p} \times \frac{\sin h\,(b - r)\sqrt{\frac{p}{\nu}}}{\sin h\,(b - a)\sqrt{\frac{p}{\nu}}}.$$

Astfel

$$u(r, t) = \frac{U}{2\pi i}\int_{r - i\infty}^{r + i\infty} \frac{\sin h\,(b - r)\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}}{\sin h\,(b - a)\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}} \cdot \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\, d\lambda.$$

Integrantul este o funcţie uniformă λ, cu poli simpli în $\lambda = 0$ şi $\lambda = -\frac{n^2\pi^2\nu}{(b - a)^2}$; $n = 1, 2\ldots$

Alegem conturul de integrare ca în cazul de mai înainte.

Polul în $\lambda = -\frac{n^2\pi^2\nu}{(b - a)^2}$ are reziduul

$$\frac{2n\,\pi\nu}{(b - a)^2}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin\frac{n\pi\,(b - r)}{b - a}\cdot\exp\left\{-\frac{n^2\pi^2\nu t}{(b - a)^2}\right\},$$

iar polul în $\lambda = 0$ are reziduul

$$\frac{b - r}{b - a}$$

$$\therefore\ u(r, t) = U\left[\frac{b - r}{b - a} + \frac{2\pi\nu}{(b - a)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\sin\frac{n\pi\,(b - r)}{b - a} \times \right.$$
$$\left. \times \exp.\left\{-\frac{n^2\pi^2\nu t}{(b - a)^2}\right\}\right].$$

5. *Mişcarea impulsivă.* Considerăm mişcarea longitudinală impulsivă a unui lichid vîscos conţinut între doi cilindri circulari poroşi concentrici. Atunci avem pentru viteza $u(r, t)$ aceeaşi ecuaţie (7), adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1 - R}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial u}{\partial t}; \quad a < r < b,\ t > 0, \tag{24}$$

cu condițiile la limită și inițiale modificate

$$\left.\begin{array}{ll} u(r,\ t) = 0 & \text{pentru } t < 0,\ 0 \leqslant r \leqslant b \\ \left.\begin{array}{l} u(a,\ t) = U\,\delta(t) \\ u(b,\ t) = 0 \end{array}\right\} & \text{pentru } t \geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (25)$$

unde $\delta(t)$ este funcția delta a lui Dirac.

Deoarece putem defini $\delta(t)$ sub forma

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0, \quad t \leqslant 0 \\ &= \frac{1}{\in}, \quad 0 < t < \in \\ &= 0, \quad \mathrm{t} \geqslant \in \end{aligned} \qquad \text{ca} \in \rightarrow 0$$

ecuația transformată este

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1-R}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{b}{\nu}\bar{u}$$

și se poate rezolva cu condițiile la limită

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u}(a,\ p) = U \\ \bar{u}(b,\ p) = 0 \end{array}\right\} \qquad (26)$$

În locul (15) vom obține soluția

$$\therefore \quad \overline{U}(r,\ p) = U\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} \cdot \frac{I_{\mathfrak{R}/2}(qr)\,K_{\mathfrak{R}/2}(qb) - K_{\mathfrak{R}/2}(qr)\,I_{\mathfrak{R}/2}(qb)}{I_{\mathfrak{R}/2}(qa)\,K_{\mathfrak{R}/2}(qb) - K_{\mathfrak{R}/2}(qa)\,I_{\mathfrak{R}/2}(qb)} \qquad (27)$$

$$= U\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} \frac{I_{\mathfrak{R}/2}(qr)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(qb) - I_{\mathfrak{R}/2}(qb)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(qr)}{I_{\mathfrak{R}/2}(qa)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(qb) - I_{\mathfrak{R}/2}(qb)\,I_{-\mathfrak{R}/2}(qa)}. \qquad (28)$$

Pentru coeficient mare de vîscozitate, obținem (18)

$$\begin{aligned} U(r,\ t) = U\left(\frac{r}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} \cdot \Bigg[& \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}} \cdot \delta(t) + \frac{\delta'(t)}{\nu\, a_0 b_0 \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2}\right\}^2} \times \\ & \times \left(\left\{ (a_0 b_1 r^2 + a_1 b_0 b^2) \left(\frac{b}{r}\right)^{\mathfrak{R}/2} - (a_0 b_1 b^2 + a_1 b_0 r^2) \left(\frac{r}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2} \right\} \times \right. \\ & \times \left\{ \left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{q}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2} \right\} - \left\{ (a_0 b_1 a^2 + a_1 b_0 b^2) \left(\frac{b}{a}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \right. \\ & \left. \left. - (a_0 b_1 b^2 + a_1 b_0 a^2) \left(\frac{a}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2} \right\} \times \left\{ \left(\frac{b}{r}\right)^{\mathfrak{R}/2} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\mathfrak{R}/2} \right\} \right) \Bigg], \end{aligned} \qquad (29)$$

unde $\delta'(t)$ este prima derivată a lui $\delta(t)$ definită de $\lim\limits_{\in \to 0} \left\{ \frac{1}{\in} \delta(t) - \frac{1}{\in} \delta(t - \in) \right\}$ Pentru cazul vîscozităţii mici, avem în locul lui (19)

$$u(r, t) = U \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{R-1}{2}} \times \frac{r-a}{2\sqrt{\nu \pi t^3}} \times \exp \left\{ -\frac{(r-a)^2}{4 \nu t} \right\} \dots \tag{30}$$

Cînd $R = 0$ $\bar{u}(r, p) = U \cdot \dfrac{I_0(qr) K_0(qb) - K_0(qr) I_0(qb)}{I_0(qa) K_0(qb) - K_0(qa) I_0(qb)}$,

$$\therefore \quad u(r, t) = \frac{U}{2 \pi t} \int_{\nu - i\infty}^{\nu + i\infty} \frac{I_0(q'r) K_0(q'b) - K_0(q'r) I_0(q'b)}{I_0(q'a) K_0(q'b) - K_0(q'a) I_0(q'b)} \cdot e^{\lambda t} d\lambda,$$

unde

$$q' = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}$$

Alegînd acelaşi contur de integrare ca mai înainte, obţinem

$$u(r, t) = \pi U \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0(r\alpha s) Y_0(b\alpha s) - Y(r\alpha s) J_0(b\alpha s)}{J_0(a \alpha s) - J_0(a \alpha s)} \cdot J_0(a \alpha s) J_0(b \alpha s) \times \times e^{-\nu\alpha^2 st} \dots \tag{31}$$

Făcînd pe $\mathfrak{R} \to 0$ în (29) obţinem pentru coeficienţi mari de viscozitate

$$u(r,t) = U \left[\frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \delta(t) + \frac{\delta'(t)}{4 \nu \left(\log \frac{b}{a} \right)} \left\{ (r^2 - a^2) \log \frac{b}{r} \cdot \log \frac{b}{a} - - (b^2 - r^2) \log \frac{b}{a} + (b^2 - a^2) \log \frac{b}{r} \right\} \right] \dots \tag{32}$$

Forţa de forfecare pe unitatea de suprafaţă a cilindrului interior este

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{U}{a} \left[\frac{\rho \delta'(t)}{4 \left(\log \frac{b}{a} \right)^2} \left\{ 2 a^2 \left(\log \frac{b}{a} \right)^2 + 2 a^2 \left(\log \frac{b}{a} \right) - (b^2 - a^2) \right\} - - \frac{\mu \delta(t)}{\log \frac{b}{a}} \right] \dots \tag{33}$$

Pentru cazul vîscozităţii mici, punînd $\mathfrak{R} = 0$ în (30) avem

$$u(r, t) = U \left(\frac{a}{r} \right)^{1/2} \times \frac{r-a}{2\sqrt{\nu \pi t^3}} \times \exp \left\{ -\frac{(r-a)^2}{4 \nu t} \right\}. \tag{34}$$

Forța de forfecare pe unitatea de suprafață a cilindrului interior este

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{\mu\, U}{2\sqrt{\nu\,\pi\, t^3}}\,\ldots \tag{35}$$

Soluția pentru $\mathfrak{R} = 1$.
În acest caz

$$\bar{u}\,(r,\, p) = U\,\frac{\sin\mathrm{h}\,(b - r)\sqrt{\dfrac{p}{\nu}}}{\sin\mathrm{h}\,(b - a)\sqrt{\dfrac{r}{\nu}}}$$

$$\therefore\quad u\,(r,\, t) = \frac{U}{2\pi i}\int_{\nu - i\infty}^{\nu + i\infty}\frac{\sin\mathrm{h}\,(b - r)\sqrt{\dfrac{\lambda}{\nu}}}{\sin\mathrm{h}\,(b - a)\sqrt{\dfrac{\lambda}{\nu}}}\,.\, e^{\lambda t}\, d\lambda\,,$$

și cu același contur de integrare ca mai înainte, avem

$$u\,(r,\, t) = \frac{2\,\pi\nu\, U}{(b\,-\,a)^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-\,1)^{n+1}\cdot\, n\,\sin\frac{n\pi\,(b - r)}{b - a}\times\exp\left\{-\,\frac{n^2\,\pi^2\,\nu\, t}{(b\,-\,a)^2}\right\}. \tag{36}$$

DISCUȚII

Este de remarcat că cele două cazuri extreme ale coeficienților mari și mici de vîscozitate introduse în partea a II-a vor impune condiții numărului Reynolds al scurgerii transversale.

Pentru coeficienți mari de vîscozitate numărul Reynolds va fi mic, iar coeficientul de vîscozitate mic va fi mare, viteza la perete va fi fixată.

Dacă în loc de a considera un coeficient de vîscozitate mic, aproximăm pentru valori mari ale lui p, q, va fi mare iar toate rezultatele pentru coeficientul mic de vîscozitate pot fi interpretate ca soluții de asemenea pentru valorile mici ale timpului. Aceste soluții vor fi valabile pentru toate valorile numărului Reynolds ale scurgerii transversale.

În concluzie, doresc să exprim mulțumirile mele prof. B. B. Sen de la Universitatea Jadavpur pentru îndrumarea sa binevoitoare în timpul efectuării acestei lucrări.

О ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ СООСНЫЙ КРУГЛЫЙ ЦИЛИНДР

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача стационарного течения жидкостей между двумя соосными цилиндрами с пористыми стенками через которые подается жидкость. Внутренний цилиндр от состояния покоя начинает двигаться с продольной скоростью V. Составляются уравнения движения для осемметрического течения, выводится выражение поперечной скорости v, которое подставляется в уравнение движения вдоль оси. Эти уравнения, содержащие в качестве неизвестных продольную скорость и в зависимости от переменного времени и радиуса становятся дифференциальным уравнением второго порядка типа Бесселя путем применения к решению преобразования Лапласа.

Интегрирование производится для больших и очень малых вязкостей по известным формулам решения полного уравнения Бесселя. Приводится выражение продольной скорости и (r, t) в виде рядов, зависящих от функций Бесселя нулевого порядка.

ON THE LONGITUDINAL MOTION OF A CIRCULAR CYLINDER IN A VISCOUS LIQUID CONTAINED IN A COAXIAL CIRCULAR CYLINDER

ABSTRACT

The problem of steady flow between two coaxial porous circular cylinders through which the liquid is injected, is considered.

The inner cylinder starts moving from rest longitudinally with velocity U.

The equations of motion for axially symmetrical flow are written. The cross flow velocity v is deduced, being then introduced into the motion equation along the axis' length. This equation containing as unknown the longitudinal velocity u, with respect to the variables time and radius becomes, through Laplace transform, a second order Bessel equation.

The integration is effectuated for the cases of a very large and small viscosity according to the well-known formulas of Bessel's equation. The expression of longitudinal velocity U (t, r) is given, under the form of series dependent of zero order Bessel functions.

BIBLIOGRAFIE

1. A. S. BERMAN, J. Appl. Phys., **29**, 71 (1958).
2. S.-R. KHAMRUI, Bull. Cal. Math. Soc., **52**, 1, p. 45, (1960).
3. G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions* (Cambridge University Press) (1922).
4. A., SOMMERFELD *Partial differential equations in Physics* (New York) (1949).

TEORIA MECANISMELOR

CONSIDERAȚII ASUPRA MIȘCĂRII SFEREI CU CENTRU FIX PENTRU CONTROLUL AUTOMAT AL SUPRAFEȚEI

DE

CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN și L. CALMACIUC

Anterior [1] s-a cercetat, în scopul explorării suprafețelor sferice cu ajutorul unui spot luminos pentru descoperirea defectelor de suprafață a bilelor de rulmenți, curbele sferice optime și diferite metode de producere a lor prin rotația sferei, în special pe baza antrenării sale cu viteze unghiulare, legate de unghiurile lui Euler, constante. Din cauza cerințelor funcționale, ca întreaga suprafață a sferei să fie explorată pe cît posibil cu viteză constantă și într-un timp minim, s-a analizat spirala sferică $\varphi = \frac{\pi}{2} - m\theta$, cu una sau mai multe ramuri între poli, respectiv cu $m_1 \gg 1$ și $m_2 \ll 1$, evidențiindu-se avantajiile respective. În această lucrare ne propunem studierea sistemului de producere a mișcării sferei prin prescrierea componentelor pe axele fixe ale vitezei unghiulare. Dacă antrenarea sferei se face prin contact cu frecare de către un disc în mișcare plan-paralelă se va justifica sistemul uzual, neautomat, de depistarea defectelor prin cercetarea concomitentă vizuală a mai multor bile deplasate într-un anumit mod pe un plan.

În acest sens se cunoaște formula [1]

$$\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \pm \frac{2 \cos \theta \varphi'(\theta) + \sin \theta \varphi''(\theta) + \cos \theta \sin^2 \theta \varphi'^3(\theta)}{[1 + \sin^2 \theta \varphi'^2(\theta)]^{3/2}} = f(\theta) \qquad (1)$$

în care $\varphi = \varphi(\theta)$ reprezintă ecuația curbei în coordonate polare, φ și θ fiind totodată unghiurile rotației proprii și nutației, C_1 și C_2 sînt componentele constante ale vitezei unghiulare pe axele fixe Ox_f și Oy_f, iar C_3 este componenta, în general variabilă, după axa Oz_f rezultată conform formulei (1).

Curba $\varphi = \varphi(\theta)$ este înscrisă pe sfera în rotație cu centrul fix de către punctul P_z, intersecția sferei cu axa fixă Oz_f.

Întrebuinţarea şi a componentelor C_1 şi C_2 variabile, modifică puţin formula (1), aceasta devenind

$$\frac{C_3}{(C_1^2+C_2^2)^{1/2}}+\frac{\dot{C}_1C_2-\dot{C}_2C_1}{(C_1^2+C_2^2)^{3/2}}=f(\theta). \tag{2}$$

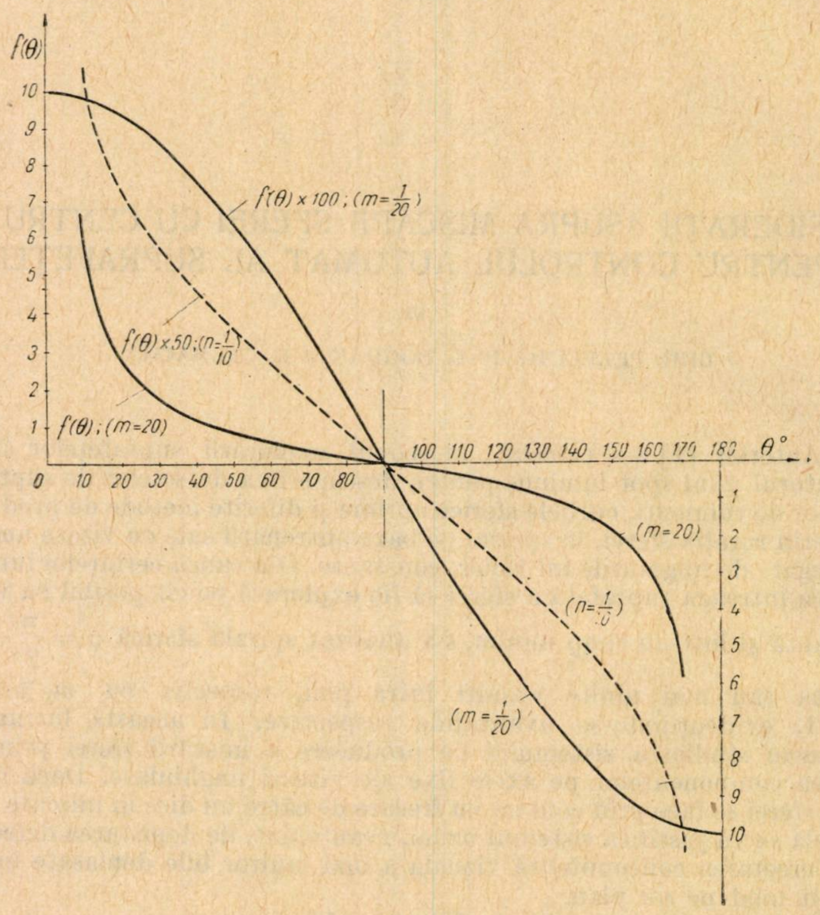


Fig. 1

Aceste formule coincid, fie pentru $C_1 \equiv 0$, fie pentru $C_2 \equiv 0$, fie pentru C_1 şi C_2 constanţi.

În cazul spiralei sferice $\varphi = \pi/2 - m\theta$ avem :

$$f(\theta = \frac{2+m^2\sin^2\theta}{(1+m^2\sin^2\theta)^{3/2}}\cdot m\cdot\cos\theta, \tag{3}$$

a cărui variaţie, în funcţie de θ, coincizînd cu variaţia raportului componentelor C_3/C_2 pentru $C_1 \equiv 0$, este arătată în figura 1 pentru $m_1 = 20$ şi $m_2 = 1/20$.

În primul caz se prezintă dezavantajul că la începutul şi sfîrşitul spiralei $\theta = 0°$ şi $\theta = 180°$, raportul are valori foarte mari $^{c_3}/_{c_2} = 40$, scăzînd însă repede, astfel că la $\theta = 10°$, sau $\theta = 170°$, rămîne numai $^{c_3}/_{c_2} = 5{,}85$. În condiţiile de lucru ale scopului urmărit, întrucît arcul corespunzător unghiului de 10° este comparabil cu grosimea spoturilor luminoase, se poate considera raportul constant (sau aproape constant) pe porţiunile de capăt 0° — 10° şi 170° — 180° intervale în care se vor descrie pe sferă cercuri, rămînînd a se utiliza vitezele variabile pentru descrierea spiralei sferice între 10° şi 170°, cînd variaţia raportului este mai acceptabilă. Cazul al doilea, cu $m = 1/20$, are avantajul că raportul prezintă variaţii mult mai mici, urmînd practic o cosinusoidă $f(\theta) \simeq \cos \theta/10$.

Dacă se cercetează şi sinusoida sferică

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - n \arcsin\left(\frac{2\theta}{\pi} - 1\right), \qquad (4)$$
$$\theta \in (0° \div 180°),$$

în care, cu scopul de a se acoperi întreaga suprafaţă sferică cu spot luminos de grosimea a, avem

$$n \simeq k \pm \frac{a}{2\pi R} \quad \text{sau} \quad n \simeq 2\left(k \pm \frac{a}{2\pi R}\right), \qquad (5)$$

k fiind un număr întreg oarecare, se obţine

$$f(\theta) = \frac{2(\pi\theta - \theta^2) - \operatorname{tg}\theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + n^2 \sin^2\theta}{[(\pi\theta - \theta^2) + n^2 \sin^2\theta]^{3/2}}\, n \cos\theta \qquad (6)$$

Alura curbei $f(\theta)$ pentru sinusoida sferică este asemănătoare cu cea pentru spirala sferică, cu care de altfel se şi confundă la limitele $n \to \infty$ $f(\theta) = 1/\operatorname{tg}\theta$ şi $n \to 0$ $f(\theta) \to 0$. În figura (1) este reprezentat $f(\theta)$ la $n = 1/10$ (curba punctată). În consecinţă, se menţin în general observaţiile anterioare şi în special eliminarea cercetării polurilor $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$ în care de data aceasta salturile $f(\theta)$ sînt mai accentuate, funcţia în aceste puncte nemaifiind finită.

În ceea ce priveşte sistemul de producere a componentelor vitezei unghiulare, dacă acesta se realizează cu ajutorul unor roţi de fricţiune (de aceeaşi rază), în punctele P_y şi P_z (1) situate pe axele Oy_f şi Oz_f şi îndreptate după axa Ox_f atunci raportul vitezelor lor unghiulare este

$$\frac{\omega_{P_y}}{\omega_{P_z}} = f(\theta). \qquad (7)$$

Între rotaţiile celor două roţi motoare va trebui creată dependenţa funcţională $f(\theta)$ a cărei variaţie a fost analizată mai sus. Desigur că o realizare simplă se prezintă cînd una din roţi are viteză constantă, rămînînd numai ca cealaltă roată să aibă viteză variabilă în conformitate cu relaţia (7). Ameliorarea dificultăţilor produse de variaţiile mari ale funcţiei $f(\theta)$ se poate obţine în cazul considerării ambelor viteze ω_{P_y} şi ω_{P_z} variabile, punînd condiţia ca deşi ele să varieze aproape liniar, raportul lor să fie $f(\theta)$. Urmărind alura curbei $f(\theta)$ se poate alege în consecinţă (fig. 2)

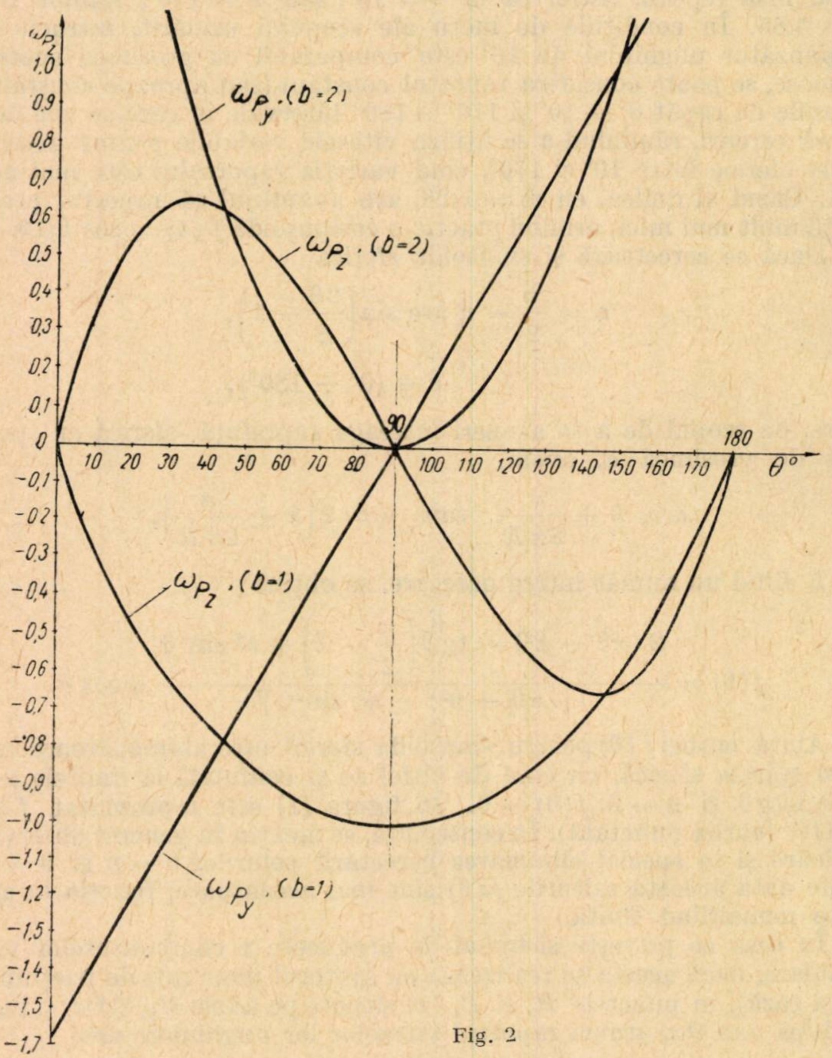


Fig. 2

$$\omega_{P_y} = a\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^b, \tag{8}$$

rezultînd

$$\omega_{P_z} = \frac{a\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^b}{f(\theta)}, \tag{9}$$

variaţiile lor fiind mai puţin accentuate.

Dacă rotațiile sferei se obțin prin înscrierea vitezei din P_x [1] de coordonate $(y_1\, z_1)$ față de axele fixe OYZ (fig. 3) prin contact cu frecare de un disc în mișcare plană compusă, obținem ecuațiile

$$\begin{aligned} v_{yP} &= v_{yC} + \omega z - \omega z_1 = RC_3, \\ v_{zP} &= v_{zC} - \omega y + \omega y_1 = -RC_2, \end{aligned} \tag{10}$$

în care $\overline{v}_c$ este viteza centrului C al discului, iar $\overline{\omega}$ viteza sa unghiulară. La aceste ecuații se adaugă și condițiile de descriere a curbei sferice $\varphi = \varphi(\theta)$ [1], adică

$$\begin{aligned} C_3 &= C_2 f(\theta), \\ C_3 &= \dot{\theta} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2(\theta)}, \end{aligned} \tag{11}$$

exprimînd împreună tangența elementelor de arc și identitatea lungimilor lor pentru curbele descrise pe sferă și pe disc. Formulele se simplifică pentru $y_1 = z_1 = 0$, fără să se micșoreze generalitatea, axele de coordonate fiind alese cu originea în punctul P.

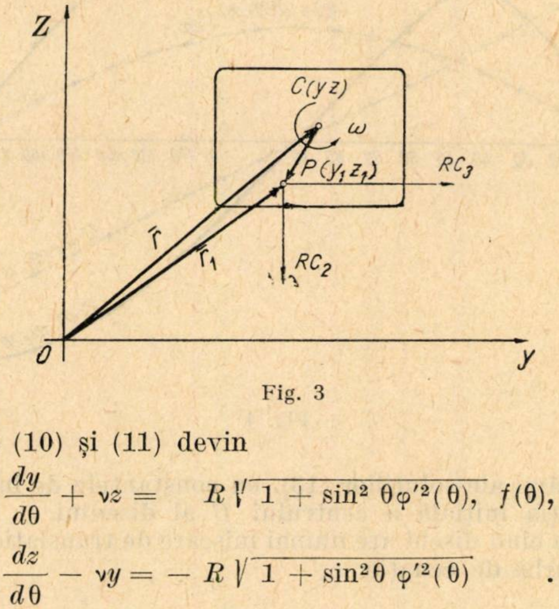


Fig. 3

Ecuațiile (10) și (11) devin

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} + \nu z &= R \sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2(\theta)}\, f(\theta), \\ \frac{dz}{d\theta} - \nu y &= -R \sqrt{1 + \sin^2 \theta\, \varphi'^2(\theta)} \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

Din aceste ecuații, cunoscînd $\nu = \omega / \dot{\theta}$ de preferință constant, se determină y și z. Soluțiile sînt

$$\begin{aligned} y &= A \cos \nu\theta - B \sin \nu\theta + \frac{R}{\nu} \int_0^\theta F_y(\xi) \sin \nu(\theta - \xi)\, d\xi, \\ z &= \left(B + 2\varphi'(0) \frac{R}{\nu}\right) \cos \nu\theta + \left(A - \frac{R}{\nu}\right) \sin \nu\theta + \frac{R}{\nu} \int_0^\theta F_z(\xi) \sin \nu(\theta - \xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{13}$$

care constituie ecuaţiile parametrice ale curbei descrise de centrul C al discului. În aceste relaţii funcţiunile $F_y(\xi)$ şi $F_z(\xi)$ sînt

$$\begin{aligned} F_y(\xi) &= \nu \sqrt{1 + \sin^2\xi\, \varphi'^2(\xi)} + \frac{d}{d\xi}\left(f(\xi) \sqrt{1 + \sin^2\xi\varphi'^2(\xi)}\right), \\ F_z(\xi) &= \nu f(\xi) \sqrt{1 + \sin^2\xi\varphi'^2(\xi)} - \frac{d}{d\xi} \sqrt{1 + \sin^2\xi\varphi'^2(\xi)}\,. \end{aligned} \tag{14}$$

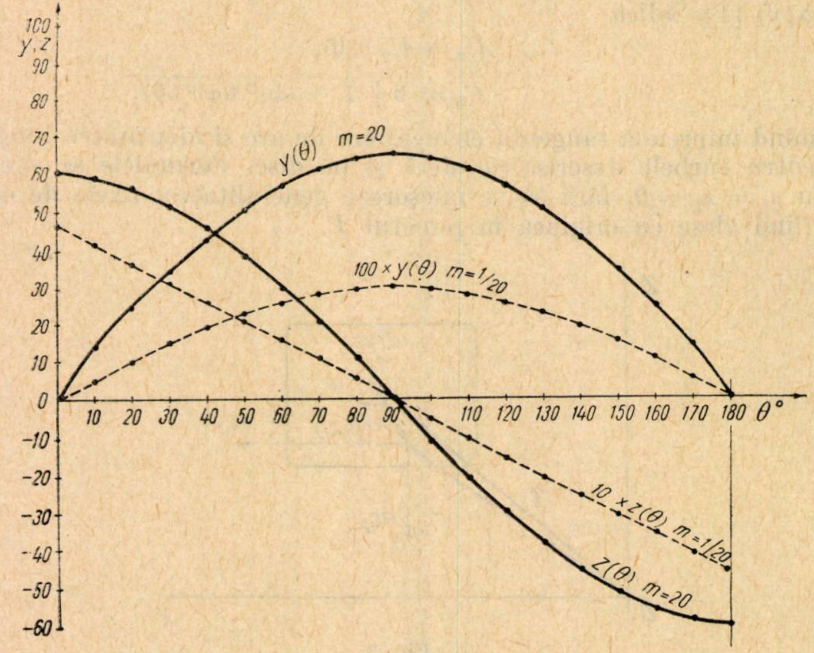


Fig. 4

Primele părţi ale soluţiilor (13), cu constantele de integrare A şi B, depind de poziţia iniţială a centrului C al discului.

În situaţia cînd discul are numai mişcare de translaţie $\nu = 0$, centrul său descrie o curbă de ecuaţie

$$\begin{aligned} y &= R\int_0^\theta \sqrt{1 + \sin^2\xi\varphi'^2(\xi)}\, f(\xi)\, d\xi + A, \\ z &= -R\int_0^\theta \sqrt{1 + \sin^2\xi\varphi'^2(\xi)}\, d\xi + B, \end{aligned} \tag{15}$$

cu viteza

$$v = R\sqrt{C_2^2 + C_3^2} = R\dot{\theta}\sqrt{[1 + \sin^2\theta\varphi'^2(\theta)]\,[1 + f^2(\theta)]}, \tag{16}$$

ceea ce pentru spirala sferică conduce la (fig. 4 și 5) :

$$y = R\,[\,m \sin\theta + \operatorname{arctg}(m \sin\theta)\,] + A,$$

$$z = R\sqrt{1+m^2}\,E\left(\frac{\pi}{2} - \theta,\ \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right) + B, \tag{17}$$

unde prin $E(\varphi, k)$ se înțelege integrala eliptică de speța a doua.

Pentru valori mari ale parametrului m ($m = 20$) avem $y \simeq mR \sin\theta$ și $z \simeq mR \cos\theta$, astfel că planul în translație descrie o curbă apropiată de un cerc. Pentru valori mici ale parametrului m ($m = 1/20$) se obține $y \simeq 2\,mR \sin\theta$ și $z \simeq R\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ și deci curba descrisă de planul în translație este apropiată de o cosinusoidă, cu amplitudine mică ($y_{\max} = 2\,mR$) față de perioada $\left(\dfrac{z_p}{R} = 2\pi\right)$ (fig. 5).

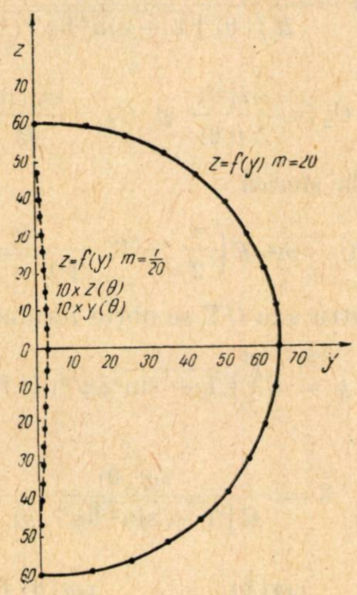


Fig. 5

Considerarea numai a mișcării de rotație a discului $\left(\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{dz}{d\theta} = 0\right)$ nu dă soluții pentru orice curbă sferică. Într-adevăr, cum coordonatele centrului discului sînt constante $y = C_y$ și $z = C_z$ este necesară îndeplinirea condiției de compatibilitate

$$\frac{\nu}{R\sqrt{1 + \sin^2\theta\,\varphi'^2(\theta)}} = \frac{1}{C_y} = \frac{f(\theta)}{C_z}, \tag{18}$$

ceea ce atrage numai $f(\theta) = \dfrac{C_z}{C_y}$ constant.

Ultimul caz studiat corespunzînd situaţiei în care centrul discului C descrie o linie dreaptă, în particular axa OZ procură

$$y = 0 \qquad z = -R\int_0^\theta \sqrt{1+\sin^2\xi\varphi'^2(\xi)}\,d\xi + B, \tag{19}$$

iar dacă se consideră viteza unghiulară a discului $\omega = \text{const.}$ rezultă variabilă

$$\dot\theta = \frac{\omega z(\theta)}{R f(\theta)\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2(\theta)}}, \tag{20}$$

sau

$$C_2 = \frac{\omega z(\theta)}{R f(\theta)} \text{ şi } C_3 = \frac{\omega z(\theta)}{R}, \tag{21}$$

obţinînd pentru spirala sferică

$$z = R\sqrt{1+m^2}\,E\left(\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right) + B. \tag{22}$$

În acelaşi fel pentru axa OY se obţin formulele

$$z = 0, \qquad y = R\int_0^\theta \sqrt{1+\sin^2\xi\varphi'^2(\xi)}\,f(\xi)\,d\xi + A, \tag{23}$$

cu

$$\dot\theta = \frac{\omega y(\theta)}{R\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2(\theta)}}, \tag{24}$$

sau

$$C_2 = \frac{\omega y(\theta)}{R} \text{ şi } C_3 = \frac{\omega y(\theta)\,f(\theta)}{R}, \tag{25}$$

ceea ce la spirala sferică devine asemănător

$$y = R\,[\,m \sin\theta + \operatorname{arctg}(m \sin\theta)\,]. \tag{26}$$

Deplasarea centrului discului se poate face cu o camă, cu viteză de rotaţie constantă $\dot\theta_c$, astfel că legătura între unghiul de rotaţie θ_c al camei şi parametrul θ din formulele deplasării pe axa OY sau pe axa OZ este

$$\theta_c = \int \frac{\dot\theta_c}{\dot\theta}\,d\theta = \frac{R\dot\theta_c}{\omega}\int \frac{f(\theta)\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2(\theta)}}{z(\theta)}\,d\theta, \tag{27}$$

sau

$$\theta_c = \int \frac{\dot\theta_c}{\dot\theta}\,d\theta = \frac{R\dot\theta_c}{\omega}\int \frac{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2(\theta)}}{y(\theta)}\,d\theta. \tag{28}$$

Studiul acţionării sferei în contact cu frecare de către un disc în mişcare plan-paralelă, de preferinţă de translaţie, s-a făcut necesar în special pentru cercetarea simultană a suprafeţelor mai multor sfere, procedeu întrebuinţat în metoda controlului vizual. În această situaţie însă, planul este fix şi bilele de rulmenţi se deplasează prin rostogolire pe el, aşa încît pentru un control riguros, centrul fiecărei bile trebuie să descrie curba studiată în translaţia planului, corespunzînd de altfel antrenării sistemului de referinţă, care era fix, într-o mişcare inversă, pentru a obţine nemişcarea planului. Este însă necesar aici ca punctul opus punctului de tangenţă între sferă şi plan să descrie pe sfera în mişcare curba dorită. Acest punct de tangenţă trebuie să fie deci — P_z, a cărui viteză depinde de componentele C_1 şi C_2 pe axele Ox_f şi Oy_f ale vitezei unghiulare. Reluînd formula (2), prin integrare în raport cu timpul, obţinem :

$$\int C_3\,dt + \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2} = \operatorname{arctg}\left[\sin\theta\varphi'(\theta)\right] + \int \cos\theta\varphi'(\theta)\,d\theta, \qquad (29)$$

ceea ce dacă $C_3 = 0$, duce la

$$C_1 = C_2 f^*(\theta)$$

$$f^*(\theta) = \frac{\sin\theta\varphi'(\theta) + \operatorname{tg}\int\cos\theta\varphi'(\theta)\,d\theta}{1 - \sin\theta\,\varphi'(\theta)\operatorname{tg}\int\cos\theta\varphi'(\theta)\,d\theta}, \qquad (30)$$

adică formulele (10) şi (11) vor deveni (faţă de axele OXY)

$$\begin{aligned} v_{xc} + \omega y &= -RC_2,\\ v_{yc} - \omega x &= RC_1,\\ C_1 &= C_2 f^*(\theta),\\ C_2 &= \dot\theta\sqrt{1 + \sin^2\theta\varphi'^2(\theta)}, \end{aligned} \qquad (31)$$

adică

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} + \nu y &= -R\sqrt{1 + \sin^2\theta\varphi'^2(\theta)}\\ \frac{dy}{d\theta} - \nu x &= R\sqrt{1 + \sin^2\theta\varphi'^2(\theta)}\,f^*(\theta), \end{aligned} \qquad (32)$$

ceea ce asigură asemănarea formulelor şi a desfăşurării calculelor faţă de situaţia anterioară.

O ultimă observaţie asupra producerii mişcării sferei referitoare cazului cînd unghiul de precesie ψ este constant [1], este că

$$C_3 = \cos\theta\varphi'(\theta)\,\dot\theta\,, \qquad (33)$$

şi

$$\psi = \operatorname{arctg}(\sin\theta\varphi'(\theta)) + \operatorname{arctg}\frac{C_2}{C_1} = \text{const.} \qquad (34)$$

sau pentru $\psi = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{C_1}{C_2} = \sin\,\theta\varphi'(\theta). \tag{35}$$

Dacă $\dot{\theta}$ și C_2 sînt constante, pentru spirala sferică, C_1 și C_3 vor varia în raport cu sin θ și cos θ.

În concluzie, lucrarea de față a analizat unele posibilități de obținere a rotației sferei cu centrul fix necesare în explorarea suprafeței sale, în special în cazul cerut de tehnologia de lucru actuală, adică prin acționarea de un plan în translație. S-a căutat ca variațiile vitezei unghiulare ale sferei sau a pozițiilor planului de contact, să fie cît mai ușor de realizat practic, și lucrarea scoate în evidență, prin cazurile studiate, diverse aspecte avantajoase. Se menționează însă că mișcările bielelor de rulmenți pe un plan pot fi încă simplificate, dacă se urmărește nu cercetarea riguroasă, completă, a întregii suprafețe sferice, ci realizarea unei anumite probabilități, practic suficiente, pentru descoperirea defectelor.

Primită la redacție la 27 februarie 1962

ОБ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЯ СФЕР С НЕПОДВИЖНЫМ ЦЕНТРОМ ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ ПОВЕРХНОСТИ

РЕЗЮМЕ

Работа содержит аналитическое исследование возможностей вписания на сфере некоторых, соответствующих поставленной задаче, кривых, спирали и синусоиды в движение сферы с неподвижным центром путем задания составляющих угловой скорости по неподвижным осям с целью улучшения функциональных характеристик.

Также в работе дается результат одновременного рассмотрения нескольких сфер, смещенных определенным образом на плоскости.

BETRACHTUNGEN ÜBER DIE ERZEUGUNG DER BEWEGUNG VON KUGELN MIT FESTEM MITTELPUNKT ZUR AUTOMATISCHEN OBERFLÄCHENKONTROLLE

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit umfaßt das analytische Studium der Möglichkeiten, auf einer Kugel zweckentsprechende Kurven, d.h. Spiralen und Sinuskurven zu beschreiben. Es werden Systeme für die Erzeugung der Bewegung einer

Kugel mit festem Mittelpunkt mit Hilfe vorgeschriebener Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten auf den festen Achsen untersucht und dabei die Verbesserung der funktionellen Charakteristiken verfolgt.

Ferner werden die Ergebnisse des gleichzeitigen Studiums mehrerer Kugeln, die sich in bestimmter Weise auf einer Ebene bewegen, dargestellt.

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, L. Calmaciuc, *Asupra unor curbe sferice şi a mecanismelor necesare producerii lor*. SCMA, *1* (1962).
2. — *Structura şi cinematica mecanismelor*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.

STUDII

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

INFLUENȚA FORMEI DE VARIAȚIE A GROSIMII STRATULUI DE LUBRIFIANT ASUPRA CARACTERISTICILOR DE FUNCȚIONARE ALE LAGĂRELOR LUBRIFICATE CU GAZE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Lagărele lubrificate cu gaze pot fi realizate, cel puțin teoretic, sub o mare varietate de forme geometrice. În special, în construcția lagărelor axiale se întîlnesc numeroase tipuri de lagăre caracterizate prin diferite forme de variație a grosimii $h\,(x)$ a stratului de lubrifiant. Această pluralitate de posibilități constructive pune desigur problema alegerii celui sau celor mai convenabile tipuri de lagăre atît din punctul de vedere al posibilităților tehnice de realizare cît și din punctul de vedere al obținerii unor caracteristici de funcționare cît mai bune. În cele ce urmează vom examina comparativ caracteristicile funcționale ale cîtorva tipuri mai importante de lagăre axiale, considerînd pentru simplificare cazul lagărelor de alungire infinită. Această ipoteză, după cum se știe simplifică mult tratarea, fără să altereze calitativ rezultatele. În aceste condiții, sub formă adimensională, ecuația diferențială a presiunilor are expresia [1]

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{GH}{\bar{h}^2}\left(1 - \frac{K_1}{\bar{p}\bar{h}}\right) \tag{1}$$

unde $\bar{p} = \dfrac{p}{p_0}$ este presiunea adimensională, $\bar{x} = \dfrac{x}{l}$, $\bar{h} = \dfrac{h}{h_m}$ $\left(\text{sau } \bar{h} = \dfrac{h}{h_2}\right)$ grosimea stratului de lubrifiant raportată la grosimea medie h_m sau grosimea minimă h_2, iar K_1 o constantă de integrare. În ecuația (1) s-a notat în plus cu p_0 presiunea mediului înconjurător iar cu H expresia

$$H = \frac{\mu V l}{p_0 h_m^2}, \tag{2}$$

dacă în ecuația (1) $\bar{h}$ este raportat la grosimea medie h_m. Dacă se raportează h la grosimea minimă h_2, atunci în locul parametrului H trebuie să se introducă parametrul

$$\bar{H} = \frac{\mu V l}{p_0 h_2^2}, \tag{3}$$

unde l este lungimea lagărului, în sensul vitezei V.

După cum se constată din simpla examinare a ecuației diferențiale (1) forma funcției $h(x)$ are o influență determinată asupra distribuției presiunilor.

Deși varietatea de forme ale funcției $h(x)$ care pot fi realizate cu mijloacele tehnice actuale este foarte mare, aceste tipuri pot fi totuși grupate în următoarele categorii mai importante:

a) *Lagăre la care grosimea $h(x)$ scade continuu cu δ.* Așa sînt de exemplu lagărele compuse din două suprafețe plane înclinate (fig. 1*a*) la care grosimea h variază liniar cu x sau lagărele convexe (lenticulare) avînd săgeata δ redusă sau unghiul de înclinare ν respectiv raportul grosimilor extreme $\frac{h_1}{h_2}$ mare (fig. 1*b*). La acestea din urmă funcția $h(x)$ este în primă aproximație parabolică.

b) *Lagăre la care porțiunea finală a lor se compune din două suprafețe paralele sau cvasiparalele.* Astfel sînt lagărele compuse din suprafețe plane înclinate și paralele (fig. 2*a*) sau lagărele convexe (fig. 2*b*) cu săgeata δ relativ mare sau înclinare ν moderată; de asemenea în această categorie pot fi înglobate lagărele în trepte cu suprafețe paralele (fig. 2*c*) sau cu suprafețe înclinate și paralele (fig. 2*d*).

c) *Lagăre la care grosimea h scade iar apoi crește cu x (lagăre convergent-divergente).* Astfel sînt lagărele compuse din două suprafețe plane

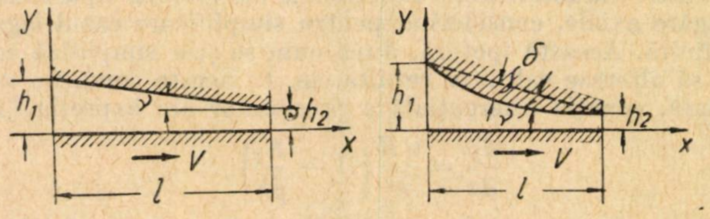


Fig. 1 *a*, *b*

înclinate simetrice (fig. 3*a*) sau asimetrice (fig. 3*b*), lagărele sinusoidale (fig. 3*c*), sau lagărele lenticulare (fig. 3*d*) cu săgeată δ mare sau înclinare ν foarte redusă ($h_1 \cong h_2'$).

Tipurile de lagăre prezentate mai sus sînt departe de a epuiza întreaga gamă de posibilități de variație a funcției $h(x)$; totuși ele reliefează tipurile cele mai interesante pentru aplicații.

Elementul de comparație este desigur distribuția presiunilor, care poate fi determinată prin integrarea analitică sau numerică a ecuației diferențiale (1). Astfel, pentru lagărul din figura 1*a*, distribuția presiunilor poate fi determinată din relația analitică [1]

$$\overline{\Pi}^2 - 2H_\varepsilon \overline{\Pi} + H_\varepsilon^2 K^3 = k_2 \overline{h}^2 \overline{\chi}^\star \; ; \; \overline{\Pi} = \overline{p}\,\overline{h} \qquad (4)$$

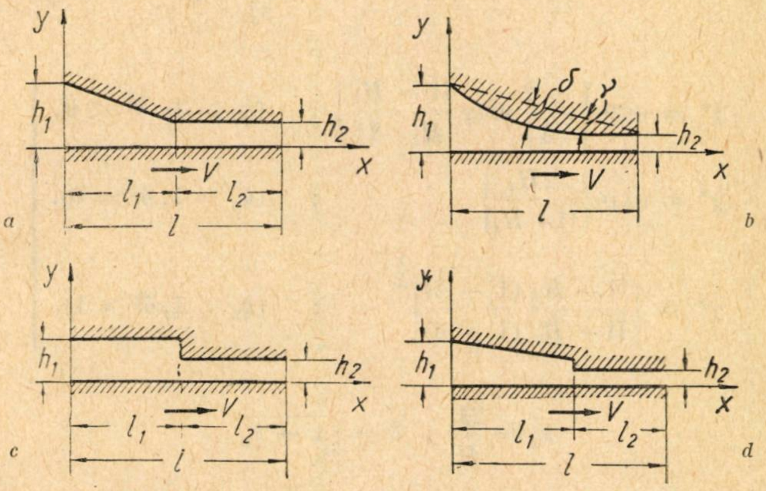

y
h1
h2
x
V
l1
l2
l
a
δ
ν
b
c
d

Fig. 2 *a*, *b*, *c* și *d*

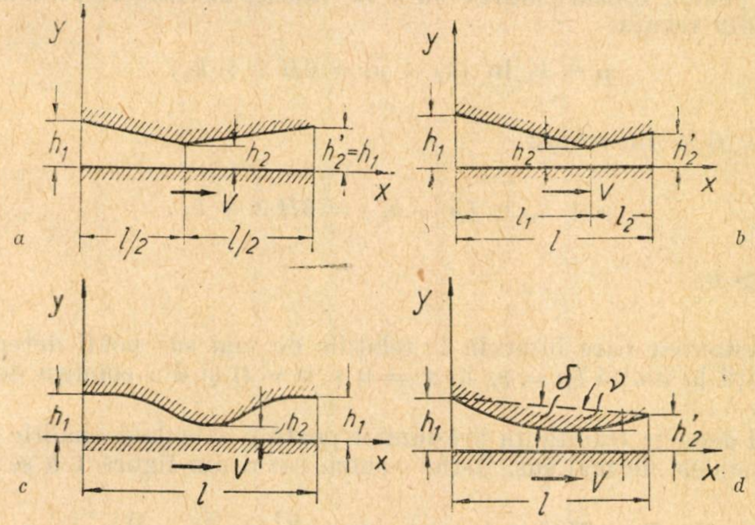

y
h1
h2
h'2=h1
x
V
l/2
a
h'2
l1
l2
l
b
c
δ
ν
d

Fig. 3 *a*, *b*, *c* și *d*

în care

$$H_\varepsilon = \frac{3\mu V}{\nu\, h_m\, p_0} = \frac{3\mu\, V\, l}{2\, p_0 \varepsilon\, h_m^2} = \frac{3}{2}\, \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon}\, \overline{H} = \frac{6}{\dfrac{h_1^2}{h_2^2} - 1}\, \overline{H}\, ; \ \varepsilon = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}\, , \tag{5}$$

iar

$$\left.\begin{aligned} \overline{\chi}^\star &= \exp\left\{\frac{-2}{|\delta|} \operatorname{artg} \frac{\overline{\Pi} - H_\varepsilon}{H_\varepsilon\, |\,\delta\,|}\right\} \quad ; \quad (k_3 > 1,\ \delta^2 < 0, \\ \overline{\chi}^\star &= \exp\left\{\frac{2H_\varepsilon}{\overline{\Pi} - H_\varepsilon}\right\} \quad ; \quad (k_3 = 1,\ \delta^2 = 0), \\ \overline{\chi}^\star &= \left[\frac{\overline{\Pi} - H_\varepsilon\,(1-\delta)}{\overline{\Pi} - H_\varepsilon\,(1+\delta)}\right]^{\frac{1}{\delta}} \quad ; \quad (k_3 < 1,\ \delta^2 > 1), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

unde

$$k_3 = \frac{2k_1}{H_\varepsilon}\ ; \ \delta = \sqrt{1 - k_3}\, . \tag{7}$$

Pentru lagărele compuse din suprafețe plane (fig. 2*a*, *c*, *d*, 3*a*, *b*), formulele de mai sus rămîn în continuare valabile pentru porțiunile înclinate, iar pentru zonele paralele cu $h =$ const., distribuția presiunilor se dedudce din relația

$$\overline{p} + k_1' \ln\, (k_1' - \overline{p}) = 6\overline{H}\, \overline{x} + k_2\, , \tag{8}$$

dacă $\dfrac{dp}{dx} < 0$ și din relația

$$\overline{p} + k_1'' \ln\, (\overline{p} - k_1'') = 6\overline{H}\, \overline{x} + k_2\, , \tag{9}$$

dacă $\dfrac{dp}{dx} > 0$.

Constantele care intervin în relațiile de mai sus pot fi determinate din condiții la limită ($p = p_0$ la $x = 0$ și $x = l$) și din condiții de racordare [1].

Mai departe rezultanta presiunilor poate fi calculată analitic plecînd de la formulele de mai sus. Astfel pentru cazul din figura 1 *a* se deduce

$$\zeta = \frac{P}{p_0 l} = \frac{H_\varepsilon}{\varepsilon}\left(\ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{k_3}{4} \ln \frac{\overline{\chi}_1^*}{\overline{\chi}_2^*}\right) + \frac{\overline{\Pi}_1 - \overline{\Pi}_2}{2\varepsilon} - 1, \tag{10}$$

unde $\overline{\chi}_1^*$, $\overline{\chi}_2^*$, $\overline{\Pi}_1$, $\overline{\Pi}_2$ sînt valorile $\chi^\star$, $\overline{\Pi}$ în punctele în care $h = h_1$ și $h = h_2$, parametrul $\overline{\chi}^\star$ avînd una din expresiile (6) după cum $k_3 > 1$, $k_3 = 1$ sau $k_3 < 1$.

Pentru zonele cu h = const. se deduce de exemplu din (8)

$$\zeta = \frac{k_1'}{6H}\left[k_1' \ln \frac{k_1' - 1}{k_1' - p_1} - (\overline{p}_1 - 1) - \frac{1}{2k_1'}(\overline{p}_1^2 - 1)\right] = 1 \qquad (11)$$

și o relație analoagă pentru cazul relației (9). În formula (11) cu p_1 s-a notat presiunea la începutul zonei h = const.

În același timp tipurile de lagăre reprezentate în figura 3*a*, 3*b* pot fi calculate cu ajutorul rezultatelor din lucrările [2] [3]. De asemenea, W. A. Gross [4], [5] a obținut prin metode numerice caracteristicile de funcționare pentru lagăre plane (fig. 1*a*) și parțial pentru lagărele lenticulare (fig. 1*b*, 2*b*, 3*d*). Unele date suplimentare pentru lagăre în trepte (fig. 2*c*) sînt prezentate și în lucrarea [6]. În sfîrșit, pentru lagăre sinusoidale (fig. 3 *c*) se pot adapta o parte din rezultatele numerice prezentate de S. A. Scheinberg [7] pentru largăre circulare.

Din cele de mai sus rezultă că în prezent există suficiente informații asupra tipurilor de lagăre din figurile 1 —3 pentru a putea efectua o comparație judicioasă în privința caracteristicilor lor de funcționare. Deoarece expresiile analitice corespunzătoare nu rezultă sub o formă simplă iar în unele cazuri nici nu pot fi direct obținute, mai jos vom prezenta rezultatele direct sub formă de diagrame.

Criteriile după care pot fi comparate lagărele din figurile 1 — 3 sînt : capacitatea portantă maximă și coeficientul de frecare minim, primul criteriu fiind evident mai interesant.

Pentru a avea condiții de comparație identice, deoarece grosimea minimă h_2 este unul din parametrii de bază în calculele de proiectare, vom considera pentru toate tipurile de lagăre grosimea h_2 ca fiind aceeași. În plus, vom considera pentru diferite rapoarte $\frac{h_1}{h_2}$ că parametrul $\overline{H}$ (3) este constant și poate lua diferite valori.

Să notăm apoi rezultatele care se obțin pentru lagărul plan (fig. 1*a*), cu 1 ; pentru largărul compus din suprafețe plane înclinate (fig. 2*a*), cu 2 ; pentru lagărul în trepte (fig. 2*c*), cu 3 ; pentru lagărul compus din două suprafețe plane înclinate (fig. 3*a*), cu 4 ; în sfîrșit pentru lagărul sinusoidal (fig. 3*c*), cu 5. Lagărele convexe au performanțe apropiate de cele ale lagărelor 4, 5 dacă înclinarea lor este redusă (fig. 3*d*), apropiate de lagărul 2 pentru înclinări medii (fig. 2*b*) și apropiate de lagărul 1 pentru înclinări mari (fig. 1*b*).

Pentru lagărele 2, 3, 4 se mai pune în plus problema raportului $\frac{l_2}{l_1}$ · Astfel, dacă $l_1 \rightarrow 0$ capacitatea portantă scade la zero și chiar poate deveni negativă (lagărul 4). Invers dacă $l_2 \rightarrow 0$, capacitatea de încărcare scade la zero (lagărul 3) sau atinge o limită corespunzătoare lagărului 1 (lagărele 2,4). Există deci întotdeauna o valoare $\frac{l_2}{l_1}$ optimă, funcție de $\frac{h_1}{h_2}$ și $\overline{H}$. La numere $\overline{H}$ reduse, raportul $\frac{l_2}{l_1}$ optim are ordinul de mărime 0,3 ÷ 0,5. El crește cu $\overline{H}$ tinzînd către infinit cînd $\overline{H} \to \infty$ în cazul lagărelor 2,3. Pentru lagărul 4, influența raportului $\frac{l_2}{l_1}$ asupra rezultantei

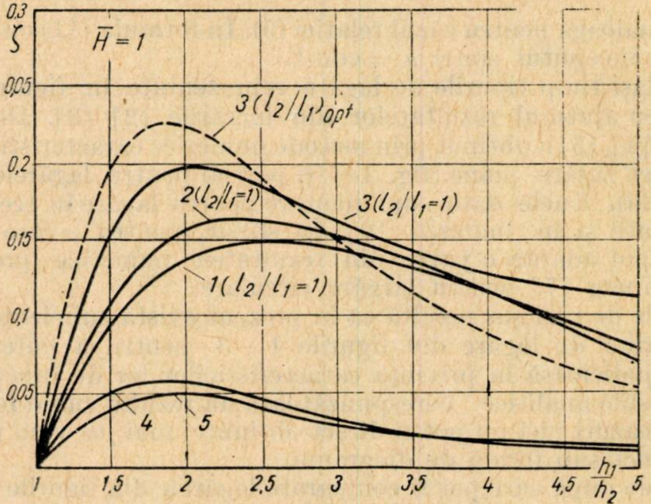


Fig. 4

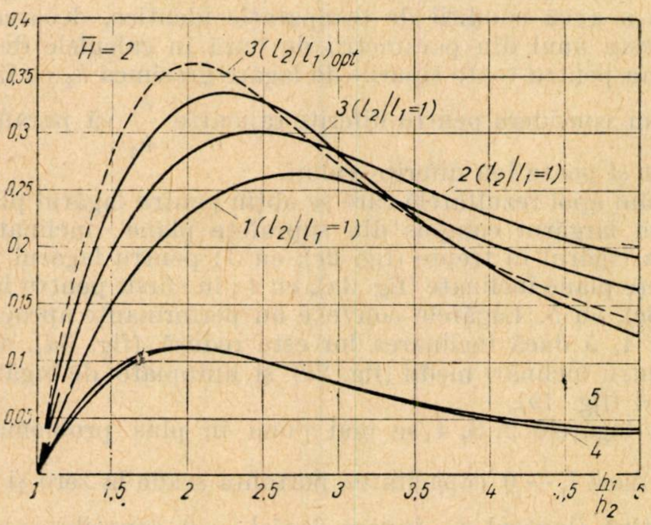


Fig. 5

presiunilor la numere $\overline{H}$ mari este redusă. Pentru numere $\overline{H}$ utilizate curent în aplicațiile tehnice, se poate lua în medie $\frac{l_2}{l_1} = 1$ ca fiind o valoare apropiată de cea optimă.

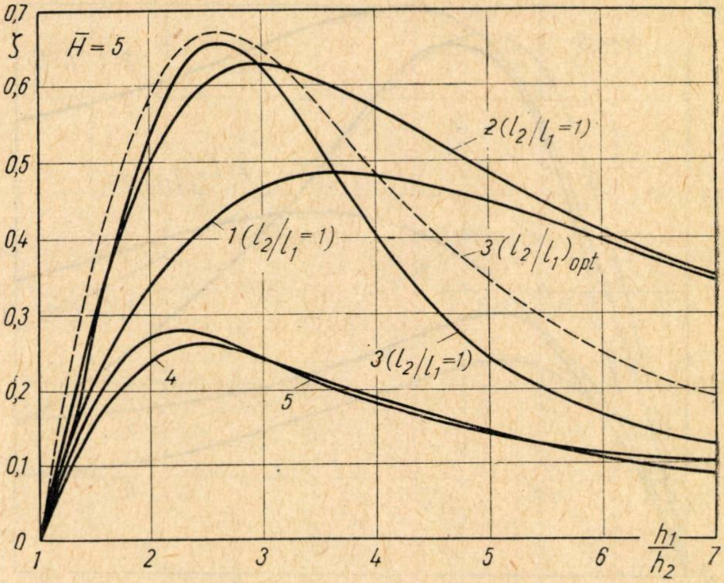

0,7
ζ
$\bar{H} = 5$
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
7
$\frac{h_1}{h_2}$
$2(l_2/l_1=1)$
$1(l_2/l_1=1)$
$3(l_2/l_1)_{opt}$
$3(l_2/l_1=1)$
4
5

Fig. 6

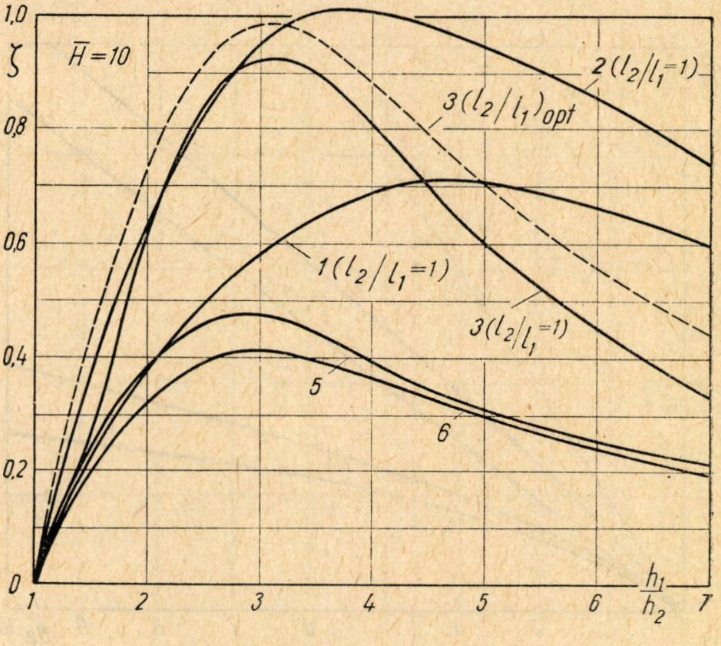

1,0
ζ
$\bar{H} = 10$
0,8
0,6
0,4
0,2
0
1
2
3
4
5
6
7
$\frac{h_1}{h_2}$
$2(l_2/l_1=1)$
$3(l_2/l_1)_{opt}$
$1(l_2/l_1=1)$
$3(l_2/l_1=1)$
5
6

Fig. 7

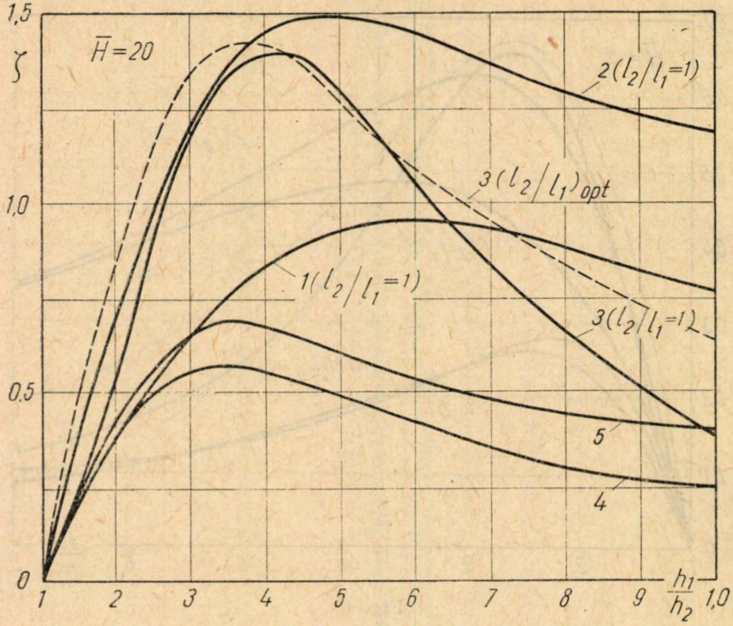

1,5
ζ
$\overline{H}=20$
$2(l_2/l_1=1)$
$3(l_2/l_1)_{opt}$
1,0
$1(l_2/l_1=1)$
$3(l_2/l_1=1)$
0,5
5
4
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
$\frac{h_1}{h_2}$
1,0

Fig. 8

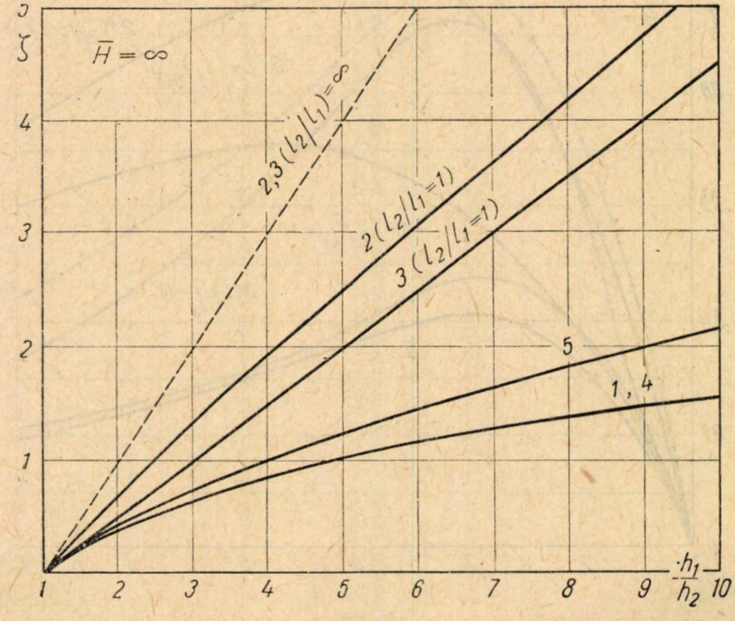

5
ζ
$\overline{H}=\infty$
4
$2,3(l_2/l_1)=\infty$
$2(l_2/l_1=1)$
3
$3(l_2/l_1=1)$
2
5
1, 4
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
$\frac{h_1}{h_2}$
10

Fig. 9

În condițiile și cu notațiile de mai sus, în figurile 4—9 s-au reprezentat curbele $\zeta\left(\frac{h_1}{h_2}\right)$ pentru diferite valori $\overline{H} = \text{const.}$, în cazul tipurilor de lagăre notate cu 1—5.

Din examinarea acestor diagrame se verifică afirmația făcută anterior și anume că proprietățile funcționale comparative depind simultan de $\frac{h_1}{h_2}$ și $\overline{H}$. Astfel la numere $\overline{H}$ reduse ($\overline{H} < 2$) lagărele la care grosimea h are o variație convergent-divergentă (largărele 4, 5, fig. 3) sînt net dezavantajoase, iar lagărul cu cea mai bună comportare este lagărul în trepte 3 (fig. 2).

La viteze medii, respectiv numere $\overline{H}$ medii ($\overline{H} = 2 \div 10$), lagărele de tipul 4,5 se comportă relativ bine pentru $\frac{h_1}{h_2} \leqslant 2$; lagărele de tipul 2,3 au caracteristici apropiate și prezintă de asemenea cea mai bună comportare la valori $\frac{h_1}{h_2}$ reduse $\left(\frac{h_1}{h_2} \leqslant 3\right)$. La rapoarte $\frac{h_1}{h_2}$ mai mari $\left(\frac{h_1}{h_2} > 3\right)$ lagărul în trepte 3 are o comportare mai slabă; în schimb se dovedește avantajos lagărul de tipul 1.

La viteze mari ($\overline{H} > 20$) cel mai avantajos se dovedește a fi lagărul 2, iar lagărul în trepte 3 are caracteristici comparabile, dar numai pentru rapoarte $\frac{h_1}{h_2}$ reduse; în aceleași condiții au proprietăți destul de bune și lagărele de tipul 4,5.

Rezultă deci că pentru toate regimurile, cele mai avantajoase tipuri de lagăre din punctul de vedere al capacității portante sînt lagărele 2,3 din grupa *b*) și anume acelea care prezintă o zonă finală cu $h = \text{const.}$ (fig. 2). Față de lagărul plan simplu (fig. 1*a*), sporul de capacitate portantă este de cca 50% la numere $\overline{H}$ moderate sau rapoarte $\frac{h_1}{h_2}$ moderate, diferențele crescînd însă cu numărul $\overline{H}$. Ar rezulta deci că cel mai avantajos tip de lagăr este cel indicat în figura 2*d*, care însă este mai dificil de realizat din punct de vedere tehnic. De asemenea, rezultă ca recomandabil lagărul convex lenticular cu rapoarte $\frac{h_1}{h_2}$ medii și cu săgeată δ moderată (fig. 2 *b*) ale cărui caracteristici sînt apropiate de cele ale lagărului 2. Dacă sectoarele lagărului axial sînt pivotante, lagărul de tipul din figura 2*b* este de asemenea de preferat.

Din punctul de vedere al coeficientului de frecare rezultatele sînt inverse: tipurile de lagăre care au capacitatea portantă cea mai redusă, ca de exemplu lagărele 4,5 au frecările cele mai reduse. La viteze, respectiv numere $\overline{H}$ mari, diferențele sînt însă neînsemnate. Aceste rezultate pot fi însă verificate utilizînd de exemplu rezultatele date în lucrarea [1].

Concluziile de mai sus rămîn calitativ valabile şi pentru lagărele reale de alungire finită, după cum se poat verifica din datele numerice parţiale date în lucrarea [5].

Din cele de mai sus rezultă că, cu excepţia lagărelor la care grosimea $h(x)$ are o variaţie convergent-divergentă (şi numai la numere $\overline{H}$ reduse), restul tipurilor de lagăre axiale au performanţe destul de apropiate, în special cele din figurile 1—2. Astfel, se verifică calitativ concluzia dedusă şi pentru lagărele lubrificate cu lichide [8] şi anume că două lagăre axiale cu grosimile h_1 şi h_2 identice au performanţe comparabile indiferent de forma funcţiei $h(x)$. Pentru lagărele cu aer deosebirile între diferitele tipuri de lagăre sînt însă ceva mai mari. Performanţele comparative depind în special de viteza relativă dintre suprafeţe, respectiv de numărul $\overline{H}$. La numere $\overline{H}$ reduse lagărele cu grosimea h convergent-divergentă sînt net inferioare, şi în general capacitatea portantă cea mai mare este dată de grupa de lagăre reprezentate în figura 2, la care în zona finală $h \cong \text{const}$.

Primită la redacţie la 28 februarie 1962

ВЛИЯНИЕ СПОСОБА ИЗМЕНЕНИЯ ТОЛЩИНЫ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ РАБОТЫ ПОДШИПНИКОВ С ГАЗОВОЙ СМАЗКОЙ

РЕЗЮМЕ

Проводится сравнительное исследование характеристик основных типов воздушных подшипников, применяемых в практике, и выявляются типы с оптимальными качествами при различных режимах или скоростях работы.

INFLUENCE OF THE FILM THICKNESS VARIATION ON THE OPERATING CHARACTERISTICS OF SELF-ACTING GAS-BEARINGS

ABSTRACT

A comparison between the operating characteristics of the main types of gas-lubricated bearings is presented. The types which allow to obtain optimum performances at different speeds are pointed out.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Calculul lagărelor de alungire infinită lubrificate cu gaze compuse din suprafețe plane*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VII**, 3, 741—771 (1956).
2. — *Considerații asupra calculului lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze*. Partea I. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VI**, *3—4*, 377—400 (1955); partea II, Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VII**, *1*, 81—105 (1956).
3. — *Sur la théorie des paliers à gaz*. Revue de Mécanique Appliquée, **I**, *1*, 141—155 (1955).
4. W. A. Gross, W. A. Michael, R. K. Brunner, J. M. Harker, K. E. Haughton, A. G. Osterlund, *A Gas Film Lubrication Study*. IBM Journal of Research and Development, 3, *3*, July 237—274 (1959).
5. W. A. Gross, *Numerical Analysis of Gas Lubricating Films*. Proc. of the First International Symposium on Gas Lubricated Bearings, Washington, Oct., 1959.
6. K. C. Kochi, *Characteristics of a Self-Lubricated Stepped Thrust Pad of Infinite Width with Compressible Lubricant*. Trans. of the ASME, Journ. of Basic Eng., **81**, *2*, June, 135—146 (1959).
7. С. А. Шейнберг, *Газовая смазка подшипников скольжения*. Трение и износ в машинах, **VIII**, 107—204 (1953).
8. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Biță, *Lagăre cu alunecare* (Calcul, proiectare, ungere), Ed. Acad. R.P.R., 1961.

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

CONTRIBUȚII LA DETERMINAREA PE CALE EXPERIMENTALĂ A PARAMETRILOR FUNCȚIONALI DE LA LAGĂRELE MOTOARELOR CU ARDERE INTERNĂ

I. PARAMETRII FUNCȚIONALI, METODA DE LUCRU ȘI INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ

DE

GH. VASILCA și AL. NICA

1. PARAMETRII FUNCȚIONALI

Realizarea constructivă a lagărului, precum și condițiile de exploatare, fac uneori ca în lagărul real condițiile la limită, ipotezele de geometrie și de microgeometrie a suprafețelor active, regimul de disipare și evacuare a căldurii etc. să se reproducă mai mult sau mai puțin conform cu ipotezele admise în calcul. Pe de altă parte, cercetările mai noi [1] arată, tot mai convingător, că într-un ansamblu de frecare fus-lubrifiant-cuzinet se produc, sub acțiunea mișcării, a presiunii și a mediului ambiant, interacțiuni între elementele constitutive ale materialului ansamblului, de natură să impună diverselor combinații de materiale și lubrifianți comportări la alunecare diferite. Cercetările în această direcție vin astfel să confirme o practică mai veche în construcția lagărelor uzuale, care leagă în mod inseparabil comportarea lagărului în exploatare de natura materialelor antifricțiune și a lubrifiantului care se utilizează.

Procesul interacțiunii este însă complex și nu se dispune deocamdată de rezultate care să permită o caracterizare cantitativă suficient de concludentă, care să permită aplicații practice. Sub formă globală însă, efectele acestei interacțiuni pot fi regăsite în caracteristicile funcționale ale lagărelor [2]. Se face astfel, în mod incontestabil, un pas înainte, dacă la calculul și proiectarea unui lagăr dintr-un material dat, parametrii funcționali se confruntă cu datele obținute pe cale experimentală. Prin cercetări experimentale au fost stabilite astfel de relații între unii parametri de bază, cum sînt presiunea, viteza, debitul de lubrifiant, coeficientul de frecare, temperatura etc., caracteristici care includ global efectele interacțiunii elementelor constitutive ale materialelor de construcție. Determinînd asemenea caracteristici pentru un ansamblu de frecare cu o geometrie și microgeometrie date, se includ de asemenea în aceste caracteristici și efectele preciziei de uzinare a lagărelor.

Apare deci pentru proiectarea lagărelor necesar și util de știut mărimea diferențelor dintre parametrii funcționali calculați și cei determinați experimental.

Făcînd asemenea studii pe grupe constructive de lagăre, rezultatele pot avea și un grad oarecare de generalitate pentru acea grupă.

O astfel de grupă o constituie de exemplu lagărele de sprijin și de biele ale arborelui cotit de la motoarele cu ardere internă tip automobil, ai căror parametri funcționali au fost determinați pe cale experimentală, utilizîndu-se metoda și instalația experimentală descrise în această lucrare.

Regimul termic. O caracteristică de bază în funcționarea de durată a unui lagăr este echilibrul termic. În exploatare, un lagăr prezintă siguranță în funcționare numai dacă regimul său de temperatură este stabil. În perioada normală de funcționare, deci după rodaj, echilibrul termic al lagărului se stabilește [3], urmînd o lege care poate fi definită cu ajutorul unei relații de forma

$$f\,p\,v = K\,Q + K_0 Q_0, \tag{1}$$

în care $f\,p\,v$ se referă la cantitatea de căldură produsă prin frecare, $K\,Q$ la cantitatea de căldură evacuată prin lubrifiant iar $K_0 Q_0$ la cantitatea de căldură disipată prin elementele de construcție, inclusiv răcirea artificială a lagărului, dacă este cazul. Atît timp cît parametrii externi de funcționare ai lagărului ca sarcina, viteza, temperatura și presiunea lubrifiantului la intrare în lagăr, precum și condițiile de disipare a căldurii $K_0 Q_0$ rămîn neschimbate, lagărul cu regim hidrodinamic de funcționare păstrează echilibrul termic creat, caracterizat prin temperatura de funcționare constantă.

Un astfel de echilibru se realizează și la lagărele de la motoarele cu ardere internă, deși aici lagărul suferă în plus o influență termică exterioară, datorită procesului de combustie din cilindri. O consecință a acestor influențe poate fi de exemplu nivelul mai ridicat al regimului termic de funcționare la astfel de lagăre.

Parametrul funcțional ce trebuie determinat pe cale experimentală și care caracterizează regimul termic stabil este deci temperatura constantă de funcționare corespunzătoare a lagărului. Din punctul de vedere al exploatării, prezintă interes mai ales acea temperatură medie constantă care se stabilește în zona încărcată a cuzinetului metalic în regim permanent de lucru. Repartiția temperaturilor în direcție axială și pe circumferința cuzinetului este importantă mai mult pentru lucrările de cercetare.

Corespondentul acestei temperaturi medii se obține și prin calcul după teoria hidrodinamică a lubrificației. Aici trebuie însă precizat că metodele de calcul cunoscute se împart în două grupe după ipoteza asupra valorii viscozității lubrifiantului. Unii autori [4], [5] admit în calcule viscozitatea corespunzătoare unei temperaturi medii a peliculei de lubrifiant la funcționarea în regim a lagărului. Pentru ca sistemul de ecuații care rezultă să poată fi rezolvat, se face în plus ipoteza [6] că la lagărele cu cuzineți metalici și cu carcasele de asemenea metalice, deci cu coeficienți de conductibilitate termică mari și apropiate ca valoare, în regim permanent de funcționare a lagărului, temperatura medie a carcasei este egală cu temperatura medie a filmului de lubrifiant. În a doua grupă se situează metodele de calcul [7] în care se folosește pentru viscozitate valoarea corespunzătoare temperaturii de intrare în lagăr a lubrifiantului, admițîndu-se concomitent o variație a vîscozității μ în lagăr după legea:

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{\delta}{\delta_1} \right)^q, \tag{2}$$

deci în funcție de grosimea filmului de lubrifiant δ, ceea ce corespunde mai bine cu fenomenul de lubrificație real din lagăr; μ_1 și δ_1 sînt valorile la începutul zonei de suprapresiuni, iar q un parametru putînd avea valori practice între zero și unu.

Compararea parametrilor experimentali poate fi deci riguros valabilă numai dacă prelevarea lor s-a făcut în concordanță cu semnificația pe care o au parametrii respectivi calculați cu ajutorul metodei de calcul considerată. Astfel, în cazul metodei de calcul care admite pentru vîscozitate o valoare medie, temperatura medie a lagărului se va măsura în masa metalică a cuzinetului sau a carcasei lagărului. În ipoteza relației (2), temperatura medie experimentală corespunzătoare este temperatura medie a filmului de lubrifiant. Lucrarea experimentală trebuie să mai îndeplinească în plus condiția ca temperatura t_1 a lubrifiantului la intrarea în suprafața activă a lagărului să fie neapărat realizată, ceea ce este necesar să se verifice în paralel cu măsurătorile efectuate asupra temperaturii medii.

Debitul de lubrifiant. La lagărele motoarelor cu ardere internă, alimentarea cu lubrifiant se face sub presiune și în circuit închis. Presiunea de alimentare depășește la unele motoare 8 kgf/cm^2, iar în alte cazuri se folosesc instalații speciale pentru răcirea lubrifiantului.

Aceste măsuri practice sînt justificate în virtutea relației (1), deoarece aportul debitului de lubrifiant la evacuarea căldurii din lagăr poate fi predominant, dacă se asigură un debit suficient de mare. Cercetările au arătat [8] că printr-un lagăr poate fi trecută o cantitate suplimentară de lubrifiant, care depinde printre altele de presiunea de alimentare și de raportul dintre lungimea, în direcție axială, a orificiului de alimentare și lățimea lagărului. Acest debit suplimentar iese din lagăr în direcție axială, înainte de a intra în zona de suprapresiuni. Expresia cantitativă a acestui debit a putut fi dedusă deocamdată numai printr-un calcul aproximativ, din cauza complexității fenomenului.

Existența debitului suplimentar la lagărele alimentate sub presiune, precum și faptul că acest debit nu poate fi calculat riguros, ridică dintr-odată o problemă dificilă la studiul comparativ al debitului măsurat și calculat. Într-un astfel de studiu rezultatele măsurătorilor și ale calculelor trebuiesc deci bine interpretate, pentru a exclude eventuale concluzii false. La motoarele de construcție curentă mai apare în plus dificultatea că la lagărele de bielă debitul nu poate fi măsurat direct, ci trebuie dedus prin diferenţă faţă de debitul lagărului de sprijin care îl alimentează cu lubrifiant.

Momentul de frecare. Se poate considera că diferitele soluţii existente, rezultate din teoria hidrodinamică a lubrificaţiei, cu privire la calcularea coeficienţilor de frecare la lagărele cu alunecare conduc la rezultate cantitative care pot fi utilizate pentru necesităţile de proiectare.

Investigaţiile experimentale în direcţia determinării coeficientului de frecare la un ansamblu de frecare dat, continuă însă să fie legate de unele greutăţi care se traduc printr-o împrăştiere relativ mare a rezultatelor obţinute. Efectele cu urmările cele mai mari ale acestor împrăştieri apar la lucrările de cercetare, care au drept scop confruntarea rezultatelor experimentale cu valorile obţinute prin calcul în vederea aplicaţiilor practice. Împrăştierile mari fac ca uneori să se poată trage cu greu o concluzie dintr-un astfel de studiu comparativ. Considerată strict din punctul de vedere hidrodinamic, concordanţa între parametrul calculat şi acelaşi parametru determinat experimental depinde de gradul în care la ansamblul experimental au fost realizate condiţiile la limită teoretice. Dacă aceste condiţii au fost îndeplinite, eventualele împrăştieri la rezultatele experimentale pot fi atribuite preciziei instalaţiei şi a aparaturii de măsură folosite. Nu poate fi neglijat într-un asemenea studiu comparativ, nici aspectul influenţei posibile a interacţiunii fizice şi chimice a materialelor fus-lubrifiant-cuzinet-mediu ambiant asupra procesului de frecare, influenţe cuprinse în rezultatul experimental.

Trebuie acordată şi în acest caz toată atenţia stabilirii parametrului experimental în condiţiile semnificaţiei pe care o are parametrul echivalent în relaţiile teoretice de calcul. O dificultate serioasă în plus pentru experimentator apare mai ales la luarea în considerare a corecţiei privind cuplul datorat poziţiei excentrice a fusului în lagăr, deoarece excentricitatea relativă care serveşte la calcularea acestei corecţii, nu poate fi deocamdată măsurată în mod curent şi suficient de exact cu aparatura uzuală de laborator.

Dat fiind factorii multipli care pot influenţa rezultatele experimentale, sînt necesare metode de verificare a acestor rezultate. Un pas în această direcţie s-a şi făcut¹) şi metodele menţionate arată sensul în care trebuie îmbunătăţită lucrarea experimentală pentru ca rezultatele să fie cît mai corecte.

2. METODA DE LUCRU ŞI INSTALAŢIA EXPERIMENTALĂ

Stabilirea parametrilor funcţionali ai lagărelor de la motorul cu ardere internă considerat s-a realizat la un stand de probă constînd dintr-o frînă electrică de 85 C.P. acţionată de un grup Ward-Leonard ; s-au luat o serie de măsuri pentru a se crea condiţii de lucru cît mai apropiate de cele practice. Motorul pe care s-au făcut încercările a fost un motor de automobil Skoda, tip 1101.

Totodată, s-a urmărit folosirea la maximum a posibilităţilor pe care le oferă funcţionarea motorului la standul experimental pentru separarea

---

¹) GH. VASILCA, *Unele aspecte cantitative ale coeficientului de frecare la lagărele cu alunecare.* I.M.A., 1958 (lucrare nepublicată).

factorilor funcționali, în vederea stabilirii ponderii cu care influențează parametrii lagărelor.

Studiul temperaturilor. În prima fază a lucrării s-a urmărit determinarea temperaturii uleiului la intrarea în lagărele de sprijin ale arborelui motor, parametru deosebit de important, după cum s-a amintit, pentru calculul caracteristicilor globale ale lagărului. Baia de ulei constituind în acest caz rezervorul de lubrifiant din care se alimentează lagărele, pe parcurs, pînă la orificiul de intrare în lagăr, uleiul suferă influențe termice din partea pereților canalelor de alimentare.

La un lagăr cu sarcini constante, datorită căldurii dezvoltate prin frecare, pereții canalelor de ulei sînt încălziți prin conductibilitate, zona cu temperatura cea mai scăzută fiind situată la orificiul de intrare a lubrifiantului în suprafața activă. Cercetări preliminare au arătat că în cazul alimentării în circuit cu posibilități de răcire a uleiului, la trecerea sa prin canalizația spre cuzinet, temperatura uleiului poate crește considerabil (10 . . . 30°C)[1].

La lagărele motoarelor termice, temperatura pereților canalizației este influențată și de căldura dezvoltată în procesul termic de combustiune. Datorită acestui fapt, sensul influenței termice a pereților canalizării asupra temperaturii uleiului în drumul acestuia către orificiul de intrare în lagăr nu poate fi atît de bine precizat, ca la un lagăr ferit de aceste influențe. S-au studiat de aceea în primul rînd diferențele dintre temperaturile uleiului în baie și la intrarea în lagăr. Temperaturile uleiului la intrarea în lagăr (t_i) și în baia de ulei a motorului (t_b), s-au măsurat în mai multe ipoteze :

a) în funcție de turația motorului, pentru o temperatură a apei de răcire t_a = const. și motorul antrenat din afară, cu gazele în plin ;

b) în funcție de turația motorului, la temperatura t_a = const. și t_b = const., motorul antrenat din afară, cu gazele în plin ;

c) în funcție de turația motorului, cu admisie variabilă a gazelor și motorul în funcțiune.

De altfel, și pentru primele două cazuri regimul termic a fost realizat cu motorul în funcțiune, oprindu-se în momentul măsurătorilor.

Temperatura apei de răcire s-a măsurat imediat în amonte de termostat.

Presiunea uleiului p_u s-a măsurat imediat în aval de pompa de ulei. Pentru măsurătorile de temperaturi ale lubrifiantului, s-au folosit captori electro-rezistivi cu punte și amplificator electronic de o construcție specială avînd sensibilitatea indicațiilor de aproximativ 3 diviziuni pe °C [9]. Acest aparataj a fost utilizat de altfel și pentru măsurarea, în paralel, a debitelor de ulei.

Măsurarea debitelor de lubrifiant. La un motor termic rețeaua de alimentare cu lubrifiant fiind complexă, a fost necesară realizarea unor canalizații speciale care să permită separarea debitelor de lubrifiant cu diferite destinații. S-a realizat pentru acest scop un debitmetru electric, care permite măsurători în locuri greu accesibile, cu o precizie satisfăcătoare ;

---

[1] GH. VASILCA, AL. NICA, *Cercetări experimentale asupra aplicării soluțiilor teoretice și de calcul la construirea lagărelor de la motoarele cu ardere internă.* I.M.A., 1958 (referat intern).

aparatura utilizată a fost prezentată în detaliu în lucrări deja publicate [9], [10].

Cu ajutorul diverselor ramificaţii şi robinete, s-a putut separa pe rînd debitul de ulei la lagărele de sprijin, la lagărele bielei, la mecanismele auxiliare (arbore cu came, lanţ de distribuţie etc.), la filtru şi by-pass. În felul acesta s-a stabilit un bilanţ cuprinzător al circulaţiei uleiului în motor. Măsurătorile au fost realizate în funcţie de : turaţie, presiune de alimentare şi sarcină. După cum s-a specificat deja, măsurătorile de debit au fost dublate de măsurătorile de temperaturi.

Studiul pierderilor prin frecare. Pierderile prin frecare în lagăre pot fi studiate experimental din punct de vedere cantitativ separîndu-se cu suficientă precizie din cuplul rezistent al motorului sursele de frecări pe organe, precum şi celelalte procese consumatoare de energie în funcţionarea motorului.

În prealabil, trebuie stabilite, evident, pierderile globale în motor, scăzîndu-se din puterea indicată puterea consumată la frînă, sau acţionînd motorul din afară şi măsurînd puterea absorbită.

Pînă în prezent, metoda utilizată pentru determinarea cuplului rezistent la un ansamblu complex, cum este de exemplu motorul cu combustie internă, este de a se antrena motorul din afară. Principalul avantaj al acestei metode este acela că permite separarea în condiţii comode a componentelor cuplului rezistent ; dezavantajul metodei constă în eliminarea influenţei pe care o au forţele şi regimul termic din motor în timpul funcţionării. S-au făcut din acest motiv încercări de determinare a cuplului rezistent, măsurîndu-se puterea indicată a motorului, din care prin scăderea puterii absorbite de frînă se obţine puterea consumată prin frecări [11], după relaţia :

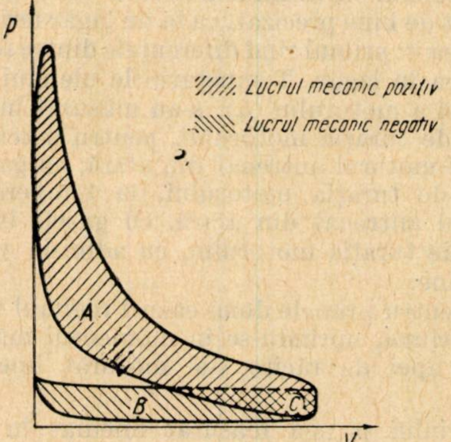


Fig. 1

$$P_i - P_u = P_f, \tag{3}$$

în care P_i este puterea indicată, P_u puterea utilă (la frînă) şi P_f puterea consumată prin frecări (incluzînd şi puterea consumată de mecanismele auxiliare ale motorului). Pentru calculul lui P_i este necesar să se ridice diagrama indicată pentru fiecare cilindru; făcîndu-se apoi însumarea, se obține puterea indicată a întregului motor. Acest parametru este de altfel un subiect controversat, existînd cel puțin 3 definiții, în funcție de interpretarea diagramei $p - V$ (fig. 1) [11]:

a) suprafața A,
b) suprafața A + suprafața C,
c) suprafața A — suprafața B.

Ultima definiție, reprezentînd lucrul mecanic efectiv, apare ca cea mai indicată să fie luată în considerare, după schema:

suprafața A — suprafața B — lucrul mecanic frînă = lucrul mecanic absorbit de motor.

Suprafața B reprezintă de altfel lucrul mecanic de pompare, care este o parte din lucrul absorbit de motor, schema utilizată fiind astfel pe deplin justificată. Într-o primă fază a lucrării s-a și urmărit de altfel determinarea cuplului rezistent global al motorului și defalcarea momentului rezistent dat de ciclurile de pompare, în vederea stabilirii ponderii lor față de restul pierderilor de putere în motor.

Pentru determinarea cuplului rezistent al motorului s-a utilizat un stand experimental echipat cu o frînă electrică cu balanță, la care precizia de citire este de ± 0,010 kgf.

Lucrul mecanic necesar pentru pompare a fost stabilit prin fotografierea imaginii ciclurilor realizate pe ecranul unui oscilograf catodic.

Trebuie specificat totodată, că se pot reproduce condițiile termice de funcționare ale motorului care pot fi considerate determinante în cazul frecărilor fluide și în cazul antrenării din afară, lăsînd motorul să funcționeze normal pînă în clipa în care se măsoară cuplul rezistent și controlînd temperatura apei de răcire și a uleiului din baie.

Măsurătorile au fost efectuate în cazul a diverse valori (menținute constante) pentru: apa de răcire, uleiul din baie, turație, admisie a gazelor.

Eliminarea succesivă a mecanismelor auxiliare ale motorului permite obținerea în final a pierderilor prin frecare din lagăre.

Primită la redacție la 23 februarie 1962

К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОДШИПНИКОВ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

РЕЗЮМЕ

Экспериментальное определение функциональных параметров подшипников двигателей внутреннего сгорания позволяет, с одной стороны, проверить теоретические данные, и, с другой стороны, установить влияние элементов, которые нельзя учесть при расчетах: микрогеометрию поверхностей, режима диссипации тепла и пр.

В первой части работы перечисляются параметры, представляющие особую важность для работы подшипников двигателей и излагаются упрощающие гипотезы, используемые при теоретических развитиях; таким образом вытекают аспекты, которые нужно осветить непосредственными измерениями для установления меры, в которой влияют неучтенные элементы.

Одновременно описывается применяемый экспериментальный метод.

CONTRIBUTIONS À LA DÉTERMINATION, PAR VOIE EXPÉRIMENTALE, DES PARAMÈTRES FONCTIONNELS POUR LES PALIERS DES MOTEURS À COMBUSTION INTERNE

I. PARAMÈTRES FONCTIONNELS, MÉTHODE DE TRAVAIL ET INSTALLATION EXPÉRIMENTALE

RÉSUMÉ

La détermination, par voie expérimentale, des paramètres fonctionnels pour les paliers des moteurs à combustion interne, permet, d'une part, de vérifier les données théoriques et, d'autre part, d'établir l'influence des éléments qu'on ne peut pas prendre en considération dans le calcul, tels que : la microgéométrie des surfaces, le régime de dissipation de la chaleur, etc.

Dans la première partie du travail on énumère les paramètres qui présentent une importance particulière dans le fonctionnement des paliers des moteurs, et l'on indique les hypothèses simplificatrices utilisées dans les développements théoriques. On voit apparaître de cette façon, des aspects que l'on doit élucider par des mesures directes, afin d'établir l'influence réelle des éléments négligés.

On présente, en même temps, la méthode expérimentale utilisée.

BIBLIOGRAFIE

1. B. LUNN, *Epilamen und Mischreibung aus der Sicht des Metallkundlers.* VDI-Berichte, **20,** 1957, 41.
2. GH. VASILCA, AL. NICA, *Cercetări asupra caracteristicilor de funcționare a lagărelor construite din materiale diferite.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **IX,** *2*, 377 (1958).
3. GH. VASILCA, *Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor* $p = f\ (V)$. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **VIII,** *1*, 75 (1957).
4. G. VOGELPOHL, *Das Reibungsverhalten von Gleitlagern.* Konstruktion, *3*, 81–86 (1956).
5. M. TEN BOSCH, *Berechnung der Maschinenelemente.* Springer, Berlin, 1951.
6. G. VOGELPOHL, *Die Bedeutung des Viskositätsverhaltens der Schmiermittel für Betrieb und Bau der Maschinen*, Brennstoff-Chemie, *23/24*, 363–368 (1954).

7. N. TIPEI, *Hidroaerodinamica lubrificației*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
8. N. TIPEI, AL. NICA, *Asupra ecuațiilor la limită în problema lubrificației*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *1*, 63 (1957).
9. GH. MARIN, *Instalație experimentală pentru măsurarea pe cale electrică a debitelor și temperaturilor uleiului la lagărele arborelui cotit de la motoarele cu ardere internă*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, **XII**, *3*, 693—700 (1961).
10. GH. MARIN, A. LUȚESCU, *Metodă și instalație de laborator pentru măsurarea debitelor și temperaturilor uleiului la lagărele motoarelor cu ardere internă*. Metalurgia și construcția de mașini, **XIII**, *9*, 833—836 (1961).
11. R. E. GISH, J. D. MC CULLOUGH, J. B. RETZLOFF, H. T. MUELLER, *Determination of True Engine Friction*. SAE Transactions, **66**, 649—667 (1958).

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

A TREIA CONFERINŢĂ UNIONALĂ ASUPRA PROBLEMELOR FUNDAMENTALE ALE TEORIEI MECANISMELOR ŞI MAŞINILOR

MOSCOVA, 23–28 IUNIE 1961

DE

D. MANGERON şi R. C. BOGDAN

În iunie 1961 s-au desfăşurat la Moscova lucrările celei de-a treia Conferinţe Unionale consacrate problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor. Organizarea acestei Conferinţe, programată de către Academia de Ştiinţe a U.R.S.S., a fost încredinţată Institutului de teoria maşinilor, pendinte de Comitetul de Stat al automatizării şi construcţiei de maşini de pe lîngă Consiliul de Miniştri al Uniunii Sovietice. Lucrările Conferinţei au confirmat în mod strălucit marile posibilităţi de creaţie ştiinţifică în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor ; activitatea s-a desfăşurat în cadrul orientării tematice date de hotărîrile plenarei de închidere a celei de-a doua Conferinţe Unionale, reproduse în esenţă în paginile acestei reviste, într-un referat analog celui prezent, elaborat de autorii acestor rînduri [1].

La lucrările Conferinţei au participat aproape 700 de persoane, reprezentînd cele mai mari institute de învăţămînt superior şi de cercetări ştiinţifice, institute de proiectări, cabinete tehnice ale uzinelor constructoare de maşini din U.R.S.S.

Deschizînd şedinţa plenară, acad. I. I. Artobolevski a subliniat faptul că îndeplinirea cu succes a marilor sarcini trasate de către Partidul şi Guvernul U.R.S.S. în faţa oamenilor de ştiinţă, inginerilor şi tehnicienilor, depinde în mod esenţial de dezvoltarea construcţiei de maşini. Elaborarea noilor metode de construcţie şi de calcul al maşinilor, îndeosebi în etapa actuală cînd introducerea sistematică a automatizării şi mecanizării celor mai complexe procese tehnologice reclamă maşini de viteze foarte mari şi de randament optim, este însă strîns legată de dezvoltarea în adîncime şi în suprafaţă a ansamblului de discipline care formează fundamentul științific al construcției de mașini, prin urmare și a teoriei mecanismelor și mașinilor.

A menționat totodată necesitatea urgentă, concomitent cu elaborarea cercetărilor asupra mașinilor moderne, de a adînci și dezvolta unele domenii ale teoriei mecanismelor și mașinilor legate de teoria generală a proceselor tehnologice.

★

La ședința plenară de deschidere au fost expuse următoarele referate consacrate stadiului actual al domeniilor fundamentale de teoria mecanismelor și mașinilor: *Analiza și sinteza mecanismelor* (prof. dr. N. I. Levitski); *Dinamica mașinilor* (acad. prof. I. I. Artobolevski și prof. dr. A. E. Kobrinski); *Teoria mașinilor cu acționare automată* (prof. dr. S. I. Artobolevski[1]); *Teoria transmisiilor în mașini* (prof. dr. V. A. Gavrilenko).

Pentru a ne da seama de deosebita valoare a acestor rapoarte de adîncă sinteză științifică, ajunge să subliniem faptul că ele constituie o continuare firească a competentei experiențe cîștigată de către autorii lor și în perioada lucrărilor celei de-a doua Conferințe Unionale de teoria mecanismelor și mașinilor, cînd concluziile lucrărilor la secția de Analiza și sinteza mecanismelor a fost elaborat de prof. dr. N. I. Levitski, la secția de dinamica mașinilor de prof. dr. A. E. Kobrinski, la secția de teoria mașinilor cu acțiune automată de prof. dr. S. I. Artobolevski, și la secția de teoria transmisiilor în mașini de prof. dr. V. A. Gavrilenko²) [2]. Referatul de bază consacrat dinamicii mașinilor are la temelia sa două lucrări fundamentale datorite acad. I. I. Artobolevski cu privire la unele laturi ale stadiului actual al studiilor de dinamica mașinilor, dintre care una este inserată în revista „Maschinenbautechnik" [3], iar cea de-a doua a constituit subiectul unui referat prezentat în iunie 1961 la cea de-a III-a Conferință generală poloneză de teoria mecanismelor și mașinilor [4], [5].

Peste o sută de comunicări și lucrări de sinteză au fost expuse și discutate în cadrul celor patru secții în care s-au desfășurat lucrările Conferinței.

În cadrul *secției de analiza și sinteza mecanismelor* s-au discutat noi metode de analiză și sinteză a mecanismelor articulate, plane și spațiale, precum și a mecanismelor complexe, cu roți dințate și cu pîrghii. S-a constatat cu acest prilej că introducerea în practica construcțiilor mecanismelor și mașinilor a numeroaselor metode științifice de sinteză, elaborate cu multă ingeniozitate și profunzime, mai lasă încă de dorit. Una din explicațiile de fond a acestui fapt constă în aceea că ecuațiile care leagă între ele parametrii constructivi de bază și condițiile impuse inițial problemelor sînt în mod esențial neliniare și prin urmare nu pot fi rezolvate astăzi decît prin mijloacele calculului numeric; se impune deci folosirea cît mai largă a mașinilor matematice electronice de calcul.

Un fapt nou în domeniul sintezei mecanismelor, scos în evidență la Conferință, constă în prezentarea unor metode de programare a proble-

---

¹) Participăm cu adîncă mîhnire la vestea morții premature a acestui talentat om de știință, decedat curînd după încheierea lucrărilor Conferinței.

²) În cadrul celei de-a doua Conferințe de teoria mecanismelor și mașinilor a mai funcționat o secție consacrată teoriei preciziei în construcția de mașini și aparate.

melor de sinteză în vederea folosirii mașinilor electronice cifrice. În acest sens vom cita, în primul rînd, o serie de lucrări prezentate de colective conduse de prof. dr. N. I. Levitski și prof. S. A. Cerkudinov, consacrate folosirii mașinilor electronice cifrice în rezolvarea unor probleme de sinteză a mecanismelor articulate cu patru elemente și în domeniul elaborării materialelor documentare interesînd sinteza mecanismelor mașinilor automate. Tot în acest cadru se situează și lucrarea prezentată de acad. D. Tavhelidze, elaborată în colaborare cu D. Mangeron, cu sprijinul Centrului de calcul numeric al Academiei de Științe a R.S.S. Gruzia, relativă la problema determinării domeniilor de variație a dimensiunilor mecanismelor plane articulate cu mai multe elemente, în condițiile existenței a două manivele [6].

Folosirea sistematică a programării liniare, neliniare și dinamice în cadrul teoriei mecanismelor și mașinilor, subliniată deja într-unul din rapoartele sale de sinteză de prof. dr. J. Oderfeld [7] la Conferința recentă de teoria mecanismelor și mașinilor de la Rogow (Varșovia), deschide o largă perspectivă pentru introducerea metodelor științifice de sinteză în activitatea de proiectare a constructorilor de mașini și aparate. Datorită executării rapide a calculelor programate în mașini electronice, la dispoziția constructorilor de mașini vor sta de aici încolo din ce în ce mai multe tabele, nomograme etc. menite a contribui la găsirea variantelor optime în problemele practice.

Stadiul lucrărilor prezentate la Conferință în cadrul acestei secții mai pune în evidență tendința de a se trece de la metodele de sinteză geometrică la metode analitice sau la o îmbinare rațională a acestora. Aici se situează vasta lucrare a acad. I. I. Artobolevski consacrcată teoriei curbelor de înfășurare de bielă [8], lucrarea prof. Ia. L. Geronimus relativă la studiul curbelor lui Burmester, lucrarea prof. L. S. Grozdenskaia referitoare la proiectarea unor mecanisme cu intermitență articulate de tipul lui Cebîșev ș. a.

Prin șirul de lucrări consacrate sintezei mecanismelor cu came prezentate în această secție s-au rezolvat probleme de determinare a gabaritelor optime a unor astfel de mecanisme, ținîndu-se totodată seama de necesitățile de durabilitate a diferitelor elemente și a rezistenței lor la uzură. Printre acestea cităm lucrarea prof. cand. șt. K. H. Sahbazean relativă la sinteza unui mecanism spațial de transmisie cu unghi de presiune optim, lucrarea prof. dr. V. A. Iudin referitoare la noile baze teoretice în metoda de calcul și de proiectare a mecanismelor cu came cu tachet cu rolă, lucrarea prof. dr. L. P. Riftin relativă la calculul curburii camelor plane ș.a.

Destul de multe lucrări au fost consacrate studiului analitic al mecanismelor spațiale. Astfel, de exemplu, prof. cand. șt. P. A. Lebedev studiază determinarea analitică a parametrilor mișcării unor mecanisme spațiale cu manivelă-balansier cu cinci elemente, prof. dr. F. M. Dimentberg expune un studiu relativ la mecanisme patrulatere spațiale cu două cuple de translație, prof. dr. S. G. Kislitzin aplică metoda relaxării a lui Cebîșev la reproducerea cu aproximație a dependențelor funcționale în mai multe variabile ș.a.

În cadrul *secției de dinamica mașinilor*, cel mai mare număr de comunicări s-a caracterizat printr-o adîncă împletire a studiilor teoretice de înalt nivel cu nemijlocite aplicații practice, marcîndu-se astfel o tratare și rezolvare inginerească a problemelor din acest important domeniu.

Un mare număr de lucrări a fost consacrat analizei diferitelor probleme de vibrații în mașini și agregate. Au fost tratate îndeosebi proprietăți ale sistemelor oscilatoare neliniare cu acțiune inversă; s-a pus astfel în evidență faptul că în cazul acțiunii inverse a sistemului asupra generatorului de oscilații, stabilitatea oscilațiilor staționare depinde în mod esențial de unele proprietăți ale caracteristicii motorului și în particular de panta acestei caracteristici. Aici se situează de exemplu lucrarea prof. dr. V. O. Kononenko, consacrată studiului proprietăților a două sisteme oscilatoare neliniare, lucrarea conf. cand. șt. L. I. Tehnovici, referitoare la oscilațiile torsionale forțate într-un agregat de mașini acționat electric ș.a.

S-au mai discutat și probleme de amortizare a vibrațiilor, amortizare realizată nemijlocit în articulațiile mașinilor și agregatelor de mașini, precum și probleme de măsură a vibrațiilor. Astfel, de pildă, acad. Ia. G. Panovko consacră o lucrare amortizării în unele articulații, iar ing. M. I. Feigin expune o serie de aspecte relative la unele probleme de teoria amortizatorilor neliniari.

Cîteva lucrări au tratat teoria și calculul mecanismelor vibratoare și a mecanismelor de percuție prin vibrații. Aici se situează, de exemplu, lucrarea conf. cand. șt. V. I. Sergheev relativă la studiul dinamicii unor regulatori-vibratori de viteză.

Două ședințe ale secției au fost consacrate discuției unor serii de probleme relative la dinamica și stabilitatea rotorilor de mare turație, precum și noilor metode de echilibrare automată. Aici se situează, de pildă, lucrarea conf. cand. șt. V. I. Olimpiev relativă la stabilitatea rotorilor verticali pe lagăre de alunecare de lungime finită, lucrarea colectivului conf. cand. șt. M. A. Rudis referitoare la dinamica rotorilor mașinilor hidraulice, lucrarea conf. cand. șt. Burgvitz ș.a., cu privire la problema oscilațiilor rotorilor flexibili pe perne elastice de lubrifiant în lagăre ș.a.

Participanții la conferință au expus de asemenea, lucrări asupra dezvoltării dinamicii generale a mașinilor, cu privire specială asupra dinamicii agregatelor complexe de mașini, în care se ține seama de elasticitatea elementelor, de variabilitatea masei și de caracteristicile motoarelor electrice. Aici se situează numeroase lucrări de seamă, ca de exemplu lucrarea acad. I. I. Artobolevski și cand. șt. A. P. Bessonov, secretarul științific al Comitetului organizatoric al Conferinței, relativă la studiul dinamicii mecanismelor plane cu masă variabilă, lucrarea acad. S. N. Kojevnikov referitoare la dinamica mecanismelor constituite din lanțuri ramificate de mase concentrate cu legături elastice ș.a.

Reprezentanții diferitelor institute de ramură au expus în lucrările lor numeroase probleme speciale de dinamica mașinilor, interesînd domeniul lor de activitate. Unele din aceste probleme s-au referit la dinamica motoarelor marine, tractoarelor, mașinilor-unelte, mașinilor miniere, a automobilelor etc. Mulți autori au folosit cu succes, în rezolvarea problemelor complicate de dinamică, standuri experimentale de modelare, care au permis să se înțeleagă corect variate procese dinamice din cadrul realității obiective. Astfel, de exemplu, acad. S. N. Kojevnikov a reușit să determine cu ajutorul modelării electronice solicitările în liniile principale ale laminoarelor ș.a.

În cadrul *secției de teoria mașinilor cu acțiune automată* s-au discutat probleme interesînd domeniile generale de teoria automatelor, insistîndu-se îndeosebi asupra teoriei automatelor cu acțiune intermitentă, referitoare la variate procese tehnologice.

Un interes deosebit a fost trezit de o serie de lucrări ce se referă la sinteza structurală a mașinilor automate și la clasificarea lor, avînd la bază principiile fundamentale de teoria informațiilor ; în acest cadru se situează în primul rînd lucrarea colectivului condus de prof. dr. A. E. Kobrinski.

Din seria de lucrări relative la teoria elaborării ciclogramelor automatelor și la realizarea automată a programelor de lucru, cităm lucrarea unui colectiv condus de prof. dr. M. L. Bihovski referitoare la metodele realizării automate, cu ajutorul mașinilor matematice, a programelor pentru prelucrarea conturelor plane, lucrarea unui colectiv condus de prof. dr. L. V. Petrokas ș.a.

În cadrul lucrărilor relative la studiul dispozitivelor de acționare hidraulică și pneumatică, ce se introduc pe scară din ce în ce mai largă în practica construcțiilor de automate, s-a tratat atît o serie de probleme de dinamică, cît și unele probleme de structură și de sinteză a lor. Astfel de exemplu, ing. V. P. Zencenko aplică metodele de sinteză a schemelor cu relee la construcția sistemelor pneumatice a mașinilor automate, cand. șt., E. A. Tuhanova studiază unele probleme de frînare a dispozitivelor cu acțiune hidraulică ș.a.

O particularitate a problemelor referitoare la dispozitive cu came folosite în mașini-automate constă în aceea că în lucrările prezentate s-au expus, paralel cu studii teoretice a mecanismelor respective, și numeroase rezultate ale cercetărilor experimentale ce au condus la determinarea parametrilor cinematici, ținîndu-se seama de elasticitatea elementelor. Aici se situează de pildă, lucrarea conf. cand. șt. M. K. Klebanov relativă la studiul analitic și la determinarea experimentală a parametrilor cinematici a dispozitivelor de acționare a elementelor de lucru la strunguri automate cu mecanisme cu came, lucrarea ing. Vulfzon, consacrată elaborării metodei profilelor de blocaj în vederea determinării valorilor raționale a parametrilor de fază din legea mișcării ș.a.

Probleme importante de teoria automatizării, ce se află acum în faza de elaborare se referă la studiul metodelor de evaluare obiectivă științifică a eficacității economice a producției automatizate. În cadrul acestei teorii, în secție s-a discutat un număr de lucrări consacrate elaborării unor metode de calcul a productivității unor mașini rotative și a unor linii automate, ca de exemplu lucrarea conf. cand. șt. A. P. Volescenko relativă la bazele teoretice și metodele de evaluare a productivității și a economicității strungurilor și a semiautomatelor, lucrarea conf. cand. șt. I. A. Klusov referitoare la studiul productivității mașinilor rotative și a liniilor automate ș.a.

Este interesant de subliniat faptul că în unele lucrări s-au folosit coeficienţi adimensionali. Acest fapt permite să se realizeze, aplicîndu-se sistematic metodele moderne de calcul numeric şi utilizîndu-se maşinile matematice de calcul, comparaţii nemijlocite între diferite variante ale soluţiilor obţinute. Astfel de exemplu, cand. şt. A. I. Dascenko îşi consacră lucrarea sa studiului comparativ a liniilor automate cu diferite dispozitive de acţionare, conf. cand. şt. E. G. Nahapetean studiază problema alegerii optime a tipului de dispozitiv de acţionare a diferitelor transportoare automate complexe, conf. cand. şt. E. I. Sehvitz tratează problema dinamică a mecanismelor cu acţiune periodică la maşinile automate complexe, folosind ca metodă modelarea electrică ş.a.

În cadrul *secţiei de tearia transmisiei în maşini* s-au discutat probleme relative la noi tipuri de angrenaje spaţiale avînd o capacitate portantă ridicată. Aici se situează lucrările prof. dr. N. I. Kolcin, conf. cand. şt. G. I. Apuhtin ş.a.

Într-o serie de lucrări s-au discutat probleme ce se referă la sinteza mecanismelor planetare, scoţîndu-se în evidenţă marea complexitate a acestora, legată de necesitatea de alegere optimă a numeroşilor parametri constructivi, ca numărul de dinţi, distanţa între axe, viteza relativă a sateliţilor, randamentul etc. Aici se situează un lung şir de lucrări datorit de exemplu prof. dr. F. L. Litvin, prof. dr. M. S. Kreinis, conf. cand. şt. Iu. N. Kirdeasev, cand. şt. Ia. Iu. Satz ş.a.

Într-un şir de lucrări, menţionăm lucrarea conf. cand. şt. Ia. S. Zilberman consacrată aplicării metodei acceleraţiilor reduse, elaborată la Iaşi, la studiul curburii centroidelor şi a traiectoriilor punctelor elementelor mecanismelor plane.

În cadrul conferinţei s-a subliniat în repetate rînduri importanţa deosebită ce trebuie acordată elaborării metodelor menite a permite programarea problemelor de sinteză a mecanismelor planetare. Primele lucrări executate la maşini electronice de calcul relative la această vastă problemă dau rezultate care permit să se elaboreze pentru necesităţi de perspectivă o vastă gamă de programe, folosirea cărora poate asigura în sinteza mecanismelor planetare un şir de parametri constructivi optimi.

★

În urma formulării concluziilor lucrărilor pe secţii, expuse de preşedintele biroului secţiei de analiza şi sinteza mecanismelor prof. dr. N. I. Levitski, de preşedintele secţiei de dinamica maşinilor prof. dr. V. A. Zinoviev, de preşedintele secţiei de teoria maşinilor cu acţiune automată prof. dr. S. I. Artobolevski şi de preşedintele secţiei de teoria transmisiilor în maşini prof. dr. V. A. Gavrilenko, s-a adoptat, în cadrul şedinţei plenare de închidere, o rezoluţie, care constituie o urmare firească a rezoluţiei adoptată la cea de-a II-a Conferinţă, deja menţionată, şi care marchează direcţiile viitoare de studiu în domeniul teoriei mecanismelor şi maşinilor în anii imediat următori.

Lucrările deosebit de importante ale celei de-a III-a Conferințe unionale de teoria mecanismelor și mașinilor, conduse cu prestigiul științific binecunoscut și cu o energie inepuizabilă de acad. I. I. Artobolevski, ajutat de cand. șt. A. P. Bessonov, secretarul Comitetului, au scos în evidență remarcabilele realizări obținute de specialiștii în teoria mecanismelor și mașinilor din U.R.S.S., realizări care se integrează în epocalele cuceriri în știință și tehnică obținute de Uniunea Sovietică, contribuții esențiale în lupta pentru pace și bună stare.

III-е ВСЕСОЮЗНОЕ СОВЕЩАНИЕ ПО ОСНОВНЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРИИ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

РЕЗЮМЕ

Работы Совещания были начаты в июне 1961 г. в Москве, в рамках четырех секций: анализ и синтез механизмов, динамика машин, теория машин с автоматическим приводом и теория передач в машинах.

Участие около 700 специалистов придавало особый размах совещанию, показывая этим важность, которая уделяется научной деятельности в области теории машин и механизмов в Советском Союзе, а также указывая на замечательные результаты, полученные советскими учеными.

Были намечены направления, по которым должны быть направлены исследования в области теории машин и механизмов, так, чтобы научные достижения были теснее связаны с запросами практики.

DIE 3. UNIONALE KONFERENZ FÜR PROBLEME DER GETRIEBE- UND MASCHINENLEHRE

ZUSAMMENFASSUNG

Die Konferenz fand im Juni 1961 in Moskau statt und umfaßte vier Abteilungen: Analyse und Synthese der Getriebe, Maschinendynamite, Theorie der automatischen Maschinen und Theorie der Übertragungen in Maschinen.

Die Teilnahme von ungefähr 700 Spezialisten bestimmte den besonders weiten Umfang der Arbeiten und zeigte einerseits die Bedeutung, die der wissenschaftlichen Tätigkeit auf dem Gebiete der Getriebe- und Maschinenlehre in der Sowjetunion beigemessen wird, und andererseits die von den sowjetischen Wissenschaftlern erzielten Resultate klar hervortraten die zukünftigen Richtlinien der Forschung auf dem Gebiete der Getriebe- und Maschinenlehre im Interesse einer immer engeren Verflechtung der Beiträge der Wissenschaft mit den Bedürfnissen der Praxis.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, R. Bogdan, *A doua conferinţă Unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **X**, *2*, 615–624 (1959).
2. — *Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов.* Институт машиноведения Академии Наук СССР, М., 1958.
3. I. I. Artobolevski, *Grundlegende Probleme einer modernen Dynamik der Maschinen.* Maschinenbautechnick, **9**, *11*, 575–589 (1960).
4. — *О современных задачах динамики машин.* III. gesamtpolnische Konferenz über Theorie von Maschinen und Getrieben. Rogow, 8–10 VI, 1961, 29.
5. D. Mangeron, *A III-a Conferinţă generală poloneză asupra teoriei mecanismelor şi maşinilor.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată **XII** (1961).
6. Д. Тавхелидзе, Д. Манжерон, *К общей задаче о проворачивании звеньев механизмов.* III Всесоюзное совещание по ТММ, М., июнь 1961 г.
7. Jan Oderfeld, *III Ogolnopolska Konferencja Naukowa katedr i zakladow teorii maszyn i mechanizmow.* Warszawa, 1961, Katedra Teorii Maszyn i Mechanizmow Politechniki Warszawskiej, 1961, 37.
8. И. И. Артоболевский, *Линейно огибающие шатунные кривые механизмов с поступательной парой.* Доклады Академии Наук СССР, **139**, *5*, 1077—1080 (1961).
9. — *III Совещание по основным проблемам теории машин и механизмов.* Программа. Академия Наук Союза СССР, М., 1960, 21.
10. А. П. Бессонов, *III Совещание по основным проблемам теории машин и механизмов.* Вестник машиностроения, *II*, 80—81 (1961).

MANIFESTĂRI ȘTIINȚIFICE PESTE HOTARE

SESIUNEA JUBILIARĂ REUNITĂ A ACADEMIILOR DE ȘTIINȚE A U.R.S.S., A R.S.S. GRUZIA, A R.S.S. AZERBAIDJAN, A R.S.S. ARMENIA, CONSACRATĂ CELEI DE-A 40-A ANIVERSĂRI A INSTITUIRII PUTERII SOVIETICE ÎN GRUZIA ȘI A ÎNFIINȚĂRII PARTIDULUI COMUNIST DIN GRUZIA

30 NOIEMBRIE — 4 DECEMBRIE 1961

DE

D. MANGERON[1]

Sesiunea științifică jubiliară reunită a academiilor de științe din U.R.S.S., R.S.S. Gruzia, R.S.S. Azerbaidjan, R.S.S. Armenia, consacrată celei de-a 40-a aniversări a înființării Partidului Comunist și a instituirii Puterii Sovietice în R.S.S. Gruzia a constituit unul din cele mai de seamă evenimente științifice pe scară mondială, întrucît a reunit pentru cîteva zile, la Tbilisi, aproape pe toți oamenii cei mai de seamă ai științei și tehnicii sovietice, care și-au asumat măreața sarcină trasată de Programul P.C.U.S. : ,,să consolideze pozițiile înaintate cucerite de știința sovietică în cele mai importante ramuri ale științei și să dețină locul de frunte în știința mondială în toate direcțiile principale"[2]).

Ședința plenară de deschidere a avut loc în marea sală a Teatrului de operă și balet din Tbilisi.

Președintele Academiei de Științe a U.R.S.S. acad. M. V. Keldîș a relevat, în cuvîntarea sa, vasta serie de rezultate deosebit de importante obținute de oamenii de știință sovietici în diferite domenii ale științei și tehnicii, începînd cu strălucita cucerire a spațiului cosmic și terminînd cu folosirea energiei nucleare atît în scopuri pașnice, cît și în scopuri de apărare a țării, subliniind realizări cu totul excepționale în domeniul formării noilor cadre de specialiști.

---

[1] Institutul politehnic Iași.

[2] O serie de trăsături caracteristice ale rezultatelor cercetărilor științifice ale oamenilor de știință din U.R.S.S. precum și un șir de date de detaliu deosebit de prețioase în aceeași ordine de idei au fost expuse recent în cuvîntarea președintelui Academiei de Științe a U.R.S.S. acad. Mstislav Keldîș și în raportul secretarului științific principal al Academiei Evgheni Feodorov în cadrul lucrărilor Sesiunii Academiei de Științe a U.R.S.S., consacrată rezultatelor cercetărilor științifice în anul 1961.

Au urmat cuvîntările de salut ale președinților academiilor de științe a R.S.S. Armenia și R.S.S. Azerbaidjan, acad. V. A. Ambarțumean și acad. Iu. G. Mamedaliev. Matematicianul și mecanicianul georgian de renume mondial, acad. N. I. Mushelișvili, președintele Academiei de Științe a R.S.S. Georgia, a prezentat un documentat raport intitulat *Știința în Gruzia în decursul celor 40 de ani ai Puterii Sovietice.*

Contribuția științei și tehnicii Gruziei sovietice la patrimoniul științific al U.R.S.S. a fost subliniată apoi de un mare număr de reprezentanți — delegați ai celorlalte academii republicane, ai principalelor ministere — în conferințele prezentate.

Lucrările sesiunii jubiliare s-au desfășurat în cadrul următoarelor secții : matematici, chimie, geologie, fizică, astrofizică, geografie, geofizică, cibernetică, științe tehnice precum și medicină, biologie, istorie, filologie, economie, drept. Lucrările au avut loc în clădirile diferitelor instituții tehnico-științifice din Tbilisi.

Desfășurarea lucrărilor sesiunii în cadrul unui mare număr de secții în clădiri diferite face imposibilă o prezentare sistematică a tematicii secțiilor și conținutului comunicărilor. În cele ce urmează se vor prezenta doar unele aspecte ale acestei importante manifestări.

În domeniul teoriei elasticității și plasticității au avut loc discuții fructuoase asupra unor noi rezultate de seamă în urma expunerilor lucrărilor academicienilor L. I. Sedov și S. A. Ambarțumean, consacrate respectiv unor probleme de mecanica corpului solid supus la deformații finite și de elastomecanică neliniară a învelișurilor subțiri și a plăcilor stratificate.

Un interes deosebit a fost trezit și de unele comunicări programate la Secția de cibernetică, începînd cu conferința inaugurală a academicianului A. I. Berg, consacrată problemelor actuale ale ciberneticii.

Acad. V. V. Mahaldiani a prezentat în cadrul Secției de științe tehnice un raport consacrat dezvoltării științelor tehnice în Gruzia în decursul celor 40 de ani scurși de la instaurarea Puterii Sovietice. Autorul raportului a scos în evidență cu multă pregnanță numeroase laturi noi și de seamă legate de această problemă.

Seria de expuneri de lucrări de teoria mecanismelor și mașinilor, în cadrul aceleași secții de științe tehnice, a fost inaugurată de acad. I. I. Artobolevski prin prezentarea lucrării sale *Asupra teoriei unor noi mecanisme privind mașini-automate* ¹).

O bună parte a tematicii, așa după cum era natural, a reflectat preocupări importante ale specialiștilor din R.S.S. Gruzia, legate de automa-

---

¹) Această lucrare este programată să apară în volumul 8(12), 1962, din seria nouă a Buletinului Institutului politehnic din Iași.

tică în general[1]) şi de mecanica minieră în particular. Aici se situează, de exemplu, interesantele comunicări ale prof. A. G. Kakauridze şi G. P. Mamradze, consacrate respectiv studiului posibilităţilor de diferenţiere automată a semnalelor de vorbire şi cercetării capacităţilor de transport sub sarcină ş.a.

Zilele de 3 şi 4 decembrie au fost consacrate vizitării instituţiilor ştiinţifice ale Academiei de Ştiinţe a R.S.S. Gruzia precum şi a unor uzine şi fabrici. Aceste vizite au fost foarte instructive.

Sesiunea ştiinţifică jubiliară reunită a academiilor de ştiinţe din U.R.S.S. desfăşurată la Tbilisi va constitui fără îndoială, o verigă importantă în istoria dezvoltării ştiinţei sovietice.

---

[1]) O lucrare în această ordine de idei, interesînd unele procese de automatizare a producţiei la fabricile de textile, datorită acad. D. Tavhelidze, va fi publicată în volumul deja citat, pe 1962, al Buletinului Institutului politehnic din Iaşi.

AL III-LEA CONGRES AL CONSILIULUI INTERNAŢIONAL DE ŞTIINŢE AERONAUTICE

STOCKHOLM, SUEDIA, 27–31 AUGUST 1962

Între 27 și 30 august a. c. va avea loc la Stockholm al III-lea Congres internaţional, organizat de Consiliul internaţional de științe aeronautice (ICAS).

Programul congresului cuprinde, grupate după domenii, următoarele lucrări:

PROGRAMUL TEHNIC

ŞEDINŢA DE DESCHIDERE

Conferinţa memorială Daniel și Florence Guggenhein — Viteza și securitatea în aviaţia civilă — Bo.K.O. Lundberg, Institutul de cercetări aeronautice, Suedia.

CONFERINŢE GENERALE

Ruperea datorită fluajului—Folke K. G. Odqvist, profesor, Institutul regal de tehnologie, Suedia.

Un articol ce urmează a fi prezentat de Academia de științe U.R.S.S.

Progrese în fizica atmosferei înalte—Walter Dieminger, director, Institutul pentru aeronomie Max Planck, R.F.G.

Sisteme de comandă pentru nave cosmice — H. H. Haglund, Institutul de tehnologie California, SUA.

Stabilitatea dinamicii neliniare a navelor cosmice care intră sau părăsesc o atmosferă—R.V.Laitone și T. J. Coakley, Universitatea California, Berkeley, S.U.A.

Zgomotul avioanelor în 1970 — Elfyn John Richards, profesor de aerodinamică, Universitatea din Southampton, Anglia.

Probleme de magnetodinamica fluidelor—Henri Cabannes, Facultatea de științe, Paris, ·Franţa.

FIZICA ATMOSFEREI SUPERIOARE

Fotoliza ozonului umed şi importanţa sa pentru încălzirea atmosferică a stratului de ozon—John Hampson, Canada.

Popularea cu particule în spaţiu — Carl E. Fichtel şi Frank B. McDonald, NASA, SUA.

Eforturile transversale în curgerea laminară a aerului rarefiat — A. Foux şi M. Reiner, Israel.

DECOLARE ŞI ATERIZARE VERTICALĂ ŞI SCURTĂ

Influenţa jeturilor laterale, simple sau combinate cu jeturi longitudinale, asupra caracteristicilor de portanţă ale aripii — Elie Carafoli, profesor Institutul politehnic Bucureşti şi director la Institutul de mecanică aplicată şi N. N. Patraulea, şef al secţiei de aeromecanică, Institutul de mecanică aplicată, CORMA (Comitetul romîn pentru mecanica aplicată), R.P.R.

Probleme aerodinamice de hipersustentaţie — H. Schlichting, director, Braunschweig, R.F.G.

Calităţile de mînuire a avioanelor cu decolare şi aterizare verticală şi scurtă, determinate cu ajutorul încercărilor de zbor şi metodelor de simulare—Fred J. Drinkwater III L.S. Rolls H. L. Turner şi H. C. Quigley, NASA, S.U.A.

MATERIALE ŞI OBOSEALĂ

Mecanismul de rupere a metalelor refractare — Herve Bibring şi François Girard, Oficiul naţional de studii şi cercetări aeronautice (ONERA), Franţa.

Potenţialul beriliului la avioanele comerciale supersonice — George A. Hoffman, The RAND Corporation, S.U.A.

Interacţiunile dintre oboseală şi deformaţie în materialele de structuri — A. J. Kenedy, Colegiul de aeronautică, Anglia.

Dezvoltarea încercărilor de oboseală la scară naturală — B. F. Stephenson şi D. James, Vickers-Armstrong (Aircraft) Ltd., Anglia.

STRAT LIMITĂ

O cercetare experimentală asupra tranziţiei stratului limită — Ennio Mattioli, Institutul politehnic, Torino-Italia.

Instabilitatea stratului limită la viteze subsonice — Itiro Tani, Institutul de cercetări aeronautice Tokio ; Jiro Sakagami, Universitatea Ochanomizu ; Yasujiro Kobashi, Laboratorul naţional de aeronautică, Japonia.

Factorii care lucrează asupra tranziţiei stratului limită la viteze hipersonice — R. Michel, ONERA, Franţa.

Efectul bordului de atac asupra curgerii stratului limită supersonic — Jean J. Ginoux, Belgia.

STRAT LIMITĂ

Un articol ce urmează a fi prezentat de Academia de ştiinţe U.R.S.S.

Unele dezvoltări recente în studiul vîrtejurilor la borduri — F. C. Maskell, Royal Aircraft Establishment, Anglia.

Dependenţa desprinderii laminare de numărul Mach şi de transferul de căldură în cazul unei scurgeri exterioare staţionare modulate sinusoidal — Alfred Walz, Institutul politehnic Karlsruhe şi Institutul DVL Freiburg, R.F.G.

Influenţarea acustică a straturilor limită ale jetului liber — O. Wehrmann şi A. Michalke. DVL, Berlin.

ELECTRONICĂ

Rezultatele ştiinţifice şi perspectivele automatizării în securitatea zborului cu ajutorul maşinilor electronice de calcul — W. Haak, Universitatea tehnică Berlin, în colaborare cu prof. Dr. Gundlach, H. Springer, F. Jesson, W. Stortz, D. Wirth, Universitatea tehnică Berlin.

Sisteme digitale în comunicaţiile cosmice — Daniel Hochman, Lockheed Missiles and Space Company, S.U.A.

AERODINAMICĂ SUPERSONICĂ ŞI HIPERSONICĂ

Cercetări asupra spoilerelor în regim supersonic — A. Heyser şi E. Maurer, Institutul de dinamică aplicată a gazelor DVL, Universitatea tehnică Aachen şi H. G. Knoche, Bölkow-Entwicklungen K. G., R.F.G.

Consideraţii geometric diferenţiale asupra transformării hodografice pentru curgerea conică iraţională — John W. Reyn, Universitatea de tehnologie, Delft, Olanda.

Unele aspecte ale aerodinamicii vitezelor mici şi supersonice ale aripilor portante svelte — A. Spence şi J. H. B. Smith, Royal Aircraft Establishment, Anglia.

Un articol ce urmează a fi prezentat de Academia de ştiinţe U.R.S.S.

Forme tridimensionale optime în regim supersonic — Maurice Fenain, ONERA, Franţa.

Efecte de dezechilibru în aerodinamica hipersonică — Amable Linan şi Ignacio Da-Riva, INTA, Spania.

Efectul temperaturilor înalte în scurgerea hipersonică — G. Giarre, Institutul politehnic din Torino, Italia.

Asupra aproximării „primei coliziuni" a presiunii Pitot în curgerea hipersonică a unui gaz rarefiat — Jan Lubonski, Institutul de probleme tehnice de bază, Academia Poloneză de Ştiinţe, Polonia.

O cercetare a efectelor interferenţei dintre aripă şi fuselaj la viteze supersonice şi hipersonice — P.G. Wilby, Institutul de cercetări aeronautice, Suedia.

Derivatele aerodinamice ale unui corp axial simetric în mişcare la viteze hipersonice — Ryuma Kawamura şi Fu-Hsing, Tsien, Institutul de cercetări aeronautice, Universitatea din Tokio, Japonia.

Cercetare experimentală a statoreactoarelor hipersonice — J. Swithenbank, Universitatea din Sheffield, Anglia.

Unele studii de aerodinamică asupra configuraţiilor de intrare în atmosferă în domenii balistice — H. F. Waldron şi B. Cheers, Canada.

STRUCTURI ŞI AEROTERMOELASTICITATE

Un articol ce urmează a fi prezentat de Academia de ştiinţe U.R.S.S.

Instabilitatea de plutire la numere Mach rapid variabile — Rolland Dat, ONERA, Franţa.

Vibraţiile şi stabilitatea elastică a unui ajustaj divergent cu curgere internă supersonică — W. Fiszdon, Universitatea tehnică Varşovia, Polonia.

Distribuţiile de temperatură, tensiuni termice şi flambajul termic al învelişurilor subţiri rezemate de cadre — H. Schuh, SAAB Aircraft Company, Suedia.

O teorie unificată a flambajului de fluaj al stîlpilor, plăcilor şi plăcilor curbe — George Gerard, Universitatea New York, S.U.A.

Aeroelasticitatea în practică — B.O. Heath, English Electric Aviation, Ltd., Anglia.

Un articol ce urmează a fi prezentat de Academia de Ştiinţe U.R.S.S.

AVIOANE DE TRANSPORT SUPERSONICE

Comportarea asimptomatică la infinit în atmosferă a undelor sonore neliniarizate emise de un avion supersonic — Jean-Pierre Guiraud, ONERA, Franţa.

Folosirea surselor şi dubletelor la calculul învelitorii unui avion supersonic — Robert Legendre, ONERA, Franţa.

Unele limitări de proiectare ale transporturilor supersonice identificate cu ajutorul studiilor pe simulatoare pilotate — Maurice D. White, Richard S. Bray şi George E. Cooper, NASA, S.U.A.

Transporturi supersonice — Unele consideraţiuni asupra problemelor care nu sînt de croazieră — L. F. Nicholson, Ministerul Aviaţiei, Anglia.

ZBORUL HIPERSONIC

Cercetări teoretice şi experimentale asupra combustiei supersonice — Antonio Ferri, Paul A. Libby şi Victor Zakkay, Institutul politehnic din Brooklyn, S.U.A.

Experiment cu avionul X-15 în legătură cu problemele vehiculelor care intră în atmosferă — Eldon E. Kordes, S.U.A.

Un articol ce urmează a fi prezentat de Academia de ştiinţe U.R.S.S.

Influenţa eventuală a cîmpului magnetic terestru asupra avionului hipersonic la altitudini mari — M. Lunc, membru al Academiei Poloneze, de Ştiinţe, profesor la Universitatea din Varşovia, Polonia.

RECENZII

,,*Проблемы механики сплошной среды*'', *к семидесятилетию академика Н. И. Мушхелишвили*, (Problemele mecanicii mediului conţinuu la aniversarea a 70 de ani a Acad. N. I. Muşhelíşvili) Издат. Акад. Наук СССР, Москва, 1961

Publicaţia pe care o recenzăm este un volum omagial dedicat omului de ştiinţă de renume mondial, academicianul N. I. Muşhelişvili, cu ocazia împlinirii a 70 ani. Prezentul volum cuprinde o culegere de articole semnate de oameni de ştiinţă, dintre cei mai valoroşi, din nouă ţări (Uniunea Sovietică, R. P. Chineză, Anglia, Olanda, India, Italia, R. P. Polonă, Suedia şi Statele Unite). Problemele tratate îmbrăţişează cele mai diverse domenii ale matematicii aplicate (elasticitate, plasticitate, învelitori, termoelasticitate, teoria cîmpului cuantic viscoelasticitate, curgere plastică, fluaj etc.) şi ale metodelor analitice în matematicile aplicate (probleme la limită, probleme de valori proprii, ecuaţii integrale singulare etc.). Varietatea, actualitatea şi nivelul ştiinţific al problemelor tratate fac ca acest volum să fie de o valoare cu totul deosebită.

Se remarcă, de asemenea, faptul că ideile ştiinţifice ale lui N. I. Muşhelişvili şi-au găsit aplicaţii în 24 articole din această culegere, reflectînd diverse preocupări în domeniul matematicii aplicate şi matematicii pure, aparţinînd unor oameni de ştiinţă atît sovietici cît şi străini. Acest lucru reprezintă o dovadă în plus că opera ştiinţifică a acad. Muşhelişvili a devenit pe deplin cunoscută, apreciată şi folosită de lumea ştiinţifică internaţională.

Volumul începe cu o scurtă biografie a academicianului Muşhelişvili, urmată de o listă a lucrărilor sale, după care sînt publicate articolele respective, în ordinea alfabetică a autorilor. În cele ce urmează ne vom abate de la această ordine şi vom face prezentarea urmărind preocupările autorilor.

În domeniul învelitorilor subţiri elastice, A. I. Lurie (U.R.S.S.), pe baza expresiei simetrizate a tensorilor eforturilor tangenţiale şi a deformaţiilor de încovoiere, prezintă ecuaţiile de echilibru într-o formă nouă, astfel încît necunoscutele ce apar în acest sistem sînt egale la număr cu mărimile ce caracterizează deformaţia învelitorii. A. L. Goldenweiser (U.R.S.S.) adînceşte ideea fragmentării stării de tensiune globale în stări de tensiune elementare, stabileşte criterii geometrice pentru starea de tensiune fără momente. D. V. Vainberg şi A. L. Siniavski (U.R.S.S.) dezvoltă ideea folosirii teoriei potenţialului în studiul stării de tensiune a învelitorilor prevăzute cu decupări. G.N. Savin (U.R.S.S.) abordează problema distribuţiei eforturilor în învelitorile prevăzute cu decupări de formă arbitrară. N. J. Hoff (S.U.A.) dă o nouă soluţie pentru ecuaţiile ce descriu starea de deformare simetrică a învelitorilor sferice. I. N. Vekua (U.R.S.S.) deduce anumite proprietăţi ale cîmpului de eforturi a învelitorilor în teorie fără momente în raport cu grupul transformărilor proiective ale spaţiului.

În domeniul elasticităţii plane menţionăm pe : Du Tin-hua (R. P. Chineză) care studiază problema elasticităţii plane a corpurilor izotrope şi neomogene, A. I. Calandia (U.R.S.S.) care dă o metodă de rezolvare a teoriei plane a elasticității în cazul în care mediul elastic ar umple un domeniu semicircular; V. T. Koiter (Olanda) studiază efectul a două șiruri paralele de fisuri într-o placă elastică infinită, Cen Din-sin (R. P. Chineză) abordează problema concentrației tensiunilor în cazul prezenței a mai multor fisuri, iar D. I. Şerman (U.R.S.S.) studiază problema semiplanului elastic, slăbit prin decupări de formă eliptică, suficient de apropiate de frontiera sa.

În domeniul elasticității tridimensionale citām pe G. Iu. Djanelidze (U.R.S.S.) care abordează problema corpurilor elastice anizotrope.

Problemelor de contact le sînt consacrate studii datorite lui M. P. Seremetiev și Ia. Staerman (U.R.S.S.). Primul se ocupă de soluționarea unei ecuații de tip Prandtl cu domeniu de integrare necunoscut apriori, ecuație ce intervine în problema unei plăci elastice infinite, avînd un orificiu circular în care a fost introdus un disc rigid sau elastic. Al doilea abordează problema comprimării corpurilor elastice ce sînt în contact după o linie dreaptă.

Problemelor termoelastice le sînt consacrate lucrări datorite lui W.Nowacki (R.P. Polonă), I. N. Sneddon și R. J. Tait (Anglia).

În domeniul viscoelasticității, J. R. M. Radok (S.U.A.) prezintă problema plană a viscoelasticității, extinzînd anumite rezultate obținute de N. I. Mușhelișvili în cazul elasticității plane.

În problema elasticității neliniare, A. E. Green (Anglia) publică o lucrare, în care sînt considerate vibrațiile de torsiune mici ale unui cilindru circular pretensionat, iar B. R. Seth (India) se ocupă cu stabilitatea deformațiilor finite.

Fluajul nestaționar este abordat de N. H. Arutunian și M. M. Manuchian (U.R.S.S.) în lucrarea *Torsiunea barelor circulare de diametru variabil în condițiile fluajului nestaționar* și de D. D. Ivlev (U.R.S.S.) în lucrarea *Asupra teoriei fluajului nestaționar*. O lucrare privind timpul de distrugere în condiția de fluaj i se datorează lui L. M. Kacianov (U.R.S.S.), iar lui F. K. Odcvist (Suedia) o lucrare privind fluajul unei membrane circulare inițial plane sub acțiunea unei sarcini constante.

Domeniului teoriei plasticității îi sînt de asemenea consacrate un număr de importante lucrări. Astfel, M. Ia. Leonov și N. Iu. Svaiko (U.R.S.S.) dezvoltă o teorie a dislocației în cazul deformării elasto-plastice la torsiune, V. Olszak și S. Zahorski (R. P. Polonă) prezintă problema cvasistaționarității curgerii plastice, legînd-o de ipoteza neomogenității. W. Prager (S.U.A.) își consacră un articol analizei din punct de vedere plastic a structurilor construite din straturi. V. V. Sokolovski (U.R.S.S.) se ocupă de o problemă de plasticitate plană, iar G. Colonnetti (Italia) abordează problema deformațiilor plastice legînd-o de fenomenul de ereditate.

P. G. Hodge (S.U.A.) prezintă în domeniul teoriei plasticității aplicate la învelitori o analiză a diverselor condiții de plasticitate în teoria învelitorilor plastice. În același domeniu, G. S. Sapiro (U.R.S.S.) deduce ecuația suprafeței de fluiditate pentru învelitorile ideal-plastice, ținîndu-se seama și de forțele tăietoare.

În domeniul propagării undelor, S. Kaliski (P.P. Polonă) dezvoltă problema propagării undelor plastice în cîmp magnetic pentru conductor ideal, L. N. Sretenski (U.R.S.S.) abordează problema undelor ce apar drept consecință a tensiunilor normale aplicate semispațiului elastic, iar R. D. Mindlin (S.U.A.) deduce ecuațiile de mișcare a cristalelor piezoelectrice, ținîndu-se seama de acțiunea reciprocă a cîmpului mecanic, electric și termic.

O lucrare de sinteză dedicată problemei bifurcației și unicității în mecanica corpului elastic și anelastic este prezentată de R. Hill (Anglia). C. Truesdell (S.U.A.) se ocupă de evoluția noțiunii de tensiune. Tian Siu-Sen (R. P. Chineză) publică o lucrare privind mecanica pămîntului.

Un loc deosebit de important în această culegere de articole îl au lucrările legate de problemele la limită, problemele de valori proprii și ecuațiile integrale singulare.

Astfel, V. V. Bolotin (U.R.S.S.) dezvoltă o metodă de determinare a funcţiilor proprii şi a valorilor proprii pentru o clasă de operatori liniari autoconjugaţi, definiţi într-un domeniu dreptunghiular, rezultatele obţinute fiind aplicate la cazul unei plăci plane care vibrează, precum şi la cazul unei învelitori cilindrice circulare care vibrează. M. G. Slobodianski (U.R.S.S.), utilizînd calculul funcţional, deduce o evaluare pentru frecvenţele proprii de vibraţie ale unei plăci de grosime constantă sau variabilă. N. P. Vekua (U.R.S.S.) abordează problema ecuaţiilor integrodiferenţiale liniare, cu parametri mici, cu derivate superioare, pentru care se consideră problema lui Cauchy. F. D. Gahov (U.R.S.S.) tratează noi tipuri de ecuaţii integrale pe care le rezolvă sub formă închisă. I. I. Daniliuc (U.R.S.S.) consideră problema ecuaţiilor integrale singulare unidimensionale. W. Pogorzelski (R. P. Polonă) prezintă o lucrare privind proprietăţile integralelor singulare şi aplicaţiile lor la un sistem de ecuaţii integrale singulare. G. N. Pahtev (U.R.S.S.) se ocupă de funcţiile analitice în semiplanul superior, pentru care dă două reprezentări. B. I. Smirnov (U.R.S.S.) prezintă rezultatele cercetărilor sale, privind o clasă de congruenţe izotrope în spaţiul cu trei dimensiuni legate de invarianţii funcţionali ai soluţiilor ce corespund ecuaţiilor cu derivate parţiale, iar E. Reissner (S.U.A.) prezintă o lucrare privind cîteva teoreme variaţionale ale teoriei elasticităţii.

N. N. Bogoliubov, B. V. Medvedev şi A. N. Tabheludze (U. R. S. S.) publică o lucrare în care aplică metodele lui N. I. Muşhelişvili la rezolvarea ecuaţiilor integrale singulare ce apar în teoria cîmpului cuantic.

Dacă din această sumară trecere în revistă a lucrărilor cuprinse în volumul omagial, se poate vedea, destul de uşor, varietatea de preocupări a autorilor lor, este însă foarte greu să se prezinte profunzimea ideilor ştiinţifice. De asemenea, este şi mai greu să se redea influenţa pe care a exercitat-o opera lui N. I. Muşhelişvili în domeniul matematicii pure, matematicii aplicate şi fizicii. Acestea pot reieşi numai din studierea amănunţită a volumului, pe care cei 56 de oameni de ştiinţă din nouă ţări l-au alcătuit pentru a omagia pe marele savant N. I. Muşhelişvili.

L. Librescu

А. И. ЛУРЬЕ, *Аналитическая механика* (Mecanica analitică), Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961, 824 pag.

De obicei, mecanica analitică se prezintă ca un capitol special al cursurilor sau tratatelor de mecanică generală; de asemenea ea constituie metoda de bază prin care se tratează problemele de mecanică în cărţile generale de fizică teoretică (de exemplu Landau şi Lifşiţ sau Goldstein). În ultimul timp au apărut lucrări destinate exclusiv mecanicii analitice, cum sînt cele scrise de Gantmaher şi de Certcov. Tratatul prof. A. I. Lurie este o lucrare de mari proporţii, în care se expun pe larg cele mai importante rezultate obţinute în mecanica analitică, aplicîndu-se acestea la un mare număr de probleme puse de practica inginerească. Menţionăm faptul că noţiunile de bază ale mecanicii nu sînt presupuse cunoscute; expunerea lor în cadrul lucrării face ca aceasta să apară ca un tot unitar.

Lucrarea cuprinde 12 capitole.

Capitolul I cuprinde noţiunile de bază ce se introduc în cadrul mecanicii analitice. Se definesc astfel legăturile, coordonatele, vitezele şi acceleraţiile generalizate; menţionăm şi introducerea unor noţiuni folosite mai rar cum sînt: coordonatele supraabundente, cvasivitezele şi cvasicoordonatele etc. Se introduc de asemenea deplasările virtuale şi se discută (ceea ce considerăm că este deosebit de important) justeţea relaţiei $d\,\delta = \delta d$.

În capitolul al II-lea se tratează problema cinematicii solidului rigid. Toate rezultatele care se dau şi care introduc pe cititor în mecanica vectorială clasică sînt însoţite de diferite aplicaţii interesante, cum sînt-de exemplu- cele legate de problema suspensiei cardanice. În acest capitol se consideră numai deplasările infinit mici, cazul deplasărilor finite formînd obiectul capitolului al III-lea. Aici se introduc parametrii Rodrigue- Hamilton pentru exprimarea deplasărilor finite şi se exprimă vitezele unghiulare cu ajutorul parametrilor Cayley-Klein. Rezultatele obţinute sînt însoţite de diferite aplicaţii.

Capitolele IV şi V sînt destinate unor mărimi fundamentale din dinamica sistemelor de puncte. Se introduce astfel energia cinetică, indicîndu-se apoi calculul acestei mărimi în cazul solidului rigid. Pentru aceasta se face şi un studiu detaliat al tensorului momentelor de inerţie. Menţionăm de asemenea studiul energiei acceleraţiilor. Aceste mărimi sînt apoi calculate pentru diferite sisteme de corpuri, inclusiv în unele cazuri neolonome. Forţele generalizate, lucrul mecanic şi energia potenţială, care se introduc apoi, se calculează în diferite cazuri particulare.

În capitolul al VI-lea se face o introducere în ecuaţiile generale ale dinamicii. Se deduc ecuaţiile lui Lagrange de prima speţă şi ecuaţiile centrale ale lui Lagrange. Ca un caz particular se studiază problema echilibrului unui sistem de forţe.

Următoarele două capitole cuprind teoria ecuaţiilor lui Lagrange de speţa a doua. Se studiază structura acestor ecuaţii, posibilităţile de integrare a lor, formele pe care le capătă pentru diferite tipuri de legături sau pentru diverse forţe ce acţionează asupra sistemului de puncte materiale. Se introduc coordonatele ciclice şi cvasiciclice şi se indică posibilităţi de integrare cu ajutorul funcţiei lui Routh. Prin introducerea cvasivitezelor şi cvasicoordonatelor se obţin ecuaţiile diferenţiale Euler-Lagrange. Se dau apoi şi alte forme ale acestor ecuaţii, cum sînt cele obţinute de Appel şi Ciaplîghin.

Dinamica mişcării relative este studiată în capitolul al IX-lea. Ca un caz particular se obţine echilibrul relativ. Această expunere este însoţită de numeroase aplicaţii tehnice.

Capitolul al X-lea cuprinde continuarea studiului ecuaţiilor diferenţiale ale mecanicii analitice. Se deduc ecuaţiile canonice, prin transformarea lui Legendre şi se întreprinde un studiu al parantezelor lui Poisson şi Lagrange. Rolul transformărilor canonice este subliniat îndeosebi. Cu aceste pregătiri se introduce ecuaţia Hamilton-Iacobi şi teorema lui Iacobi, care dau o metodă de integrare a ecuaţiilor canonice. Aceste rezultate sînt aplicate în cazul mişcării kepleriene. În cazul problemei celor trei corpuri se fac consideraţii cu caracter general. În capitolul al XI-lea se expune teoria perturbaţiilor, metodă aproximativă de rezolvare a problemei menţionate mai sus. Diferitele aplicaţii ce se dau se referă, în special, la probleme de mecanică cerească; se consideră şi cazul sateliţilor artificiali.

Ultimul capitol este destinat principiilor variaţionale ale mecanicii. Autorul insistă în special asupra principiului Hamilton-Ostrogradski.

Lucrarea este însoţită de două anexe privind o introducere elementară în teoria matricilor şi rezultatele fundamentale ale analizei tensoriale.

O parte din cuprinsul acestei cărţi reprezintă lecţiile pe care autorul le ţine la Facultatea de fizică-mecanică a Institutului politehnic din Leningrad. Dar lucrarea este mult mai vastă, cuprinzînd un număr mai mare de probleme tratate în amănunt.

Prin forma deosebit de clară şi sistematică a expunerii, prin bogăţia de material prezentat, prin numeroasele lucrări clasice şi moderne consultate, prin faptul că majoritatea rezultatelor obţinute sînt aplicate la probleme concrete puse de tehnică, tratatul prof. A. I. Lurie este destinat unui cerc larg de cititori; el poate fi folosit cu succes atît de studenţii din universităţi şi institute tehnice cît şi de cercetătorii ştiinţifici.

P. P. Teodorescu

Труды Института машиноведения; Семинар по теории машин и механизмов (Lucrările Institutului de maşini; Seminarul de teoria maşinilor şi mecanismelor). Vol. XXII 87, Изд. АН СССР, Москва, 1961, 96 pag.

Numărul XXII-87 al revistei cuprinde 7 comunicări:

1. V. I. Anilovici — *Cîteva probleme de analiză cinematică şi de dinamică a mecanismelor plane din mai multe bare articulate.*

În această lucrare este prezentată o metodă de aflare a funcţiilor de transmisie sub formă de serii Fourier pentru mecanismele articulate, cît şi metoda de autoechilibrare a maselor pentru aceste mecanisme.

Problema de autoechilibrare a maselor la o maşină este o chestiune importantă pentru proiectarea corectă a maşinilor.

Soluţiile la problemele ridicate şi rezolvate, autorul le aplică asupra unor mecanisme concrete de tipul sitelor cu amortizare, pentru deshidratare.

2. P. A. Lebedev — *O metodă analitică pentru determinarea parametrilor cinematici la mecanismele plane din bare articulate.*

În acest articol este expus un nou procedeu pentru cercetarea mecanismelor plane cu mai multe elemente, făcînd parte din clasa a doua, ordinul doi. Metoda expusă permite determinarea oricărui parametru cinematic al mecanismului.

O particularitate a metodei tratate constă — în faptul că se pot exprima toţi parametrii variabili ai mecanismului în funcţie de mărimile date prin condiţii iniţiale.

Sînt deduse relaţii de calcul pentru determinarea mărimilor deplasării,vitezelor, acceleraţiilor în mişcarea relativă şi absolută a elementelor şi a diferitelor puncte ale lor, pentru oricare mecanism patrulater plan. Pentru exemplificare este tratat şi un caz numeric, analizîndu-se un mecanism plan format din 6 elemente.

3. A. G. Burvitz şi G. A. Zavialov — *O metodă grafo-analitică pentru calculul stabilităţii mişcării fusului în lagăr.*

În lucrare, autorii studiază problema stabilităţii mişcării arborilor elastici în lagărele de alunecare.

La construcţia de turbine moderne, în legătură cu creşterea vitezelor de lucru a rotorilor, o importanţă deosebită o are păstrarea stabilităţii mişcării acestor rotori în lagărele lor. Pierderea stabilităţii stării de echilibru a sistemului strat de lubrifiant-fus, apare în foarte multe cazuri drept cauză principală a perturbaţiilor la funcţionarea normală a turbinelor. Acest lucru a fost de multe ori observat în practică.

De aceea, problema determinării condiţiilor de păstrare a stabilităţii este foarte importantă pentru funcţionarea corectă a turbinelor.

În lucrare, este expusă o metodă de calcul a stabilităţii pe cale grafică. Această metodă permite să se determine stabilitatea unui regim de lucru dat cît şi de a se alege astfel diferiţii parametri încît să se asigure un regim stabil de lucru.

4. B. N. Iuruhin — *Mecanisme de dirijare logică a maşinilor automate.*

În această lucrare este expusă o sistematizare a mecanismelor de comandă logică a maşinilor automate, după importanţa lor funcţională.

Maşinile automate moderne conţin un mare număr de mecanisme de comandă logică. Astfel de mecanisme sînt destinate pentru a rezolva problema asigurării funcţionării normale continui a automatelor cît şi pentru semnalizarea abaterilor şi deranjamentelor de lucru. În marea majoritate a cazurilor, astfel de mecanisme intră în alcătuirea unor sisteme complexe de reglare şi comandă.

B. N. Iuruhin în această lucrare analizează cîteva mecanisme ce îndeplinesc diferite funcţii de comandă şi stabileşte conţinutul logic al acestor funcţii, pentru a uşura utilizarea acestor scheme de mecanisme în diferite dispozitive şi montaje.

Pentru fiecare mecanism de comandă logică studiat, este arătat şi montajul electronic analog, care rezolvă aceeaşi problemă logică.

Lucrarea este foarte utilă la proiectarea de noi mecanisme de comandă.

5. E. G. Kulman şi A. V., Şleahtin — *Mişcările periodice ale sistemului vibrator prin şoc, acţionat cu motor cu explozie, în doi timpi.*

În acest articol autorii determină regimurile periodice ale mişcărilor masei *m* al unui model dinamic compus din două mase *m* şi *M*, legate între ele prin intermediul unor resoarte de rigiditate constantă *k*. Rolul maselor *m* şi *M* îl îndeplinesc, din punct de vedere constructiv, respectiv pistonul şi cilindrul motorului cu explozie, în doi timpi.

Regimul periodic al mişcării unui sistem vibrator prin şoc este determinat prin metoda transformărilor exacte, pentru cazul cînd forţele neliniare sînt funcţii de poziţie. Forţele neliniare variază după o lege în trepte cu porţiuni liniare. Se studiază, de asemenea, şi problema stabilităţii regimului mişcărilor periodice ale unui sistem vibrator prin şocuri.

6. N. I. Levitski — *Lucrările lui V. V. Dobrovolski şi teoria modernă a mecanismelor* (cu ocazia celei de a 80-a aniversări a lui V. V. Dobrovolski).

În articol sînt expuse lucrările membrului corespondent al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., V. V. Dobrovolski. Este dată şi o listă cuprinzînd tot ce a publicat Dobrovolski în decursul activităţii sale. N. I. Levitski comentează pe larg unele lucrări arătînd importanţa şi contribuţia lor la dezvoltarea teoriei moderne a mecanismelor.

7. V. P. Zencenco — *Unele probleme asupra clasificării şi construcţiei sistemelor pneumatice de comandă a maşinilor automate.*

Lucrarea cuprinde o clasificare a sistemelor pneumatice de comandă a maşinilor automate şi o descriere a construcţiei unor elemente ale mecanismelor de comandă pneumatică. De asemenea, se arată cum bazate pe aceste mecanisme pot fi realizate diferite scheme pentru dirijarea unui sistem automat determinat. Autorul cercetează, de asemenea, şi problema realizării unor funcţii logice elementare şi a operaţiei de pauză, cît şi unele probleme de analiză şi sinteză a sistemelor de comandă.

Lucrarea este utilă pentru proiectarea liniilor automate de comandă pneumatice.

L. Calmaciuc

Труды Института машиноведения: Семинар по теории машин и механизмов (Lucrările Institutului de maşini; Seminarul de teoria maşinilor şi mecanismelor). Vol. XXII-caietul 87. Изд. АН СССР, Москва, 1961, 102 pag.

În acest număr al revistei sînt cuprinse şase articole:

1. *Cercetarea calitativă a ecuaţiei diferenţiale de mişcare a agregatelor de maşini* de V. A. Loşcinin.

Articolul cuprinde un studiu calitativ al soluţiilor ecuaţiei diferenţiale de ordinul unu $y' = f(x,y)$, cînd sînt impuse o serie de condiţii iniţiale. Sînt cercetate din punct de vedere calitativ soluţiile ecuaţiei diferenţiale de mişcare ale unui agregat de maşini:

$$\frac{d}{d\varphi}\left[J\frac{\omega^2}{2}\right] = M_m - M_r,$$

presupunînd că momentele reduse M_m şi M_r ale forţelor motoare şi rezistente sînt funcţii de viteza unghiulară ω şi de unghiul de rotaţie φ al elementului de reducere, $M_m = M_m(\omega, \varphi)$, $M_r = M_r(\omega, \varphi)$ iar momentul de inerţie redus J, funcţie de unghiul de rotaţie al elementului de reducere, $J = J(\varphi)$, şi care în particular poate fi o constantă pozitivă.

Introducîndu-se energia cinetică W, ecuaţia diferenţială de mişcare a unui agregat de maşini este scrisă sub forma :

$$\frac{dw}{d\varphi} = M(\varphi, W),$$

unde $M(\varphi, W)$ este momentul redus al forţelor active.

Sînt apoi cercetate condiţiile de existenţă, unicitate şi stabilitate ale regimurilor de mişcare limită, ale agregatului de maşini.

2. *Teoria şuruburilor în analiza structurală şi cinematică a cuplelor şi a mecanismelor* de V. I. Şarikov.

În această lucrare este expusă analiza cuplelor cinematice luînd drept criteriu de comparaţie poziţia pe care o are în cuplele cinematice normala la suprafeţele de contact ale elementelor ce formează cupla. Este propusă apoi alcătuirea structurii unui mecanism pe baza locurilor geometrice făcute de axele cuplelor cinematice ale mecanismelor.

3. *Cîteva probleme referitoare la proiectarea uneia din diferitele forme de roţi dinţate necirculare* de N. N. Bogdanov.

În această lucrare este studiată problema angrenării unei roţi dinţate circulare excentrice faţă de axul de rotaţie cu o roată dinţată necirculară. Avantajul acestui tip de angrenare constă în primul rînd în uşurinţa cu care poate fi realizat. Roţile dinţate cilindrice excentrice faţă de axul de rotaţie se execută în mod obişnuit, iar roţile dinţate necirculare se pot confecţiona cu ajutorul unei freze cilindrice obişnuite pentru mortezarea roţilor dinţate, prin aşezarea ei excentrică pe maşină.

4. *Sinteza structurală a mecanismelor de comandă logică* de B. N. Iuruhin.

În acest articol este expusă metoda de sinteză structurală a mecanismelor de comandă logică, a căror analiză şi sistematizare a fost făcută de autor într-o lucrare publicată în numărul precedent al revistei.

Lucrarea este interesantă şi utilă pentru proiectarea de noi mecanisme de comandă logică a maşinilor automate.

Pe baza principiilor expuse în lucrare, se pot realiza mai multe scheme de mecanisme care să îndeplinească o anumită funcţie de comandă logică.

De asemenea, autorul face şi anumite aprecieri ale diferitelor scheme de mecanisme pentru comanda logică.

5. *Asupra problemei de sinteză a mecanismelor plane formate din bare şi roţi dinţate, cu oprire a elementului care face o rotaţie completă* de A. S. Şaşkin.

În această lucrare se descrie metoda de sinteză a unor mecanisme plane formate din bare şi roţi dinţate, la care ultimul element (elementul condus) poate avea opriri (pauze). Aceste mecanisme sînt denumite mecanisme centroide. Necesitatea unor astfel de mecanisme se face din ce în ce mai simţită în industria constructoare de automobile.

Pe baza metodei de sinteză propuse, autorul a obţinut o nouă familie de mecanisme din bare articulate şi roţi dinţate la care elementul condus efectuînd o rotaţie completă are pentru o anumită fracţiune de timp o pauză (o oprire).

6. *Mişcările periodice ale unui sistem autonom neliniar (cu motor cu ardere internă)* de A. V. Şleahtin.

În lucrarea lui Şleahtin sînt cercetate anumite probleme de dinamica maşinilor vibratoare, acţionate cu motoare cu ardere internă şi destinate pentru construcţii. Sînt determinate regimurile periodice de mişcare ale unui sistem autonom, la care forţele neliniare sînt funcţii de poziţie şi sînt exprimate prin relaţii analitice de formă generală.

Prin metoda transformărilor exacte şi prin utilizarea teoremelor generale ale dinamicii se determină mişcările periodice ale sistemului cît şi stabilitatea lor.

L. Calmaciuc

Г. Б. ПЫХАЧЕВ, *Подземная гидравлика* (Hidraulica subterană), Гостоптехиздат, Москва, 1961, 387 pag., 132 fig.

Printre cele mai importante aplicaţii ale teoriei scurgerilor prin medii poroase se găseşte fără îndoială studiul exploatării pe baze ştiinţifice a zăcămintelor de petrol şi gaze. Cartea cunoscutului specialist sovietic prof. G. B. Pîhacev se situează pe această linie de preocupări, punînd la dispoziţia studenţilor şi a specialiştilor un material amplu, prezentat în lumina celor mai recente rezultate.

După un prim capitol cu caracter introductiv, autorul trece la expunerea bazelor teoriei filtrării, insistînd în mod special asupra legii lui Darcy şi limitelor de valabilitate a acesteia. Urmează capitolul consacrat deducerii ecuaţiilor diferenţiale fundamentale ale hidraulicii subterane. Foarte amplu este tratată problema scurgerii unidimensionale, pentru lichide incompresibile şi compresibile, gaze şi fluide multifazice. Scurgerea gravitaţională cu suprafaţă liberă ocupă un loc destul de redus. Din capitolul următor, consacrat unor aspecte speciale, reţinem problema imperfecţiunii sondelor, aceea a formării conurilor de apă, studiul efectelor anizotropiei mediului poros şi al fisurării hidraulice. O atenţie deosebită este dată studiului sistemelor de sonde (baterii lineare şi circulare) în diverse condiţii de funcţionare, inclusiv problema deplasării contactului apă-ţiţei în cazul în care există sonde de injecţie.

Un alt capitol este dedicat prezentării problemelor de dislocuire a unui fluid de către altul, îndeosebi în cazurile cele mai simple. Urmează apoi expunerea scurgerii lichidelor compresibile (regimul elastic), bazată pe soluţia corespunzătoare sursei punctiforme. Scurgerea nestaţionară a gazelor este tratată destul de amplu, atît pe baza rezultatelor clasice ale lui L. S. Leibenzon, cît şi cu ajutorul ecuaţiei de bilanţ material. Remarcăm de asemenea tratarea filtrării nestaţionare a amestecurilor de lichid şi gaz. Încheierea conţine unele observaţii asupra posibilităţilor de utilizare a analogiilor în studiul scurgerii prin medii poroase precum şi cîteva consideraţii asupra perspectivelor dezvoltării hidraulicii subterane.

Din prezentarea sumară pe care am făcut-o, se poate totuşi constata că autorul nu a neglijat niciunul din aspectele esenţiale ale problemelor tratate. Expunerea este clară şi precisă, insistîndu-se mai mult asupra fenomenelor fizice însăşi, decît asupra detaliilor de calcul. Aparatul matematic utilizat este corespunzător scopului lucrării, demonstraţiile putînd fi urmărite cu uşurinţă. O bogată bibliografie şi indicaţii corespunzătoare în text permit cititorului să se iniţieze în studiile de amănunt asupra celor mai actuale probleme. Deşi este scrisă în special ca manual didactic, cartea prof. G. B. Pîhacev este de real folos şi pentru specialiştii din domeniul hidraulicii subterane.

T. Oroveanu

Н. И. ПРИГОРОВСКИЙ, *Напряжения и деформации в деталях и узлах машин* (Eforturi și deformații în piesele și nodurile de mașini), Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва, 1961, 564 pag.

Este cunoscut faptul că metodele experimentale de determinare a stării de tensiune și de deformație în elementele constructive ale mașinilor sînt puternic dezvoltate în Uniunea Sovietică și se bucură de multă atenție din partea cercetătorilor, proiectanților și constructorilor de mașini. Interesul față de aceste metode rezultă în mod evident din marele număr de lucrări valoroase apărute în acest domeniu și care au fost totdeauna primite cu multă atenție de specialiștii din țara noastră.

Printre cei care au contribuit la elaborarea, răspîndirea și dezvoltarea metodelor experimentale în Uniunea Sovietică, un rol deosebit de important l-a avut și îl are prof. N. I. Prigorovski, doctor în științe tehnice, conducătorul laboratorului de calculul tensiunilor din Institutul de cercetări pentru mașini al Academiei de Științe a U.R.S.S. Sub conducerea sa un numeros și valoros colectiv utilizează și perfecționează neîncetat aceste metode aducînd contribuții importante la studierea și clarificarea a numeroase probleme pe care le ridică proiectarea și construcția marilor agregate produse de industria sovietică de mașini.

Cartea apărută anul trecut, reprezintă o monografie în domeniul cercetării experimentale a stării de eforturi în piesele de mașini, scrisă de specialiști de la diverse institute sovietice, în special însă de prof. N. I. Prigorovski și colaboratorii săi; în felul acesta materialul cuprins în carte dă posibilitate cititorului să se familiarizeze cu principalele metode experimentale, cu tehnica și aparatajul lor de lucru, cu domeniile de utilizare și să cunoască rezultatele obținute de cercetătorii sovietici în aplicarea acestor metode la cercetările solicitate de industria producătoare de mașini.

Cuprinsul cărții este împărțit în două: prima parte se referă la metodologia și aparatura folosite în încercările și studiile de laborator, în timp ce partea a doua a ei este o trecere în revistă a unor încercări de mare anvergură efectuate pe turbine hidraulice și prese hidraulice de mare putere.

Tratarea amănunțită a problemelor atît în prima cît și în a doua parte este o strălucită exemplificare de îmbinare a teoriei cu practica, informațiile obținute din studiul cărții fiind necesare atît cercetătorului cît și practicianului.

Partea întîi a cărții intitulată „Metode de cercetare" prezintă metodele de tensometrie statică și dinamică, folosirea luminii polarizate (fotoelasticimetria) și a modelelor electrice.

Printre metodele de tensometrie se prezintă metoda lacurilor casante cu referire specială la lacul IMAS, utilizarea modelelor din plexiglas și folosirea traductoarelor electrice rezistive cu aparatura electronică corespunzătoare.

Deosebit de interesantă apare tratarea problemelor de folosire a traductoarelor în condiții de temperatură înaltă și pe durate lungi de timp.

Aparatura tensometrică descrisă este produsă în Uniunea Sovietică și reprezintă un stadiu avansat al tehnicii de măsurători sub raportul preciziei și al automatizării înregistrărilor.

În felul acesta se poate constata că preocupările cercetătorilor sovietici se situează în avangarda tehnicii măsurătorilor tensometrice, orientîndu-se în prezent în domeniul tensometriei statice pe două direcții principale: crearea unei aparaturi ușoare, tranzistorizate, și a unor aparate de înregistrare automată pentru un număr mare de puncte de măsurare și pe perioade lungi de timp. În domeniul tensometriei dinamice se caută perfecționarea aparatelor pentru înregistrarea concomitentă a variațiilor deformațiilor în multe puncte, pe un spectru cît mai mare de frecvențe.

Un capitol important este cel dedicat fotoelasticimetriei, în care se prezintă stadiul actual de dezvoltare al acestei metode de analiza tensiunilor pe modele plane și spațiale și în special direcțiile moderne de dezvoltare ale acestui domeniu: metoda straturilor optic active, utilizarea materialelor cu moduli de elasticitate reduși, modele spațiale compuse (o metodă originală a prof. N. I. Prigorovski) etc.

În capitolul „Modele electrice" se prezintă metodele bazate pe analogii electrice, cu cîmp continuu sau discret. Se dau în continuare exemple de lucrări efectuate în domeniul problemelor de teoria elasticității, în domeniul static și dinamic.

Partea a doua a lucrării cuprinde un bogat material aplicativ de mare utilitate tuturor inginerilor ce se ocupă cu problemele de încercări pe modele. Este vorba de descrierea principalelor studii efectuate pe modelele unor construcții de turbine hidraulice la cele mai importante uzine electrice din U.R.S.S., pe structurile unor prese hidraulice de mare putere, etc.

În ansamblu se poate spune că volumul recenzat este o lucrare fundamentală și remarcabilă. Calitățile deosebite ale lucrării constau în concizia și caracterul sistematic al expunerii, în bogăția informațiilor conținute care permit utilizarea sa ca un manual și în nivelul înalt și rigoarea cu care sînt tratate problemele.

De aceea considerăm că din această lucrare orice specialist are multe de învățat, ea reprezentînd totodată însă o dovadă a nivelului înalt la care se găsește știința și tehnica sovietică.

M. Arcan și *Ed. Nicolau*

W. NOWACKI, *Dynamika budowli* (Dinamica construcțiilor), Arkady, Budownictwo — sztuka — architektura, Warszawa, 1961, 382 p.

Datorită importanței mari pe care o prezintă această problemă, în ultimul timp s-au publicat numeroase lucrări din domeniul dinamicii construcțiilor. Toate acestea însă se referă la studiul barelor și sistemelor de bare, cu excepția cărții (devenită clasică și reprezentînd un anumit stadiu de dezvoltare) a lui S. P. Timoșenko, intitulată *Teoria vibrațiilor*. Volumul prof. W. Nowacki, de la Universitatea din Varșovia, încearcă și reușește să prezinte cele mai noi și importante rezultate din domeniul dinamicii construcțiilor, atît în ceea ce privește barele, cît și în ceea ce privește plăcile subțiri (plane și curbe) și blocurile — folosind metode moderne de calcul.

Cartea este împărțită în 14 capitole.

Primele două capitole sînt destinate unei introduceri în teoria elasticității și în teoria viscoelasticității. Se dau rezultatele de bază privind starea de tensiune și starea de deformație: se consideră și posibilitatea unei neliniarități din punct de vedere geometric. După ce se stabilesc cîteva principii variaționale importante se dau noțiuni de termoelasticitate și se definesc principalele corpuri cu proprietăți reologice.

Capitolul al III-lea cuprinde problema vibrației firelor. Rezultatele sînt obținute cu ajutorul principiilor variaționale iar pentru integrare se folosesc metode operaționale de calcul. Menționăm reprezentările grafice, deosebit de sugestive, cu ajutorul cărora se pune în evidență propagarea undelor de-a lungul unui fir.

În capitolele IV, V și VI se studiază vibrațiile longitudinale și transversale ale barelor drepte. Menționăm că se ține seama și de efectul forței tăietoare (bare de tip Timoșenko). Se consideră atît cazul unui material perfect elastic cît și cazul unor corpuri viscoelastice particulare. Calculele sînt duse pînă la posibilități de aplicare practică, diferite rezultate fiind concretizate sub formă de diagrame.

Sistemele de bare sînt studiate în capitolele VII și VIII. Se consideră astfel grinzile continue și grinzile de secțiune variabilă. Menționăm, de asemenea, cazul rețelelor ortogonale de grinzi. O atenție specială este acordată cadrelor simple; sînt date și cîteva exemple de cadre multiple și de cadre etajate.

Următoarele două capitole sînt destinate plăcilor subțiri plane și curbe. Se studiază vibrațiile transversale ale plăcilor plane, considerîndu-se în special cazul plăcilor dreptunghiulare și circulare în diferite cazuri de rezemare și de încărcare; se ține seama și de influența variației de temperatură. În cazul plăcilor curbe se dau numai cîteva rezultate cu caracter general, menționîndu-se în special cazul plăcilor de curbură mică.

Capitolul al XI-lea cuprinde problema vibrației blocurilor și a corpurilor cărora le corespund domenii infinite. Se trec astfel în revistă principalele rezultate și metode de calcul din dinamica corpurilor elastice și vîscoelastice, în caz general. Menționăm studiul undelor lui Rayleigh și al undelor plane ale lui Lamb. Se ține seama și de influența variației de temperatură.

În capitolul al XII-lea se dau pe scurt cele mai importante metode de calcul aproximativ în dinamica construcțiilor, capitolul al XIII-lea cuprinde noțiuni de calcul operațional (în special transformate Laplace, Fourier și Hankel) iar în capitolul al XIV-lea se dau cîteva tabele de calcul privind funcțiile ce se introduc în cuprinsul lucrării.

Această carte, bazată pe o bogată experiență a autorului precum și pe multiple cercetări proprii în acest domeniu, reprezintă o monografie interesantă a unui important capitol de mecanică aplicată. Fiecare capitol al lucrării este însoțit de o bibliografie cuprinzătoare. Problemele sînt tratate foarte riguros din punct de vedere matematic, autorul neocolind dificultățile de calcul; se caută totuși să se ajungă la rezultate numerice, la tabele și diagrame care se pot folosi în practică.

În felul acesta volumul prof. W. Nowacki prezintă interes, cu toate dificultățile de limbă, atît pentru cercetătorii din domeniul mecanicii solidelor deformabile cît și pentru inginerii proiectanți.

P. P. Teodorescu

M. MILBAUER, M. PERLA, *Fotoelasticimetrie a příklady jejího použití* (Fotoelasticimetrie și folosirea aplicațiilor ei). — Nakladatelství Čehoslovenské Akademie — Praha, 1961.

Lucrarea de față cuprinde o amplă și documentată tratare a subiectului enunțat, autorii presupunînd cunoscute noțiunile principale de bază ale acestei metode din lucrările lor anterioare, apărute în anii 1953 și 1959.

În primul capitol sînt expuse unele metode suplimentare aplicate pentru studiul stărilor de eforturi plane, cum sînt acele ale rețelelor, a analogiei electrice, a înghețării eforturilor, a studierii problemelor plane gravitaționale prin centrifugare și înghețare, a acelora studiate pe modele din gelatină sau prin procedee hidrostatice etc.

În capitolul al doilea se studiază unele aplicații dinamice ale fotoelasticității, prin descrierea procedeelor practice de folosire a acestei forme de cercetare.

Ca exemple de aplicații ale fotoelasticității plane se dau în capitolul III unele cercetări asupra problemelor clasice ale elasticității bidimensionale, cum este problema planului semi-infinit solicitat de către o forță concentrată sau de o sarcină repartizată, cu aplicații asupra problemei fundațiilor. În același capitol se dau unele studii fotoelastice efectuate asupra penei unghiulare acționate în vîrf, cu diferite aplicații practice asupra influenței formei și a direcției de acțiune a cuțitelor de strung. Se studiază apoi efectul de concentrare a eforturilor din jurul golurilor circulare din mijlocul unui disc, în cazul prezenței unor tăieturi de dislocație, situate în diferite poziții și direcții, cum și acel din jurul unor galerii de mină în situații corespunzătoare. Se mai studiază roțile în formă de disc, cu și fără bandaj, corpul lagărului unei osii, biela de locomotivă și aceea a unui motor în V etc. Un paragraf important este acel asupra erorilor și a preciziei măsurătorilor fotoelastice.

O aplicație interesantă tratată în lucrare este aceea din domeniul medical, asupra studiului fotoelastic al unei endoproteze, folosite pentru alcătuirea articulației femurului cu oasele bazinului, pentru a se constata modul de rezistență al acestor organe și al protezei respective, la solicitările rezultînd din felul lor de funcționare.

Capitolul IV este destinat studiului materialelor de modele, analizînd structura macromoleculară a rășinilor sintetice. Se dă aici o descriere amănunțită a fiecăruia din materialele moderne folosite pentru cercetările fotoelastice.

Capitolul V tratează pe scurt despre fotoelasticitatea spațială, dînd cîteva exemple simple, în special asupra unor încercări de torsiune a unor modele cilindrice.

În capitolul VI se dau indicații și exemple asupra altor metode de experimentare ajutătoare, cum sînt acele ale unor procedee diferite de interferometrie, asupra fotoplasticității, asupra modelelor de gelatină, asupra metodei moaré-urilor etc.

O bibliografie bogată de specialitate completează lucrarea, cu aproape 230 poziții de titluri de studii și lucrări sovietice și cu circa 530 poziții de titluri din literatura cehă și străină, asupra lucrărilor de fotoelasticitate și asupra materialelor fotoelastice, apărute pînă în anul 1960.

Cartea recenzată este o lucrare de un înalt nivel tehnic, foarte utilă cercetătorilor documentați în probleme de elasticitate experimentală și aplicată, studiate prin folosirea metodei moderne a fotoelasticității, cum și cercetătorilor și proiectanților din diferite domenii tehnice constructive.

Lucrarea redă în mod clar rezultatele unei munci stăruitoare și rodnice a autorilor, realizată în mod evident cu posibilități tehnice superioare, din cadrul unui sector important de activitate al Academiei Cehoslovace. Aceasta denotă o bună înțelegere și o susținere efectivă a aplicării metodelor noi de studiu și cercetare, într-o țară cu o tehnică înaintată în toate domeniile de activitate, cum este statul socialist vecin și prieten.

Un cuprins cu caracter practic de un nivel ridicat, o tratare clară, o execuție tehnică îngrijită și o prezentare editorială ireproșabilă a acestei lucrări, evidențiază aceeași preocupare superioară din punct de vedere cultural, științific și tehnic, atît din partea autorilor, cît și a instituției sub egida căreia se efectuează astfel de cercetări și în editura căreia se publică această lucrare.

N. Iosipescu

K. HAVELKA, J. ZVARA, *Teória lineárnej redukcie plosnych konštrukcii a jej numerické aplikácie* (Teoria reducerii liniare a plăcilor plane și curbe subțiri și aplicațiile ei numerice), I. diel : *Rotačné nosné plochy* (partea I : Construcții cu simetrie axială). Vydavatel'stvo Slovenskej Akadémie Vied, Bratislava, 1961, 560 p.

Primul volum al lucrării prof. K. Havelka și J. Zvara se ocupă cu aplicarea unei metode originale de calcul la proiectarea construcțiilor cu simetrie axială. Această metodă este prezentată cu ajutorul a numeroase exemple numerice concrete pentru diferite învelitori subțiri, ca și pentru construcții întregi- luate în ansamblul lor.

Ideea principală în această nouă teorie constă în aproximarea construcției cu o rețea de două familii de fîșii, care sînt — pe cît posibil — ortogonale între ele și paralele cu direcțiile principale ; se introduc articulații și reazeme speciale care permit lunecarea, astfel încît diferitele elemente să poată căpăta rotații sau translații. Pe de altă parte studiul acestui sistem se reduce la studiul fibrelor sale mediane, care capătă anumite proprietăți de ordin mecanic. Se face o analiză statică a fiecărui element, astfel că nedeterminarea statică nu este luată în considerare. Rețeaua considerată trebuie să înlocuiască construcția dată, din punct de vedere al proprietăților ei de rezistență. Pentru aceasta trebuie să se țină seama de condițiile de compatibilitate (de continuitate) a deformației, în fiecare punct. Metoda propune să se facă acest lucru în special pentru anumite poziții cheie, în care verificarea continuității conduce la o exactitate mai mare.

Cartea cuprinde o introducere relativ scurtă, cu caracter teoretic, în care se expune metoda generală de calcul, și trei părți amplu dezvoltate în care se prezintă diferite aplicații la probleme concrete de proiectare.

Partea I (peste 200 p.) este dedicată în întregime studiului unui turn de apă, constituit din cinci elemente structurale de rotație : o placă subțire exterioară, o placă subțire mediană, o placă subțire interioară, un inel circular de fundație și o boltă sferică de fundație. După calculul separat al fiecăruia din aceste elemente, se trece la remonolitizarea rezervorului, cu alte cuvinte se ține seama de comportarea sa spațială.

În partea a II-a autorii se ocupă de calculul unei plăci plane circulare de fundație, de grosime variabilă, supusă la acțiunea a diferite sarcini exterioare ; greutatea proprie, o sarcină normală, acțiunea unui moment după o direcție radială etc. Menționăm faptul că se ia în considerare și deformarea plăcii în zona de contact cu mediul pe care reazemă.

Plăcile subțiri de rotație pretensionate pentru fundații, acționate de sarcini oarecare sînt considerate în partea a III-a.

Volumul al II-lea va cuprinde problema datelor de poduri oblice, de grosime variabilă.

Într-o prezentare deosebit de frumoasă, autorii izbutesc să studieze amănunțit cîteva construcții inginerești, dificile din punctul de vedere al calculului, fără a neglija comportarea lor spațială. Toate considerațiile teoretice sînt însoțite de exemplificări numerice (de altfel acestea ocupă cea mai mare parte din lucrare), calculele fiind duse pînă la diagrame finale de eforturi. Menționăm prezentarea foarte sistematică și detaliată a problemelor propuse.

În felul acesta lucrarea scoasă la Academia de Științe din Bratislava este utilă atît inginerilor proiectanți cît și cercetătorilor din domeniul mecanicii construcțiilor.

P. P. Teodorescu

КУРТ ФИНК и ХРИСТОФ РОРБАХ, *Измерение напряжений и деформаций* (Măsurarea eforturilor şi deformaţiilor), Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва, 1961, 535 p.

Există în fiecare specialitate anumite cărţi de bază care dau o privire de ansamblu asupra problemelor din domeniul respectiv, sintetizînd experienţa studiilor şi cercetărilor unei anumite perioade de timp din dezvoltarea acelei ramuri.

În domeniul analizei experimentale a stării de eforturi şi deformaţii o astfel de carte a fost *Manualul pentru analiza experimentală a eforturilor* de M. Hetényi (1950). În ultimii ani au mai apărut două asemenea cărţi de bază şi anume cartea ce formează obiectul prezentei recenzii, apărută în original în anul 1958 sub titlul *Handbuch der Spannungs — und Dehnungsmessung* şi cartea intitulată *Izmerenie napreajeniii i usiliü v detaliah i uzlah maşin*, scrisă de N. I. Prigorovski şi apărută în anul 1961.

Cartea apărută sub îngrijirea autorilor H. Finck şi Chr. Rohrbach cuprinde o serie de monografii asupra principalelor metode de cercetare în domeniul analizei experimentale a eforturilor şi deformaţiilor, bazate pe materialele Conferinţei pentru metodele experimentale de cercetare a eforturilor ce s-a desfăşurat la Düsseldorf.

Capitolele cărţii sînt scrise cu multă competenţă de către specialişti cu renume în ramura respectivă, fapt ce explică nivelul ştiinţific ridicat al materialului expus.

Cartea începe cu o scurtă analiză asupra posibilităţilor şi limitelor metodelor actuale de măsurători cu referire mai ales la problemele puse de materialele şi elementele ce se folosesc în construcţia de maşini.

În continuare, se analizează în cîte un capitol două metode principale de analiză a stării de eforturi în interiorul materialelor şi anume fotoelasticimetria şi analiza cu ajutorul razelor Roentgen.

Problemele de fotoelasticimetrie sînt tratate sub principalele aspecte teoretice şi practice, trecîndu-se în revistă bazele optice ale metodei, aplicarea ei la analiza stării de eforturi plane şi spaţiale, similitudinea modelului cu prototipul, precum şi probleme cu privire la materialele folosite în fotoelasticitate, prepararea şi prelucrarea lor.

Folosirea razelor Roentgen în măsurătorile tensometrice este prezentată într-un spaţiu mai restrîns, fără a neglija însă principalele obiective şi tehnici ce trebuie cunoscute în acest domeniu.

Un capitol interesant îl formează metoda învelişurilor casante care prilejuieşte o scurtă prezentare a principalelor lacuri casante şi tehnici folosite în Apus; datele prezentate au dezavantajul că nu sînt complete furnizînd doar aspecte informative, destul de generale, explicabile prin tendinţa păstrării secretului de fabricaţie din partea firmelor producătoare. De altfel, toate metodele folosite cu ajutorul învelişurilor casante nu sînt suficient de precise din punct de vedere cantitativ, ele furnizînd în principal date calitative asupra zonelor celor mai solicitate şi asupra orientării eforturilor principale.

Precizarea mărimii eforturilor se face prin măsurarea deformaţiilor de la suprafaţa pieselor cu ajutorul diferitelor tipuri de tensometre. Diferitele tipuri de tensometre folosite în prezent sînt prezentate în capitolele 5—9. Se trec în revistă tensometrele mecanice, optice, pneumatice, cu coardă şi electrice, inductive şi rezistive.

Sînt descrise schemele de funcţionare ale principalelor tipuri mai reprezentative de asemenea instrumente, insistînd asupra celor mai noi; se obţine astfel o privire de ansamblu asupra stadiului de dezvoltare actual al tensometrelor şi asupra criteriilor de alegere corespunzătoare necesităţilor de măsurători. Un spaţiu mai larg se acordă problemei tensometrelor cu traductoare rezistive, fapt justificat de universalitatea acestui mijloc de măsurători şi larga sa răspîndire în ultimul timp.

Ca o completare interesantă şi binevenită sînt capitolele 10—11 ce tratează despre etalonarea tensometrelor şi despre aparatele de înregistrare a fenomenelor dinamice prin scriere continuă şi cifric.

O privire de ansamblu asupra metodelor de măsurare a deformaţiilor şi eforturilor o dă capitolul următor care tratează problema alegerii metodei celei mai adecvate în funcţie de necesităţi.

Oarecum separat de materialul expus în capitolele precedente apare ultimul capitol al cărţii dedicat modelării.

Sînt expuse problemele de similitudine statică şi dinamică ce apar în cursul studiului pe modele şi se dau rezolvări ale problemelor practicii confecţionării, solicitării şi urmăririi deformaţiilor pe modele, în timpul încercărilor, atît în domeniul elastic cît şi în cel al deformaţiilor elasto-plastice, mergînd pînă la rupere.

În ansamblu, cartea ce-o recomandăm atenţiei cititorilor, se prezintă echilibrat în raport cu importanţa problemelor analizate şi reuşeşte să dea noţiunile de bază necesare în fiecare din domeniile prezentate. Bibliografia bogată de la sfîrşitul fiecărui capitol dă posibilitatea aprofundării şi cercetării la sursă a diverselor aspecte tratate în cuprinsul capitolului respectiv.

Trebuie să remarcăm însă lipsa totală a unor indicaţii bibliografice referitoare la lucrări de specialitate apărute în ţările socialiste, deşi, după cum se ştie, importante succese au fost obţinute în domeniul tensometriei atît în Uniunea Sovietică cît şi în ţările de democraţie populară. Pentru cei interesaţi să afle despre principalele realizări ale Uniunii Sovietice în acest domeniu, le recomandăm cartea amintită la începutul acestei recenzii scrisă sub redacţia prof. N. Prigorovski şi care alături de manualul lui M. Hetenyi şi cartea prezentată, intră în patrimoniul tehnicii măsurătorilor de eforturi şi deformaţii drept carte fundamentală.

Cu remarca de mai sus, cartea lui K. Fink şi Chr. Rohrbach, rămîne o lucrare valoroasă ce se adresează mai ales inginerilor constructori de maşini şi instrumente, cercetătorilor ştiinţifici şi altor specialişti ce lucrează în domeniul analizei experimentale a eforturilor şi deformaţiilor.

F. Hann

GÜNTHER ECKER, DIETRICH VOSLAMBER, *Die Impulsstreuungsmomente in kollektiven Gesamtheiten* (Distribuţia momentelor de impuls în ansamble de colective), Vestdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1960.

Pentru stabilirea proprietăţilor statistice ale ansamblelor de elemente interacţionînd la distanţă, procedeele utilizate în problema celor două corpuri cu considerarea termenului de şoc al lui Boltzmann nu mai sînt satisfăcătoare, apărînd fenomene calitativ distincte de cele din cazul interacţiunilor la mică distanţă. Autorul consideră mai indicată o cale pornind de la ecuaţia Fokker-Plank generalizată ce se obţine din ecuaţia lui Lionville prin dezvoltare în raport cu distribuţiile de viteze. Problema revine astfel la determinarea distribuţiilor momentelor vitezelor (sau de impuls) ce intervin în această ecuaţie. În acest sens, sînt enumerate diferite modele adoptate pînă în prezent.

Obiectul studiului sînt ansamble nemărginite (cîmpuri şi particule) cu densitate medie constantă a distribuţiei spaţiale, avînd în spaţiul vitezelor o distribuţie Maxwell a temperaturilor T, indivizii ansamblelor fiind identici, punctuali, de masă m, interacţiunea lor reducîndu-se la forțe centrale newtoniene (q/r^2). De asemenea, se consideră definibilă în aceste ansamble o particulă de probă de o masă diferită m_1 și constantă a_1 **a** forței centrale. Se pune atunci problema determinării densității de probabilitate, de producere de către ampul de particule asupra celei de probă a unui impuls $\vec{P}$ în timpul Δt și a componentelor respective în sensul direcției vitezei ei $\vec{V}$ și normal pe ea: $\overline{P_{11}}$, $\overline{P_{11}^2}$, $\overline{P_1^2}$. Se presupun în calcul densitățile n ale particulelor, T, m, a și Δt mărginite. Impulsul $\vec{P}$ este descompus în o parte provenind din interacțiuni individuale învecinate și alta din interacțiuni colective îndepărtate cărora le corespunde respectiv un model interior și unul exterior. În interiorul acestor modele probabilitățile de stare a particulelor cîmpului sînt presupuse independente de poziția lor spațială și stohastic independente de ale celorlalte.

În modelul exterior, vitezele particulei de probă și ale celor exterioare sînt presupuse constante în intervalul de timp Δt, mișcarea particulelor fiind rectilinie. Pentru modelul interior se aplică soluția problemei celor două corpuri, deosebindu-se un al treilea model în care particulele admit șocuri centrale cu variații mari ale impulsurilor. Se presupune însă că acestea sînt foarte rare, contribuția lor la impulsul total fiind redusă. În cadrul modelului al doilea propriu-zis (interior) se consideră doar variații de impuls slabe ale particulelor de probă față de cele învecinate într-un cilindru de rază $\overline{n}^{1/3}$ lungime $\vec{u}\,\Delta t$, $\vec{u}$ fiind viteza relativă a particulelor față de cea de probă. Delimitările între domeniile acestor modele nu sînt înțelese absolut nete.

Pentru calcul se precizează întîi distribuția probabilităților unei sume de vectori independenți stabilită de Markoff și Chandrasekhar în cazul cînd distribuțiile coordonatelor vectorilor componenți tind către aceeași valoare pentru un număr infinit de vectori. Precizarea se face în cazul mai general al unor distribuții ale probabilității componentelor simetrice în raport cu coordonatele, fiind presupusă existența matricilor momentelor de ordinul 2 (simetric) și de ordin 3, 4 ale coordonatelor. Se obține o repartiție gaussiană cu o precizie $< 1\%$ dacă momentele pînă la ordinul 4 sînt determinate cu o precizie de minimum 1%.

Distribuțiile momentelor relative la modelul exterior sînt calculate prin evaluarea celor corespunzătoare unor domenii elementare și a suprapunerii lor stohastice. Aceste domenii au forma unor segmente cilindrice de dimensii reduse în raport cu distanța la origine. Distribuția lor este de tip normal și rezultă aplicînd cele precedent stabilite. Se evaluează de asemenea, în legătură cu limitele domeniului exterior, valorile respective ale parametrului de șoc.

De asemenea, se evaluează distribuțiile impulsului pentru domeniul interior, care nu mai sînt gaussiene în general. Se particularizează rezultatul în cazul particulelor în repaos și se deduc condiții de valabilitate ale rezultatelor obținute, comparîndu-se cu formulele metodel cut-off.

În lucrare se va citi $\varepsilon\nu$ în loc de $\Sigma\nu$ (pag. 16), iar în relația (27) în loc de σ_b, σ_z se va citi Δp_b Δp_z. În formula (20) se va integra de la $-\infty$.

M. Mișicu

Я. И. ЕСИПЕНКО, *Механические вариаторы скорости* (Variatoare de viteză mecanice),
Государственное издательство технической литературы УССР, Киев, 1961, 215 p.

În ultimul timp în literatura de specialitate a apărut un număr însemnat de lucrări privind variatoarele de viteză și care prezintă construcții bazate pe cele mai diferite principi cum ar fi: variatoare de viteză mecanice, electrice, hidraulice, pneumatice etc. Din număru foarte mare de variatoare mecanice existente în literatura de specialitate sau cunoscute doar din brevete de invenții sau cataloage al unor uzine, autorul cărții de față a reușit să aleagă tipurile cele mai perfecționate, mai rentabile din punct de vedere economic și mai ușor realizabile în practică.

Cu excepția variatoarelor P. I. V. (variator cu lanț) și „CH" (variator cu roți dințate), toate celelalte cuprinse în carte sînt variatoare de fricțiune.

Pentru fiecare variator tratat se prezintă o schiță simplă ușor de înțeles, iar unde este necesar se mai dau și desene constructive. Textul explicativ pe lîngă descrierea modului de funcționare al variatorului, cuprinde și date privitoare la caracteristicile principale; puterea și domeniul de reglare, cît și formulele cele mai importante pentru efectuarea unor calcule cinematice și de rezistență. În unele cazuri se dau și recomandări concrete în ceea ce privește domeniul de aplicare al diferitelor variatoare, cît și locul mai rațional de amplasare în mașină al acestora.

Primul capitol reprezintă o cercetare teoretică ce se referă la determinarea randamentului, a coeficientului de alunecare și a domeniului de reglare al variatorului.

Ca o parte pozitivă, trebuie menționat faptul că în carte se găsesc variatoare care asigură o reglare automată a vitezei după o lege dinainte stabilită, de asemenea care asigură o reglare automată a vitezei în funcție de variația momentului de torsiune al axului conducător.

În materialul publicat se prezintă și un variator planetar a cărui roată solară are dinții formați din lamele în formă de *T*. Utilitatea practică a acestui variator însă pare a fi îndoielnică.

În general, se poate afirma că autorul a strîns un material bogat și prețios pe care a reușit să-l expună într-o formă concisă (215 p.) și ușor accesibilă. În consecință cartea poate fi utilă atît proiectanților cît și studenților din învățămîntul tehnic superior.

Székely Imre

РУЗХА ЗДЕНЕК, *Электрические тензометры сопротивления* (Tensometre cu traductoare electrice rezistive), Госэнергоиздат, Москва-Ленинград, 1961.

Cartea inginerului Ruzha Zdenek apărută în original în anul 1958 în editura Nakladatelstoi Ceskoslovenske Akademie VED Praha sub titlul *Elektricke odporove tensometry* reprezintă o interesantă și bine documentată monografie asupra metodei măsurătorilor tensometrice cu ajutorul traductoarelor electrice rezistive.

În tehnica măsurătorilor, tensometrele electrice cu traductoare rezistive au cîștigat în ultimii ani recunoașterea unanimă a tehnicienilor și cercetătorilor interesați în analiza experimentală a stării de eforturi și deformații a corpurilor. Dezvoltarea pe care această metodă de măsurători a luat-o în perioada actuală a făcut să apară necesitatea unei specializări în acest domeniu. După cum remarcă autorul în prefața sa „Folosirea adecvată a tensometrelor cu traductoare electrice rezistive și obținerea unor rezultate juste din măsurători necesită cunoașterea a două ramuri fundamentale ale științei — teoria elasticității și electrotehnică".

Cartea ing. Z. Ruzha reușește să dea tocmai acele noțiuni fundamentale de care are nevoie specialistul în tensometria electrică cu traductoare rezistive pentru deplina înțelegere a funcționării complexului traductor — aparat de măsurat, dîndu-i astfel posibilitatea folosirii ei în condiții optime.

Materialul expus este împărțit în 7 capitole dintre care primul ne dă o privire generală asupra diferitelor metode de măsurare a tensiunilor înlesnind astfel înțelegerea principiilor pe care se bazează tensometria în general și locul ce-l ocupă tensometrele cu traductoare electrice printre celelalte categorii de tensometre.

Capitolul 2 se ocupă cu traductoarele electrice rezistive pe care le clasifică în trei grupe principale : cu fir, imprimate pe folie plastică, și fără suport. Sînt expuse principalele caracteristici ale traductoarelor rezistive, modul de confecționare și aplicare a acestora pe piesa supusă experimentării prin lipire cu sau fără prelucrare termică. Amănuntele privind tehnologia de confecționare, etalonare și lipire a traductoarelor sînt binevenite pentru practicianul tensometrist.

La capitolul 3 se indică modul cum se realizează măsurătoarea cu ajutorul diferitelor montaje electrice folosind micile variații de rezistență ale traductoarelor determinate de deformația piesei. Se descriu funcționarea punții Wheatstone alimentată cu curent continuu și alternativ, a punților cuplate și duble (puntea Thompson) și a schemei potențiometrice, evidențiind relațiile existente între diverși parametri electrici și tensometrici. Modul de conectare al traductoarelor în brațele punții în funcție de solicitare, ca și problemele realizării de măsurători pe elemente în mișcare, formează o parte interesantă a acestui capitol.

Capitolul 4 este dedicat influenței condițiilor înconjurătoare asupra lucrului traductoarelor și anume : influența temperaturii și umidității, influența rezistenței și capacității traductoarelor însăși și a conductorilor de legătură, influența încărcării și descărcării repetate, ca și a curgerii lente a traductoarelor. Se descriu sumar măsurile de protecție și înlăturare a influențelor dăunătoare asupra preciziei măsurătorilor.

Capitolul 5 descrie principala aparatură tensometrică folosită în practică : punți tensometrice cu și fără amplificare electronică, oscilografe și osciloscoape, aparatură pentru transmiterea la distanță a indicațiilor. După cum remarcă autorul în prefața sa, capitolul acesta este dedicat descrierii funcțiilor acestei aparaturi fără să dea indicații asupra principiilor constructive și a teoriei montajelor electrice folosite.

Capitolul 6 tratează pe larg problema determinării eforturilor pe baza rezultatelor măsurătorii. Tratarea acestei probleme este deosebit de amănunțită mai ales cu privire la starea plană de eforturi și folosirea rozetelor. De un real folos sînt metodele grafice de calcul al deformațiilor și nonogramele a căror folosire este explicată pe baza unor exemple numerice. Interesantă este de asemenea prezentarea despre măsurătorile de deformații în interiorul corpurilor și la suprafața profilelor metalice.

Ultimul capitol al cărții se referă în principal la folosirea traductoarelor în componența unor aparate ca dozele dinamometrice, accelerografe, vibrografe, manometre etc.

În ansamblul ei cartea lasă impresia unui material selecționat cu îngrijire cu scopul de a da cît mai multe informații într-un spațiu restrîns în problema atît de actuală a tensometriei cu traductoare electrice rezistive.

Scrisă în 1957, ea reflectă stadiul de dezvoltare a acestei specialități noi la acea dată ; de atunci tensometria a continuat să se dezvolte apărînd tipuri noi, perfecționate, de traductoare și aparatură nouă.

Cu toate acestea cartea inginerului Z. Ruzha este foarte actuală și merită toată atenția din partea specialiștilor din țara noastră, care lucrează în domeniul mecanicii experimentale.

F. Hann

A. E. SCHEIDEGGER, *The Physics of Flow through Porous Media* (Fizica scurgerii prin medi poroase). Revised Edition, University of Toronto Press, 1960, XVI + 313 p., 46 fig.

Apărută pentru prima oară în 1957 și retipărită în 1958, această interesantă lucrare de sinteză este prezentată acum într-o nouă ediție substanțial adăugită. Dacă mai amintim că între timp a apărut și o traducere în limba rusă a primei ediții, avem tabloul complet al unui succes pe care analizarea conținutului lucrării îl poate explica destul de ușor.

După cum arată el însuşi în prefaţa la prima ediţie, autorul s-a găsit la un moment dat, desigur în urma unei munci destul de asidui, în posesia unui foarte vast material bibliografic. O utilizare extensivă a acestuia ar fi dus la scrierea unei lucrări de dimensiuni puţin uzuale, astfel că autorul a recurs la cealaltă cale posibilă şi anume la redactarea unei lucrări de sinteză. În cadrul acesteia, a căpătat preponderenţă expunerea principiilor fizice de bază, a ecuaţiilor fundamentale şi a metodelor de rezolvare, prezentarea soluţiilor efective făcîndu-se numai printr-un număr redus de exemple semnificative. Punctul de vedere al autorului în această expunere este acela al unui bun cunoscător al problemelor, capabil de a face o critică pertinentă. Contribuţia originală nu se mărgineşte numai la selecţionarea şi prezentarea critică a materialului, ci este completată prin introducerea unui număr destul de mare de rezultate proprii cărora, în mod firesc, li se acordă o atenţie destul de mare.

Primul capitol are ca obiect prezentarea proprietăţilor mediilor poroase. Noţiunile de porozitate şi de suprafaţă specifică sînt analizate cu atenţie, ca şi problema determinării distribuţiei dimensiunii porilor. Se menţionează şi teoriile clasice asupra mediilor poroase fictive, şi se face expunerea proprietăţilor reologice ale mediilor poroase (tensiuni şi deformaţii).

Capitolul al doilea conţine consideraţii asupra fluidelor. Se insistă asupra unor cazuri speciale ca scurgerea fluidelor ne-nevtoniene şi aceea moleculară; alte probleme importante tratate sînt acelea ale interacţiunii fluidelor cu suprafeţele solide şi a scurgerii fluidelor miscibile în capilare.

În capitolul următor, autorul expune rezultatele mai importante în domeniul pe care îl numeşte hidrostatica mediilor poroase. Principalele probleme despre care se vorbeşte sînt adsorbţia fluidelor de către mediile poroase, deplasarea cvasistatică a unui lichid de către altul, care comportă o discuţie amănunţită asupra presiunii capilare şi umectabilitatea relativă.

Cu capitolul al patrulea, se intră în miezul problemelor prin introducerea legii fundamentale a lui Darcy. Remarcăm consideraţiile asupra generalizării acestei legi în cazul mediilor poroase anizotropice şi asupra mediilor poroase compresibile.

Soluţiile diferitelor probleme de scurgere prin medii poroase, obţinute cu ajutorul legii lui Darcy, sînt prezentate în capitolul următor. Se discută astfel scurgerea staţionară, scurgerea gravitaţională cu suprafaţă liberă şi scurgerea nestaţionară, atît pentru cazul lichidelor compresibile cît şi pentru acela al gazelor. Este vorba mai mult de o trecere în revistă bibliografică a numeroaselor soluţii existente, exemplele expuse fiind cel mult cîte unul din fiecare categorie.

Capitolul al şaselea, destul de amplu dezvoltat, este consacrat unei expuneri asupra teoriilor fizice referitoare la permeabilitate. Sînt prezentate pe rînd teoriile modelelor capilare, teoria lui Kozeny, aceea a lui Iberall şi cea dată de Brinkman. Urmează apoi teoriile statistice, dezvoltate mai ales în ultimul timp de către autor. Acest capitol este unul dintre cele mai interesante ale întregii lucrări şi vădeşte predilecţia autorului pentru această problemă deosebit de importantă a fizicii mediilor poroase.

O privire asupra unor domenii puţin explorate o constituie conţinutul capitolului următor, consacrat problemelor în care legea lui Darcy nu mai este valabilă. Pe rînd, se prezintă scurgerile care ascultă de legi de filtrare nelineare, insistîndu-se asupra soluţiilor date de Engelund, scurgerile în care intervin efecte moleculare şi cele care prezintă efecte ionice.

Ultimele trei capitole sînt dedicate scurgerii fluidelor multifazice, problemă care prezintă un interes practic deosebit. Astfel, în capitolul al optulea, se prezintă teoria elementară a lui Muskat referitoare la deplasarea unui fluid de către altul fără amestec pe suprafaţa de separaţie. Acest model simplu a fost utilizat de autor pentru dezvoltarea unei teorii asupra instabilităţii frontului de deplasare, expusă în continuare în acest capitol. Fără o legătură organică în raport cu restul materiei din capitol, sînt prezentate, de altfel destul de sumar, unele aspecte ale scurgerilor cu transfer de căldură în medii poroase.

Următorul capitol are ca obiect scurgerea fluidelor multifazice imiscibile. Accentul este pus pe prezentarea soluţiei date iniţial de Buckley şi Leverett pentru dezlocuirea unui fluid incompresibil de către altul. Se mai dau şi soluţii pentru diferite probleme din aceeaşi categorie. Introducerea noţiunii de permeabilitate relativă prilejuieşte o discuţie destul de amplă asupra aspectelor ei fizice. Mai semnalăm din acest capitol şi problema similitudinii dinamice în medii poroase.

Teoria dezlocuirii fluidelor miscibile formează obiectul ultimului capitol. Expunerea se bazează pe teoria statistică a dispersiunii, dezvoltată de autor, dîndu-se şi indicaţii asupra unor generalizări.

O bibliografie extrem de amplă încheie acest volum şi constituie un ajutor preţios pentru cei interesaţi în urmărirea amănunţită a problemelor.

Lucrare tipică de sinteză, cartea lui A.E. Scheidegger are în special meritul de a prezenta, în lumina cercetărilor recente, aspectele teoretice fundamentale ale scurgerii fluidelor prin medii poroase. În ceea ce priveşte aplicaţiile tratate, ele sînt în general interesante, deşi alegerea lor reflectă probabil unele preferinţe ale autorului. Cu o mărire relativ neînsemnată a volumului cărţii, s-ar fi putut introduce şi alte cîteva exemple semnificative care ar fi dat, după părerea noastră, un aspect mai complet lucrării.

Putînd fi utilizată şi de acei care doresc să ia un prim contact cu acest domeniu vast, cartea este însă valoroasă în special pentru cercetători şi în general pentru specialişti, atît prin bogăţia de fapte şi de sugestii conţinute în ea, cît şi prin materialul bibliografic aproape exhaustiv.

T. Oroveanu

EMANUEL PARZEN, *Modern Probability Theory and its Applications* (Teoria modernă a probabilităţii şi aplicaţiile ei). New York – London, John Wiley & Sons, Inc., 1960, 464 p.

În lucrarea de faţă, autorul şi-a propus şi a reuşit să prezinte conceptele teoriei moderne a probabilităţilor într-o formă riguroasă fără ajutorul matematicilor superioare. De asemenea, modul de prezentare a conţinutului satisface necesitatea ca teoria probabilităţilor să poată fi însuşită de un mare număr de cititori. Autorul a fost condus în acest sens de faptul că teoria probabilităţilor trebuie să facă parte din cunoştinţele oricărui om de ştiinţă, ştiind că tendinţa actuală de cunoaştere a adevărurilor se schematizează în întrebarea „care este probabilitatea ca un anumit eveniment să se realizeze sau nu".

De la început autorul face legătura între fenomenele întîmplătoare diverse şi modelele matematice respective explicînd şi exemplificînd domeniul practic şi teoretic al acestei discipline. Expune cîmpul de evenimente al fenomenelor întîmplătoare, arătînd operaţiunile cu mulţimile de evenimente şi proprietăţile lor. Urmează apoi introducerea funcţiei de probabilitate pe baze axiomatice cu proprietăţile respective precum şi utilizarea definiţiei laplaciene în cazul evenimentelor egal posibile pentru spaţiul finit.

După ce se face o introducere în problemele şi noţiunile de bază ale teoriei probabilităţilor, începînd cu variabilele întîmplătoare corespunzătoare problemei clasice de extragere a bilelor colorate dintr-o urnă, se dezvoltă în continuare probabilitățile condiționale, independența și dependența evenimentelor sau familiilor de evenimente, lanțurile Markov, funcțiile și densitățile de distribuție, valori medii și legi de probabilitate. Toate capitolele sînt pe larg explicate și bogat ilustrate în exemple din diverse domenii.

Ultimele capitole au un caracter mai pretențios din punct de vedere matematic și se referă la rolul funcțiilor caracteristice în teoria probabilităților și la convergența șirurilor de variabile întîmplătoare, încheindu-se cu importantele teoreme : legea numerelor mari și teorema centrală de limită a teoriei probabilităților.

Lucrarea cuprinde 160 de exemple, 120 exerciții teoretice care extind teoria și 480 exerciții practice dintre care jumătate au răspunsurile date, tabele cu caracteristicile diverselor distribuții și tabele cu valorile numerice ale distribuției normale, binominale și Poisson.

Chr. Pelecudi

⁂ *Mémoires et travaux de la Société Hydrotechnique de France, La mécanique des fluides et la magnétohydrodynamique* (Memorii și lucrări ale Societății hidrotehnice din Franța, Mecanica fluidelor și magnetohidrodinamica), 3e supplément au volume I, Année 1961, 168 p.

Acest volum conține o dare de seamă asupra ședințelor comitetului tehnic al societății, organizate în ziua de 17 martie 1961, cu concursul altor organizații științifice și industriale franceze, pentru discutarea unor aspecte ale mecanicii fluidelor și magnetohidrodinamicii.

În expunerea introductivă, R. Gibrat prezintă, în special pe baza unor rezultate obținute de Kantrowitz și Petschek, o clasificare a diferitelor domenii în care intervine tratarea magnetohidrodinamică a fenomenelor. Această clasificare se bazează pe predominarea unui fenomen sau a altuia și anume a fenomenelor magnetice, electrice și de coliziune.

Prima parte a volumului cuprinde un număr de trei comunicări asupra teoriilor generale în magnetohidrodinamică. Prima dintre acestea, prezentată de D. Palumbo, are ca obiect prezentarea proprietăților fizice ale plasmei în legătură cu mișcarea particulelor individuale și considerarea plasmei ca un fluid. Se discută de asemenea unele analogii între magneto-hidrodinamică, magnetohidrostatică și hidrodinamica sub aspectul ei clasic.

În a doua comunicare, C. Mercier consideră stabilitatea stărilor de echilibru ale unui sistem magnetohidrodinamic. Plecîndu-se de la ecuațiile fundamentale ale magnetohidrodinamicii, se rezolvă mai întîi problema echilibrului, în ipoteza că viteza fluidului este nulă în fiecare punct. După aceea, se deduce un criteriu de stabilitate, pe baza unui principiu energetic.

În sfîrșit S. Colombo prezintă ipotezele și ecuațiile fundamentale ale magnetohidrodinamicii. După ce scoate în evidență faptul că ecuațiile hidrodinamice clasice sînt invariante în raport cu grupul de transformări al lui Galileu, în timp ce ecuațiile lui Maxwell au această proprietate în raport cu grupul lui Lorentz, autorul arată că este avantajos ca problemele de magnetohidrodinamică să fie tratate în spațiul -timp al lui Minkowski. După părerea autorului, teoria relativistă a fenomenelor hidrodinamice prezintă o serie de avantaje, atît în ceea ce privește evitarea unor aproximații hazardate cît și ca posibilități de rezolvare a unor noi probleme.

În partea a doua sînt cuprinse alte trei comunicări referitoare la teoriile particulare ale unor scurgeri magnetodinamice. Astfel, R. Mesrine face o introducere în studiul scurgerilor cvasiunidimensionale în magnetohidrodinamică. Este vorba de o justificare a formei unidimensionale care se adoptează de obicei atunci cînd se descrie o scurgere în instalaţii,ca generatoare sau acceleratoare. Definiţia valorilor medii ale fiecărei variabile într-o secţiune transversală, permite o formulare cvasiunidimensională a scurgerii.

Studiul scurgerilor plane face obiectul comunicării lui P. Caseau. Se consideră scurgerile plane şi permanente ale fluidelor incompresibile şi se discută mai întîi posibilitatea liniarizării ecuaţiilor magnetohidrodinamicii pentru acest caz. Se tratează apoi două tipuri de scurgeri pentru care liniarizarea este posibilă.

Într-o comunicare foarte amplă, P. Engeldinger prezintă rezultate în legătură cu turbulenţa şi pierderile de sarcină în scurgerile prin conducte ale fluidelor conducătoare, supuse la cîmpuri magnetice transversale. Dintre concluzii, semnalăm pe acelea că prezenţa forţelor electromagnetice conduce la o uniformizare a vitezelor atît în regim laminar cît şi în regim turbulent şi provoacă o întîrziere în apariţia turbulenţei.

În partea a treia, consacrată aplicării principiului magnetodinamic la producerea electricităţii, G. Klein prezintă în comunicarea sa aplicaţiile industriale actuale ale magnetohidrodinamicii şi discută posibilitatea generării directe a energiei electrice prin magnetohidrodinamică. Cîteva studii preliminare în legătură cu această ultimă problemă sînt cuprinse în comunicarea ţinută de J. Fabre şi J. Péricart.

Volumul se încheie cu discuţiile ce au avut loc în legătură cu comunicările prezentate.

Prin varietatea subiectelor tratate şi prin sugestiile interesante pe care le conţine, acest volum apare util pentru cercetătorii care se ocupă cu probleme de magnetohidrodinamică.

T. Oroveanu

⁂ *Plasticity* (Plasticitate), *Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics* (Comunicările celui de-al doilea simposium de mecanica structurilor navale). Symposium Publications Division, Pergamon Press, New York—Oxford—London—Paris, 1960, XVIII+612 p.

Sub auspiciile Institutului de cercetări navale din S.U.A. şi al Universităţii Brown din Rhode Island, a avut loc, între 5—7 aprilie 1960, un simposium de mecanica structurilor navale dedicat problemelor de teoria plasticităţii. Lucrările acestui simposium, care s-a bucurat de o valoroasă participare internaţională, au fost publicate într-un volum, editat de E.H. Lee şi P.S. Symonds, de la Brown University.

S-au prezentat 8 referate cu caracter general şi 21 de comunicări privind probleme speciale de către oameni de ştiinţă din S.U.A. şi din alte ţări invitate să participe : U.R.S.S.,Anglia şi R.P. Romînă. Aceste lucrări pot fi grupate, după preocupările respective, astfel :

a. *Probleme de plasticitate în structuri navale.* J. Vasta şi A. H. Keil (S.U.A.) prezintă două referate privind încărcările statice şi încărcările datorite exploziei şi impactului în structuri navale.

b. *Teoria atomică a plasticităţii şi ruperea solidelor cristaline.* În afară de un referat al lui J. J. Gilman (S.U.A.), menţionăm o comunicare a lui C. Elbaum (S.U.A.) privind relaţiile dintre deformarea plastică a monocristalelor şi a policristalelor.

c. *Relaţii între tensiuni şi deformaţii şi termoplasticitate.* Un referat cu caracter general a fost făcut de P. M. Naghdi (S.U.A.). D.C. Drucker şi A. Phillips (S.U.A.) prezintă cercetări recente în domeniul relațiilor dintre tensiuni și deformații specifice în caz plastic; menționăm considerarea acestor relații în cazul pămînturilor.

d. *Probleme generale de teoria plasticității.* S-a prezentat referatul lui E.T. Onat (S.U.A.) privind influența schimbărilor de natură geometrică asupra comportării sarcină-deformație la solidele cu proprietăți plastice. V. V. Sokolovski (U.R.S.S.) se ocupă de curgerea plastică axială între doi cilindri necirculari. O analiză a comportării plastice a metalelor sub acțiunea unei sarcini complexe este făcută de V. S. Lenski(U.R.S.S.). Menționăm de asemenea că H. J. Greenberg, W. S. Dorn și E. Wetherell (S.U.A.) fac o comparație între teoriile de curgere și deformare în cazul torsiunii plastice a unui cilindru de secțiune patrată constantă.

e. *Soluții de probleme la limită*; *plăci plane și curbe.* Un referat asupra acestor probleme a fost prezentat de P. G. Hodge, Jr. (S.U.A.). Iu. N. Rabotnov (U.R.S.S.) se ocupă de teoria fluajului și aplicațiile sale. M. E. Lunchick (S.U.A.) se ocupă de cercetări pe modele în teoria plasticității iar J. H. Weiner și H. G. Landau (S.U.A.) tratează problema tensiunilor termice și reziduale în plăci plane și cilindrice, alcătuite din material elastoplastic sau din material elastovîscoplastic.

f. *Sarcini dinamice și unde plastice.* Un referat general privind contribuția europeană la aceste probleme a fost prezentat de N. Cristescu (R.P.R.). E.A. Ripperger, H. J. Plass, P. S. Symonds și S. R. Bodner (S.U.A.) se ocupă de probleme de bare. De asemenea, N. Critescu face și unele observații cu privire la propagarea undelor plastice în plăci plane.

g. *Dezvoltări noi în proiectare.* J. Heyman (Anglia) și L. S. Beedle (S.U.A.) expun referate în această direcție. În afară de o prezentare a dezvoltării proiectării construcțiilor navale în Scoția, făcută de S. Kendrick (Anglia), menționăm un studiu al lui W. Cohen (S.U.A.) privind proiectarea în cazul unor materiale anelastice.

Din cele expuse mai sus reiese varietatea de preocupări pe care le-a avut acest simposium. Credem că lucrările acestuia, atît comunicările cît—mai ales—referatele cu caracter general, pot fi folosite cu succes de toți cercetătorii în domeniul mecanicii solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

A. BEKKULOV, *Transportnaia set i complexnaia mehanizaţia pogruzocino-vîgruzocinîh rabot na dorogah Kazahastana.* Akademia Nauk Kazahskoi S.S.R. Alma Ata, 1962, 219 p.

P. F. IVANKIN, P. V. IUŞIN, V. S. KUZEBNÎI, *Rudnîe formaţii rudnogo Altaia.* Izd. Akademia Nauk Kazahskoi S.S.R. Alma Ata, 1961, 282 p.

⁂ *Problema vodoobespecenia ţentralnogo Kazahstana.* Izd. Akademii Nauk Kazahskoi S.S.R. Alma Ata, 1960, 364 p.

A. V. BARBOT, *Mestorojdenia osnovnîh stroitelnîh materialov v raionah ţelinnîh i zalejnîh zemel severnoi ceasti Kazahstana*
Izd. Akademii Nauk Kazahskoi S.S.R., Alma Ata, 1960, 375 p.

⁂ Izvestia Akademii Nauk Kazahskoi S.S.R. Seria energheticeskaia, No. 1, 2, 1961.

⁂ Trudî Vîcislitelnogo Ţentra, Izdatelstvo Akademii Nauk Gruzinskoi S.S.R. I, 1960.

⁂ Soobşenia Akademii Nauk Gruzinskoi S.S.R, XXVI, 4, 5, 6, 1961 ; XXVII, 1, 2, 3, 4, 5, 1961.

⁂ Trudî Novocerkasskogo Politehniceskogo Instituta, R. 112, 1961.

⁂ Prikladnaia Matematika i mehanika, 6, 1961.

⁂ Referativnîi Jurnal. Mehanika, 1, 1962.

⁂ Prikladna Mehanika, VII, 6, 1961.

⁂ IVUZ, Tvetnaia metalurghia, 6, 1961.

M. S. BELIŢKI, *Osnovî ekspluataţionnoi dolgovecinosti dvigatelia avtomobilia.* Redakţionno-izdatelskii otdel NPI Novocerkask, 1961.

⁂ Izvestia na hidraliceskata laboratoria, Sofia Kniga III, 1961.

⁂ Godişnik na injenerno-stroitelnoi institut, Sofia, T. XIII, livre 1, 1961.

⁂ Hochschul-Schriften. Tagungsberichte (Hochschule für Maschinenbau Karl-Marx-Stadt I, 1, 2/1961.

⁂ Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Maschinenbau Karl-Marx-Stadt, II, 1960, 3 ; III, 1961, 1.

⁂ Informationsdienst „Angewandte Mechanik" Technische Universität Dresden, Heft 1, 2, 1962.

⁂ Freiburger Forschungshefte A 206, 210, 1961 ; 218, 1961.

⁂ Prace instytutu techniki, cieplnej, Lodz, IX, 16, 17, 1961.

⁂ Przeglad Prac Naukowych i budowezych, Nr. 1, 1961.

⁂ Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, X, 5, 6, 1961.

⁂ Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, Technik, Nr. 3, 4, 1961.

G. Chr. Mönch, Neues und Bewährtes aus der Hochwakuumtechnik, VEB Verlag Technik, Berlin, 1961, 1000 p.

⁂ Jenaer Rundschau. 6, 1961.

⁂ The Review of the Polish Academy of Sciences, VI, 2, 1961.

⁂ Polisch Technical Abstracts, 3, 1961.

⁂ Przeglad Mechaniczny, 22, 23, 1961.

⁂ Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, IX, 11, 1961.

De la College of Aeronautics, Cranfield

Co A Report, 152/1961.
Co A Note, 118/1961.

— Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Serie I, T. 75, fasc. 3, dec. 1961.

De la Institutul de Aerofizică, Toronto, Canada

— Annual Progress Report 1961, 228 p.

— UTIA Technical Note No. 51, 1961.

— Anales Faculdad de Ingenieria, VIII, 1959, Concepcion.

De la Societatea de Hidrotehnică, Franţa

— Mémoires et travaux, Vol. I, 1961, cu supliment.

— Communications ONERA au Xème Congrès International de Mécanique (Stresa 1960) (Publication No. 102, 1961).

— Facolta di ingegneria dell'Universita di Roma. Pubblicazione no. 59 — 82. Facolta di ingegneria dell'Universita di Roma.

— La Ricerca Scientifica, Seria Prima, No. 6—9, 1961, Seria Seconda I, 1, 2, 1961,
— La Ricerca Scientifica — Notiziario, No. 5—12, 1961.
— Transacctions of Chalmers University, of Technology, No. 253, 255, 1961.
— Docaéro, No. 60—71, 1861.
— I.R.S.I.A., Comptes Rendus de Recherches, No. 27, 1962.
— Reports and Memoranda Aeronautical Research Council, Teddington 3228, 3231, 1961 ; 3233, 3238, 3245, 3253, 3256, 1962.
— Flukekniska Försoksanstalt, Suedia Report 89, 1961.

Disertații primite de la Institutul Politehnic Aachen

E. SKUPINSKI, *Wärmeübergang und Druckverlust bei künstlicher Verwirbelung und künstlichen Wandrauhigkeiten*. 112 p., 1961.

K. WALTERS, *Über die Ultraschall-Extinktion in Suspensionen und ihre Anwendung zur Messung geringer Konzentrationen*. 101 p., 1961.

H. J. OELLERS, *Beitrag zur Berechnung der inkompressiblen Unterschallströmung in ebenen Profilgittern auf elektronischen Digitalrechnern*. 103 p., 1961.

M. FIEBIG, *Weiterentwicklung und Verhalten der stationären laminaren gestörrten ähnlichen Grenzschichten* 101 p., 1961.

K. SCHINDLER, *Zur Stabilität des Plasmas im statischen Gleichgewicht*. 77 p., 1961.

Disertații primite de la Institutul politehnic Karlsruhe

A. PELAZZOLO, *Die Berechnung von Parallelogrammplatten nach dem Mehrstellenverfahren*, 87 p., 1961.

H. G. HIRSCHBERG, *Wärmeübergang und Druckverlust in querangeströmten Rohrbündeln*. 131 p., 1961.

W. HANCK, *Der Wärmeübergang in Ringspalt-Rieselschichten*. 58 p., 1960.

RECTIFICARE

La articolul *Procedeu matricial pentru calculul vibrațiilor cadrelor*, de K.K. Ponomarev, publicat în nr. 4, 1960, se fac următoarele rectificări:

1) La p. 1027, ecuația diferențială de bază a oscilațiilor libere: $y^{\mathrm{IV}} - \frac{\lambda}{l} y = 0$ se va citi: $y^{\mathrm{IV}} - \frac{\lambda^4}{l^4}\, y = 0$.

2) La p. 1028, în formula (2) termenul $-\frac{l}{EJ}\left(\psi_2 - \frac{\psi_2^3}{\psi_4}\right)^2$ se va citi: $-\frac{l}{EJ}(\psi_2 - \Psi_3^2/\psi_4)$.

3) la p. 1031, rîndul 3 de sus se va citi:

$$M_i^{\rho\tau} = M_i^{le} - \mu_i\, \rho_i.$$

4) La p. 1034, rîndul 8 de jos în loc de: $\omega^2 = \frac{981 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3^4}{7{,}8 \cdot 4 \cdot 300^4} \lambda^2 = 0{,}0733\ \lambda^4 S^{-2}$ sau $\omega = 0{,}271\ \lambda^2 S^{-1}$ se va citi: $\omega^2 = \frac{981 \cdot 2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3^2}{7{,}8 . 10^{-3}, . 4 \cdot 300^4} \lambda^2 = 73{,}3\ \lambda^4 S^{-2}$ sau $\omega = 8{,}561\ \lambda^2 S^{-1}$.

5) La p. 1034, rîndul 6 de jos, în loc de: $f = \frac{30.0{,}271}{3{,}14} \lambda^2 = 2{,}59\ \lambda^2$ se va citi: $f = \frac{30.8{,}561}{3{,}14} \lambda^2 = 81{,}8\ \lambda^2$.

6) La p. 1034, rîndurile 1—4 de jos, în loc de:

$f_1 = 2{,}59 \cdot 3{,}26^2 = 27{,}5,\qquad f_2 = 2{,}59 \cdot 3{,}93^2 = 39,$

$f_3 = 2{,}59 \cdot 4{,}61^2 = 55,\qquad f_4 = 2{,}59 \cdot 7{,}07^2 = 129{,}4,$

se va citi:

$f_1 = 81{,}8 \cdot 3{,}26^2 = 8{,}70,\qquad f_2 = 81{,}8 \cdot 3{,}93^2 = 1270$

$f_3 = 81{,}8 \cdot 4{,}61^2 = 1720,\qquad f_4 = 81{,}8 \cdot 7{,}07^2 = 4120.$

7) La p. 1036, în lista bibliogafiei se adaugă nota [7], indicată și într-un articol anterior, și anume:

[7] S. FALK, *Biegen, Knicken und Schwingungen der mehrfeldrigen geraden Balken*. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, vol. 7, 1955.

De asemenea, la articolul *O metodă matricială pentru calculul oscilațiilor grinzilor*, de același autor, apărut în nr. 1, 1961, se fac următoarele rectificări :

1) La p. 209, în formula (6) și în ultimul rînd al paginii, în modulul de elasticitate se va nota cu E în locul literei grecești ε.

2) Idem la p. 210, formula (8) și în rîndurile din text.

3) La p. 213 se va adăuga următoarea listă a bibliografiei folosite :

1. S. A. BERNSTEIN, *Bazele dinamicii construcțiilor*. Moscova, 1939.
2. A. P. FILIPOV *Oscilațiile sistemelor elastice*. Kiev, 1956.
3. H. FUHRKE, *Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls*. Ingenieur-Archiv, 1955, H. 5.

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA“

2

ANUL XIII
1962

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI;
A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
GR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferențiar la Institutul de petrol, gaze și geologie, București;
N. TIPEI, conferențiar la Institutul politehnic, București;
M. ARCAN, șef secție, Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacția: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

R F 2557 4-6, 65

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA“

(114)

4
ANUL XIII
1962

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

1963 JAN 21

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
GR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;
M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacţia: INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

F
2557

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

4

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*
- Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*
- Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*
- *Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).*
- *Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).*
- *Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).*
- *Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii).*
- *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie".

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
252/1963
1989

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIII, nr. 4 1962

SUMAR

STUDII Pag.

T. OROVEANU şi CR. STĂNESCU, Asupra divergenţei aeroelastice a suprafeţelor portante de secţiune variabilă, în rotaţie 837
P. P. TEODORESCU, Consideraţii în legătură cu problema plană a teoriei elasticităţii în coordonate triunghiulare 849
V. VISARION şi D. DRĂGHICESCU, Calculul cuptoarelor rotative de clincher cu inele de rigidizare 865
SILVIU GUIAŞU, Asupra principiului lui Hooke 883
VALERIU PETCU, Bazele teoriei structurilor static nedeterminate de beton armat, de egală siguranţă plastică 891
V. MANEA, Asupra liniarizării ecuaţiilor de mişcare a unui mediu continuu deformabil 903
L. LIBRESCU, Vibraţiile şi stabilitatea aeroelastică a structurilor cilindrice subţiri, neomogene, plasate într-un curent fluid compresibil 911
V. N. CONSTANTINESCU, Asupra unor metode aproximative de calcul ale lagărelor circulare lubrifiate cu gaze 935
GH. VASILCA, Unele aspecte cantitative experimentale ale coeficientului de frecare la lagărele cu alunecare 957
R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC şi GR. ANTONESCU, Studiul vitezelor în mecanismele plane pe baze mecanoelectronice 971
A. CSULAK şi I. SZÉKELY, Mecanism cu roţi dinţate pentru obţinerea unui mare număr de rapoarte de transmitere diferite 989
M. P. POPOV, E. D. DECIU şi I. MITRICĂ, Asupra regimurilor economice de strunjire a oţelurilor carbon 1001
I. JAKAB, Un procedeu electric pentru amortizarea optimă a unor traductoare de mărimi mecanice 1021

NOTE

V. V. TOPENCIAROV şi B. I. CEKANKOV, Observaţii asupra formulei lui Rivals . . 1031
RECENZII 1035
PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 1051

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

- Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*
- Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*
- Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*
- Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*
- *Астродинамика (оптимальные траектории, расчет орбит или отрезка орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа).*
- *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*
- *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*
- *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*
- *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*
- *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*
- *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике.*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район „16 Februarie".

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ”

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XIII, № 4 1962

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ Стр.

Т. ОРОВЯНУ и К. СТЭНЕСКУ, К аэроупругой дивергенции вращательных несущих поверхностей переменного сечения 837
П. П. ТЕОДОРЕСКУ, Соображения в связи с плоской задачей теории упругости в треугольных координатах 849
В. ВИСАРИОН и Д. ДРЭГИЧЕСКУ, Расчет вращающихся цементных печей с кольцами жесткости 865
СИЛЬВИУ ГУЯШУ, Принцип Гука 883
ВАЛЕРИУ ПЕТКУ, Основы теории статически-неопределенных железобетонных конструкций равной пластической надежности 891
В. МАНЯ, Приведение к линейному виду уравнений движения сплошных сред 903
Л. ЛИБРЕСКУ, Колебания и аэроупругая устойчивость тонких неоднородных цилиндрических оболочек, помещенных в потоке сжимаемой жидкости 911
В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, К некоторым методам приблизительного расчета подшипников скольжения с газовой смазкой 935
Г. ВАСИЛКА, Некоторые количественно-опытные аспекты коэффициента трения в подшипниках скольжения. 957
Р. К. БОГДАН, КР. ПЕЛЕКУДИ, П. КАЛМАЧУК и ГР. АНТОНЕСКУ, Изучение скоростей в плоских механизмах на механо-электронных принципах 971
А. ЧУЛАК и И. СЕКЕЙ, Зубчатый механизм с большим числом ступеней скорости 989
М. П. ПОПОВ, Е. Д. ДЕЧИУ и И. МИТРИКЭ, Оптимальные режимы точения углеродистой стали 1001
И. ЯКАБ, Электрический способ оптимального успокоения некоторых датчиков механических величин 1021

ЗАМЕТКИ

В. В. ТОПЕНЧАРОВ, Б. И. ЧЕКАНКОВ, К формуле Ривальса 1031
РЕЦЕНЗИИ 1035
ПУБЛИКАЦИИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ . . . 1051

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Le périodique

«STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie

● *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique*;

● *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question*;

● *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée*;

● *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers. Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants* :

● *astrodynamique* (*réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique*).

● *aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*);

● *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*);

● *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*);

● *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*);

● *statique et dynamique des constructions* (*méthode de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*);

● *technique des mesures* (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques, on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XIII, nº 4 1962

SOMMAIRE

ÉTUDES

Page
T. OROVEANU et CR. STĂNESCU, Sur la divergence aéroélastique des surfaces portantes de section variable en mouvement de rotation 837
P. P. TEODORESCU, Considérations sur le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées triangulaires 849
V. VISARION and D. DRĂGHICESCU, Calculation of rotative clinker kilns with stiffening rings 865
SILVIU GUIAŞU, On Hooke's principle 883
VALERIU PETCU, Bases of the theory of reinforced concrete structures of equal plastic safety 891
V. MANEA, Sur la linéarisation des équations de mouvement d'un milieu continu déformable 903
L. LIBRESCU, Vibrations and aeroelastic stability of non-homogeneous thin cylindrical shells in incompressible flow 911
V. N. CONSTANTINESCU, On some approximate methods for the analysis of gas lubricated journal bearings 935
GH. VASILCA, Quelques aspects quantitatifs expérimentaux concernant le coefficient de frottement dans le cas des paliers lisses 957
R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC und GR. ANTONESCU, Das Studium der Geschwindigkeiten in den ebenen Getrieben auf mechanisch-elektronischer Basis 971
A. CSULAK und I. SZÉKELY, Zahnradgetriebe zur Erzielung einer grossen Anzahl verschiedener Übersetzungsverhältnisse 989
M. P. POPOV, E. D. DECIU und I. MITRICĂ, Über wirtschaftliches Drehen von Kohlenstahlwerkstoffen 1001
I. JAKAB, An electrical technique for the optimum damping of mechanical transducers 1021

NOTES

V. V. TOPENTSCHAROV et B. I. TSCHEKANKOV, Observations sur la formule de Rivals 1031
REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1035
PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION 1051

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

ASUPRA DIVERGENŢEI AEROELASTICE A SUPRAFEŢELOR PORTANTE DE SECŢIUNE VARIABILĂ, ÎN ROTAŢIE

DE

T. OROVEANU şi CR. STĂNESCU

Dintre diferitele probleme care formează obiectul de studiu al aeroelasticităţii, divergenţa de răsucire a suprafeţelor portante este probabil cea mai cunoscută. Fenomenul de divergenţă se poate produce la o suprafaţă portantă la care linia elastică este situată în spatele liniei centrelor aerodinamice. În acest caz, mărirea unghiului de răsucire, respectiv a incidenţei, provoacă o creştere a momentului de răsucire aerodinamic. Pentru o anumită valoare a vitezei, creşterea momentului de răsucire aerodinamic devine egală cu aceea a momentului produs ca reacţiune elastică. Fenomenul de divergenţă apare atunci cînd viteza depăşeşte această valoare, deoarece creşterea momentului de răsucire aerodinamic este mai mare decît aceea a momentului datorit reacţiunii elastice şi suprafaţa portantă devine static instabilă.

Problema determinării vitezei de divergenţă pentru suprafeţele portante de secţiune constantă sau variabilă, aflate în mişcare de translaţie a fost studiată destul de amănunţit, încă mai cu mult timp în urmă [1]. Mai recent, A. Petre s-a ocupat de aceeaşi problemă pentru suprafeţe portante de secţiune constantă, aflate în mişcare de rotaţie şi de rototranslaţie [4]. În cele ce urmează, vom lua în considerare tot cazul unei mişcări de rotaţie însă vom presupune că secţiunea transversală a suprafeţei portante variază după o anumită lege. Dificultăţile legate de rezolvarea exactă a ecuaţiei diferenţiale corespunzătoare precum şi caracterul însuşi al problemei fac să fie indicată aplicarea unei metode variaţionale.

1. *Ecuaţia diferenţială a problemei.* Să considerăm o suprafaţă portantă în consolă, de secţiune variabilă, cu linia elastică rectilinie. Vom utiliza această linie ca axă Oy, originea O fiind situată în afara suprafeţei portante, de partea secţiunii de încastrare. Vom presupune că suprafaţa

portantă execută o mişcare de rotaţie în jurul unei axe Oz, normală pe Oy (fig. 1).

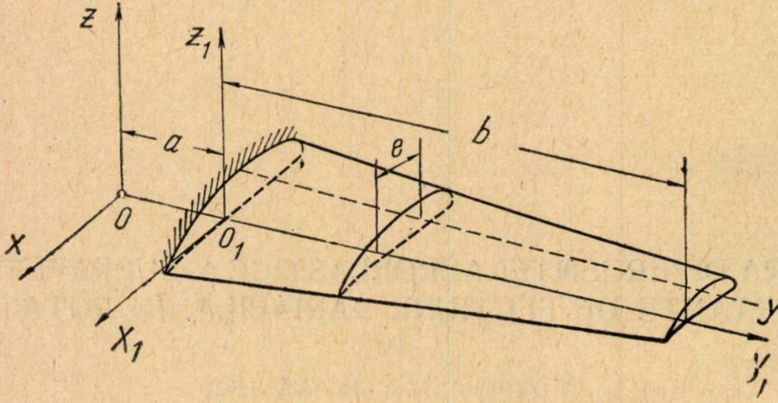


Fig. 1

Se ştie [1] că ecuaţia diferenţială care permite calcularea vitezei de divergenţă are forma

$$\frac{d}{dy}\left(GI_d \frac{d\varphi}{dy}\right) + m_t = 0, \tag{1}$$

GI_d fiind rigiditatea la răsucire într-o secţiune oarecare, $\varphi(y)$ unghiul de răsucire elastică şi m_t momentul raportat la unitatea de lungime, cu expresia

$$m_t = \frac{\rho}{2} V^2 ce c_z^{(e)}. \tag{2}$$

În această formulă, ρ reprezintă masa specifică a aerului, V viteza de rotaţie, c coarda, e distanţa dintre linia elastică şi linia centrelor aerodinamice, ambele în secţiunea considerată şi $c_z^{(e)}$ coeficientul de portanţă local, datorit răsucirii elastice. În cadrul teoriei pe care o utilizăm [1] se poate lua pentru $c_z^{(e)}$ expresia

$$c_z^{(e)} = \frac{dC_z}{di} \varphi, \tag{3}$$

în care C_z este coeficientul de portanţă al suprafeţei portante şi i unghiul de incidenţă.

Pentru a uşura rezolvarea problemei, este util să facem schimbarea de coordonate

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - a, \quad z_1 = z, \tag{4}$$

care lasă neschimbată forma ecuaţiei (1). În acest sistem de coordonate, viteza V are expresia

$$V = V_0 \frac{b}{a+b}\left(\frac{a}{b} + \frac{y_1}{b}\right), \tag{5}$$

V_0 fiind viteza la vîrful suprafeţei portante. Dacă introducem notaţia

$$\alpha = \frac{a}{b}, \tag{6}$$

mai putem scrie

$$V = V_0 \frac{1}{1+\alpha}\left(\alpha + \frac{y_1}{b}\right) \tag{7}$$

şi

$$m_t = \frac{1}{(1+\alpha)^2} q_0 ce \left(\alpha + \frac{y_1}{b}\right)^2 \frac{dC_z}{di} \varphi, \tag{8}$$

unde am notat cu q_0 presiunea dinamică $\frac{\rho}{2} V_0^2$.

În felul acesta, ecuaţia (1) devine

$$\frac{d}{dy}\left(GI_d \frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{1}{(1+\alpha)^2} q_0 ce \left(\alpha + \frac{y_1}{b}\right)^2 \frac{dC_z}{di} \varphi = 0. \tag{9}$$

Vom aplica această ecuaţie la determinarea vitezei de divergenţă pentru suprafeţele portante trapezoidale cu secţiunile transversale geometric asemenea, dar cu toate dimensiunile liniare reduse proporţional cu coarda locală. Pentru astfel de suprafeţe portante, avem [1]

$$\frac{c}{c_0} = \frac{e}{e_0} = 1 - \beta \frac{y_1}{b}, \quad \frac{GI_d}{GI_{d_0}} = \left(1 - \beta \frac{y_1}{b}\right)^4, \tag{10}$$

c_0, e_0 şi GI_{d_0} raportîndu-se la secţiunea de încastrare ($y_1 = 0$). Cu o ultimă schimbare de variabilă

$$\eta = \frac{y_1}{b}, \tag{11}$$

obţinem în loc de (9) ecuaţia

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\beta\eta)^4 \frac{d\varphi}{d\eta}\right] + \frac{1}{(1+\alpha)^2} \frac{q_0 c_0 e_0 b^2 \frac{dC_z}{di}}{GI_{d_0}} (1-\beta\eta)^2 (\alpha+\eta)^2 \varphi = 0, \tag{12}$$

în care punem

$$\lambda = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \frac{q_0 c_0 e_0 b^2 \frac{dC_z}{di}}{GI_{d_0}}, \tag{13}$$

scriind în cele din urmă ecuaţia problemei sub forma

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\beta\eta)^4\frac{d\varphi}{d\eta}\right]+\lambda(1-\beta\eta)^2(\alpha+\eta)^2\varphi=0. \qquad (14)$$

Condiţiile la limită pot fi găsite cu destulă uşurinţă; în secţiunea de încastrare unghiul de răsucire φ este nul ceea ce ne dă

$$\eta=0, \qquad \varphi=0, \qquad (15)$$

iar la vîrful suprafeţei portante, care nu are sarcini, momentul de răsucire este nul şi avem

$$\eta=1, \quad \frac{d\varphi}{d\eta}=0. \qquad (16)$$

Ne găsim prin urmare în faţa unui caz particular al cunoscutei probleme Sturm-Liouville care constă în găsirea funcţiilor proprii ale ecuaţiei (14), satisfăcînd condiţiile (15) şi (16). La fiecare din aceste funcţii proprii corespunde cîte o valoare proprie a parametrului λ şi este uşor de observat că determinarea vitezei de divergenţă revine la aflarea celei mai mici valori proprii. Într-adevăr, la cea mai mică valoare proprie corespunde, prin intermediul relaţiei (13), cea mai mică valoare a vitezei V_0 la care se produce fenomenul de divergenţă.

Găsirea funcţiilor proprii, respectiv a valorilor proprii pentru ecuaţia (14) cu condiţiile (15) şi (16), este o problemă dificilă, deoarece ecuaţia nu poate fi adusă cu uşurinţă la unul din tipurile cunoscute de ecuaţii diferenţiale lineare de ordinul al doilea. De altfel, în cazul de faţă, acest lucru nici nu este necesar deoarece determinarea celei mai mici valori proprii se poate face destul de simplu cu ajutorul uneia din metodele variaţionale bine cunoscute, aşa cum vom proceda în cele ce urmează.

2. *Cîteva consideraţii asupra problemei variaţionale.* Pentru a putea aplica o metodă variaţională, este necesar să verificăm dacă sînt satisfăcute anumite condiţii. În acest scop, utilizînd notaţiile din [3], scriem ecuaţia (14) sub forma

$$A\varphi-\lambda B\varphi=0, \qquad (17)$$

unde

$$A\varphi=-\frac{d}{d\eta}\left[(1-\beta\eta)^4\frac{d\varphi}{d\eta}\right], \quad B\varphi=(1-\beta\eta)^2(\alpha+\eta)^2\varphi. \qquad (18)$$

Pentru operatorii $A\varphi$ şi $B\varphi$ astfel introduşi, putem indica unele proprietăţi care intervin în rezolvarea problemei variaţionale. Astfel, operatorul $A\varphi$ este simetric; dacă φ şi ψ sînt două elemente oarecare aparţinînd domeniului de definire D_A al operatorului, cu modul de scriere al analizei funcţionale [1]), avem

$$(A\varphi,\psi)=(\varphi,A\psi)=\int_0^1(1-\beta\eta)^4\frac{d\varphi}{d\eta}\frac{d\psi}{d\eta}\,d\eta. \qquad (19)$$

---

[1]) Pentru noţiunea de produs scalar în spaţiul $L_2\,(0,1)$ introdusă aici precum şi pentru alte noţiuni utilizate în continuare se poate consulta [3].

La acest rezultat se ajunge ușor dacă ținem seama de faptul că atît φ cît și ψ satisfac condițiile (15) și (16).

De asemenea, operatorul $A\varphi$ este pozitiv definit; urmînd demonstrația din [3], se poate arăta că

$$(A\varphi, \varphi) \geqslant 2\,(1-\beta)^4\,\|\varphi\|^2, \tag{20}$$

unde $\|\varphi\|$ este norma elementului φ.

În ceea ce privește operatorul $B\varphi$, proprietatea de simetrie

$$(B\varphi, \psi) = (\varphi, B\psi) \tag{21}$$

este evidentă. Tot astfel, avem

$$(B\varphi, \varphi) = \int_0^1 (1-\beta\eta)^2\,(\alpha+\eta)^2\,\varphi^2 d\eta \geqslant \alpha^2\beta^2\,\|\varphi\|^2 \tag{22}$$

ceea ce ne arată că operatorul $B\varphi$ este pozitiv definit.

Pentru a se putea formula problema variațională este suficient ca operatorul $A\varphi$ să fie mărginit inferior, condiție care este evident satisfăcută și de un operator pozitiv definit. În acest caz, funcționala

$$\frac{(A\varphi, \varphi)}{(B\varphi, \varphi)}, \tag{23}$$

are o margine inferioară, iar dacă există un element propriu $\varphi_0 \neq 0$ pentru care avem

$$\frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(B\varphi_0, \varphi_0)} = \inf \frac{(A\varphi, \varphi)}{(B\varphi, \varphi)}, \tag{24}$$

aceasta este chiar cea mai mică valoare proprie căutată. Problema determinării acestei valori proprii se reduce deci la găsirea minimului funcționalei (23).

3. *Aplicarea metodei lui Ritz.* Dacă se consideră un șir de elemente $\{f_n\}$ cuprinse în domeniul D_A și care formează un sistem complet, aproximația de ordinul n a soluției ecuației (17) după metoda lui Ritz are expresia

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \tag{25}$$

a_k fiind constante. Prin considerații asupra cărora nu insistăm [3], se ajunge la sistemul de ecuații algebrice liniar și omogen, cu necunoscutele a_k,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,[(Af_k, f_m) - \lambda\,(Bf_k, f_m)] = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Deoarece este necesar ca nu toate constantele a_k să fie nule, determinantul acestui sistem trebuie să se anuleze. Rezultă deci pentru determinarea lui λ ecuaţia

$$|(Af_k, f_m) - \lambda(Bf_k, f_m)| = 0, \tag{27}$$

cea mai mică rădăcină a ei fiind valoarea proprie căutată.

Elementele f_n, numite funcţii coordonate, trebuie să fie liniar independente şi să satisfacă ambele condiţii la limită ale problemei. Sistemul complet [1]) care îndeplineşte condiţiile (15) şi (16) este [2]

$$f_1 = \eta^2\left(\eta - \frac{3}{2}\right), f_k = \eta^{k-1}(1-\eta)^2, \qquad k = 2, 3, \ldots \tag{28}$$

Calculele au fost efectuate luîndu-se pentru α valorile

$$\alpha = 0{,}1\,;\ 0{,}15\,;\ 0{,}2$$

iar pentru raportul dintre coarda la vîrf c_e şi coarda la încastrare c_0 valorile

$$\frac{c_e}{c_0} = 0{,}3\,;\ 0{,}4\,;\ 0{,}5\,;\ 0{,}6$$

ceea ce ne dă

$$\beta = 0{,}7\,;\ 0{,}6\,;\ 0{,}5\,;\ 0{,}4.$$

Nu au fost considerate valori mai mici ale parametrului β deoarece, după cum a rezultat din calcule, pentru acestea λ se apropie foarte mult de valoare corespunzătoare suprafeţei portante de secţiune constantă.

Calculele au fost conduse în aproximaţia a doua, adică utilizîndu-se numai primele două funcţii ale şirului (28) şi anume

$$f_1 = \eta^2\left(\eta - \frac{3}{2}\right), \quad f_2 = \eta(1-\eta)^2. \tag{29}$$

În acest caz, λ este cea mai mică rădăcină a ecuaţiei de gradul al doilea

$$\begin{vmatrix} (Af_1, f_1) - \lambda(Bf_1, f_1) & (Af_2, f_1) - \lambda(Bf_2, f_1) \\ (Af_1, f_2) - \lambda(Bf_1, f_2) & (Af_2, f_2) - \lambda(Bf_2, f_2) \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

În tabelele 1 şi 2, sînt date valorile numerice ale mărimilor care intervin în coeficienţii ecuaţiei (30). Este de observat că pro-

Tabela 1

β	0,7	0,6	0,5	0,4
(Af_1, f_1)	0,067075	0,083486	0,104017	0,129486
(Af_1, f_2)	−0,015012	−0,012143	−0,007813	−0,001657
(Af_2, f_1)	−0,015012	−0,012143	−0,007813	−0,001657
(Af_2, f_2)	0,080320	0,084396	0,089286	0,090149

---

[1]) Condiţia de completitudine a şirului $\{f_n\}$ este necesară pentru a se asigura convergenţa aproximaţiei φ_n spre soluţia exactă [2].

Tabela 2

	β	0,7	0,6	0,5	0,4
$\alpha = 0,1$	(Bf_1, f_1)	0,008681	0,015370	0,022881	0,031212
	(Bf_1, f_2)	−0,002220	−0,002701	−0,003240	−0,003835
	(Bf_2, f_1)	−0,002220	−0,002701	−0,003240	−0,003835
	(Bf_2, f_2)	0,001089	0,001239	0,001402	0,001576
$\alpha=0,15$	(Bf_1, f_1)	0,017118	0,023757	0,031228	0,039531
	(Bf_1, f_2)	−0,002405	−0,003007	−0,003666	−0,004381
	(Bf_2, f_1)	−0,002405	−0,003007	−0,003666	−0,004381
	(Bf_2, f_2)	0,001329	0,001507	0,001699	0,001906
$\alpha=0,2$	(Bf_1, f_1)	0,021864	0,029033	0,037046	0,045907
	(Bf_1, f_2)	−0,002995	−0,003624	−0,004325	−0,005098
	(Bf_2, f_1)	−0,002995	−0,003624	−0,004325	−0,005098
	(Bf_2, f_2)	0,001596	0,001804	0,002029	0,002270

prietatea de simetrie a celor doi operatori a uşurat în oarecare măsură calculele.

În tabela 3, sînt trecute rezultatele finale ale calculului, respectiv cea mai mică valoare proprie λ pentru valorile corespunzătoare ale parametrilor α şi β. De asemenea, în figura 2 am trasat curbele de variaţie a valorii proprii λ în funcţie de β, pentru cele trei valori considerate ale lui α.

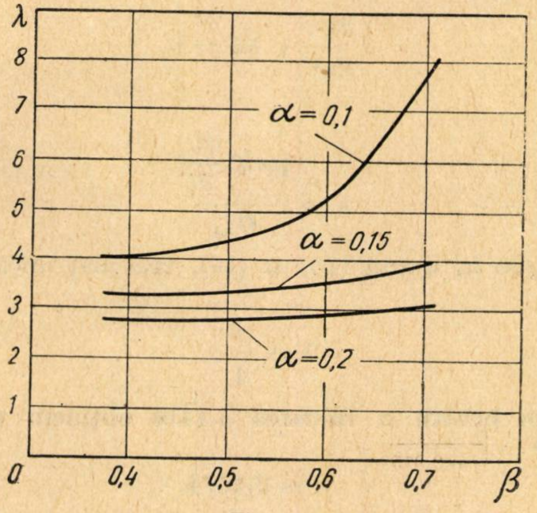


Fig. 2

Din examinarea rezultatelor, se poate constata o influenţă destul de considerabilă a parametrului α. În ceea ce priveşte parametrul β, influenţa acestuia este mai accentuată pentru valorile mai mici ale lui α. Rezultă de asemenea că, în general, valorile mari ale lui β, respectiv valorile mici ale raportului $\frac{c_e}{c_0}$ măresc mult viteza de divergenţă, avînd deci un efect favorabil.

Pentru a se obţine o precizie mai mare, s-ar putea efectua calculele şi în aproximaţia a treia. În general însă, metoda lui Ritz dă în aproximaţia a doua o precizie care este suficientă în problema de care ne ocupăm. Pentru a ilustra această afirmaţie, vom considera cazul cel mai simplu de determinare a vitezei de divergenţă şi anume acela al unei suprafeţe portante de secţiune constantă aflată în mişcare de translaţie. Păstrînd aceleaşi notaţii ca şi mai sus, ecuaţia diferenţială a unghiului de răsucire elastică are forma

Tabela 3

β	0,7	0,6	0,5	0,4
$\alpha = 0{,}1$ λ	7,7186	5,2027	4,5214	4,0739
$\alpha = 0{,}15$ λ	3,8960	3,5128	3,3236	3,2286
$\alpha = 0{,}2$ λ	3,0467	2,8743	2,7910	2,7710

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \lambda\varphi = 0, \tag{31}$$

în care

$$\lambda = \frac{qceb^2 \frac{dC_z}{di}}{GI_d}. \tag{32}$$

Cu condiţiile la limită (15) şi (16), cea mai mică valoare proprie este [1]

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4}. \tag{33}$$

Dacă luăm pentru π valoarea 3,1416 obţinem aşadar, cu patru zecimale exacte

$$\lambda = 2{,}4674.$$

Calculele pe care le-am efectuat cu ajutorul metodei lui Ritz, considerînd tot funcţiile (29), au condus la rezolvarea ecuaţiei

$$\lambda^2 - 26{,}024806\,\lambda + 58{,}137984 = 0,$$

rădăcina ei cea mai mică avînd valoarea, tot cu patru zecimale exacte

$$\lambda = 2{,}4680.$$

Eroarea faţă de valoarea exactă este deci de $+0{,}024\,\%$ şi nu prezintă ca atare nici o importanţă practică. Putem să ne aşteptăm ca şi în problema de care ne ocupăm eroarea să se găsească în limite acceptabile în calculele practice.

4. *Concluzii.* Parametrul a cărui influenţă prezintă un interes mai mare este β, valoarea lui α depinzînd în primul rînd de natura agregatului prevăzut cu suprafeţe portante în rotaţie. Astfel, pentru un rotor de elicopter, α se va situa în jurul valorii celei mai mici considerate de noi în calcule, în timp ce pentru un ventilator axial, vom putea întîlni valori ale lui α apropiate de aceea maximă pe care am utilizat-o. Într-adevăr, considerentele de ordin constructiv au în genere prioritatea în stabilirea distanţei dintre secţiunea de încastrare şi axa de rotaţie. Există totuşi o legătură între parametrii α şi β şi anume, se observă că influenţa lui β este cu atît mai mare cu cît α este mai mic. De aici se trage concluzia că dacă distanţa dintre secţiunea de incastrare şi axa de rotaţie este mică forma trapezoidală este deosebit de favorabilă pentru evitarea fenomenului de divergenţă aeroelastică de răsucire.

Pentru a ilustra cantitativ acest efect, am făcut calcule comparative, tot cu ajutorul metodei lui Ritz şi pentru o suprafaţă portantă de secţiune constantă, aflată în mişcare de rotaţie. În acest caz, avem $\beta = 0$ şi ecuaţia (14) devine

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \lambda^{(0)}(\alpha + \eta)^2\,\varphi = 0, \tag{34}$$

$\lambda^{(0)}$ avînd tot expresia (13) dacă presupunem că suprafaţa portantă are coarda c_0; am schimbat notaţia numai pentru a putea deosebi, în cele ce urmează, valorile proprii.

Ecuaţia (34) se poate rezolva exact, iar în lucrarea [4] se introduce chiar această soluţie. Determinarea vitezei de divergenţă comportă totuşi calcule numerice destul de laborioase, aşa că utilizarea metodei lui Ritz apare indicată. Aceasta cu atît mai mult cu cît, în cazul de faţă, este suficient să particularizăm rezultatele anterioare, punînd $\beta = 0$. Dacă ne mărginim la o singură valoare a lui α şi anume 0,1, obţinem ecuaţia

$$(\lambda^{(0)})^2 - 86{,}4563\,\lambda^{(0)} + 292{,}146 = 0,$$

care ne dă cea mai mică valoare proprie

$$\lambda^{(0)} = 3{,}5541.$$

Raportul vitezelor V_0 şi $V_0^{(0)}$ la vîrful suprafeţei portante, pentru care se produce divergenţa, are valoarea

$$\frac{V_0}{V_0^{(0)}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^{(0)}}}, \tag{35}$$

iar valorile calculate sînt trecute în tabela 4

Tabela 4

β	0,7	0,6	0,5	0,4
$\frac{V_0}{V_0^{(0)}}$	1,4737	1,2099	1,1279	1,0706

Dacă β are valori mari, respectiv atunci cînd raportul $\frac{c_e}{c_0}$ este mic, viteza de divergenţă este deci mult mai mare decît pentru o suprafaţă portantă de secţiune constantă.

Primită la redacţie la 30 aprilie 1962

К АЭРОУПРУГОЙ ДИВЕРГЕНЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ НЕСУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается задача определения скорости дивергенции кручения несущей поверхности переменного сечения, вращающейся вокруг оси. Получающаяся задача собственных значений решается методом Рица. Численные результаты, которые приводятся в статье, по сравнению с соответствующими несущей поверхности постоянного сечения, показывают достаточно большие расхождения при принятом законе изменения сечения (трапецоидальная поверхность).

SUR LA DIVERGENCE AÉROÉLASTIQUE DES SURFACES PORTANTES DE SECTION VARIABLE EN MOUVEMENT DE ROTATION

RÉSUMÉ

Ce travail a pour but le calcul de la vitesse de divergence torsionale d'une surface portante de section variable qui tourne autour d'un axe. Le problème aux valeurs propres qui en découle est solutionné à l'aide

de la méthode de Ritz. Les résultats numériques, présentés en comparaison avec ceux qui correspondent à une surface portante de section constante, montrent d'assez grandes différences, pour la loi de variation de la section adoptée (surface portante trapézoïdale).

BIBLIOGRAFIE

1. R. L. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY, R. L. HALFMAN, *Aeroelasticity.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Cambridge 42, Mass, 1955, 427—445.
2. Л. В. КАНТОРОВИЧ, В. И. КРЫЛОВ, *Приближение методы высшего анализа.* ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1950, 277—278, 286
3. С. Г. МИХЛИН, *Прямые методы в математической физике.* Г.И.Т.Т.Л. Москва-Ленинград, 1950, 109—110, 132—133, 174—184.
4. A. PETRE, *Divergenţa aeroelastică la suprafeţe portante în rotaţie şi rototranslaţie.* St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).

CONSIDERAȚII ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA PLANĂ A TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE TRIUNGHIULARE

DE

P. P. TEODORESCU[1]

1. *Introducere.* Problemele plane ale teoriei elasticității se studiază, în mod obișnuit, folosind coordonate carteziene rectangulare, care sînt cele mai indicate în cazul grinzilor pereți cu contur dreptunghiular — de exemplu. În alte cazuri însă se pot folosi alte sisteme de coordonate, care se aleg în mod convenabil, funcție de conturul domeniului plan considerat, după cum am arătat în [12]. Menționăm astfel coordonatele carteziene oblice, cu ajutorul cărora am studiat [10], [11] cazul grinzilor pereți oblice (contur paralelogram, avînd eventual una sau mai multe laturi aruncate la infinit). Un studiu mai general al problemei plane a teoriei elasticității în coordonate curbilinii oarecare se găsește, de exemplu, în [5] și [7].

În mod analog, pentru studiul grinzilor pereți cu contur triunghiular, vom introduce un sistem de coordonate pe care le vom numi triunghiulare, deoarece putem face totdeauna astfel ca cele trei laturi ale unui triunghi să fie linii de coordonate. Menționăm că acest sistem de coordonate rectilinii se apropie, ca formă, de sistemul de coordonate polare. În cele ce urmează vom întreprinde un studiu al problemei plane a teoriei elasticității în coordonate triunghiulare, discutînd posibilitățile de rezolvare ale problemei matematice corespunzătoare și dînd indicații în legătură cu rezolvarea unor probleme concrete la limită.

2. *Schimbări de axe de coordonate. Schimbări de variabilă.* Vom defini coordonatele triunghiulare (ξ, θ) prin relațiile de transformare (fig. 1)

$$x = \xi,\qquad y = \xi \operatorname{tg} \theta \tag{1}$$

---

[1] Facultatea de matematică și mecanică a Universității din București.

sau

$$\begin{aligned} \xi &= x, \\ \theta &= \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{1'}$$

Aceasta ne arată că liniile de coordonate $\xi = \text{const.}$ formează un fascicul de drepte paralele cu axa Oy iar liniile de coordonate $\theta = \text{const.}$ formează un fascicul de drepte concurente în originea O.

Prin operaţii elementare de derivare obţinem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\sin 2\theta}{2\xi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\cos^2 \theta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{2}$$

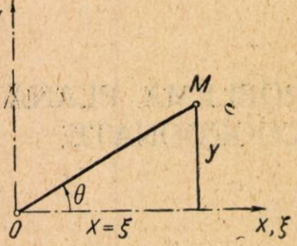


Fig. 1

operatorul lui Laplace căpătînd forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\sin 2\theta}{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{3}$$

3. *Tensiuni. Echilibru elastic.* Introducem tensorul tensiune sub forma

$$T_\sigma = \left\{ \begin{matrix} \sigma_\xi & \tau_{\theta\xi} \\ \tau_{\xi\theta} & \sigma_\theta \end{matrix} \right\}, \tag{4}$$

care ne determină în întregime starea de tensiune în jurul unui punct; σ_ξ, σ_θ sînt tensiunile normale iar $\tau_{\xi\theta} \neq \tau_{\theta\xi}$ sînt tensiunile tangenţiale.

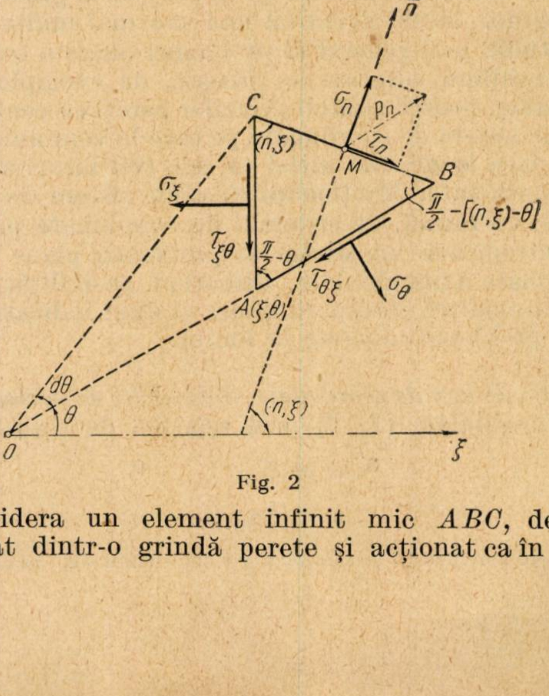


Fig. 2

Vom considera un element infinit mic ABC, de formă triunghiulară, decupat dintr-o grindă perete şi acţionat ca în figura 2. Pe elementul BC, de normală $\bar{n}$, acţionează tensiunea normală σ_n şi tensiunea tangenţială τ_n, care este pozitivă cînd acţionează în sensul rotirii acelor unui ceasornic (lăsînd elementul la dreapta).

Observăm că teorema sinusurilor, aplicată triunghiului ABC, ne dă

$$\frac{\overline{BC}}{\cos\theta}=\frac{\overline{AB}}{\sin(n,\xi)}=\frac{\overline{AC}}{\cos[(n,\xi)-\theta]}. \tag{5}$$

Ecuaţia de moment în raport cu punctul M — mijlocul laturii BC — ne va da

$$-\sigma_\xi\overline{AC}\left[\frac{\overline{AC}}{2}-\frac{\overline{BC}}{2}\cos(n,\xi)\right]+\tau_{\xi\theta}\overline{AC}\frac{\overline{BC}}{2}\sin(n,\xi)+$$
$$+\sigma_\theta\overline{AB}\left\{\frac{\overline{AB}}{2}-\frac{\overline{BC}}{2}\sin[(n,\xi)-\theta]\right\}-\tau_{\theta\xi}\overline{AB}\frac{\overline{BC}}{2}\cos[(n,\xi)-\theta]=0,$$

de unde, ţinînd seama de (5), găsim relaţia

$$\tau_{\xi\theta}-\tau_{\theta\xi}=(\sigma_\xi-\sigma_\theta)\operatorname{tg}\theta, \tag{6}$$

pe care trebuie să o verifice tensiunile tangenţiale.

Ecuaţia de proiecţie pe direcţia normalei $\bar{n}$ se va scrie

$$\sigma_n\overline{BC}=\sigma_\xi\overline{AC}\cos(n,\xi)+\tau_{\xi\theta}\overline{AC}\sin(n,\xi)+\sigma_\theta\overline{AB}\sin[(n,\xi)-\theta]+$$
$$+\tau_{\theta\xi}\overline{AB}\cos[(n,\xi)-\theta].$$

Ţinînd seama de (5) şi (6), obţinem tensiunea normală

$$\sigma_n=\frac{1}{2}(\sigma_\xi+\sigma_\theta)+\frac{1}{2}(\sigma_\xi-\sigma_\theta)\cos 2(n,\xi)+\tau_{\xi\theta}\sin 2(n,\xi)+$$
$$+(\tau_{\xi\theta}+\tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta\sin^2(n,\xi). \tag{7}$$

Tensiunea tangenţială se obţine analog

$$\tau_n=\frac{1}{2}(\sigma_\xi-\sigma_\theta)\sin 2(n,\xi)-\tau_{\xi\theta}\cos 2(n,\xi)-$$
$$-\frac{1}{2}(\tau_{\xi\theta}+\tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta\sin 2(n,\xi). \tag{7'}$$

Prin particularizare din (7) şi (7′), se pot obţine cu uşurinţă relaţiile de trecere de la componentele tensorului tensiune în coordonate carteziene ortogonale la componentele corespunzătoare în coordonate triunghiulare şi invers.

Direcțiile principale, pentru care tensiunile normale au valori extreme, sînt date de

$$\operatorname{tg} 2\,(n,\,\xi) = \frac{2\tau_{\xi\theta}}{\sigma_\xi - \sigma_\theta - (\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta} = \frac{\tau_{\xi\theta}\sin 2\theta}{\tau_{\xi\theta}\cos 2\theta - \tau_{\theta\xi}}. \tag{8}$$

Se observă că pentru aceste unghiuri $(n,\,\xi)$ tensiunile tangențiale sînt nule.

Tensiunile normale principale rezultă sub forma

$$\begin{gathered}\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta \pm \\ \pm \frac{1}{2}\sqrt{[\sigma_\xi - \sigma_\theta - (\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta]^2 + 4\tau_{\xi\theta}^2},\end{gathered} \tag{9}$$

fiind rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$\sigma^2 - I_1\sigma + I_2 = 0, \tag{10}$$

avînd drept coeficienți cei doi invarianți

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_\xi + \sigma_\theta + (\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta, \tag{11}$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_\xi\sigma_\theta - \tau_{\xi\theta}^2 + \sigma_\theta(\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta. \tag{11'}$$

Tensiunile tangențiale extreme se obțin pentru direcțiile care bisectează direcțiile principale și sînt date de

$$\tau_{\text{extr}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{[\sigma_\xi - \sigma_\theta - (\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta]^2 + 4\,\tau_{\xi\theta}^2}. \tag{12}$$

Cu ajutorul acestor date se pot scrie cu ușurință și ecuațiile liniilor izostatice, traiectoriile tensiunilor tangențiale maxime etc.

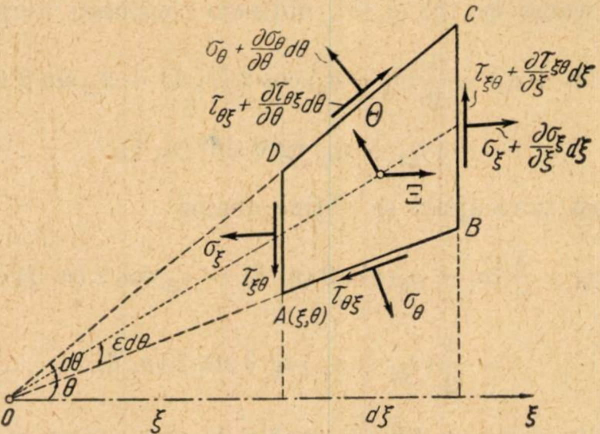

C
$\sigma_\theta + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}d\theta$
$\tau_{\xi\theta} + \frac{\partial\tau_{\xi\theta}}{\partial\xi}d\xi$
$\tau_{\theta\xi} + \frac{\partial\tau_{\theta\xi}}{\partial\theta}d\theta$
Θ
$\sigma_\xi + \frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi}d\xi$
D
Ξ
B
σ_ξ
$\tau_{\xi\theta}$
$\tau_{\theta\xi}$
σ_θ
$A(\xi,\theta)$
$\varepsilon d\theta$
$d\theta$
θ
0
ξ
$d\xi$
ξ

Fig. 3

Considerăm un element infinit mic $ABCD$, de formă trapezoidală, decupat din grinda perete și mărginit de linii de coordonate (fig. 3); notăm cu Ξ şi Θ componentele forţei masice după cele două axe de coordonate. Observăm că laturile trapezului se pot exprima sub forma

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{d\xi}{\cos\theta}, \quad \overline{BC} = (\xi + d\xi)\frac{\sin d\theta}{\cos\theta\cos(\theta + d\theta)}, \\ \overline{CD} &= \frac{d\xi}{\cos(\theta+d\theta)}, \quad \overline{DA} = \xi\frac{\sin d\theta}{\cos\theta\cos(\theta+d\theta)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ecuaţia de echilibru a elementului infinit mic ne dă, în proiecţie pe axa $O\xi$,

$$\begin{gathered} -\sigma_\xi\overline{DA} + \left(\sigma_\xi + \frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi}d\xi\right)\overline{BC} + \sigma_\theta\overline{AB}\sin\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}d\theta\right)\overline{CD}\sin(\theta+d\theta) - \\ -\tau_{\theta\xi}\overline{AB}\cos\theta + \left(\tau_{\theta\xi} + \frac{\partial\tau_{\theta\xi}}{\partial\theta}d\theta\right)\overline{CD}\cos(\theta + d\theta) + \frac{d\xi}{2}(\overline{BC} + \overline{DA})\,\Xi - \\ -\frac{d\xi}{2}(\overline{BC} + \overline{DA})\sin(\theta + \varepsilon\, d\theta)\,\Theta = 0, \end{gathered}$$

unde $0 < \varepsilon < 1$.

Scriind şi ecuaţia de proiecţie pe o direcţie normală la $O\xi$ şi ţinînd seama de (13), obţinem

$$\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi} - \frac{\sin 2\theta}{2\xi}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\xi}\frac{\partial\tau_{\theta\xi}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\xi - \sigma_\theta}{\xi} + \Xi - \Theta\sin\theta = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\tau_{\xi\theta}}{\partial\xi} + \frac{\cos^2\theta}{\xi}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\sin 2\theta}{2\xi}\frac{\partial\tau_{\theta\xi}}{\partial\theta} + \frac{\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi}}{\xi} + \Theta\cos\theta = 0. \tag{14'}$$

Dacă înmulţim ecuaţia (14) cu $(-\sin\theta)$, ecuaţia (14′) cu $\cos\theta$ şi adunăm, obţinem ecuaţia de proiecţie pe direcţia θ şi anume

$$\cos\theta\frac{\partial\tau_{\xi\theta}}{\partial\xi} + \frac{\cos\theta}{\xi}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi} + \frac{2\cos\theta}{\xi}\tau_{\theta\xi} + \Theta - \Xi\sin\theta = 0. \tag{14''}$$

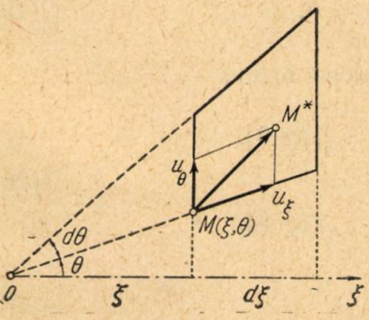


Fig. 4

4. *Deplasări. Deformaţii specifice.* Vom considera componentele vectorului deplasare $\overline{MM^*}$ după liniile de coordonate θ = const., respectiv ξ = const. ca fiind u_ξ şi u_θ (fig. 4). Legătura cu componentele vectorului deplasare în coordonate carteziene ortogonale va fi dată de relaţiile

$$\begin{aligned} u_\xi &= u\sec\theta, \\ u_\theta &= v - u\,\mathrm{tg}\,\theta. \end{aligned} \tag{15}$$

Se poate arăta că componentele tensorului deformație specifică

$$T_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_\xi & \frac{1}{2}\gamma_{\xi\theta} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\xi\theta} & \varepsilon_\theta \end{Vmatrix} \tag{16}$$

se pot exprima cu ajutorul componentelor vectorului deplasare prin relațiile

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \cos\theta\left(\frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi}\sin\theta\right), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\cos^2\theta}{\xi}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\xi}{\partial \theta}\sin\theta + u_\xi\cos\theta\right), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\gamma_{\xi\theta} = \cos^2\theta\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial u_\xi}{\partial \theta}\cos\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}u_\xi\sin\theta\right), \tag{17'}$$

unde ε_ξ, ε_θ sînt lungirile specifice iar $\gamma_{\xi\theta}$ este lunecarea specifică corespunzătoare unghiului format de liniile de coordonate în fiecare punct.

În ceea ce privește variația deformațiilor specifice în jurul unui punct, observăm că avem

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = {} & \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\theta) + \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\theta)\cos 2(n,\xi) + \frac{1}{2}\gamma_{\xi\theta}\sin 2(n,\xi) + \\ & + \left[\frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\theta)\sin 2(n,\xi) - \gamma_{\xi\theta}\cos^2(n,\xi)\right]\operatorname{tg}\theta, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{nm} = {} & -(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\theta)\sin 2(n,\xi) + \gamma_{\xi\theta}\cos 2(n,\xi) + \\ & + 2\{(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\theta)\cos[2(n,\xi) - \theta] + \gamma_{\xi\theta}\sin[2(n,\xi) - \theta]\}\sin\theta, \end{aligned} \tag{18'}$$

putînd face un studiu analog cu cel efectuat pentru componentele tensorului T_σ.

În lipsa forțelor masice, ecuația de continuare are forma

$$\Delta(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\theta - \gamma_{\xi\theta}\operatorname{tg}\theta) = 0. \tag{19}$$

5. *Legea lui Hooke.* Legea Hooke va avea forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{E}[\sigma_\xi - \mu\sigma_\theta + (\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu\sigma_\xi + (\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta], \end{aligned} \tag{20}$$

$$\gamma_{\xi\theta} = \frac{1+\mu}{E}(\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi}), \tag{20'}$$

corespunzătoare unor linii de coordonate neortogonale ; aici E este modulul de elasticitate longitudinală iar μ este coeficientul de contracție transversală al lui Poisson.

6. *Rezolvarea problemei în tensiuni.* Pentru rezolvarea problemei în tensiuni va trebui să exprimăm ecuația de continuitate numai cu ajutorul acestor mărimi. Ținînd seama și de forțele masice, vom putea scrie

$$\begin{aligned} &\Delta\left[\sigma_\xi + \sigma_\theta + (\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi})\operatorname{tg}\theta\right] = \\ &= -(1+\mu)\left\{\frac{\partial \Xi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\sin\theta + \frac{1}{\xi}\left[\cos\theta\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} - \frac{\partial \Xi}{\partial \theta}\sin\theta\right) + \right.\right. \\ &\left.\left. + (1+\sin\theta)(\Theta - \Xi)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Prin urmare, rezolvarea în tensiuni a problemei se reduce la integrarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale (6), (14), (14″) și (21) cu anumite condiții la limită date. În cele ce urmează vom considera numai ecuațiile omogene (fără forțe masice).

Ținînd seama de (6) și eliminînd pe $\tau_{\theta\xi}$, respectiv $\tau_{\xi\theta}$, ecuațiile (14) și (14″) capătă forma mai simplă

$$\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} - \frac{\sin 2\theta}{2\xi}\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{\xi}\frac{\partial \tau_{\xi\theta}}{\partial \theta} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta\xi}}{\partial \xi} - \operatorname{tg}\theta\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{\xi}\tau_{\theta\xi} = 0. \tag{22'}$$

Observăm că operatorii

$$\begin{aligned} &\frac{\cos^2\theta}{\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\sin 2\theta}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\sin 2\theta}{2\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \\ &\qquad = \frac{\cos^2\theta}{\xi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\theta} - \frac{\sin 2\theta}{2\xi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{\cos 2\theta}{\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\ &\left(2 + \xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \xi\operatorname{tg}\theta\frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \xi\operatorname{tg}\theta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(2 + \xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \\ &\qquad = -\xi^2\operatorname{tg}\theta\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \xi\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\theta} - 3\xi\operatorname{tg}\theta\frac{\partial}{\partial\xi} + 2\frac{\partial}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{23}$$

sînt permutabili între ei. În acest caz, ecuațiile (22) și (22′) ne conduc la

$$\begin{aligned} &\sigma_\xi = \frac{\cos^2\theta}{\xi}\frac{\partial F_\xi}{\partial\theta}, &&\tau_{\xi\theta} = -\frac{\partial F_\xi}{\partial\xi} + \frac{\sin 2\theta}{2\xi}\frac{\partial F_\xi}{\partial\theta}, \\ &\sigma_\theta = -\left(2F_\theta + \xi\frac{\partial F_\theta}{\partial\xi}\right), &&\tau_{\theta\xi} = \frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} - \xi\operatorname{tg}\theta\frac{\partial F_\theta}{\partial\xi}, \end{aligned} \tag{24}$$

de unde, ținînd seama de (6), rezultă că

$$\frac{\partial F_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + 2 \operatorname{tg} \theta F_\theta = 0. \tag{25}$$

Observăm că operatorii

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(2 \operatorname{tg} \theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \left(2 \operatorname{tg} \theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} + 2 \operatorname{tg} \theta \frac{\partial}{\partial \xi} \tag{23'}$$

sînt permutabili între ei, deci funcțiile F_ξ și F_θ astfel introduse se pot exprima cu ajutorul unei singure funcții F sub forma

$$F_\xi = \frac{\partial F}{\partial \theta} + 2 \operatorname{tg} \theta F, \quad F_\theta = - \frac{\partial F}{\partial \xi}. \tag{26}$$

În acest caz, componentele tensorului tensiune vor fi date de

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{\xi}\left(\cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \sin 2\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + 2F\right), \\ \sigma_\theta &= \xi \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\xi F), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\theta} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\sin 2\theta}{2\xi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - 2 \operatorname{tg} \theta \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{2 \sin^2 \theta}{\xi} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{\xi} F, \\ \tau_{\theta\xi} &= \xi \operatorname{tg} \theta \frac{\partial^2 F}{\tau \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \theta}, \end{aligned} \tag{27'}$$

găsind astfel o reprezentare de tip Airy [1], [2].

Ținînd seama de legea lui Hooke (20), (20′), putem exprima și componentele tensorului T_ε cu ajutorul funcției de tensiune F. Apoi relațiile (17) ne permit să calculăm componentele vectorului deplasare sub forma

$$\begin{aligned} u_\xi + u_\theta \sin \theta &= \sec \theta \int \varepsilon_\xi \, d\xi + f_1(\theta), \\ u_\xi \sin \theta + u_\theta &= \xi \int \varepsilon_\theta \sec^2 \theta d\theta + f_2(\xi). \end{aligned} \tag{28}$$

Funcțiile de o singură variabilă $f_1(\theta)$ și $f_2(\xi)$ sînt precizate de relația (17′).

Observăm că

$$\begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\theta + (\tau_{\xi\theta} + \tau_{\theta\xi}) \operatorname{tg} \theta = \frac{\xi}{\cos^2 \theta}\Bigg(&\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\sin 2\theta}{\xi} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \theta} + \\ &+ \frac{\cos^2 \theta}{\xi^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{2 \cos 2\theta}{\xi} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\sin 2\theta}{\xi^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{2}{\xi^2} F\Bigg), \end{aligned} \tag{29}$$

funcția F trebuind deci să verifice ecuația

$$\Delta\left(\frac{\xi}{\cos^2\theta}\,\Delta F\right)+\Delta\left(\frac{2\cos 2\theta}{\cos^2\theta}\,\frac{\partial F}{\partial\xi}+\frac{2\,\mathrm{tg}\,\theta}{\xi}\,\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{2}{\xi\cos^2\theta}\,F\right)=0. \tag{30}$$

Dacă $p_{n\xi}$ și $p_{n\theta}$ sînt componentele sarcinii exterioare superficiale, care acționează pe elementul de contur de normală exterioară $\overline{n}$, putem scrie condițiile la limită sub forma

$$\begin{aligned} p_{n\xi}\cos\theta &= \sigma_\xi\cos\,[(n,\,\xi)-\theta]+(\tau_{\theta\xi}\cos\theta-\sigma_\theta\sin\theta)\sin(n,\,\xi),\\ p_{n\theta}\cos\theta &= \sigma_\theta\sin\,(n,\,\xi)+(\tau_{\xi\theta}\cos\theta-\sigma_\xi\sin\theta)\cos[(n,\,\xi)-\theta]. \end{aligned} \tag{31}$$

În felul acesta, problema plană a teoriei elasticității este în întregime formulată în tensiuni.

Observăm că dacă facem schimbarea de funcție dată de

$$\xi F=\cos^2\theta\,\widetilde{F}, \tag{32}$$

starea de tensiune se va putea reprezenta și sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{\cos^4\theta}{\xi^2}\left(\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\theta^2}-2\,\mathrm{tg}\theta\,\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\theta}\right),\\ \sigma_\theta &= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\xi^2}, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\theta} &= \frac{\cos^2\theta}{\xi}\left(-\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\xi\partial\theta}+\frac{\sin 2\theta}{2\xi}\,\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\theta^2}+\frac{\cos 2\theta}{\xi}\,\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\theta}\right),\\ \tau_{\theta\xi} &= \frac{\cos^2\theta}{\xi}\left(\xi\,\mathrm{tg}\,\theta\,\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\xi\partial\theta}+\frac{1}{\xi}\,\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\theta}\right). \end{aligned} \tag{33'}$$

În acest caz putem scrie

$$\sigma_\xi+\sigma_\theta+(\tau_{\xi\theta}+\tau_{\theta\xi})\,\mathrm{tg}\theta=\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\xi^2}-\frac{\sin 2\theta}{\xi}\,\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\xi\,\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\xi^2}\,\frac{\partial^2\widetilde{F}}{\partial\theta^2}=\Delta\widetilde{F}, \tag{29'}$$

deci funcția $\widetilde{F}$ va fi o funcție biarmonică

$$\Delta\Delta\widetilde{F}=0. \tag{34}$$

Condițiile la limită (31) ne dau valoarea funcției $\widetilde{F}$ și a derivatei sale normale $\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial n}$ pe contur, ajungînd astfel la formularea clasică a problemei.

7. *Rezolvarea problemei în deplasări.* Analog se poate da o formulare în deplasări a problemei plane a elasticității pornind de la ecuațiile lui

Lamé corespunzătoare. Găsim astfel o reprezentare de tip Marguerre [6] a componentelor vectorului deplasare, sub forma

$$
\begin{aligned}
u_\xi &= \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{\cos\theta}{\xi}\left(-\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\xi\,\partial\theta}+\frac{\sin 2\theta}{2\xi}\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\theta^2}+\frac{\cos 2\theta}{\xi}\,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta}\right),\\
u_\theta &= \frac{2}{1-\mu}\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\xi^2}-\frac{3-\mu}{2(1-\mu)}\,\frac{\sin 2\theta}{\xi}\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\xi\,\partial\theta}+\\
&\quad+\frac{\cos^2\theta}{\xi^2}\,\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\theta^2}+\frac{1+\mu}{2(1-\mu)}\,\frac{\sin 2\theta}{\xi^2}\,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Funcţia de deplasare $\mathcal{F}$ va trebui să verifice ecuaţia biarmonică

$$\Delta\Delta\mathcal{F}(\xi,\theta)=0, \tag{36}$$

condiţiile la limită punîndu-se sub forma

$$u_\xi = u_{\xi n},\quad u_\theta = u_{\theta n}, \tag{37}$$

unde $(u_{\xi_n}, u_{\theta_n})$ sînt deplasările corespunzătoare unui element de contur, de normală exterioară $\overline{n}$.

În felul acesta, cea de-a doua problemă plană fundamentală a teoriei elasticităţii capătă o formulare în deplasări.

8. *Forţe masice. Alte sarcini exterioare.* În cazul unor forţe masice oarecare va trebui să alegem un sistem de integrale particulare pentru ecuaţiile (6), (22), (22′) [1]. Se observă că putem lua

$$
\begin{aligned}
\sigma_\xi &= -\frac{1}{\xi}\int \xi(\Xi-\Theta\sin\theta)\,d\xi+\frac{\cos\theta}{\xi}\int\frac{d\xi}{\xi^2}\int\xi^2\Big(\Theta\operatorname{tg}\theta+\\
&\quad+\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}-\Xi\sec\theta-\frac{\partial\Xi}{\partial\theta}\sin\theta\Big)\,d\xi,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$\sigma_\theta = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{\xi\theta} &= -\frac{1}{\xi^2}\sec\theta\int\xi^2(\Theta-\Xi\sin\theta)\,d\xi-\frac{\operatorname{tg}\theta}{\xi}\int\xi(\Xi-\Theta\sin\theta)\,d\xi+\\
&\quad+\frac{\sin\theta}{\xi}\int\frac{d\xi}{\xi^2}\int\xi^2\Big(\Theta\operatorname{tg}\theta+\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}-\Xi\sec\theta-\frac{\partial\Xi}{\partial\theta}\sin\theta\Big)\,d\xi,
\end{aligned}
\tag{38'}
$$

$$\tau_{\theta\xi} = -\frac{1}{\xi^2}\sec\theta\int\xi^2(\Theta-\Xi\sin\theta)\,d\xi.$$

---

[1] Cu forţele masice care rezultă din ecuaţiile (14) şi (14″).

Înlocuind în ecuația (21), găsim relația pe care trebuie să o verifice funcția $\widetilde{F}$, de forma

$$\Delta\Delta\widetilde{F}=f(\Xi,\ \Theta). \tag{39}$$

Va trebui deci să căutăm o integrală particulară a acestei ecuații. Putem face un studiu analog cu cel din [8], [9], arătînd că funcția $\widetilde{F}$ și derivatele sale parțiale sînt univoc determinate dacă sarcinile exterioare care acționează pe contur își fac echilibru cu forțele masice.

În cazul acțiunii altor sarcini exterioare putem întreprinde un studiu analog cu cel din cazul coordonatelor carteziene ortogonale [1]).

9. *Metode de calcul.* Metodele generale de calcul [1]) pot fi folosite cu succes și în cazul coordonatelor triunghiulare. Se observă că putem reprezenta, după E. Almansi [3], o funcție biarmonică $\widetilde{F}=\widetilde{F}(\xi,\ \theta)$ sub forma

$$\widetilde{F}=\Phi+\left[a+(b+c\operatorname{tg}\theta)\xi+d\frac{\xi}{\cos^2\theta}\right]\Psi\qquad (a,\,b,\,c,\,d=\text{const.}), \tag{40}$$

unde $\Phi=\Phi(\xi,\ \theta)$ și $\Psi=\Psi(\xi,\ \theta)$ sînt funcții armonice. Pentru aceasta este deci util să construim integrale particulare ale ecuației armonice

$$\Delta\Omega(\xi,\ \theta)=0, \tag{41}$$

unde operatorul lui Laplace este dat de (3).

Căutînd funcții de cîte o singură variabilă de forma

$$\Omega(\xi,\ \theta)=\varphi(\xi)+\psi(\theta), \tag{42}$$

găsim integrala generală

$$\Omega(\xi,\ \theta)=C_1\xi+C_2\theta+C_3\qquad (C_1,\,C_2,\,C_3=\text{const.}). \tag{43}$$

Pentru a căuta funcții de forma

$$\Omega(\xi,\ \theta)=\varphi(\xi)\,\psi(\theta) \tag{44}$$

vom folosi un artificiu, care ne va permite, în același timp, să găsim structura integralei generale a ecuației (41). Într-adevăr, ținînd seama de permutabilitatea (23) a unor anumiți operatori diferențiali, putem pune operatorul armonic sub forma

$$\Delta=\left[\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\cos\theta}{\xi}(\sin\theta+i\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\left[\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\cos\theta}{\xi}(\sin\theta-i\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]. \tag{45}$$

Conform unei teoreme, datorită lui T. Boggio [4], putem scrie integrala generală a ecuației armonice

$$\Omega(\xi,\ \theta)=\Omega_+(\xi,\ \theta)+\Omega_-(\xi,\ \theta), \tag{46}$$

---

[1]) Vezi, de exemplu, lucrarea [13].

unde

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\cos\theta}{\xi}(\sin\theta \mp i\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\Omega_{\pm}(\xi, \theta) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \pm i\frac{\cos\theta}{\xi}\mathrm{e}^{\pm i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Omega_{\pm}(\xi, \theta) = 0, \tag{46'}$$

semnele corespunzîndu-se.

Printr-o schimbare convenabilă de variabilă, se poate arăta că ecuațiile (46′) ne conduc la

$$\Omega_{\pm}(\xi, \theta) = \Omega_{\pm}[\xi(1 \pm i \operatorname{tg}\theta)] = \Omega_{\pm}\left(\frac{\xi}{\cos\theta}\mathrm{e}^{\pm i\theta}\right), \tag{46''}$$

unde semnele se corespund de asemenea, funcțiile $\Omega_{\pm}$ fiind arbitrare[1]. Observăm că, notînd $r = \xi/\cos\theta$, ajungem la reprezentarea, în coordonate polare, a funcțiilor de variabilă complexă $\Omega_{+}(z)$ și $\Omega_{-}(\bar{z})$, cu $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, și putem folosi toate rezultatele corespunzătoare.

În același timp, relația (46″) ne permite să construim cu ușurință integrale particulare ale ecuației armonice (41). De exemplu, alegînd pe Ω_{+} și Ω_{-} sub formă de puteri, găsim integralele particulare

$$\left(\frac{\xi}{\cos\theta}\right)^{k}\cos k\theta, \quad \left(\frac{\xi}{\cos\theta}\right)^{k}\sin k\theta \tag{47}$$

ale ecuației armonice, k fiind o constantă arbitrară.

Cu ajutorul reprezentării (40) putem construi funcțiile biarmonice corespunzătoare.

Menționăm că integralele particulare (47) permit construirea unor dezvoltări în serie utile în rezolvarea a diferite probleme concrete la limită.

10. *Grinzi pereți cu contur triunghiular*. În cele ce urmează vom da cîteva indicații cu caracter general privitoare la posibilitățile de calcul ale grinzilor pereți cu contur triunghiular.

Fie astfel o grindă perete cu contur triunghiular oarecare ABC (fig. 5). Alegem un sistem de coordonate triunghiulare astfel încît polul O să coincidă cu vîrful A iar axa $O\xi$ să fie perpendiculară pe latura opusă BC. Laturile AB și AC se obțin făcînd $\theta = \beta$, respectiv $\theta = \gamma$ iar latura BC se obține făcînd $\xi = \delta$. În felul acesta toate cele trei laturi ale triunghiului vor fi linii de coordonate.

Folosind integralele elementare (43) și reprezentarea (40), găsim funcțiile biarmonice particulare

$$\begin{gathered}\text{const.};\ \xi,\ \theta;\ \xi^2,\ \xi\theta;\ \xi\operatorname{tg}\theta,\ \xi^2\operatorname{tg}\theta,\ \xi\theta\operatorname{tg}\theta; \\ \frac{\xi^2}{\cos^2\theta},\ \frac{\xi^3}{\cos^2\theta},\ \frac{\xi\theta}{\cos^2\theta},\end{gathered} \tag{48}$$

---

[1] De clasa C^2 pentru funcțiile armonice sau de clase C^4 pentru funcțiile biarmonice.

care ne conduc la unele soluții elementare pentru triunghiul elastic. De exemplu, funcția biarmonică

$$\widetilde{F} = C\xi^2 \tag{49}$$

ne dă starea de tensiune

$$\sigma_\xi = 0, \qquad \sigma_\theta = 2\,C\cos^2\theta, \tag{50}$$

$$\tau_{\xi\theta} = 0, \qquad \tau_{\theta\xi} = C\sin 2\theta, \tag{50'}$$

corespunzătoare unui triunghi elastic solicitat ca în figura 6.

Pentru un caz de încărcare oarecare trebuie folosită o funcție biarmonică sub forma unor dezvoltări în serie, construită cu ajutorul funcțiilor armonice (47). În general, rezolvarea problemei se reduce la soluționarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute.

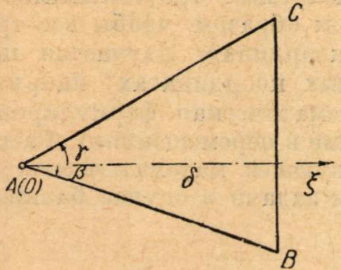


Fig. 5

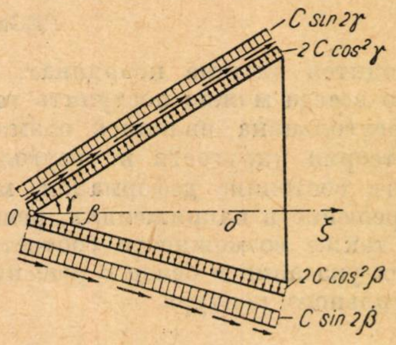


Fig. 6

În cazul unui triunghi isoscel ($\overline{AB} = \overline{AC}$) se pot face anumite simplificări de calcul (fig. 7*a*). Observăm astfel că $\beta = -\gamma$, deci axa $O\xi$ este o axă de simetrie geometrică. Este convenabil, în acest caz, să facem o

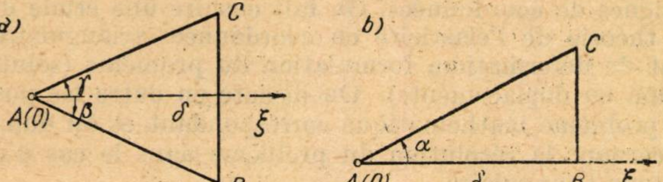


Fig. 7

descompunere a încărcării într-una simetrică și una antisimetrică în raport cu axa $O\xi$; dacă cercetăm și paritatea reprezentării (33), (33') în raport cu θ, sîntem conduși la a alege o funcție de tensiune $\widetilde{F}$ pară în raport cu θ în cazul simetriei și impară în raport cu această variabilă în cazul antisimetric.

Dacă triunghiul este dreptunghic, vom alege axele ca în figura 7*b*, astfel încît $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$. Dacă pe latura AB acționează numai sarcini normale, alegem funcția $\widetilde{F}$ pară în raport cu θ iar dacă pe această latură acționează numai sarcini tangențiale, alegem funcția $\widetilde{F}$ impară în raport cu variabila menționată, rămînînd astfel de îndeplinit o singură condiție de-a lungul laturii respective.

Primită la redacție la 29 martie 1962

СООБРАЖЕНИЯ В СВЯЗИ С ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ТРЕУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

РЕЗЮМЕ

Вводится система координат, именуемых треугольными, ввиду того что всегда можно поступить таким образом, чтобы все три стороны треугольника являлись осями координат. Изучается плоская задача теории упругости в треугольных координатах: напряженное состояние, состояние деформации, математическая формулировка вопроса (решение в напряжениях, решение в перемещениях). Рассматриваются также возможности соответствующей математической задачи и даются указания в связи с решением задачи в случае балки-стенки прямоугольного контура.

CONSIDÉRATIONS SUR LE PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES TRIANGULAIRES

RÉSUMÉ

On introduit un système de coordonnées, nommées triangulaires, parce qu'on peut toujours s'arranger ainsi que les trois côtés d'un triangle soient des lignes de coordonnées. On fait ensuite une étude du problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées triangulaires : état de tension, état de déformation, formulation du problème (solution en tensions, solution en déplacements). On discute en outre les possibilités de résoudre le problème mathématique correspondant et on donne des indications concernant la résolution du problème dans le cas d'une poutre-paroi à contour triangulaire.

BIBLIOGRAFIE

1. G.-B. Airy, *On the Strains in the Interior of Beams*. British Assoc. Adv. Sci. Rept., 1862.
2. — Idem, Phil.-Trans., **153**, 49 (1863).
3. E. Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Ann. di Matem. pura ed appl., seria III, **11**, 1 (1898).

4. T. BOGGIO, *Sull'integrazione di alcuni equazioni lineari alle derivati parziali*. Ann. di matem. pura ed appl., seria III, **VIII**, 181 (1903).

5. Л. С. ЛЕЙБЕНЗОН, *Курс теории упругости*, изд. 2-е, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1947.

6. K. MARGUERRE, *Ebenes und achsensymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie*, Z.A.M.M., **13**, *6*, 437 (1933).

7. Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, изд. 4-е. Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1954.

8. P. P. TEODORESCU, *O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare*. Comunicările Academiei R.P.R., **VI**, *2*, 285 (1956).

9. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., secţia de şt. mat. şi fiz., **IX**, *2*, 481 (1957).

10. — *Asupra problemei plane a elasticităţii în coordonate oblice*. St. cerc. mec. apl., **IX**, *2*, 391 (1958).

11. — *Asupra calculului grinzilor pereţi cu contur paralelogram*. An. Univ.,, C. I. Parhon", seria şt. nat., *20*, 9 (1958).

12. — *Funcţii de tensiune în problema plană a teoriei elasticităţii*. Acad. R.P.R., Filiala Iaşi, St. cerc. şt. Matematică, **XI**, *2*, 363 (1960).

13. — *Probleme plane în teoria elasticităţii*. I. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1961.

CALCULUL CUPTOARELOR ROTATIVE DE CLINCHER CU INELE DE RIGIDIZARE

DE

V. VISARION și D. DRĂGHICESCU

1. INTRODUCERE

În cadrul unei lucrări anterioare [1], a fost prezentată o metodă de calcul a cuptoarelor de clincher fără inele de rigidizare, în ipoteza că învelișul metalic lucrează ca o placă curbă, subțire, elastică.

Considerarea acestei ipoteze a permis deducerea deformării secțiunilor cuptorului în zonele de rezemare. Prezența unor deformări mari ale secțiunii cuptorului duce în general la solicitarea căptușelii de cărămidă refractară, solicitare care dacă depășește anumite limite, conduce la deteriorarea căptușelii, relativ rapidă și deci la reparații dese ale cuptorului.

Repararea căptușelii refractare, necesită oprirea pe anumite perioade a cuptorului și răcirea lui, fapt ce conduce pe lîngă risipa de materiale și la cheltuieli importante de energie precum și la mari pierderi de producție.

În lucrarea menționată a rezultat că mărirea rigidității învelișului de oțel numai în zona reazemelor, poate micșora foarte mult deformarea secțiunilor și deci mări viața căptușelei refractare.

În lucrarea de față va fi expusă o metodă de calcul analogă celei din lucrarea [1] în cazul prezenței inelelor de rigidizare. Se va arăta pe această cale că este posibilă micșorarea sensibilă a deformării secțiunilor, pe calea măririi rigidității transversale prin utilizarea inelelor de rigidizare. Acest fapt permite ca pe lîngă mărirea esențială a rigidității să se poată realiza și o economie de metal.

Rezultatele vor fi organizate sistematic sub formă de tabular de calcul astfel încît ele să poată fi utilizate cu ușurință în proiectare. Pentru același scop este prezentat și un exemplu de calcul.

Deducerea rezultatelor va fi obținută pe calea utilizării cvasiinvarianților analogiei statico-geometrice [2] și al modelului plăcii curbe *amembrane* [3].

2. PLACA CURBĂ SUBȚIRE ECHIVALENTĂ

Notațiile vor fi cele utilizate în lucrările [1], [2] și [3] menționate, ipotezele rămînînd cele din [1].

Inelele de rigidizare se presupun a fi de felul celor prezentate în figura 1 și prezente numai în zonele vecine cu reazemele.

În felul acesta rezultă o structură ortotropă. Pentru a rezulta un calcul mai simplu se adopta ca și în lucrarea [4] o ipoteză simplificatoare suplimentară privind comportarea structurii considerate.

Fie în secțiunile $\beta = \beta_0$, I_β și A_β momentul de inerție și suprafața, medii pe unitate de lungime și analog I_α și A_α pentru secțiuni $\alpha = \alpha_0$, iar E modulul de elasticitate.

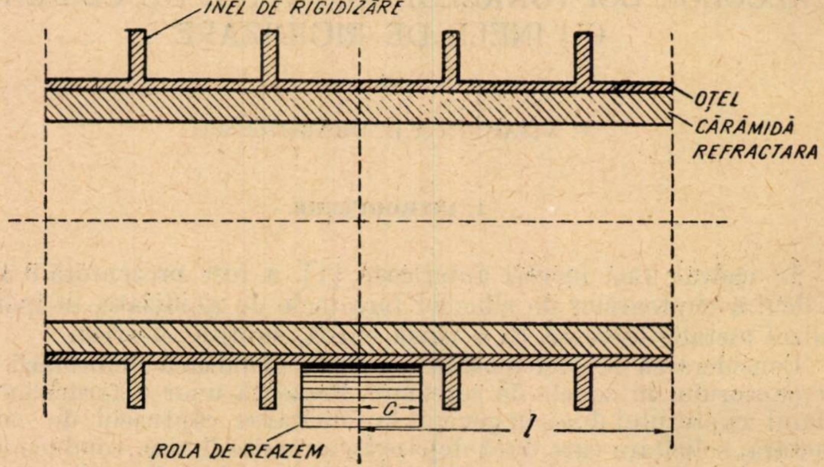


Fig. 1

Prima aproximație va consta din substituirea ortotropiei de structură omogenă rezultată, ortotropiei neomogene reale a mantalei de oțel.

Vom încerca ca și în lucrarea [4] echivalarea acestei ortotropii de structură neomogene cu o ortotropie omogenă de material. Cu alte cuvinte vor fi considerate ca echivalente două plăci curbe subțiri ortotrope de material respectiv de structură, dacă au aceleași rigidități la încovoiere și la efort axial pe ambele direcții.

Notînd cu E_α, E_β, I, A, μ caracteristicile plăcii echivalente, rezultă

$$\begin{aligned} E\,I_\alpha &= E_\alpha\,I,\\ E\,I_\beta &= E_\beta\,I,\\ E\,A_\alpha &= E_\alpha\,A,\\ E\,A_\beta &= E_\beta\,A. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sistemul este contradictoriu întrucît cele patru ecuații depind de trei parametrii E_α, E_β, h_e. Observînd însă că în general, forța axială N_α

la plăcile cilindrice este mică, vom omite cea de-a treia relație (2.1). Întrucît notînd cu $2h_e$ grosimea echivalentă a plăcii cu ortotropie de material

$$A = 2\,h_e \cdot 1 \qquad I = \frac{2h_e^3 \cdot 1}{3} \tag{2.2}$$

rezultă că

$$h_e = \sqrt{\frac{3I}{A}} = \sqrt{\frac{3I_\beta}{A_\beta}} = h, \tag{2.3}$$

unde h este semigrosimea plăcii în porțiunile fără inele de rigidizare.

Din (2.1) rezultă

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{3}{2\,h^3} I_\alpha E, \\ E_\beta &= E, \end{aligned} \tag{2.4}$$

ultima relație fiind evidentă.

Constanta μ se determină prin grupul de relații

$$\begin{aligned} \mu_\alpha \mu_\beta &= \mu^2, \\ \mu_\alpha E_\beta &= \mu_\beta E_\alpha, \end{aligned} \tag{2.5}$$

rezultînd

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \mu \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} = \mu \sqrt{\frac{3\,I_\alpha}{2\,h^3}}, \\ \mu_\beta &= \mu \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} = \mu \sqrt{\frac{2\,h^3}{3\,I_\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

3. ECUAȚII DE BAZĂ

Sistemul de ecuații de *echilibru* cvasiinvariant ce rezultă în cazul plăcii cilindrice este următorul

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \widetilde{N}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{N}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \frac{\widetilde{Q}_\alpha}{R} + X = 0, \\ &\frac{\partial \widetilde{N}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{N}_\beta}{\partial \beta} + Y = 0, \\ &\frac{\widetilde{N}_\alpha}{R} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{Q}_\beta}{\partial \beta} + Z = 0, \\ &\frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{M}_\beta}{\partial \beta} + \widetilde{Q}_\beta = 0, \\ &\frac{\partial \widetilde{M}_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \gamma \widetilde{Q}_\alpha = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

notaţiile fiind cele din lucrarea [1]. Acest sistem condensează ecuaţiile de echilibru şi cele de continuitatea deformaţiei.

Ecuaţiile complementare au forma

$$\widetilde{M}_\alpha = i\frac{h}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}}\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}(\widetilde{N}_\beta - \mu_\beta\overline{\widetilde{N}}_\alpha),$$

$$\widetilde{M}_\beta = i\frac{h}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}}\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}(\widetilde{N}_\alpha - \mu_\alpha\overline{\widetilde{N}}_\beta), \tag{3.2}$$

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta} = i\frac{1}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}}\frac{1}{2}(\rho_1\widetilde{N}_{\alpha\beta} + \rho_2\overline{\widetilde{N}}_{\alpha\beta}),$$

unde

$$\rho_1 = \frac{1}{k}(1+\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}) + k(1-\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}),$$

$$\rho_2 = \frac{1}{k}(1+\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}) - k(1-\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}). \tag{3.3$^{1)}$}$$

Ecuaţiile (3.2) condensează cele şase relaţii ale lui Hooke.

Relaţiile dintre deformaţii şi deplasări au tot aspectul din cazul izotrop aşa cum au fost utilizate în [1].

În cele ce urmează se va extinde şi pentru plăci ortotrope modelul plăcii amembrane. Pentru aceasta se observă că dacă se notează

$$h^* = \frac{ih}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}},$$

$$\mu_\alpha^* = -\overline{\mu_\alpha},\quad \mu_\beta^* = -\overline{\mu_\beta}, \tag{3.4}$$

$$\widetilde{N}_\alpha = -\frac{2\sqrt{E_\alpha E_\beta h^{*2}}}{3(1-\mu_\alpha^*\mu_\beta^*)}\chi_2^* \tag{3.5}$$

$$\widetilde{N}_\beta = -\frac{2\sqrt{E_\alpha E_\beta h^{*2}}}{3(1-\mu_\alpha^*\mu_\beta)}\chi_1^*,$$

$$\widetilde{N}_{\alpha\beta} = \frac{2\sqrt{E_\alpha E_\beta h^{*2}}}{3(1-\mu_\alpha^*\mu_\beta^*)}\tau^*, \tag{3.6}$$

$$\rho_2^* = +\rho_2,$$

$$k^* = \frac{\rho_1+\rho_2^*}{2(1-\sqrt{\mu_\alpha^*\mu_\beta^*})}, \tag{3.7}$$

---

1) $\overline{\mu_\alpha}$ înseamnă că această cantitate conjugă factorii pe care-i are la dreapta.

rezultă în locul expresiilor (3.2)

$$
\begin{aligned}
\widetilde{M}_\alpha &= -\frac{2\,E_\alpha\,h^{*3}}{3\,(1-\mu^*_\alpha\,\mu^*_\beta)}(\chi^*_1+\mu^*_\beta\chi^*_2)\\
\widetilde{M}_\beta &= -\frac{2\,E_\beta\,h^{*3}}{3\,(1-\mu^*_\alpha\,\mu^*_\beta)}(\chi^*_2+\mu^*_\alpha\chi^*_1)\\
\widetilde{M}_{\alpha\beta} &= \frac{2\sqrt{E_\alpha\,E_\beta\,h^{*3}}}{3\sqrt{(1-\sqrt{\mu^*_\alpha\,\mu^*_\beta})}}\,k^*\,\tau^*.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Aceste relații vor juca rolul *legii lui Hooke pentru placa curbă amembrană*. În plus, vom introduce notația

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Q}_\alpha &= \frac{2\sqrt{E_\alpha\,E_\beta\,h^{*2}}}{3\,(1-\mu^*_\alpha\,\mu^*_\beta)}\,\zeta^*_2,\\
\widetilde{Q}_\beta &= -\frac{2\sqrt{E_\alpha\,E_\beta\,h^{*2}}}{3\,(1-\mu^*_\alpha\,\mu^*_\beta)}\,\zeta^*_1.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Prin înlocuirea relațiilor (3.8) și (3.9) în primele trei ecuații (3.1) rezultă

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial\chi^*_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tau^*}{\partial\beta}-\frac{\zeta^*_2}{R}+\frac{3\,(1-\mu^*_\alpha\,\mu^*_\beta)}{2\sqrt{E_\alpha\,E_\beta\,h^{*2}}}\,X=0,\\
&\frac{\partial\tau^*}{\partial\alpha}-\frac{\partial\chi^*_1}{\partial\beta}+\frac{3\,(1-\mu^*_\alpha\,\mu^*_\beta)}{2\sqrt{E_\alpha\,E_\beta\,h^{*2}}}\,Y=0,\\
&-\frac{\chi^*_2}{R}+\frac{\partial\zeta^*_2}{\partial\alpha}-\frac{\partial\zeta^*_1}{\partial\beta}+\frac{3\,(1-\mu^*_\alpha\,\mu^*_\beta)}{2\sqrt{E_\alpha\,E_\beta\,h^{*2}}}\,Z=0,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

relații ce vor juca rolul de ecuații de continuitate a deformației pentru placa curbă amembrană, întrucît forma lor este identică cu cea a ecuațiilor de continuitate între deformații numai de încovoiere.

Ca ecuații de echilibru rămîn

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-\frac{\partial\widetilde{M}_\beta}{\partial\beta}+\widetilde{Q}_\beta=0,\\
&\frac{\partial\widetilde{M}_\alpha}{\partial\alpha}-\frac{\partial\widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-\widetilde{Q}_\alpha=0.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

În felul acesta, placa curbă *amembrană* poate fi definită ca placa cu semigrosime h_x dată de (3.4) cu constantele elastice exprimate prin (3.5), (3.7) acționată numai de M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$, Q_α, Q_β satisfăcînd ecuațiile de echilibru (3.11). Acestora le corespund *deformațiile* χ^*_1, χ^*_2, τ^*, τ^*_1, τ^*_2 de care sînt legate prin legea lui Hooke (3.6), deformații care satisfac ecuațiile de ,,continuitatea deformației'' (3.10).

Se mai observă că definirea lui μ^*_α, μ^*_β, ρ^*_2 prin (3.5) și (3.7) introduce o algebră specială ale cărei proprietăți vor fi date în paragraful ce urmează.

4. ALGEBRA PLĂCII AMEMBRANE

Prin introducerea unor cantităţi de forma

$$a^{*} = a^{-} \qquad (4.1)$$

unde a este complex, printre numerele complexe se obţin în definitiv elemente de tipul

$$\alpha = a_1 + i\,a_2 + (b_1 + i\,b_2)\,k\,{}^{1)}. \qquad (4.2)$$

Cu uşurinţă se vede că avem de-a face cu o algebră definită pe corpul numerelor reale R, cu o bază de patru elemente

$$l,\ i,\ k,\ ik$$

$(\mathcal{E})$ Egalitatea este definită astfel

$$a + bk = c + dk \quad \text{dacă} \quad a = c, \quad b = d \qquad (4.3)$$

fiind transitivă (a, b, c, d fiind complexe)

$(\mathcal{A})$ Adunarea este definită astfel

$$(a + bk) + (c + dk) = (a + c) + (b + d)\,k \qquad (4.4)$$

şi satisface postulatele egalităţii la adunare, al asociativităţii, comutativităţii şi al elementului neutru la adunare element care este

$$\theta_0 = 0 + 0\,k \qquad (4.5)$$

$(\mathcal{M})$ Înmulţirea este definită în modul următor:

$$(a + bk)\,(c + dk) = ac + bd + (bc + ad)\,k \qquad (4.6)$$

cu alte cuvinte tabla de multiplicare a acestei algebre este

	1	i	k	ik
1	1	i	k	ik
i	i	-1	ik	$-k$
k	k	$-ik$	1	$-i$
ik	ik	k	i	1

Ea satisface postulatele egalităţii la înmulţire, este asociativă, distributivă faţă de adunare şi admite drept element neutru

$$c = 1 + 0k. \qquad (4.7)$$

---

1) k este operator, care aplicat unui număr complex îl conjugă. Numerele α sînt operatorii care se aplică necunoscutelor complexe ale problemei.

Această înmulţire nu este comutativă şi mai mult admite divizori ai lui zero.

Se observă că sînt două familii de divizori ai lui zero conjugaţi între ei, respectiv

$$\rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_1 e^{i\theta_2} k \quad \text{şi} \quad \rho_2 l^{-i\theta_1} - \rho_2 e^{i\theta_2} k \tag{4.8}$$

unde deci modulii primului termen şi al coeficientului k sînt egali.

În adevăr,

$$(\rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_1 e^{i\theta_2} k) \quad (\rho_2 e^{-i\theta_1} - \rho_2 e^{i\theta_2} k) =$$

$$= \rho_1 \rho_2 e^{i\theta_1 - i\theta_1} - \rho_1 \rho_2 e^{i\theta_2 - i\theta_2} + (\rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_2 + \theta_1)} - \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)})\, k = 0.$$

Este uşor de văzut că nu există întotdeauna invers la înmulţire. Cu alte cuvinte elementele considerate reprezintă un inel necomutativ.

Este interesant de observat că dacă tabloul de multiplicări este modificat astfel încît în pătratul îngroşat semnele să fie schimbate, tabla de multiplicare coincide cu aceea a cvaternionilor care deci se pot scrie şi ca perechi de numere complexe de tipul

$$\alpha = a + ib + (c + id)\, k_1,$$

cu

$$k_1^2 = -1,\ k_1 i k_1 = i,\ i k_1 \cdot i k_1 = -1,\ i \cdot k_1 k_1 = -i. \tag{4.9}$$

Una din operaţiile ce vor fi utile în calcul este extragerea rădăcinei pătrate.

Fie două numere complexe

$$r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{şi} \quad r_2 e^{j\theta_2}.$$

Se deduce că rădăcina unui element

$$r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} k, \tag{4.10}$$

este elementul

$$\pm [\rho_1 e^{i\varphi_1} + \rho_2 e^{i\varphi_2} k], \tag{4.11}$$

unde

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \theta_2, \\ \rho_2 &= \frac{r_2}{\sqrt{2 (r_1 \cos \theta_1 \pm \sqrt{r_1^2 - r_2^2}}}, \\ \rho_1 &= \sqrt{\frac{2 r_1^2 - r_1^2 \pm 2 r_1 \cos \theta_1 \sqrt{r_1^2 - r_2^2}}{2 (r_1 \cos \theta_1 \pm \sqrt{r_1^2 - r_2^2}}}, \\ \varphi_1 &= \arccos \frac{r_1 \cos \theta_1 \pm \sqrt{r_1^2 - r_2^2}}{2 r_1^2 - r_2^2 \pm 2 r_1 \cos \theta_1 \sqrt{r_1^2 = r_2^2}} = \arccos \frac{r_2}{2 \rho_1 \rho_2}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Se observă faptul remarcabil că nu orice număr posedă o rădăcină pătrată, ci numai cele pentru care avem satisfăcută inegalitatea

$$r_1 > r_2, \tag{4.13}$$

$$r_1 \cos \partial_1 > \sqrt{r_1^2 - r_2^2}\,. \tag{4.14}$$

5. REDUCEREA SISTEMULUI DE ECUAȚII

Din relațiile (3.8) și (3.9) se scot deformațiile și se introduc în ecuațiile (3.10) obținîndu-se

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\widetilde{M}_\beta + \mu_\beta^* \widetilde{M}_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{1}{k_1^*}\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha^* \mu_\beta^*}\right)\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,\frac{\partial\widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \\
&\qquad + (1 - \mu_\alpha^* \mu_\beta^*)\,h^* \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,X = 0, \\
&\frac{1}{k_1^*}\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha^* \mu_\beta^*}\right)\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,\frac{\partial\widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{\partial(\widetilde{M}_\alpha + \mu_\alpha^* \widetilde{M}_\beta)}{\partial\beta} + \\
&+ (1 - \mu_\alpha^* \mu_\beta^*)\,h^* \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,Y = 0, \\
&\frac{\widetilde{M}_\beta + \mu_\beta^* \widetilde{M}_\alpha}{R} + (1 - \mu_\alpha^* \mu_\beta^*)\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,h^*\left(\frac{\partial\widetilde{Q}_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\widetilde{Q}_\beta}{\partial\beta}\right) + \\
&\qquad + (1 - \mu_\alpha^* \mu_\beta^*)\,h^* \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,Z = 0,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

unde

$$k_1^* = \frac{\rho_1 - \rho_2^*}{2\left(1 - \sqrt{\mu_\alpha^* \mu_\beta^*}\right)}\,.$$

Sistemul alcătuit din (3.11) și (5.1) de cinci ecuații cu cinci necunoscute este sistemul ce caracterizează problema considerată. Întrucît în cazul considerat $X = Y = 0$ în cele ce urmează se va menține doar componenta Z.

Prin eliminarea lui $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$ între primele două ecuații (5.1) rezultă o ecuație avînd drept necunoscute pe $\widetilde{M}_\alpha$ și $\widetilde{M}_\beta$

$$E_\alpha \frac{\partial^2(\widetilde{M}_\beta + \mu_\beta^* \widetilde{M}_\alpha)}{\partial\alpha^2} - E_\beta \frac{\partial(\widetilde{M}_\alpha + \mu_\alpha^* \widetilde{M}_\beta)}{\partial\beta} = 0. \tag{5.2}$$

Pe de altă parte, înlocuind în primele două ecuaţii (5.1) pe $\dfrac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}$ şi pe $\dfrac{\partial \widetilde{M}_{\alpha\beta}}{\partial \beta}$ rezultaţi din (3.11), rezultă Q_α şi $\widetilde{Q}_\beta$ în funcţie de $\widetilde{M}_\alpha$ şi $\widetilde{M}_\beta$.

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{k_1^*}{1+\sqrt{\mu_\alpha^*\mu_\beta^*}}\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}(\widetilde{M}_\beta + \mu_\alpha^*\widetilde{M}_\alpha) + \widetilde{M}_\alpha\right] \\ \widetilde{Q}_\beta &= \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{k_1^*}{1+\sqrt{\mu_\alpha^*\mu_\beta^*}}\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}(\widetilde{M}_\alpha + \mu_\alpha^*\widetilde{M}_\beta) + \widetilde{M}_\beta\right]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Introducîndu-se în ultima ecuaţie (5.1), rezultă cea de-a doua ecuaţie în $\widetilde{M}_\alpha$ şi $\widetilde{M}_\beta$

$$\begin{aligned} &\frac{\widetilde{M}_\beta + \mu^*\widetilde{M}_\alpha}{R} + (1+\mu_\alpha^*\mu_\beta^*)\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,h^*\left\{\frac{\partial^2\widetilde{M}_\alpha}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\widetilde{M}_\beta}{\partial\beta^2} + \right. \\ &\left. + \frac{k_1^*}{1+\sqrt{\mu_\alpha^*\mu_\beta}}\cdot\frac{1}{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}\left[E_\alpha\frac{\partial^2(\widetilde{M}_\beta + \mu_\beta^*\widetilde{M}_\alpha)}{\partial\alpha^2} + E_\beta\frac{\partial^2(\widetilde{M}_\alpha + \mu_\alpha^*\widetilde{M}^\beta)}{\partial\beta^2}\right]\right\} + \\ &+ (1-\mu_\alpha^*\mu_\beta^*)\,h^*\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,Z = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Sistemul a fost deci redus la două ecuaţii (5.2) şi (5.4) în necunoscutele $\widetilde{M}_\alpha$ şi $\widetilde{M}_\beta$. Rezultă că (5.2) este satisfăcută identic dacă se ia

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_\beta + \mu_\beta^*\widetilde{M}_\alpha &= \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}(1-\mu_2^*\mu_\beta^*)\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}, \\ \widetilde{M}_\alpha + \mu_\beta^*\widetilde{M}_\beta &= \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}(1-\mu_\alpha^*\mu_\beta^*)\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

De aici se deduce

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_\alpha &= \left(\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} - \mu_\beta^*\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}\right)\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}, \\ \widetilde{M}_\beta &= \left(\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} - \mu_\alpha^*\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}\right)\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Introducînd (5.5) şi (5.6) în (5.4) rezultă ecuaţia

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R}\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} + h^*\left[\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4} + 2\,\lambda^*\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4}\right] + h^*Z = 0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

unde

$$\lambda^* = \left(1 - \sqrt{\mu_\alpha^* \mu_\beta^*}\right) k_1^* - \frac{1}{2}\left(\mu_\beta^* \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} + \mu_\alpha^* \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\right), \tag{5.8}$$

se observă că de altfel putem nota [1])

$$\mu_\alpha^* \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} = \mu_\beta^* \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} = \mu^* = -\,\mu k. \tag{5.9}$$

Căci conform cu (2.6) şi (3.5)

$$\mu_\alpha^* \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} = \mu_\beta^* \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} = \mu^*. \tag{5.10}$$

Cu aceasta

$$\lambda^* = \left(1 - \sqrt{\mu_\alpha^* \mu_\beta^*}\right) k_1^* - \mu^*.$$

6. REZOLVAREA ECUAŢIEI (5.7)

Să considerăm ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 c'}{\partial \beta^2} + h^* \left[\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,\frac{\partial^4 c}{\partial \alpha^4} + 2\,\lambda\,\frac{\partial^4 c}{\partial \alpha\, \partial \beta^2} + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,\frac{\partial^4 c'}{\partial \beta^4}\right] = 0. \tag{6.1}$$

Conform observaţiilor din lucrarea [1] vom considera doar cea de-a doua armonică : unde pentru simplitate vom pune $x_n = \dfrac{n\beta}{R}$ adică

$$c = F_0\,(x) \cos \frac{2\alpha}{R}\ ^{2)} \tag{6.2}$$

unde

$$x = \frac{2\beta}{R}. \tag{6.3}$$

Din (6.1) se obţine

$$\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,F^{\mathrm{IV}} + \left(\frac{R}{4h^*} - 2\,\lambda^*\right) F'' + \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,F = 0. \tag{6.4}$$

Ecuaţia caracteristică asociată este

$$\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,\rho^4 + \left(\frac{R}{4\,h^*} - 2\,\lambda^*\right) \rho^2 + \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} = 0, \tag{6.5}$$

---

[1]) Unde μ este coeficientul lui Poisson al materialului.

[2]) Am considerat soluţia ecuaţiei (6.1) sub forma $C\,(\alpha, \beta) = \sum_0^\infty F_{0n}\,(x_n) \cos \dfrac{n\alpha}{R}$ unde $x_n = \dfrac{n\beta}{R}$.

şi prin notaţiile următoare

$$\rho^2 = r, \; p^* = \frac{R}{4h^*} - 2\,\lambda^*, \tag{6.6}$$

devine

$$\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\, r^2 + p^* r + \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} = 0. \tag{6.7}$$

Vom dezvolta soluţia ecuaţiei (6.7) în serie de forma

$$r = a^n (\rho_0 + a\rho_1 + a\rho_2 + \ldots), \tag{6.8}$$

unde

$$a = \frac{|h^*|}{R} = \frac{h}{R\sqrt{3(1 - \mu_\alpha^* \mu_\beta^*}}\,. \tag{6.9}$$

Introducînd în (6.7) şi analizînd posibilitatea unei asemenea dezvoltări se determină $n = -1$ şi $n = 1$ cărora le corespund soluţiile

$$r_1 = a^{-1}\left(\frac{i}{4}\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} + 2\,\lambda^* \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\, a + \ldots\right), \tag{6.10}$$

$$r_2 = a \left(-4i\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} - 32\, i\, \lambda i \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\, a + \ldots\right)\cdot \tag{6.11}$$

Evident r_1 şi r_2 sînt numere complexe. Fie rădăcinile lor

$$\rho_{1,2} = \pm\sqrt{r_1} = \eta_1, \quad \rho_{3,4} = \pm\sqrt{r_2} = \pm\,\eta_2.$$

Soluţia ecuaţiei (6.1) are forma

$$F_0 = A \operatorname{ch} \eta_1 x + B \operatorname{ch} \eta_2 x + C \operatorname{sh} \eta_1 x + D \operatorname{sh} \eta_2 x. \tag{6.12}$$

Pentru aflarea soluţiei particulare vom considera sarcina dată de reacţiunea inelului pe tubul de oţel, ca în lucrarea [1]

$$Z = \begin{cases} a_0 + a_1 \cos\dfrac{\alpha}{R} + a_2 \cos\dfrac{2\,\alpha}{R} + \ldots & \text{pentru } |x| < x_0, \\ 0 & \text{,, } \quad |x| > x_0. \end{cases}$$

Conform cu [1] vom studia cazul celei de-a doua armonici, întrucît soluţia corespunzătoare primei armonici rezultă din calculul de grindă continuă, iar soluţia corespunzătoare părţii constante dă deformaţii ale secţiunei neglijabile. În aceste condiţii soluţia particulară va fi dată de ecuaţia

$$F_p'' + 4\, ia\left\{\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\, F - 2\,\lambda^* F'' + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\right\} + i\,\frac{R^4 a a_2}{4} = 0. \tag{6.13}$$

Utilizînd metoda folosită în lucrarea [1], sau rezolvînd ecuația pe porțiuni și determinînd constantele din condițiile de continuitate și simetrice ale funcției și primelor trei derivate ale ei, se obține următoarea soluție a ecuației neomogene :

pentru $|x| < x_0$,

$$F = -\frac{R^4 a_2}{16}\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} + A \operatorname{ch} \eta_1 x + B \operatorname{ch} \eta_2 x;$$

pentru $x > x_0$,

$$F = \frac{R^4 a_2}{16}\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\frac{1}{\eta_1^2 - \eta_2^2}[\eta_2^2 \operatorname{ch} \eta_1 (x - x_0) - \eta_1^2 \operatorname{ch} \eta_2 (x - x_0)] + \\ + A \operatorname{ch} \eta_1 x + B \operatorname{ch} \eta_2 x;$$

pentru $x < -x_0$, (6 .14

$$F = \frac{R^4 a_2}{16}\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\frac{1}{\eta_1^2 - \eta_2^2}[\eta_2^2 \operatorname{ch} \eta_1 (x + x_0) - \eta_1^2 \operatorname{ch} \eta_2 (x + x_0)] + \\ + A \operatorname{ch} \eta_1 x + B \operatorname{ch} \eta_2 x.$$

Observînd în [1] că în cea mai mare parte a cazurilor practice relațiile (6.14), se neglijează termenii simplificați cu η_2^2. Luînd condițiile de limită ca în lucrarea [1], rezultă următoarea soluție :

pentru $|x| < x_0$,

$$F = \frac{R^4 a_2}{16}\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\left(1 - \frac{\operatorname{sh} \eta_2 (x - x_2)}{\operatorname{sh} \eta_2 x_1} \operatorname{ch} \eta_2 x\right);$$

pentru $x > x_0$,

$$F = -\frac{R^4 a_2}{16}\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\frac{\operatorname{sh} \eta_2 x_0}{\operatorname{sh} \eta_2 x_1} \operatorname{ch} \eta_2 (x_1 - x); \tag{6.15}$$

pentru $x < -x_0$,

$$F = -\frac{R^4 a_2}{16}\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\frac{\operatorname{sh} \eta_2 x_0}{\operatorname{sh} \eta_2 x_1} \operatorname{ch} \eta_2 (x_1 + x).$$

În aceste condiții se observă că se pot conduce calculele după sistematizarea dată în lucrarea [1].

7. DEDUCEREA DEPLASĂRII

Se observă că în ipotezele adoptate funcțiunea c este legată de eforturile complexe cvasiinvariante $\widetilde{N}_\alpha$ și $\widetilde{N}_\beta$ prin relațiile

$$\widetilde{N}_\alpha = \frac{\partial^2\left(\frac{c}{h^*}\right)}{\partial \beta^2}, \qquad \widetilde{N}_\beta = \frac{\partial^2\left(\frac{c}{h^*}\right)}{\partial \alpha^2}, \tag{7.1}$$

obținute pe baza (3.2) și (5.6).

Iar din (7.1) rezultă că cea de-a treia funcție complexă de tensiune

$$\tilde{c} = c + i\zeta w, \quad \zeta = \frac{2\sqrt{E_\alpha E_\beta}\,h^2}{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}, \tag{7.2}$$

este legată de funcția c prin

$$\mathrm{c} = \frac{c}{h^*} = -i\,\frac{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}}{h}\,c\,. \tag{7.3}$$

[întrucît $\tilde{c}$ este corespondenta funcției lui Airy.]

De aici rezultă

$$w = \frac{1}{\zeta}\,\mathcal{I}m\,\tilde{c} = -\frac{3(1-\mu_\alpha^*\mu_\beta^*)}{2\sqrt{E_\alpha E_\beta}\,h^3}\,\mathcal{R}e\,c, \tag{7.4}$$

utilizînd formule găsite pentru c se obține:
pentru $|x| < x_0$,

$$w = \frac{3R^4(1-\mu_\alpha\mu_\beta)\,a_2}{32\,E_\alpha h^3}\,\mathcal{R}e\left[1 - \frac{\mathrm{sh}\,\eta_2(x_1-x_0)}{\mathrm{sh}\,\eta_2 x_1}\,\mathrm{ch}\,\eta_2 x\right]; \tag{7.5}$$

pentru $x > x_0$

$$w = \frac{3R^4(1-\mu_\alpha\mu_\beta)\,a_2}{32\,E_\alpha h^3}\,\mathcal{R}e\left[\frac{\mathrm{sh}\,\eta_2 x_0}{\mathrm{sh}\,\eta_2 x_1}\,\mathrm{ch}\,\eta_2(x_1-x)\right]. \tag{7.6}$$

8. EXEMPLU DE CALCUL

Vom considera o porțiune a unui cuptor, avînd următoarele date (fig. 2):

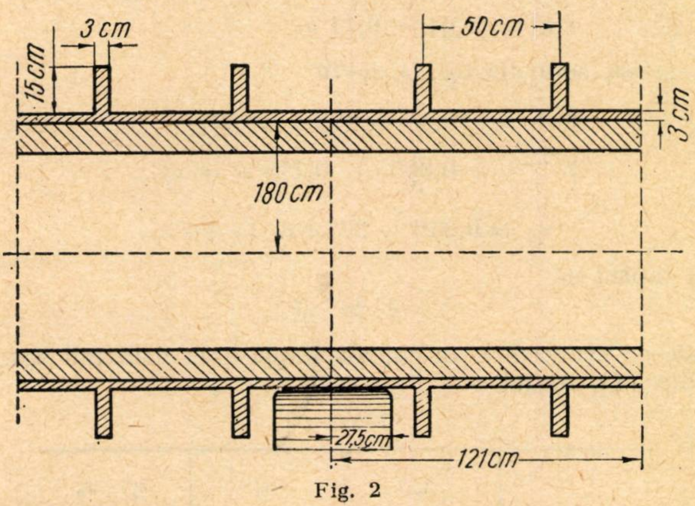


Fig. 2

$R = 180$ cm, $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm²,
$c = 27{,}5$ cm, $\mu = 0{,}33$.
$l = 121$ cm,

Tubul de oțel este realizat dintr-o placă continuă de 3 cm grosime prevăzută cu inele de rigidizare de 15 cm înălțime și 3 cm grosime așezate din 50 în 50 de centimetri. Rezultă :

$$I_\alpha = 75 \text{ cm}^4/\text{cm}, \qquad I_\beta = 2{,}25 \text{ cm}^4/\text{cm},$$

$$A_\alpha = 3{,}9 \text{ cm}^2, \qquad A_\beta = 3 \text{ cm}^2/\text{cm},$$

$$h = 1{,}5 \text{ cm},$$

$$E_\alpha = \frac{I_\alpha}{I_\beta} E = 7 \times 10^7 \text{ kg/cm}^2,$$

$$E_\beta = E = 2{,}1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\mu_\alpha = \mu \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} = 1{,}90, \qquad k = 0{,}9,$$

$$\mu_\beta = \mu \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} = 0{,}06,$$

$$\rho_1 = 2{,}08,$$

$$\rho_2 = 1{,}88,$$

$$k^* = 1{,}55 + 0{,}66\, k,$$

$$k_1^* = 1{,}55 - 0{,}66\, k,$$

$$a = \frac{h}{R\sqrt{3(1-\mu^2)}} = 0{,}51 \times 10^{-2},$$

$$\lambda^* = 1{,}04 - 0{,}11\, k.$$

Cu acestea, soluțiile (6.11) devin

$$\sqrt{1} = 10{,}35 + 273\, i = \eta_1^2,$$

$$\sqrt{2} = (\ 0{,}0055 - 0{,}118\, i) = \eta_2^2.$$

Rezultă

$$\eta_2 = 0{,}249 - 237\, i = \lambda_1 + i\lambda_2.$$

Se verifică faptul că

$$|\eta_1^2| \gg |\eta_2^2|.$$

În cele ce urmează vom calcula deplasarea utilizînd sistematizarea de calcul din [1]. Astfel

Tabela 1

	x_0	x_1	$x_1 - x_0$
$\lambda_1 x$	0,0763	0,335	0,259
$\lambda_2 x$	−0,0756	−0,332	−0,247

întrucît

$$x_0 = \frac{2c}{R} = 0{,}306, \quad x_1 = \frac{2l}{R} = 1{,}345$$

$$x_1 - x_0 = 1{,}039.$$

Tabela 2

x	x_0	x_1	$x_1 - x_0$
$\operatorname{sh} \lambda_1 x$	0,0764	0,3410	0,262
$\operatorname{ch} \lambda_1 x$	1,0030	1,0566	1,0340
$\sin \lambda_2 x$	−0,0755	−0,3256	−0,2420
$\cos \lambda_2 x$	0,9970	0,9455	0,9700
$C_0(x)$	−0,0757	0,344	−0,251
$Sc(x)$	+0,0761	+0,322	+0,254

întrucît

$$0{,}0756 \text{ rad} = 4°20',$$

$$0{,}332 \text{ rad} = 19°,$$

$$0{,}247 \text{ rad} = 14°,$$

x	x_0	$x_1 - x_0$
$a = Sc(x)\, Sc(x_1)$	$0{,}0761 \cdot 0{,}322 = 0{,}0245$	$0{,}254 \cdot 0{,}322 = 0{,}0818$
$b = Cs(x)\, Cs(x_1)$	$0{,}0757 \cdot 0{,}344 = 0{,}02755$	$0.251 \cdot 0{,}344 = 0{,}0864$
$C = Sc^2(x_1)$	$0{,}322^2 = 0{,}104$	$0{,}322^2 = 0{,}104$
$d = Cs^2(x_1)$	$0{,}344^2 = 0{,}118$	$0{,}344^2 = 0{,}118$
$e = cs(x)\, Sc(x_1)$	$0{,}0757 \cdot 0{,}322 = -0{,}0246$	$0{,}251 \cdot 0{,}322 = -0{,}0808$
$f = Sc(x)\, Cs(x_1)$	$0{,}0761 \cdot 0{,}344 = 0{,}0262$	$-0{,}254 \cdot 0{,}344 = -0{,}0875$
$s_r = \frac{a + b}{c + d}$	0,234	0,758
$s_j = \frac{e - f}{c + d}$	0,0072	0,0302

Conform formulelor (7.5) şi (7.6) şi notaţiilor din [1] – pentru $|x| < x_0$

$$w = \frac{3\ R^4 (1 - \mu_\alpha \mu_\beta)\, a_2}{32\ E_\alpha h^3} [1 - s_r\, Cc(x) - s_j\, Ss(x)] \cos \frac{2\alpha}{R},$$

pentru $x > x_0$,

$$w = \frac{3\ R^4 (1 - \mu_\alpha \mu_\beta)\, a_2}{32\ E_\alpha h^3} [s_r\, Cc(x - x_1) - s_j .$$

Rezultă a mai fi necesare următoarele valori

	0	x_0
$Cc(x)$	1	1
$Ss(x)$	0	$-0{,}0058$

Cu aceasta întrucît pentru $a_2 = 5 \ldots 4{,}5$ [1]

$$\frac{3\ R^4 (1 - \mu_\alpha \mu_\beta)\, a_2}{32\ E_\alpha h^3} = 1{,}81 \ldots 1{,}63 \text{ cm}$$

rezultă

$$w(\alpha, 0) = (1{,}39 \ldots 1{,}25) \cos \frac{2\alpha}{R} \text{ cm}.$$

Rezultă că deplasările normale sînt de 2,5 ori mai mici decît în cazul tratat în [1] fără inele de rigidizare, pentru aceleaşi dimensiuni şi încărcări.

Pe de altă parte, însă, se observă că în primul caz se consumă pentru metrul pătrat de placă îngroşată (în dreptul rezemării)

$$2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 0{,}055 \cdot 7{,}86 = 4{,}86 \text{ t/m}$$

iar în cazul rigidizării cu aripioare

$$2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 1 \cdot \left(0{,}03 + \frac{0{,}03 \cdot 0{,}15}{0{,}5}\right) \cdot 7{,}86 = 3{,}47 \text{ t/m}.$$

rezultînd astfel, concomitent şi o economie de oţel de cca 28% pentru zonele îngroşate.

Primită la redacţie la 30 aprilie 1962

РАСЧЕТ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦЕМЕНТНЫХ ПЕЧЕЙ С КОЛЬЦАМИ ЖЕСТКОСТИ

РЕЗЮМЕ

В работе (1) приведен расчет металлической структуры цементной вращающейся печи, рассматриваемой как изотропный цилиндр, подверженный нагрузкам реакции опор.

В настоящей работе, с целью увеличения жесткости металлической обечайки печи, предлагается ортотропная структура, отличающаяся от предыдущей наличием четырех колец жесткости, расположенных вблизи каждой опоры.

Ортотропность структуры преобразовывается в ортотропность материала, удовлетворяя условия сохранения жесткости в двух направлениях.

Приводится общий метод расчета цилиндрической ортотропной структуры в тех же условиях нагрузки, как и в работе (1).

В качестве примера рассматривается печь с сечением того же диаметра, как и в работе (1), но изготовленная из более тонкой листовой стали. При сравнении обоих печей, одной с кольцами жесткости, а другой без них, наблюдается, что первая из них при металлоемкости всего лишь в 60% обладает жесткостью, большей в 2,5 раза. Это определяет большую эффективность первой печи относительно второй как с точки зрения экономии металла, так и с точки зрения выгодности эксплуатации благодаря меньшим нагрузкам, которым подвергается огнеупорная футеровка печи.

CALCULATION OF ROTATIVE CLINKER KILNS WITH STIFFENING RINGS

ABSTRACT

In paper [1] a method has been presented for calculating the metal structure of a clinker kiln, considered as an isotropic cylinder subjected to loads due to reactions at the supports.

In view of increasing the stiffness of the kiln metal shell, the present paper suggests the use of an orthotropic structure which differs from the first one by the existence of four stiffening rings placed near each support.

The structure orthotropy is transformed into material orthotropy by imposing the conditions of maintaining the rigidities upon two directions.

A general method is given for calculating the orthotropic cylindrical structure under the same loading conditions as in paper [1].

As an application, a kiln with the same diameter of the cross-section, made of steel sheet thinner than that indicated in paper [1] is calculated. A comparison of two kilns of the same dimensions, out of which the first is provided with stiffening rings, shows that for a steel consumption of only 60%, this kiln has a stiffness 2.5 times greater. This fact determines a high efficiency of the first kiln with respect to the second one, both by the metal economy and by a more advantageous working due to the smaller loading to which the refractory layer is subjected.

BIBLIOGRAFIE

1. V. VISARION, D. DRĂGHICESCU, *Calculul cuptoarelor rotative de clincher.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *1* (1962).
2. В. ВИСАРИОН, СТЭНЕСКУ, *Исследование квазиинвариантов статикогеометрической аналогии для тонких упругих оболочек.* Академия Наук СССР. Прикладная математика и механика. **XXV**, Вып. I, 1961 г.
3. V. VISARION, G. STĂNESCU, *Reducerea formală a stării de tensiune globală a învelitorilor elastice subțiri la starea de momente pure cvasiinvariantă.* St. cerc. mec. apl., **XI**, *5* (1960).

STUDII

ASUPRA PRINCIPIULUI LUI HOOKE

DE

SILVIU GUIAŞU [1]

1. INTRODUCERE

La cursul de mecanică statistică, ţinut în toamna anului 1961, prof. Octav Onicescu, stabilind ecuaţiile de mişcare ale unui fluid, conform noii mecanici invariante a sistemelor ([1], [2], [3]), a semnalat posibilitatea deducerii principiului lui Hooke din principiul fundamental şi din postulatele care stau la baza noii mecanici. În acest articol ne propunem să stabilim în detaliu acest lucru.

Instrumentul noii mecanici este forma fundamentală Ω_δ a lui Poincaré-Cartan, care pentru un mediu continuu, avînd densitatea în repartiţia masei ρ ($dm = \rho\, dv$) are expresia

$$\Omega_\delta = \int_D [\vec{v}(\vec{\pi})\,\delta\vec{\pi} - h(\vec{\pi})\,\delta t]\,\rho(\vec{\pi})\,dv, \tag{1}$$

pentru orice domeniu D, oricît de mic, pe care îl putem alege oricît de regulat, h fiind energia relativă la unitatea de masă, $\vec{v}$ viteza, iar $\vec{\pi}$ vectorul de poziţie. Principiul fundamental al mişcării este următorul :

Operatorul diferenţial d, care corespunde mişcării, anulează derivata exterioară, în sensul lui Cartan a formei Ω_δ pentru orice variaţie arbitrară δ

$$d\Omega_\delta - \delta\Omega_d = 0. \tag{2}$$

Ecuaţiile mişcării pure se obţin deci printr-un principiu de invarianţă. Forma fundamentală Ω_δ, dată de expresia (1), are sens numai cînd asupra mediului continuu acţionează forţe conservative, care derivă dintr-un potenţial. Am demonstrat în altă parte ([5]) că pentru sistemele neconservative, pentru care Ω_δ nu are sens, au sens totuşi variaţiile $d\Omega_\delta$ şi $\delta\Omega_d$, în expresia cărora figurează în loc de variaţia energiei totale, variaţia energiei cinetice şi lucrul mecanic elementar, şi mişcarea este dată tot de către principiul (2).

---

[1]) Institutul de matematică al Academiei R.P.R.

În cele ce vor urma vom lucra cu sisteme neconservative.

În lucrarea de faţă, la punctul 2, vom enunţa principiul fundamental pentru sisteme neconservative, la punctul 3, reproducem întocmai metoda întrebuinţată de prof. Octav Onicescu în lucrările [1], [2], [3], pentru a stabili ecuaţiile de mişcare ale unui corp elastic, la punctul 4, vom stabili pe baza principiului fundamental ecuaţiile lui Cauchy, iar la punctul 5, vom deduce principiul lui Hooke.

2. PRINCIPIUL FUNDAMENTAL AL MIŞCĂRII

Fie un mediu elastic, avînd densitatea în repartiţia masei ρ :

$$dm = \rho\, dv,$$

şi fie $\vec{\mathcal{F}}$ forţa exterioară care acţionează asupra unităţii de masă. *Principiul fundamental al mişcării este dat pentru orice* δ, *de egalitatea*

$$d\Omega_\delta - \delta\Omega_d = 0, \tag{2}$$

unde

$$d\Omega_\delta = \int_D [d\vec{v}\cdot\delta\vec{\pi} - (\vec{v}\cdot d\vec{v} - \vec{\mathcal{F}}\, d\vec{\pi} - R\,dt)\,\delta t]\ \rho(\vec{\pi})\, dv, \tag{3}$$

pentru orice domeniu D oricît de mic, pe care îl putem alege oricît de regulat, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{\pi})$ fiind viteza, $dT = \vec{v}\, d\vec{v}$ variaţia energiei cinetice relativă la unitatea de masă, $\vec{\pi}(x^1, x^2, x^3)$ vectorul de poziţie, $\vec{\mathcal{F}}\cdot d\vec{\pi} + R dt$ lucrul mecanic elementar, unde R este o componentă temporală a forţei.

3. ECUAŢIILE LUI NAVIER

Să considerăm corpul nostru elastic. Un punct material situat la momentul t în punctul P, de vector de poziţie $\vec{\pi}$, va ajunge sub acţiunea forţelor deformatoare în punctul P' la momentul t' $(t' > t)$. P' va avea vectorul de poziţie : $\vec{\pi} + \vec{u}$. $\vec{u}$ este vectorul care ne dă deplasarea punctului P în intervalul de timp $t' - t$. Vom presupune că vectorul $\vec{u}$ este infinit mic, funcţie de $\vec{\pi}$ şi t şi derivabil de două ori în raport cu aceste variabile.

Viteza va fi : $\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}$.

Să scriem ecuaţiile mişcării pure, aplicînd principiul fundamental (2).

Vom avea, considerînd că asupra unității de masă a corpului elastic acționează forța exterioară $\vec{F}$:

$$\int_D [\vec{dv}\cdot\delta\vec{\pi} - (dT - \vec{F}\,d\vec{\pi} - R\,dt)\,\delta t - \delta\vec{v}\cdot d\vec{\pi} +$$

$$+ (\vec{v}\,\delta\vec{v} - \vec{F}\cdot\delta\vec{\pi} - R\,\delta t)\,dt]\,\rho\,(\vec{\pi})\,dv = 0, \tag{4}$$

pentru orice δ. Adică:

$$\text{(A)}\qquad \int_D\left[\left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F}\right)\delta\vec{\pi} - \left(\frac{dT}{dt} - \vec{F}\vec{v}\right)\delta t\right]\rho\,(\vec{\pi})\,dv = 0.$$

Relația (A) pentru orice δ, ne dă ecuațiile mișcării pure. Pentru a obține ecuațiile mișcării reale trebuie să ținem seamă de legăturile interioare ale mediului elastic. Aceste legături se dau sub forma de principii variaționale. Primul principiu se referă la variația volumului.

Primul principiu (relativ la variația volumului): Mișcarea reală realizează o stabilitate a expansiunii, expansiune reprezentată prin integrala

$$\Phi_D = \frac{1}{V_D}\int_D \operatorname{div}\vec{u}\cdot dv, \tag{5}$$

unde V_D este volumul domeniului D presupus foarte mic. Într-adevăr Φ_D este o expansiune pentru că $\theta = \operatorname{div}\vec{u}$ reprezintă (vezi [4]), dilatația specifică a volumului în punctul $\vec{\pi}$ și este un invariant. Scriind pe baza principiului enunțat că $\delta\Phi_D = 0$ obținem legătura:

$$\text{(B)}\qquad \int_D\left(\operatorname*{grad}_{\vec{\pi}}\,\theta\cdot\delta\vec{\pi} + \frac{\partial\theta}{\partial t}\,\partial t\right)dv = 0.$$

Al doilea principiu se referă la variația pe și prin suprafață a deformației și ne spune că

$$\int_S\left(\frac{d\vec{u}}{dn}\,\delta\vec{\pi} + W_n\,\delta t\right)ds = 0. \tag{6}$$

Domeniul D îl putem alege suficient de regulat ca suprafața sa S să admită derivata normală a deformației în orice punct de pe suprafață. W_n este o componentă energetică pe normala în $\vec{\pi}$, a unui vector $\vec{W}$. Aplicînd teorema lui Gauss-Ostrogradski integralei de suprafață, avem

$$\text{(C)}\qquad \int_D(\Delta\vec{u}\cdot\delta\vec{\pi} + \operatorname{div}\vec{W}\cdot\delta t)\,dv = 0.$$

Legătura (C) are un caracter neolonom.

Ecuaţiile mişcării reale se obţin acum din (A) pentru orice δ compatibilă cu legăturile (B) şi (C). Utilizînd metoda multiplicatorilor lui Lagrange, avem

$$\int_D \Big[(\rho\vec{a} - \rho\vec{F} - \lambda \operatorname{grad}_{\vec{\pi}} \theta - \mu\Delta\vec{u})\, \delta\vec{\pi} + \left(\frac{dT}{dt} - \vec{F}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \lambda\frac{\partial\theta}{\partial t} - \mu \operatorname{div}\vec{W}\right)\delta t \Big]\, dv = 0,$$

pentru orice δ, de unde rezultă ecuaţia fundamentală de mişcare a corpului elastic

$$\rho(\vec{a} - \vec{F}) = \lambda \operatorname{grad}_{\vec{\pi}} \theta + \mu\Delta\vec{u} \tag{7}$$

şi o relaţie energetică

$$\frac{dT}{dt} - \vec{F}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mu \operatorname{div}\vec{W}. \tag{8}$$

Ecuaţia (7) proiectată pe axe ne dă

$$(^*) \qquad \rho(a_i - F_i) = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x^i} + \mu\Delta u_i. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

4. ECUAŢIILE LUI CAUCHY

Să considerăm alături de forţa exterioară $\vec{F}$ care acţionează asupra unităţii de masă şi forţa de contact, sau de suprafaţă, sau tensiunea. Tensiunea σ_{ni} într-un punct oarecare al suprafeţei, în care normala este $\vec{n}$, se exprimă liniar şi omogen în funcţie de tensiunile σ_{1i}, σ_{2i}, σ_{3i} care se exercită pe elementele de suprafaţă normale la axele Ox^i (vezi [4])

$$\sigma_{ni} = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji}\, n_j.$$

Pentru un element de suprafaţă ds, suma tensiunilor care se exercită pe această suprafaţă [4] este

$$\sum \sigma_{ni}\, ds = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^j}\, dv,$$

dv fiind elementul de volum. Deci datorită tensiunilor, în fiecare punct acţionează asupra unităţii de masă forţa

$$\frac{1}{\rho}\vec{D},$$

care are componentele :

$$\left(\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{1j}}{\partial x^j},\ \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{2j}}{\partial x^j},\ \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{3j}}{\partial x^j}\right). \tag{9}$$

Deci asupra unității de masă se va exercita forța : $\vec{F} + \frac{1}{\rho}\vec{D}$. Prin urmare în acest caz, expresia (3) devine

$$d\Omega_\delta = \int_D \left[d\vec{v}\cdot\delta\vec{\pi} - dT\cdot\delta t + \left(\vec{F} + \frac{1}{\rho(\vec{\pi})}\vec{D}\right) d\vec{\pi}\cdot\delta t + Pdt\,\delta t\right]\rho(\vec{\pi})\,dv, \tag{10}$$

unde $P\,dt$ este o componentă temporală a forței. Aplicînd principiul fundamental al mișcării (2) avem

$$\int_D \left\{\left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{D}\right)\delta\vec{\pi} + \left[\left(\vec{F} + \frac{1}{\rho}\vec{D}\right)\frac{d\vec{\pi}}{dt} - \frac{dT}{dt}\right]\delta t\right\}\rho(\vec{\pi})\,dv = 0,$$

pentru orice δ, de unde rezultă ecuația vectorială a lui Cauchy

$$\rho(\vec{a} - \vec{F}) = \vec{D}, \tag{11}$$

ceea ce proiectat pe axe ne dă

$$(^{**}) \qquad \rho(a_i - F_i) = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^j}. \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

5. PRINCIPIUL LUI HOOKE

u_i fiind componentele vectorului deformație, considerăm tensorul redus al deformației, avînd componentele

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right). \tag{12}$$

Cum ecuațiile (*) și (**) au același membru stîng și ne descriu ambele mișcarea corpului elastic, una ținînd seama de deformație, cealaltă de tensiune, avem

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^j} = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x^i} + \mu\,\Delta u_i. \tag{13}$$

Deoarece însă

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x^i} + \mu\,\Delta u_i = \mu\left[\Delta u_i + \frac{\partial\theta}{\partial x^i} + \left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)\frac{\partial\theta}{\partial x^i}\right],$$

iar

$$\Delta u_i + \frac{\partial\theta}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^j \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x^j}\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) = 2 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x^j}.$$

Prin urmare relația (13) devine

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} = \mu\left[2 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x^j} + \left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)\frac{\partial\theta}{\partial x^i}\right] =$$

$$= 2\mu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x^j} + (\lambda - \mu) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\theta}{\partial x^j}\, \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^j}\, (2\mu e_{ij} + (\lambda - \mu)\cdot \theta\delta_{ij}),$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker. Deci [1]

$$\sigma_{ij} = 2\mu\, e_{ij} + (\lambda - \mu)\, \theta\delta_{ij}, \tag{14}$$

adică : *componentele tensorului tensiune se exprimă liniar și omogen în funcție de componentele tensorului deformație*, deci principiul lui Hooke.

Primită la redacție la 23 februarie 1962

---

[1] Avem din egalitatea ultimă :

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^j} [\sigma_{ij} - 2\mu\, e_{ij} - (\lambda - \mu)\, \theta\delta_{ij}] = 0,$$

σ_{ij} și e_{ij} sînt tensori simetrici. Un tensor simetric are trei direcții principale. Direcțiile principale ale tensorului deformației coincid cu direcțiile principale ale tensorului tensiune (a se vedea [4], p 53) pentrucă mediul este izotrop. Deci există o transformare de variabile (θ este invariant)

$$x'^l = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^l\, x^j, \qquad (l = 1, 2, 3)$$

astfel ca

$$\sigma'_{kl} = \sum_{i, j=1}^{3} \alpha_k^i \alpha_l^j \sigma_{ij}; \qquad \sigma'_{kl} = 0 \quad (k \neq l)$$

$$(k, l = 1, 2, 3)$$

$$e'_{kl} = \sum_{i, j=1}^{3} \alpha_k^i\, \alpha_l^j\, e_{ij}; \quad e'_{kl} = 0 \quad (k \neq l),$$

Avem

$$\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial x'^l} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_k^i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^j}; \quad \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial e'_{kl}}{\partial x'^l} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_k^i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial e_{ij}}{\partial x^j}, \quad \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial\delta'_{kl}}{\partial x^l} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_k^i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\delta_{ij}}{\partial x^j}.$$

În sfîrșit

$$\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x'^l} \left[\sigma'_{kl} - 2\mu e'_{kl} - (\lambda - \mu)\, \theta\delta'_{kl}\right] = \sum_{i=1}^{3} \alpha_k^i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\sigma_{ij} - 2\mu\, e_{ij} - (\lambda - \mu)\, \theta\delta_{ij}\right] = 0,$$

ceea ce implică

$$\sigma'_{kk} - 2\mu\, e'_{kk} + (\lambda - \mu)\, \theta\delta'_{kk}. \qquad (k = 1, 2, 3),$$

Reîntorcîndu-ne la variabilele curente avem (14)

ПРИНЦИП ГУКА

РЕЗЮМЕ

Профессор Октав Оническу указал на возможность вывода принципа Гука из основного принципа движения (2), на котором основывается новая инвариантная механика систем [1], [2], [3] и из постулатов (B) и (C).

В настоящей работе в § 2 дается формулировка основного принципа движения для неконсервативных систем; в § 3 приводится в точности примененный проф. Октавом Оническу метод для определения уравнений движения (*) эластичного тела, в § 4 определяются — на основном принципе движения (2) — уравнения Коши (**), а в§ 5 выводится принцип Гука.

ON HOOKE'S PRINCIPLE

ABSTRACT

Professor Octav Onicescu has indicated the possibility of deducing Hooke's principle from the fundamental principle of motion (2), which is the basis of the new invariant mechanics of systems [1], [2], [3], as well as from postulates (B) and (C).

The present paper ennunciates in § 2 the fundamental principle of motion for non-conservative systems and reproduces exactly in § 3 the method employed by professor Octav Onicescu for establishing the motion equations (*) of an elastic body; Cauchy equations (**) are established in § 4 on the basis of the fundamental principle of motion (2) and Hooke's principle is deduced in § 5.

BIBLIOGRAFIE

1. O. ONICESCU, *Variationsprinzipen welche die inneren Verbindungen eines kontinuierlichen Mediums definieren*. Revue de Mécanique Appliquée, **1**, *2*, 7–13 (1956).
2. — *Introduction à une mécanique invariante des systèmes*. Revue de Math. Pures et Appl., **2**, 167–180 (1957).
3. — *Sur l'aspect mécanique des phénomènes naturels*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., **3** (51), *2*, 209–221 (1959).
4. V. VĂLCOVICI, *Mecanica mediilor continue deformabile*. Bucureşti, 1956 (litografiat).
5. S. GUIAŞU, *Mişcarea sistemelor mecanice neconservative*. Com. Acad. R.P.R. (sub tipar).

STUDII

BAZELE TEORIEI STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE DE BETON ARMAT, DE EGALĂ SIGURANȚĂ PLASTICĂ

DE

VALERIU PETCU [1]

Criteriul fundamental al calculului plastic al structurilor static nedeterminate de beton armat, cu scheme multiple de încărcare, constă în *realizarea aceleiași siguranțe în raport cu apariția primei articulații plastice pentru majoritatea secțiunilor critice, siguranța celorlalte secțiuni critice fiind mai mare decît prima.*

Acest criteriu asigură obținerea soluției plastice optime din punctul de vedere al capacității de rezistență a structurilor.

Expresia matematică a acestui criteriu este dată de *principiul redistribuției optime* [1].

Conform acestui principiu, *soluția plastică optimă a unei structuri static nedeterminate de beton armat se obține prin realizarea egalității unui anumit număr de coeficienți de redistribuție, funcție de numărul ecuațiilor suplimentare necesare pentru obținerea tuturor valorilor momentelor plastice din secțiunile critice, astfel încît restul coeficienților de redistribuție să aibă valori mai mici decît valoarea comună a primilor coeficienți.*

Existența criteriului enunțat se bazează pe faptul că numărul ecuațiilor de echilibru plastic al unei structuri de beton armat este întotdeauna inferior numărului momentelor plastice din secțiunile critice, astfel încît pentru determinarea valorilor acestora sînt necesare ecuații suplimentare.

Observații :

1. Coeficientul de redistribuție este, prin definiție, raportul dintre sarcina de rupere a structurii și sarcina corespunzătoare apariției primei articulații plastice într-o anumită secțiune critică, determinat pentru schema de încărcare corespunzătoare valorii maxime a acestui raport.

2. Numărul coeficienților de redistribuție este egal cu numărul secțiunilor critice ale structurii.

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

3. Se au în vedere exclusiv structurile solicitate de sarcini permanente constante, caracterizate prin constanta G şi de sarcini utile care pot varia de la zero la valorile lor limită, în funcţie de un singur parametru P.

Din cele enunţate rezultă că secţiunile critice ale unei structuri vor prezenta, în general, siguranţe diferite în raport cu apariţia primei articulaţii plastice.

Una dintre problemele fundamentale ale calculului plastic constă în determinarea caracteristicilor structurilor de beton armat care posedă, fiecare în parte, proprietatea de a avea *aceeaşi siguranţă în raport cu apariţia primei articulaţii plastice pentru toate secţiunile lor critice.*

Din punct de vedere static, această proprietate este exprimată prin egalitatea tuturor coeficienţilor de redistribuţie ai structurii considerate.

Prin definiţie, structurile care au această proprietate se numesc *structuri de egală siguranţă plastică.*

Observaţie

Dacă se cunosc forma geometrică şi caracteristicile reazemelor unei structuri static nedeterminate, atunci alcătuirea sa statică este funcţie de două grupe de parametri, corespunzătoare rigidităţii secţiunilor transversale şi lungimilor barelor.

Dacă se exprimă rigidităţile şi lungimile barelor în funcţie de rigiditatea şi de lungimea unei bare oarecare luate ca elemente de referinţă, rezultă că numărul parametrilor cuprinşi în fiecare din cele două grupe menţionate este dat de relaţiile

$$n_\rho = n_l = n_b - 1, \tag{1}$$

în care n_ρ şi n_l sînt numărul parametrilor corespunzători rigidităţilor, respectiv lungimilor barelor, iar n_b este numărul barelor structurii.

Existenţa structurilor de egală siguranţă plastică se datoreşte posibilităţilor, teoretic nelimitate, de alegere a valorilor parametrilor care caracterizează alcătuirea statică a structurilor.

În cele ce urmează se prezintă bazele teoriei structurilor de egală siguranţă plastică, precum şi principalele proprietăţi ale acestora.

I. TEOREMA DE EXISTENŢĂ A STRUCTURILOR DE EGALĂ SIGURANŢĂ PLASTICĂ

Fiind date forma geometrică şi caracteristicile reazemelor unei structuri static nedeterminate de beton armat, există totdeauna cel puţin o soluţie a momentelor plastice pentru care toţi coeficienţii de redistribuţie sînt egali între ei.

Demonstraţie. Fie n_s — numărul secţiunilor critice (numărul momentelor plastice) şi n_e — numărul ecuaţiilor de echilibru plastic (numărul mecanismelor independente) ale structurii.

Prin egalarea între ei a tuturor coeficienţilor de redistribuţie se obţin $n_s - 1$ ecuaţii, care formează împreună cu ecuaţiile de echilibru plastic un sistem de $n_s + n_e - 1$ ecuații, conținînd ca necunoscute n_s momente plastice. În totalitate, coeficienții necunoscutelor și termenii liberi conțin toți parametrii corespunzători rigidităților și lungimilor barelor.

Pentru ca sistemul să fie compatibil și să admită o soluție unică a momentelor plastice, este necesar ca numărul necunoscutelor să fie egal cu numărul ecuațiilor. Această condiție impune ca pe lîngă cele n_s momente plastice să se mai considere ca necunoscute $n_e - 1$ parametri din totalul de $n_p + n_l = 2 \cdot (n_b - 1)$ parametri care caracterizează structura.

Soluția sistemului de ecuații, obținută pe această cale, va conține valorile tuturor momentelor plastice, exprimate în funcție de $n_p + n_l - (n_e - 1) = 2 \cdot n_b - (n_e + 1) \geqslant 0$ parametri, ceea ce demonstrează teorema enunțată.

Observații

1. Teoretic, alegerea celor $n_e - 1$ parametri considerați ca necunoscute este arbitrară. În consecință, numărul maxim de soluții ale sistemului de ecuații, care asigură structurii proprietatea egalității tuturor coeficienților de redistribuție, este egal cu $C_{n_p + n_l}^{n_e - 1}$.

2. În cadrul fiecărei soluții există o infinitate de grupe de valori ale momentelor plastice, datorită numărului infinit de valori numerice pozitive pe care le pot avea cei $2 \cdot n_b - (n_e + 1)$ parametri conținuți de soluție. Dintre acestea trebuie reținute exclusiv acele grupe de valori ale momentelor plastice, pentru care toți cei $n_e - 1$ parametri considerați ca necunoscute rezultă pozitivi.

3. Dacă $n_b = 1$ (cazul grinzilor static nedeterminate cu o singură deschidere), rezultă $n_p = n_l = 0$. Acesta este cazul în care se obține o singură soluție a momentelor plastice, respectiv o singură structură de egală siguranță plastică.

Consecință

Dacă $n_p + n_l - (n_e - 1)$ parametri au valori impuse apriori, atunci există cel mult o soluție a momentelor plastice pentru care structura considerată este de egală siguranță plastică.

Într-adevăr, dacă $n_p + n_l - (n_e - 1)$ parametri au valorile fixate în prealabil, rezultă că parametrii rămași $(n_e - 1)$ asigură numărul strict necesar pentru obținerea unei soluții unice a sistemului de ecuații corespunzător realizării structurii de egală siguranță plastică. Această structură este reală dacă toate valorile celor $n_e - 1$ parametri considerați ca necunoscute rezultă pozitive.

II. TEOREMA REDISTRIBUȚIEI MINIME DE EFORTURI

Dacă $n_p + n_l - (n_e - 1)$ parametri ai unei structuri static nedeterminate de beton armat au valori impuse apriori, atunci limita superioară minimă a coeficienților de redistribuție, obținuți pe baza principiului redistri-

buției optime pentru diferitele grupe de valori ale celor $n_e - 1$ parametri arbitrari ai structurii, corespunde singurei structuri de egală siguranță plastică care poate fi obținută în acest caz.

Demonstrație.

1. Fie 1, 2 și 3 secțiunile critice ale unei bare oarecare, încărcate, a structurii de egală siguranță plastică care poate fi obținută în acest caz (fig. 1).

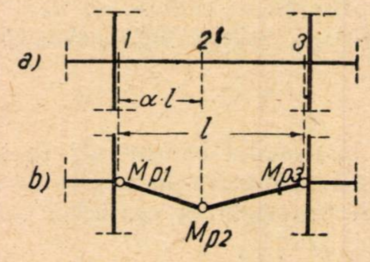


Fig. 1

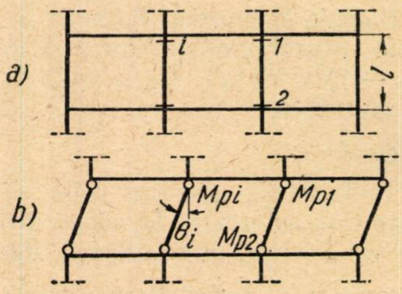


Fig. 2

Momentele plastice corespunzătoare acestor secțiuni critice au expresiile

$$\begin{aligned} M_{p1} &= (u_1 \cdot a + v_1 \cdot b \cdot K_{11}) \cdot G \cdot l, \\ M_{p2} &= (u_2 \cdot a + v_2 \cdot b \cdot K_{12}) \cdot G \cdot l, \\ M_{p3} &= (u_3 \cdot a + v_3 \cdot b \cdot K_{13}) \cdot G \cdot l, \end{aligned} \tag{2}$$

în care

u_i și v_i sînt coeficienții care caracterizează calculul elastic al structurii $(i = 1, 2, 3)$;

$K_{1i} = \dfrac{P_{1i}}{G}$, $(i = 1, 2, 3)$;

P_{1i} — valoarea parametrului care caracterizează sarcinile utile, corespunzătoare apariției primei articulații plastice în secțiunea critică i;

$b \cdot P_{1i}$ — valoarea totală a sarcinilor utile care solicită bara $1 - 2 - 3$, corespunzătoare apariției primei articulații plastice în secțiunea critică i;

G — constanta care caracterizează sarcinile permanente;

$a \cdot G$ — valoarea totală a sarcinilor permanente care solicită bara $1 - 2 - 3$;

l — deschiderea barei.

Ecuația de echilibru plastic a barei este (fig. 1*b*):

$$(1 - \alpha) M_{p1} + M_{p2} + \alpha \cdot M_{p3} = (w_g \cdot a + w_p \cdot b \cdot K_u) \cdot G \cdot l, \tag{3}$$

în care

w_g şi w_p sînt coeficienţii care caracterizează momentele încovoietoare din secţiunea critică 2, datorită sarcinilor permanente, respectiv sarcinilor utile, în ipoteza că bara este simplu rezemată la ambele extremităţi;

$K_u = \frac{P_u}{G}$;

P_u — valoarea parametrului care caracterizează sarcinile utile de rupere;

$\alpha \cdot l$ — distanţa dintre secţiunile critice 1 şi 2.

Structura fiind de egală siguranţă plastică, rezultă următoarele egalităţi

$$r_1 = r_2 = r_3, \tag{4}$$

adică

$$\frac{a + b \cdot K_u}{a + b \cdot K_{11}} = \frac{a + b \cdot K_u}{a + b \cdot K_{12}} = \frac{a + b \cdot K_u}{a + b \cdot K_{13}}. \tag{4a}$$

Prin r_1, r_2 şi r_3 s-au notat coeficienţii de redistribuţie corespunzători secţiunilor critice 1, 2 şi 3.

Din relaţiile (4a) se deduce:

$$K_{11} = K_{12} = K_{13}. \tag{5}$$

Fie K_1 valoarea comună a acestor coeficienţi.

Dacă se înlocuiesc momentele plastice din ecuaţia (3) prin expresiile lor date de relaţiile (2) şi dacă se ţine seama de egalităţile (5) atunci ecuaţia de echilibru plastic al barei devine

$$[(1 - \alpha) \cdot u_1 + u_2 + \alpha \cdot u_3] \cdot a + [(1 - \alpha) v_1 + v_2 + \alpha \cdot v_3] \cdot b \cdot K_1 = \\ = w_g \cdot a + w_p \cdot b,$$

de unde se deduce

$$K_1 = \frac{w_p}{(1 - \alpha) \cdot v_1 + v_2 + \alpha \cdot v_3}. \tag{6}$$

Cazul I. Se presupune că o bară oarecare a structurii de egală siguranţă plastică, corespunzătoare unuia din cei $n_e - 1$ parametri, suferă o mărire a lungimii sau o micşorare a rigidităţii sale şi fie v_1', v_2' şi v_3' noii coeficienţi care caracterizează momentele elastice maxime din secţiunile critice 1, 2 şi 3, datorite sarcinilor utile.

Dacă în această nouă situaţie se realizează egalitatea coeficienţilor de redistribuţie exclusiv din secţiunile critice 1, 2 şi 3, se obţine

$$K_1' = \frac{w_p}{(1 - \alpha) \cdot v_1' + v_2' + \alpha \cdot v_3'}, \tag{6a}$$

în care K_1' are aceeaşi semnificaţie ca şi coeficientul K_1.

Creşterea lungimii sau micşorarea rigidităţii uneia sau mai multor bare ale unei structuri static nedeterminate cu scheme multiple de încărcare produce o creştere a sensibilităţii statice a barelor rămase invariabile, acţionate direct de sarcini, exprimată prin inegalitatea :

$$(1 - \alpha) \cdot v_1' + v_2' + \alpha \cdot v_3' > (1 - \alpha) \cdot v_1 + v_2 + \alpha \cdot v_3. \qquad (7)$$

Din compararea relaţiilor (6) şi (6 a) rezultă :

$$K_1' < K_1.$$

Această inegalitate arată că redistribuirea de momente în ultimul caz este superioară redistribuţiei corespunzătoare structurii de egală siguranţă plastică.

Cazul II. Se presupune că o bară oarecare, încărcată, a structuri de egală siguranţă plastică, corespunzătoare unuia din cei $n_e - 1$ parametri consideraţi ca necunoscute, suferă o micşorare a lungimii sau o mărire a rigidităţii sale.

Faţă de această bară, considerată ca element de referinţă, toate celelalte bare suferă o mărire a lungimilor, respectiv o micşorare a rigidităţii lor, cu alte cuvinte se regăseşte cazul tratat anterior.

2. Se consideră că o bară oarecare neîncărcată direct, făcînd parte dintr-un mecanism de etaj al structurii de egală siguranţă plastică, corespunzătoare unuia din cei $n_e - 1$ parametri consideraţi ca necunoscute în structura de egală siguranţă plastică, suferă o micşorare a lungimii sau o mărire a rigidităţii sale.

Fie 1 şi 2 secţiunile critice ale acestei bare (fig. 2).

În cadrul structurii de egală siguranţă plastică, ecuaţia de echilibru plastic al mecanismului de etaj conţinînd bara 1—2 este (fig. 2*b*) :

$$\sum \theta_i \cdot M_{pi} = L_g + L_p, \qquad (8)$$

în care :

M_{pi} este momentul plastic din secţiunea critică i a mecanismului ;

θ_i — rotirea articulaţiei plastice din secţiunea critică i, datorită unei deplasări virtuale a mecanismului ;

L_g — lucrul mecanic virtual al sarcinilor permanente ;

L_p — lucrul mecanic virtual al sarcinilor utile de rupere.

Fie

$$M_{pi} = (u_i + v_i \cdot K_{1i}) \cdot G \cdot l_i \qquad (9)$$

expresia generală a momentului plastic, în care u_i şi v_i sînt coeficienţii care caracterizează calculul elastic al structurii, iar l_i este lungimea barei mecanismului corespunzătoare secţiunii critice i.

Structura fiind presupusă de egală siguranţă plastică, rezultă

$$K_{11} = K_{12} = \ldots = K_1. \qquad (10)$$

Ţinînd seama de relaţiile (9) şi (10), din ecuaţia (8) se obţine

$$K_1 = \frac{L_p}{G \cdot \sum \theta_i \cdot v_i \cdot l_i}. \qquad (11)$$

Coeficientul v_i se compune din două părți: una datorită sarcinilor orizontale iar cealaltă datorită sarcinilor verticale

$$v_i = v_{ih} + v_{iv}.$$

Schema de încărcare a sarcinilor orizontale fiind unică pentru toate secțiunile critice ale mecanismului de etaj, rezultă că suma

$$S = G \cdot \sum \theta_i \cdot v_{ih} \cdot l_i,$$

este o constantă, fiind independentă de lungimile și de rigiditățile barelor mecanismului.

Relația (11) devine deci

$$K_1 = \frac{L_p}{S + G \cdot \sum \theta_i \cdot v_{iv} \cdot l_i}. \tag{11a}$$

Presupunem că bara 1—2 a mecanismului de etaj își mărește rigiditatea sau își micșorează lungimea și fie v'_{iv} noii coeficienți care caracterizează momentele elastice maxime provenite exclusiv din schemele posibile de încărcare ale sarcinilor verticale utile.

Dacă în această nouă situație se realizează egalitatea coeficienților de redistribuție exclusiv din secțiunile critice ale mecanismului de etaj considerat, se obține

$$K'_1 = \frac{L_p}{S + G \cdot \sum \theta_i \cdot v'_{iv} \cdot l_i}, \tag{11b}$$

în care K'_1 are aceeași semnificație ca și coeficientul K_1.

Dacă, prin definiție, sensibilitatea statică a ansamblului barelor unui mecanism de etaj este dată de suma $\sum \theta_i \cdot v_{iv} \cdot l_i$, atunci prin mărirea rigidității sau micșorarea lungimii unei bare a mecanismului se produce o mărire a sensibilității statice a acestuia, exprimată prin inegalitatea

$$\sum \theta_i \cdot v'_{iv} \cdot l_i > \sum \theta_i \cdot v_{iv} \cdot l_i. \tag{12}$$

Această concluzie se bazează pe faptul că diferențele $v'_{1v} - v_{1v}$ și $v'_{2v} - v_{2v}$ corespunzătoare secțiunilor critice 1 și 2 sînt cel puțin proporționale cu creșterea rigidității statice a barei 1—2, în timp ce diferențele $v'_{iv} - v_{iv}$, $(i \neq 1, 2)$ sînt neînsemnate în raport cu cele precedente și cu atît mai mici cu cît bara corespunzătoare secțiunii critice i este mai departe de bara 1—2.

Din comparația relațiilor (11 a) și (11 b) rezultă deci

$$K'_1 < K_1. \tag{13}$$

Existența inegalității (13) în toate cazurile posibile de variație a caracteristicilor statico-geometrice ale barelor demonstrează teorema enunțată.

III. EXEMPLU

În cele ce urmează se aplică teoria elaborată, în cazul particular al grinzii continue cu trei deschideri, cu simetrie statico-geometrică, solicitată de sarcini uniform distribuite (fig. 3).

Numărul barelor structurii este $n_b = 3$ iar acela al mecanismelor independente, $n_e = 2$.

Întrucît grinda are simetrie statico-geometrică, rezultă că numărul parametrilor care o caracterizează este :

$$n_\rho = n_l = 1.$$

Fie

$$\lambda = \frac{l_2}{l_1} \text{ şi } \rho = \frac{R_2}{R_1}, \qquad (14)$$

expresiile acestor parametri, în care l_1 şi l_2 sînt deschiderile iar R_1 şi R_2 — rigidităţile grinzii (fig. 3).

Numărul secţiunilor critice este $n_s = 3$ iar acela al ecuaţiilor sistemului corespunzător structurii de egală siguranţă plastică, $n_s + n_e - 1 = 4$.

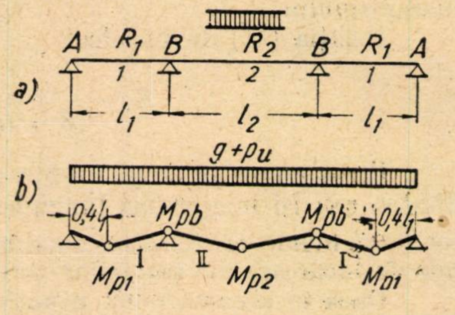


Fig. 3

În consecinţă, pentru realizarea unei astfel de structuri este necesar ca unul din cei doi parametri care caracterizează grinda să fie considerat ca necunoscută.

Rezolvarea grinzii prin folosirea ecuaţiei celor trei momente conduce la următoarele valori ale momentelor elastice maxime în cîmpuri şi pe reazeme

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \left(0{,}120 - 0{,}1\,\frac{\rho+\lambda^3}{2\cdot\rho+3\cdot\lambda}\right)\cdot g\cdot l_1^2 + \left(0{,}120 - 0{,}1\,\frac{\rho}{2\cdot\rho+3\lambda}\right)\cdot p\cdot l_1^2,\\
M_2 &= \left(0{,}125\,\lambda^2 - 0{,}25\,\frac{\rho+\lambda^3}{2\cdot\rho+3\cdot\lambda}\right)\cdot g\cdot l_1^2 + 0{,}125\,\frac{2\cdot\rho\cdot\lambda^2+\lambda^3}{2\cdot\rho+3\cdot\lambda}\cdot p\cdot l_1^2,\\
M_b &= -\,0{,}25\,\frac{\rho+\lambda^3}{2\cdot\rho+3\cdot\lambda}\cdot g\cdot l_1^2 - 0{,}25\,\frac{2\cdot\rho\cdot(\rho+\lambda)+\lambda^3\cdot(2\rho+\lambda)}{4\cdot(\rho+\lambda)^2-\lambda^2}\cdot p\cdot l_1^2,
\end{aligned}\right\}(15)$$

în care

g este sarcina permanentă, uniform distribuită pe ml;
p — sarcina utilă, uniform distribuită pe ml;
l_1 — mărimea deschiderii marginale a grinzii.

Observaţie

Secţiunea critică din cîmpul 1 s-a considerat la distanţa 0,4 l_1 de reazemul A.

Momentele plastice din secțiunile critice au următoarele expresii :

$$\left.\begin{aligned}
m_{p1} &= 0{,}120 - 0{,}1\,\frac{\rho + \lambda^3}{2\cdot\rho + 3\cdot\lambda} + \left(0{,}120 - 0{,}1\,\frac{\rho}{2\cdot\rho + 3\cdot\lambda}\right)\cdot k_{11},\\
m_{p2} &= 0{,}125\cdot\lambda^2 - 0{,}25\,\frac{\rho + \lambda^3}{2\cdot\rho + 3\cdot\lambda} + 0{,}125\,\frac{2\cdot\rho\cdot\lambda^2 + \lambda^3}{2\cdot\rho + 3\cdot\lambda}\cdot k_{12},\\
m_{pb} &= -\,0{,}25\,\frac{\rho + \lambda^3}{2\cdot\rho + 3\cdot\lambda} - 0{,}25\,\frac{2\cdot\rho\cdot(\rho + \lambda) + \lambda^3\cdot(2\cdot\rho + \lambda)}{4\,(\rho + \lambda)^2 - \lambda^2}\cdot k_{1b}
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

în care

M_{pi} este momentul plastic în secțiunea critică i;

$k_{1i} = \frac{p_{1i}}{g}$; $k_u = \frac{p_u}{g}$.

p_{1i} — sarcina utilă, corespunzătoare apariției primei articulații în secțiunea critică i;

p_u — sarcina utilă de rupere;

$m_{pi} = \frac{M_{pi}}{g\cdot l_1^2}$.

Ecuațiile de echilibru plastic, corespunzătoare celor două mecanisme independente, sînt (fig. 3*b*)

$$\left.\begin{aligned}
m_{p1} - 0{,}4\,m_{pb} &= 0{,}120\,(1 + k_u),\\
m_{p2} - m_{pb} &= 0{,}125\,\lambda^2\cdot(1 + k_u).
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Presupunînd că grinda este de egală siguranță plastică, rezultă necesitatea îndeplinirii condițiilor :

$$k_{11} = k_{12} = k_{1b}. \quad (18)$$

Fie k_1 valoarea comună a acestor coeficienți.

Prin înlocuirea momentelor plastice din ecuațiile (17) cu valorile date de relațiile (16) și considerarea condițiilor (18), se obține

$$\left.\begin{aligned}
\frac{k_u}{k_1} &= 1 - \frac{2{,}5}{3}\cdot\frac{\rho}{2\cdot\rho + 3\lambda} + \frac{1}{1{,}2}\cdot\frac{2\cdot\rho\cdot(\rho + \lambda) + \lambda^3\cdot(2\cdot\rho + \lambda)}{4\,(\rho + \lambda)^2 - \lambda^2},\\
\frac{k_u}{k_1} &= \frac{2\cdot\rho + \lambda}{(2\cdot\rho + 3\cdot\lambda)\cdot\lambda^2} + 2\cdot\frac{2\cdot\rho\cdot(\rho + \lambda) + \lambda^3\cdot(2\cdot\rho + \lambda)}{[4\,(\rho + \lambda)^2 - \lambda^2]\cdot\lambda^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Egalarea între ele a părților drepte ale relațiilor (19) conduce la următoarea ecuație :

$$4{,}8\,\rho^2 - (2\cdot\lambda^5 + \lambda^3 - 4{,}8\,\lambda)\cdot\rho - \lambda^6 = 0, \quad (20)$$

Valoarea pozitivă a parametrului ρ, care satisface ecuația (20), este dată de relația

$$\rho = \frac{\lambda}{9,6}\left[\sqrt{(2\cdot\lambda^4 + \lambda^2 - 4,8)^2 + 19,2\,\lambda^6} + 2\cdot\lambda^4 + \lambda^2 - 4,8\right]. \qquad (21)$$

Cazul I. $\rho = 1$

Din ecuația (20) rezultă

$$\lambda = \frac{l_2}{l_1} = 1,23. \qquad (22)$$

În diagrama din figura 4 se prezintă variația coeficientului maxim de redistribuție r_0 al grinzii, obținut pe baza principiului redistribuției optime, în funcție de parametrul λ.

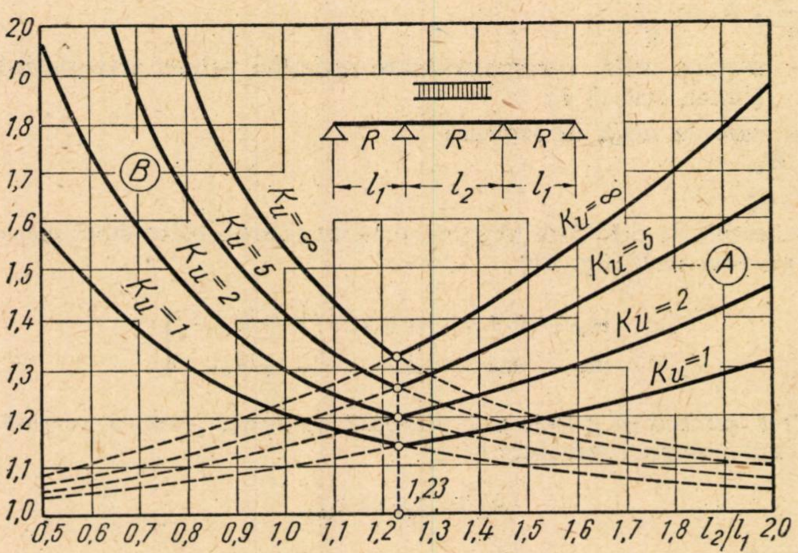


Fig. 4

Familia de curbe (A) reprezintă valorile coeficientului de redistribuție $r_0 = r_{\mathrm{I}}^*$, obținut prin egalarea între ei a coeficienților de redistribuție corespunzători exclusiv secțiunilor critice ale mecanismului I (fig. 3 *b*), iar familia de curbe (B) — valorile coeficientului de redistribuție $r_0 = r_{\mathrm{II}}^*$, obținut prin egalarea între ei a coeficienților de redistribuție corespunzători exclusiv secțiunilor critice ale mecanismului II (fig. 3 *b*).

Intersecția dintre cele două familii de curbe corespunde grinzii de egală siguranță plastică care poate fi obținută în acest caz.

Din figură se constată că acestei grinzi îi corespunde valoarea minimă a limitei superioare a coeficientului de redistribuție r_0.

Cazul II. $\lambda = 1$

Din relația (21) se obține

$$\rho = \frac{R_2}{R_1} = 0{,}305. \tag{23}$$

În diagrama din figura 5 se prezintă variația coeficientului maxim de redistribuție r_0 al grinzii, obținut pe baza principiului redistribuției optime, în funcție de parametrul ρ.

Familiile de curbe (A) și (B) au aceleași semnificații ca și în cazul precedent.

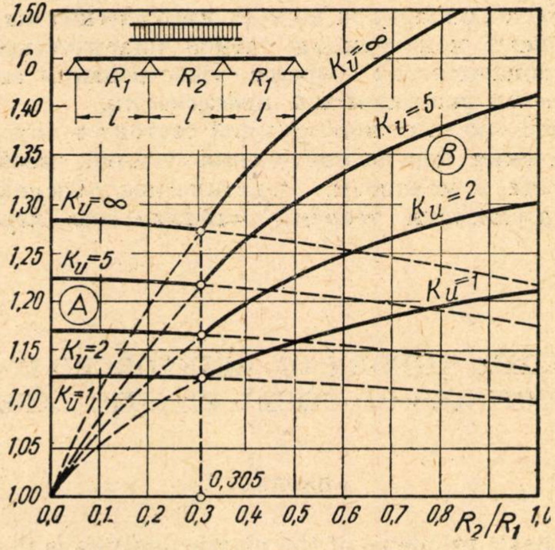


Fig. 5

Intersecția lor corespunde grinzii de egală siguranță plastică, care poate fi obținută în acest caz, pentru care redistribuția plastică de eforturi este minimă.

CONCLUZII

În lucrare se demonstrează *teorema de existență a structurilor static nedeterminate de beton armat, de egală siguranță plastică.*

Principala proprietate a acestor structuri constă în realizarea valorii minime a redistribuției de eforturi, necesară pentru transformarea lor în mecanism, a cărei bază teoretică o constituie *teorema redistribuției minime de eforturi.*

Primită la redacție la 19 martie 1962

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ РАВНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ НАДЕЖНОСТИ

РЕЗЮМЕ

Одна из основных задач пластического расчета состоит в определении характеристики железобетонных структур, из которых каждая в отдельности должна быть равнонадежной в отношении появления первого пластического шарнира во всех критических их сечениях. Эти структуры называют конструкции равной пластической надежности.

В работе доказывается теорема существования *железобетонных конструкций равной пластической надежности.*

Главное свойство этих конструкций состоит в осуществлении минимального значения перераспределения усилий, необходимого для преобразования их в механизм, теоретическое обоснование которого является доказательством теоремы *минимального перераспределения усилий.*

BASES OF THE THEORY OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES OF EQUAL PLASTIC SAFETY

ABSTRACT

One of the basic problems of the plastic analysis is the determination of the characteristics of reinforced concrete structures, having each the same safety with respect to the occurrence of the first plastic hinge, for all their critical sections. By definition, the structures enjoying this property are termed *structures of equal plastic safety.*

This paper proves the *existence theorem of reinforced concrete structures of equal plastic safety.*

The main property of these structures consists in the realization of the minimum value of the redistribution of internal forces necessary for their transformation in the mechanism, whose theoretical basis is constituted by an adequate theorem.

BIBLIOGRAFIE

1. V. PETCU, *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic.* St. cerc. mec. apl., **XII**, *5*, 1017 (1961).

ASUPRA LINIARIZĂRII ECUAŢIILOR DE MIŞCARE A UNUI MEDIU CONTINUU DEFORMABIL

DE

V. MANEA

1. INTRODUCERE

În cadrul a două articole anterioare [1] şi [2] ne-am ocupat de prezentarea ecuaţiilor de mişcare a unui mediu continuu deformabil oarecare sub o formă nouă, convenabilă abordării studiului unor probleme cu caracter neliniar din mecanica corpurilor deformabile.

După cum se ştie însă, dificultăţile ce apar impun folosirea unor procedee simplificatoare, dintre care unele sînt bazate pe liniarizarea acestor ecuaţii. În cunoscuta sa lucrare, [3], V. V. Novojilov tratează problema stabilităţii mişcării unui mediu elastic utilizînd ecuaţiile de mişcare liniarizate.

Ne propunem, în cele ce urmează, să liniarizăm ecuaţiile de mişcare a unui mediu continuu deformabil oarecare, pornind de la forma sub care au fost prezentate în [1].

2. LINIARIZAREA ECUAŢIILOR DE MIŞCARE A UNUI MEDIU CONTINUU DEFORMABIL

În [1] am ajuns la următoarea expresie a ecuaţiei de mişcare scrisă sub formă vectorială :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{x_i}}{\partial x_i} + \rho\left(\bar{F} - \frac{d\bar{V}}{dt}\right) + \int_{t_0}^{t} \bar{M}\,(x_i, t)\,dt = 0, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

valabilă pentru $t > t_0$. Vectorul $\bar{M}$ are expresia

$$\bar{M} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\dot{\alpha}_{i'}\,\bar{\sigma}_{x_i} + \sigma_{x_i x_k}\,\dot{\bar{\tau}}_k'\right) + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_i}\nabla\right)\bar{\sigma}_{x_i} + \rho\nabla\,\bar{V}\left(\bar{F} - \frac{d\bar{V}}{dt}\right), \tag{2}$$

în care s-au utilizat notațiile următoare:

$\bar{\sigma}_{x_i}$ — vectorul tensiune ce acționează pe suprafața normală la Ox_i, avînd proiecțiile $\sigma_{x_i x_k}$;

$\bar{V}$ — vectorul viteză ale cărui proiecții sînt v_i;

$\bar{F}$ — vectorul ce reprezintă rezultanta forțelor exterioare de proiecții F_i;

ρ — masa specifică a mediului;

$\dot{\alpha}_{i'} = \dot{e}_{j'j'} + \dot{e}_{k'k'}$ — componentele vectorului viteză de deformare superficială $(i \neq j \neq k)$ ¹);

$\dot{\bar{\tau}}'_k = \left(\dfrac{\partial v_j}{\partial x_k}\,\bar{\tau}_j - \dot{e}_{k'k'}\,\tau_k\right)$;

$\bar{\tau}_i$ — vectorii unitari ai celor trei axe de coordonate Ox_i, presupuse rectilinii și ortogonale;

$\dot{e}_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$;

$\nabla = \bar{\tau}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

La momentul $t = t_0$ ecuația (1) are forma

$$\frac{\partial \bar{\sigma}^0_{x_i}}{\partial x_i} + \rho^0 \left(\bar{F}^0 - \frac{d\bar{V}^0}{dt_0}\right) = 0, \tag{3}$$

unde am însemnat prin $\bar{\sigma}^0_{x_i}$, $\rho^0, \ldots$ etc., mărimi ce caracterizează mișcarea la momentul t_0, ale căror valori se obțin prin soluționarea ecuației (3) cu condțiile inițiale și la limită corespunzătoare. Pentru valori ale lui $t > t_0$, după cum am mai menționat deja, este valabilă ecuația (1) pe care însă o rescriem sub forma

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \bar{\sigma}_{x_i}}{\partial x_i} + \rho\left(\bar{F} - \frac{d\bar{V}}{dt}\right)\right] + \bar{M}\,(x_i, t) = 0. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

Mărimile $\bar{\sigma}_{x_i}$, $\rho, \ldots$ etc. ce caracterizează mișcarea după t_0, vor trebui să satisfacă atît ecuația (4) cît și ecuația (3), care servește în acest caz drept condiție inițială.

Studiul mișcării mediului în jurul momentului t_0 permite o serie de simplificări bazate pe liniarizarea ecuației (4). Presupunem că mișcarea pînă la momentul t_0 este cunoscută, ca urmare a soluționării ecuației (3) (în care, tensiunile s-au înlocuit admițînd o anumită dependență față de deformații, în funcție de natura fizică a problemei) cu condițiile inițiale și la limită corespunzătoare. Imediat după momentul t_0 vom putea pune

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{x_i} &= \bar{\sigma}^0_{x_i} + \bar{\sigma}'_{x_i}, \\ \rho &= \rho^0 + \rho', \\ \bar{F} &= \bar{F}^0 + \bar{F}', \\ \bar{V} &= \bar{V}^0 = \bar{V}', \end{aligned} \tag{5}$$

---

¹) Semnul ′ (prim) la un indice arată că sumarea în raport cu acel indice nu are loc.

$$\begin{aligned}\overline{\tau}'_{k'} &= \frac{\partial (v_j^0 + v'_j)}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j - (\dot{e}^0_{k'k'} + \dot{e}'_{k'k'})\,\overline{\tau}_k,\\ \dot{\alpha}_{i'} &= \dot{\alpha}^0_{i'} + \dot{\alpha}'_{i'},\\ \dot{e}_{ij} &= \dot{e}^0_{ij} + \dot{e}'_{ij}.\end{aligned}\tag{5}$$

Făcînd înlocuirile corespunzătoare în fiecare din termenii ecuației (4) vom obține

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\sigma}_{x_i}}{\partial x_i} + \rho\left(\overline{F} - \frac{d\overline{V}}{dt}\right) = {}& \frac{\partial \overline{\sigma}^0_{x_i}}{\partial x_i} + \rho^0\left(\overline{F}^0 - \frac{d\overline{V}^0}{dt_0}\right) + \\ & + \frac{\partial \overline{\sigma}'_{x_i}}{\partial x_i} + \rho'\,\overline{F}^0 + (\rho^0 + \rho')\,\overline{F}' + \rho^0\,\frac{\partial \overline{V}^0}{\partial t^0} - (\rho^0 + \rho')\left[\frac{d\overline{V}'}{dt} + \right.\\ & \left. + (\overline{V}'\nabla)\,\overline{V}^0\right] - \rho'\,(\overline{V}^0\nabla)\,\overline{V}^0,\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\overline{M}\,(x_i, t) = {}& \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\dot{\alpha}^0_{i'}\,\overline{\sigma}^0_{x_i} + \dot{\alpha}^0_{i'}\,\overline{\sigma}'_{x_i} + \dot{\alpha}'_{i'}\,\overline{\sigma}^0_{x_i} + \dot{\alpha}'_{i'}\,\overline{\sigma}'_{x_i} + \sigma^0_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j - \dot{e}^0_{k'k'}\,\overline{\tau}_k\right) + \right.\\ & + \sigma^0_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j - \dot{e}'_{k'k'}\,\overline{\tau}_k\right) + \sigma'_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j - \dot{e}'_{k'k'}\,\overline{\tau}_k\right) + \\ & \left. + \sigma'_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j - \dot{e}'_{k'k'}\,\overline{\tau}_k\right)\right] + \left(\frac{\partial \overline{V}^0}{\partial x_i}\nabla\right)\overline{\sigma}^0_{x_i} + \left(\frac{\partial \overline{V}^0}{\partial x_i}\nabla\right)\overline{\sigma}'_{x_i} + \\ & + \left(\frac{\partial \overline{V}'}{\partial x_i}\nabla\right)\overline{\sigma}^0_{x_i} + \left(\frac{\partial \overline{V}'}{\partial x_i}\nabla\right)\overline{\sigma}'_{x_i} + (\rho^0 + \rho')\,\nabla\,(\overline{V}^0 + \overline{V}')\left[\overline{F}^0 + \overline{F}' - \frac{d(\overline{V}^0 + \overline{V}')}{dt}\right].\end{aligned}\tag{7}$$

Ținînd seama de (3) cît, și de faptul că în vecinătatea lui t_0 putem admite că perturbațiile diverselor mărimi ce intervin, $\overline{\sigma}'_{x_i}$, ρ', $\overline{V}'$ etc., sînt atît de mici încît pot fi neglijate produsele lor ce apar în (6) și (7). Ca urmare ecuația (4) se va scrie

$$\begin{aligned}& \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial \overline{\sigma}'_{x_i}}{\partial x_i} + \rho^0\,\overline{F}' + \rho'\,\overline{F}^0 + \rho^0\,\frac{\partial \overline{V}^0}{\partial t^0} - \rho^0\left[\frac{\partial \overline{V}'}{\partial t} + (\overline{V}^0\nabla)\,\overline{V}' + (\overline{V}'\nabla)\,\overline{V}^0\right] - \right.\\ & \left. - \rho'\,(\overline{V}^0\nabla)\,\overline{V}^0\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\dot{\alpha}^0_{i'}\,\overline{\sigma}^0_{x_i} + \dot{\alpha}^0_{i'}\,\overline{\sigma}'_{x_i} + \dot{\alpha}'_{i'}\,\overline{\sigma}^0_{x_i} + \sigma^0_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j - \dot{e}^0_{k'k'}\,\overline{\tau}_k\right) + \right.\\ & \left. + \sigma^0_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j - \dot{e}'_{k'k'}\right) + \sigma'_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v_j^0}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j - \dot{e}'_{k'k'}\,\overline{\tau}_k\right)\right] + \\ & + \left(\frac{\partial \overline{V}^0}{\partial x_i}\nabla\right)\overline{\sigma}^0_{x_i} + \left(\frac{\partial \overline{V}^0}{\partial x_i}\nabla\right)\overline{\sigma}'_{x_i} + \left(\frac{\partial \overline{V}'}{\partial x_i}\nabla\right)\overline{\sigma}^0_{x_i} + \rho^0\,\nabla\,\overline{V}^0\left[\overline{F}^0 - (\overline{V}^0\nabla)\overline{V}^0\right] + \\ & + \rho^0\nabla\,\overline{V}^0\left[\overline{F}' - \frac{\partial \overline{V}'}{\partial t} - (\overline{V}^0\nabla)\,\overline{V}' - (\overline{V}'\nabla)\,\overline{V}^0\right] + \\ & + (\rho^0\nabla\,\overline{V}' + \rho'\,\nabla\,\overline{V}^0)\left[\overline{F}^0 - (\overline{V}^0\nabla)\,\overline{V}^0\right] = 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Ecuația obținută nu este în întregime liniarizată deoarece derivata substanțială care se aplică asupra primei paranteze a acestei ecuații, face să apară termeni neliniari în raport cu mărimile de perturbație. Pentru aceasta vom pune mai întîi

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\overline{V}^0+\overline{V}')\nabla ,$$

după care liniarizarea completă a termenilor din prima paranteză se poate face imediat.

Ecuația (8), pe care am obținut-o, este totuși destul de complicată, fiind prin urmare justificate încercările de a o simplifica. Acest lucru se poate face, însă de la caz la caz, în funcție de natura fizică a problemei, sau de alți factori. Ne vom mărgini a considera în continuare două tipuri de medii continuu deformabile : elastic și fluid.

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE LINIARIZATE PENTRU MEDII ELASTICE, OMOGENE ȘI IZOTROPE

În acest caz se poate admite că $\frac{d}{dt}\cong\frac{\partial}{\partial t}$, cît și faptul că masa unității de volum a mediului rămîne practic constantă, deci $\rho'=0$. În același timp se poate considera că termenii ce constau din produsele diferitelor mărimi ce caracterizează starea de mișcare la momentul t_0 sînt de asemenea neglijabili în raport cu ceilalți termeni. În aceste condiții ecuația (8) devine

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\overline{\sigma}'_{x_i}}{\partial x_i}+\rho\left(\overline{F}'-\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\dot{\alpha}^0_i\,\overline{\sigma}'_{x_i}+\dot{\alpha}'_{i'}\,\overline{\sigma}^0_{x_i}+\right.\\&\left.+\sigma^0_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j-\dot{e}'_{k'k'}\,\overline{\tau}_k\right)+\sigma'_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v^0_j}{\partial x_k}\,\overline{\tau}_j-\dot{e}^0_{k'k'}\,\overline{\tau}_k\right)\right]=0,\end{aligned}\tag{9}$$

sau sub formă tensorială

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\sigma_{x_i x_k}}{\partial x_i}+\rho\left(\overline{F}'_k-\frac{\partial v'_k}{\partial t}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\dot{\alpha}^0_{i'}\,\sigma'_{x_i x_k}+\dot{\alpha}'_{i'}\,\sigma^0_{x_i x_k}+\right.\\&\left.+\sigma^0_{x_i x_j}\,\frac{\partial v'_k}{\partial x_j}-\sigma^0_{x_i x_k}\,\dot{e}'_{k'k'}+\sigma'_{x_i x_j}\,\frac{\partial v^0_k}{\partial x_j}-\sigma'_{x_i x_k}\,\dot{e}^0_{k'k'}\right]=0.\end{aligned}\tag{9'}$$

Vom înlocui în continuare atît vectorul viteză $\overline{V}^0$ cît și $\overline{V}'$ prin derivatele în raport cu timpul ale vectorilor deplasărilor $\overline{U}^0$ respectiv $\overline{U}'$. Ca urmare ecuațiile (9′) se vor scrie sub forma

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\sigma'_{x_i x_k}}{\partial x_i}+\rho\left(F'_k-\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{\partial u^0_{l'}}{\partial x_{l'}}+\frac{\partial u^0_{m'}}{\partial x_{m'}}\right)\sigma'_{x_i x_k}+\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u'_{l'}}{\partial x_{l'}}+\frac{\partial u'_{m'}}{\partial x_{m'}}\right)\sigma^0_{x_i x_k}+\frac{\partial^2 u^0_k}{\partial t^0\,\partial x_j}\,\sigma'_{x_i x_j}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial t\,\partial x_j}\,\sigma^0_{x_i x_j}\right]=0,\end{aligned}\tag{10}$$

unde i, j, k, l, m, iau valorile 1, 2, 3 astfei ca $i \neq l \neq m$ și $j \neq k$. Deoarece deplasările u_k^0, precum și tensiunile $\sigma^0_{x_i x_k}$ nu depind de t, rezultă că ecuația (10) se mai simplifică încă devenind prin integrare în raport cu t

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma'_{x_i x_k}}{\partial x_i} + \rho\left(F'_k - \frac{\partial^2 u'_k}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\Bigg[\left(\frac{\partial u'_{l'}}{\partial x_{l'}} + \frac{\partial u'_{m'}}{\partial x_{m'}}\right) \sigma^0_{x_i x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}\, \sigma^0_{x_i x_j} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{\partial u^0_{l'}}{\partial x_{l'}} + \frac{\partial u^0_{m'}}{\partial x_{m'}}\right)\int_{t_0}^{t} \sigma'_{x_i x_k}\, dt + \frac{\partial^2 u^0_k}{\partial t_0\, \partial x_j}\int_{t_0}^{t} \sigma_{x_i x_j}\, dt\Bigg] = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ecuația obținută reprezintă o formă simplificată echivalentă ecuației cunoscute din teoria elasticității neliniare [3]. Semnificația fiecărui termen este evidentă.

Adoptînd legea lui Hooke

$$\sigma'_{x_i x_k} = \lambda \theta' \delta_{ik} + 2\mu\, e'_{i\,k}, \tag{12}$$

în care λ și μ sînt constantele lui Lamé, iar $\theta' = \dfrac{\partial u'_k}{\partial x_k}$ $e'_{i\,k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u'_k}{\partial x_i}\right)$, în urma înlocuirii în (11) obținem ecuația lui Lamé generalizată

$$\begin{aligned} &(\lambda + \mu)\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} + \mu \Delta u'_k + \rho\left(F'_k - \frac{\partial^2 u'_k}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\Bigg[\left(\frac{\partial u'_{e'}}{\partial x_{e'}} + \frac{\partial u'_{m'}}{\partial x_{m'}}\right)\sigma^0_{x_i x_k} + \\ &\quad + \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}\,\sigma^0_{x_i x_j} + \frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{\partial u^0_{l'}}{\partial x_{l'}} + \frac{\partial u^0_{m'}}{\partial x_{m'}}\right)\int_{t_0}^{t} (\lambda\theta'\delta_{ik} + 2\mu\, e'_{ik})\, dt + \\ &\quad + \frac{\partial^2 u^0_k}{\partial t_0\, \partial x_j}\int_{t_0}^{t} (\lambda\theta'\delta_{ij} + 2\mu\, e'_{ij})\, dt\Bigg] = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

unde am însemnat prin Δ operatorul lui Laplace. Ecuația la care am ajuns mai poate fi încă simplificată în cazul în care coeficienții celor două integrale în raport cu timpul sînt atît de mici încît ultimii termeni sînt neglijabili în raport cu ceilalți. Aceasta este adevărat în cazul în care deformația la momentul t_0 este statică, sau decurge suficient de lent în timp. De asemenea poate fi neglijată și influiența deformației superficiale, astfel că ecuația (13) poate fi scrisă definitiv sub o formă utilă direct pentru aplicații

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} + \mu \Delta u'_k + \rho\left(F'_k - \frac{\partial^2 u'_k}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_j}\,\sigma^0_{x_i x_j}\right) = 0, \tag{14}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3\,;\ j \neq k),$$

unde $\sigma^0_{x_i x_j}$ vor fi determinate rezolvînd ecuația

$$\frac{\partial \sigma_{x_i x_j}}{\partial x_i} + \rho F^0_j = 0, \tag{15}$$

în condițiile la limită corespunzătoare problemei studiate.

4. ECUAȚIILE DE MIȘCARE LINIARIZATE PENTRU FLUIDE VÎSCOASE, OMOGENE, IZOTROPE ȘI INCOMPRESIBILE

Vom porni din nou de la ecuația (8) făcînd anumite simplificări admisibile. Pentru fluidele considerate avem $\rho' = 0 \ \nabla \bar{V}^0 = \nabla \bar{V}' = 0$. De asemenea, vom presupune neglijabili acei termeni ce reprezintă produse ale mărimilor ce caracterizează mișcarea la momentul t_0. În aceste condițiia ecuația (8) devine

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial \sigma'_{x_i}}{\partial x_i} + \rho\left[\bar{F}' - \frac{\partial \bar{V}'}{\partial t} - (\bar{V}^0\nabla)\,\bar{V}' - \Big)\bar{V}'\nabla)\,\bar{V}^0\right]\right\} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\dot{\alpha}^0_{i'}\,\bar{\sigma}'_{x_i} + \dot{\alpha}'_i\,\bar{\sigma}^0_{x_i} + \sigma'_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v^0_j}{\partial x_k}\,\bar{\tau}_j - \dot{e}^0_{k'\,k'}\,\bar{\tau}_k\right) + \sigma^0_{x_i x_k}\left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k}\,\bar{\tau}_j - \dot{e}'_{k'\,k'}\,\bar{\tau}_k\right)\right] +$$

$$+\left(\frac{\partial \bar{V}^0}{\partial x_i}\nabla\right)\bar{\sigma}'_{x_i} + \left(\frac{\partial \bar{V}'}{\partial x_i}\nabla\right)\bar{\sigma}^0_{x_i} = 0, \tag{16}$$

sau sub formă tensorială

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \sigma'_{x_i x_k}}{\partial x_i} + \rho\left(F'_k - \frac{\partial v'_k}{\partial t} - v^0_l\,\frac{\partial v'_k}{\partial x_l} - v'_l\,\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\dot{\alpha}^0_{i'}\,\sigma'_{x_i x_k} + \dot{\alpha}'_{i'}\,\sigma^0_{x_i x_k} + \sigma'_{x_i x_j}\frac{\partial v^0_k}{\partial x_j} - \sigma_{x_i x_k}\,\dot{e}^0_{k'\,k'} + \sigma^0_{x_i x_j}\,\frac{\partial v'_k}{\partial x_j} - \sigma^0_{x_i x_k}\,\dot{e}'_{k'\,k}\right] + \tag{16'}$$

$$+\frac{\partial v^0_l}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \sigma'_{x_i x_k}}{\partial x_l} + \frac{\partial v'_l}{\partial x_i}\,\frac{\partial \sigma^0_{x_i x_k}}{\partial x_l},$$

unde $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Adoptînd legea lui Newton sub forma, [4],

$$\sigma_{x_i x_k} = -\,p\,\delta_{ik} + \eta\,\dot{e}_{ik} \tag{17}$$

și înlocuind în mod corespunzător în (16′) obținem

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{\partial p'}{\partial x_k} + \eta\,\Delta\,v'_k + \rho\left(F'_k - \frac{\partial v'_k}{\partial t} - v^0_e\,\frac{\partial v'_k}{\partial x_e} - v'_e\,\frac{\partial v^0_k}{\partial x_e}\right)\right] -$$

$$-\,p^0\left(\Delta v'_k - 2\,\frac{\partial^2 v'_{k'}}{\partial x^2_{k'}}\right) - p'\left(\Delta v^0_k - 2\,\frac{\partial^2 v^0_{k'}}{\partial x^2_k}\right) - 2\,\frac{\partial p'}{\partial x_j}\,\dot{e}^0_{ij} + 2\,\frac{\partial p'}{\partial x_k}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial v^0_{k'}}{\partial x_{k'}} - 2\,\frac{\partial p^0}{\partial x_j}\,\dot{e}'_{ij} + 2\,\frac{\partial p^0}{\partial x_k}\,\frac{\partial v'_{k'}}{\partial x_{k'}} + 2\eta\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\dot{\alpha}^0_{i'}\,\dot{e}'_{ik} + \dot{\alpha}'_{i'}\,\dot{e}^0_{ik} + \tag{18}$$

$$+\frac{\partial v^0_k}{\partial x_j}\,\dot{e}'_{ij} - \dot{e}^0_{k'\,k'}\,\dot{e}'_{ik} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_j}\,\dot{e}^0_{ij} - \dot{e}'_{k'\,k'}\,\dot{e}^0_{ik}\Big) + 2\eta\left(\frac{\partial v^0_l}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \dot{e}'_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial v'_l}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \dot{e}^0_{ik}}{\partial x_l}\right) = 0.$$

Ecuațiile obținute după cum se observă au o formă foarte complicată, dar care poate fi totuși simplificată în anumite cazuri. Pentru fluide ideale, punînd $\eta = 0$, se obține o simplificare importantă, dar care nu întotdeauna este justificată; mai corect este să se considere mișcarea perturbată vîscoasă, suprapusă peste o mișcare inițială fără sau cu frecare. Este evident că pot interveni o serie de alte simplificări, legate de specificul problemei studiate, asupra cărora nu este cazul să insistăm.

Este interesant de abordat problema stabilității mișcărilor hidrodinamice utilizînd ecuația (18); aceasta ar constitui fără îndoială o generalizare a modului clasic de tratare a acestei probleme, care se bazează pe utilizarea ecuațiilor

$$-\frac{\partial p'}{\partial x_k} + \eta\, \Delta v'_k + \rho\left(F'_k - \frac{\partial v'_k}{\partial t} - v^0_l \frac{\partial v'_k}{\partial x_l} - v'_l \frac{\partial v^0_k}{\partial x_l}\right) = 0, \qquad (k, l=1, 2, 3). \quad (19)$$

Detalii asupra acestei chestiuni se pot găsi în cunoscuta monografie a lui C. C. Lin [5]. De asemenea, observații interesante sînt cuprinse în articolele [6] și [7]. Urmează ca această problemă să facă obiectul unor articole ulterioare.

Asupra condițiilor la limită nu am insistat, deoarece, punerea lor nu ridică probleme deosebite. Acestea pot rămîne aceleași atît pentru mișcarea inițială, cît și pentru cea de perturbație, ceea ce echivalează cu condiții nule pe frontiere pentru perturbații. Asemenea condiții se pun la studiul stabilității mișcării mediului continuu deformabil. Dacă avem drept frontiere anumite suprafețe libere deformabile, condițiile pe acestea sînt ele înșile funcții de necunoscutele problemei și prin urmare rezolvarea problemei propuse devine dificilă.

În ce privește condițiile inițiale trebuie admis că acestea nu sînt toate nule în cazul studiului stabilității mișcării, deoarece în virtutea condițiilor la limită omogene și a faptului că ecuațiile liniarizate obținute, ce descriu mișcarea de perturbație, sînt de asemenea omogene, rezultă că această mișcare este nulă. Se poate totuși să considerăm și cazul condițiilor inițiale nule, dacă în ecuația (8) se păstrează acei termeni ce reprezintă produse ale mărimilor ce caracterizează mișcarea la momentul t_0. Astfel ecuațiile (11) și (18) nu vor mai fi omogene și prin urmare vor exista soluții ale acestor ecuații cu condiții inițiale și la limită omogene.

Primită la redacție la 28 aprilie 1962

ПРИВЕДЕНИЕ К ЛИНЕЙНОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНЫХ СРЕД

РЕЗЮМЕ

Нелинейные уравнения движения сплошных сред, которые были даны в новой форме в одной из предыдущих работ, приводятся к линейному виду и в результате получаются уравнения, применяющиеся особенно при изучении устойчивости движения.

SUR LA LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT D'UN MILIEU CONTINU DÉFORMABLE

RÉSUMÉ

En utilisant les équations non linéaires du mouvement d'un milieu continu déformable quelconque, présentées sous une nouvelle forme dans un article antérieur, l'auteur procède à leur linéarisation. Les équations résultantes peuvent servir surtout pour l'étude de la stabilité du mouvement.

BIBLIOGRAFIE

1. V. MANEA, *Asupra ecuațiilor neliniare de mișcare ale unui mediu continuu deformabil.* St. cerc. mec. apl., *2* (1962).
2. — *Asupra ecuațiilor neliniare de mișcare ale unui mediu continuu deformabil în coordonate curbilinii oarecare.* St. cerc. mec. apl., *3* (1962).
3. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Основы нелинейной теории упругости.* ОГИЗ. Гостехиздат, Москва, 1948.
4. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИШИЦ, *Механика сплошных сред.* Госуд. издат. технико-теоретической литературы, Москва, 1953.
5. К. К. ЛИН, *Теория гидродинамической устойчивости* (перев. с английского яз.). Издат. иностр. литературы, Москва, 1958.
6. K. M. CASE, *Hydrodynamic stability of parallel flows.* J. of Fluid Mechanics, 10/3 May (1961).
7. C. C. LIN, *Some mathematical problems in the theory of the stability of parallel flows.* J. of Fluid Mechanics, 10/3 May (1961).

STUDII

VIBRAȚIILE ȘI STABILITATEA AEROELASTICĂ A STRUCTURILOR CILINDRICE SUBȚIRI, NEOMOGENE, PLASATE ÎNTR-UN CURENT FLUID COMPRESIBIL

DE

L. LIBRESCU

1. INTRODUCERE ȘI IPOTEZE

În lucrarea de față este abordată problema vibrațiilor și a stabilității aeroelastice a structurilor subțiri, de secțiune cilindrică circulară, construite prin suprapunerea arbitrară a *s* straturi elastic-ortotrope [1]). Se presupune că structura cilindrică astfel construită este plasată într-un curent fluid ideal, compresibil, vectorul vitezei fiind paralel la axa structurii cilindrice (fig. 1).

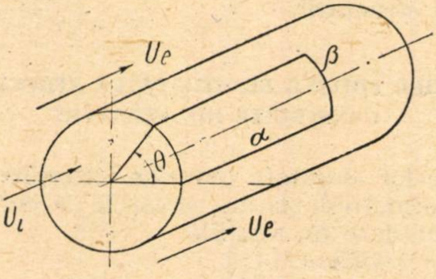


Fig. 1

În cele ce urmează vom deduce ecuațiile rezolvente ale problemei bazați pe următoarele ipoteze [2], [3], [4].

---

[1]) Materialele noi cum ar fi de exemplu plasticele armate cu metale și metalele armate cu fibre, utilizate pe o scară din ce în ce mai mare în proiectarea rachetelor și a vehiculelor spațiale, sînt asimilate cu materiale omogene și elastic-ortotrope în sensul clasic al cuvîntului [1].

a) Straturile care formează structura sînt împreunate rigid astfel încît aceasta se deformează ca un tot.

b) Pentru structura în ansamblu considerăm valabilă ipoteza Love-Kirchhoff.

c) Structura cilindrică o vom considera de mică curbură; așa încît ecuațiile de echilibru, de compatibilitate, ecuațiile fizice, precum și ecuațiile geometrice deformații-deplasări vor fi afectate de ipotezele proprii acestei teorii [5].

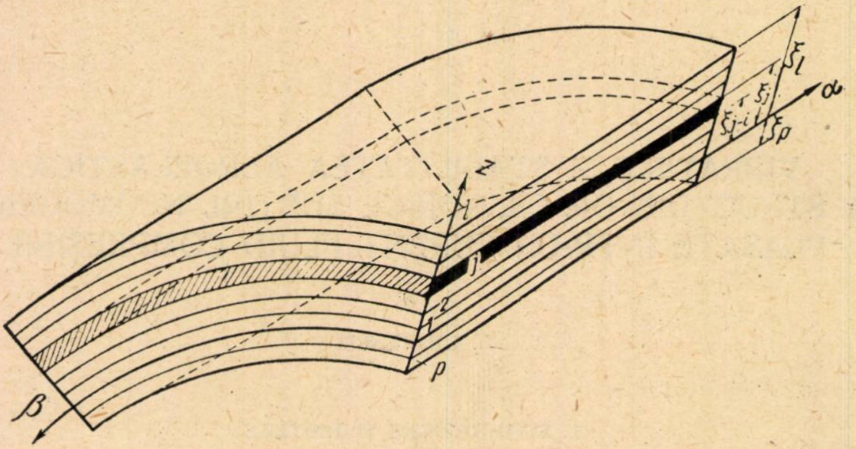


Fig. 2

Suprafața de referință a eforturilor și momentelor va fi aleasă ca în figura 2 și va fi raportată la un sistem de coordonate curbiliniu ortogonal α, $\beta = R\,\theta$ reprezentînd respectiv lungimea arcurilor generatoare și a cercului director, R fiind raza de curbură corespunzînd suprafeței de referință a structurii.

2. ECUAȚIILE PRIVIND ELASTICITATEA STRUCTURILOR CONSTRUITE DIN STRATURI

În baza ipotezelor enunțate anterior, ecuațiile de echilibru, ecuațiile geometrice deformații-deplasări, ecuațiile de compatibilitate precum și ecuațiile fizice sînt date de relațiile

a) *Ecuațiile de echilibru*[1] [5]

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + X = 0, \qquad \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_\beta}{\partial \beta} + Y = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{T_\beta}{R} + \frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 M_\beta}{\partial \beta^2} - 2\,\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\, \partial \beta} + Z - \frac{\partial X_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial Y_1}{\partial \beta} = 0 \qquad (1b)^*)$$

---

[1] Notațiile utilizate în lucrare fără o mențiune specială corespund sensului dat de exemplu în lucrarea [5].

unde

$$X = -m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m g_1\frac{\partial u}{\partial t}, \quad Y = -m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - m g_2\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$Z = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m g_3\frac{\partial w}{\partial t} + p_e - p_i,$$

$$X_1 = -m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - m_1 g_1\frac{\partial u}{\partial t}, \quad Y_1 = -m_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - m_1 g_2\frac{\partial v}{\partial t}$$

iar

$$m = \frac{1}{g}\sum_{j=1}^{s}\gamma_j(\xi_j-\xi_{j-1}), \quad m_1 = \frac{1}{2g}\left[\sum_{j=1}^{l}\gamma_j(\xi_j^2-\xi_{j-1}^2) - \sum_{j=l+1}^{s}\gamma_j(\xi_j^2-\xi_{j-1}^2)\right]$$

g fiind accelerația gravitășii; g_1, g_2, g_3, — coeficienții de amortizare a structurii; p_e, p_i — presiunea exterioară, respectiv interioară, γ_j — masa specifică a materialului stratului j.

b) *Relațiile geometrice deformații-deplasări* [5]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial\alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{w}{R}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{\partial u}{\partial\beta}, \tag{2a}$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}. \tag{2b}$$

c) *Ecuații de compatibilitate*

Prin eliminarea lui u și v din ecuațiile (2a) se obține ecuația de compatibilitate

$$\frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\varkappa_1}{R} = 0. \tag{3}$$

d) *Ecuațiile fizice*

Considerînd materialul fiecărui strat elastic, omogen și ortotrop și presupunînd că sistemul de coordonate ales coincide cu direcțiile principale de ortotropie, pe baza legii fizice al lui Hooke și a ipotezelor enunțate anterior, se deduc pentru cazul structurilor subțiri construite din s straturi ortotrope, următoarele ecuații fizice

$$T_\alpha = \overset{1}{F}_\alpha(\varepsilon_1 + \overset{1}{\mu}_\beta\varepsilon_2) + \overset{1}{K}_\alpha(\varkappa_1 + \overset{5}{\mu}_\beta\varkappa_2), \quad T_\beta = \overset{1}{F}_\beta(\varepsilon_2 + \overset{1}{\mu}_\alpha\varepsilon_1) + \overset{1}{K}_\beta(\varkappa_2 + \overset{5}{\mu}_\alpha\varkappa_1),$$

$$T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha} = \frac{\overset{2}{F}_\alpha}{2}(1 - \overset{2}{\mu}_\beta)\,\omega + \overset{2}{K}_\alpha(1 - \overset{6}{\mu}_\beta)\,\tau, \tag{4a}$$

$$M_\alpha = -\overset{1}{G}_\alpha(\varkappa_1 + \overset{3}{\mu}_\beta\varkappa_2) - \overset{1}{K}_\alpha(\varepsilon_1 + \overset{5}{\mu}_\beta\varepsilon_2),$$

$$M_\beta = -\overset{1}{G}_\beta(\varkappa_2 + \overset{3}{\mu}_\alpha\varkappa_1) - \overset{1}{K}_\beta(\varepsilon_2 + \overset{5}{\mu}_\alpha\varepsilon_1), \tag{4b}$$

$$M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha} = \frac{\overset{2}{K}_\alpha}{2}(1 - \overset{6}{\mu}_\beta)\,\omega + \overset{2}{G}_\alpha(1 - \overset{4}{\mu}_\beta)\,\tau,$$

unde expresiile parametrilor mecanici și a coeficienților Poisson reduși, sînt dați în tabela 1.

Tabela 1

$$\overset{1}{F}_\alpha = \sum_{j=1}^{s}\frac{E_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}, \qquad \overset{1}{G}_\alpha = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{s}\frac{E_\alpha^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}, \qquad (\alpha \rightleftarrows \beta);$$

$$\overset{2}{F}_\alpha = \sum_{j=1}^{s}\frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}, \qquad \overset{2}{G}_\alpha = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{s}\frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}};$$

$$\overset{1}{K}_\alpha = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{l}\frac{E_\alpha^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j} - \sum_{j=l+1}^{s}\frac{E_\alpha^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\right] \quad (\alpha \rightleftarrows \beta);$$

$$\overset{2}{K}_\alpha = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{l}\frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}} - \sum_{j=l+1}^{s}\frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}\right];$$

$$\overset{1}{\mu}_\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{s}\frac{E_\beta^j\mu_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{s}\frac{E_\beta^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}}, \qquad \overset{3}{\mu}_\alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{s}\frac{E_\beta^j\mu_\alpha^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{s}\frac{E_\beta^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j\mu_\beta^j}} \quad (\alpha \rightleftarrows \beta);$$

(continuare tabela 1)

$$\overset{2}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{E_\beta^j K^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}, \quad \overset{4}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{E_\beta^j K^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\dfrac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}};$$

$$\overset{5}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} \dfrac{E_\beta^j \mu_\alpha^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum\limits_{j=l+1}^{s} \dfrac{E_\beta^j \mu_\alpha^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{l} \dfrac{E_\beta^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum\limits_{j=l+1}^{s} \dfrac{E_\beta^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}} \quad (\alpha \rightleftarrows \beta);$$

$$\overset{6}{\mu}_\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} \dfrac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} - \sum\limits_{j=l+1}^{s} \dfrac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum\limits_{j=1}^{l} \dfrac{E_\beta^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\dfrac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}} - \sum\limits_{j=l+1}^{s} \dfrac{E_\beta^j K^j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\dfrac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}}.$$

În aceste relații K^j sînt constante nuldimensionale definite de:

$$G_1^j = K^j \frac{\sqrt{E_\alpha^j E_\beta^j}}{2\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha^j \mu_\beta^j}\right)}.$$

Pentru cazul structurilor construite din s straturi izotrope, expresiile rigidităților și a coeficienților Poisson reduși sînt date de:

$$F = \sum_{j=1}^{s} \frac{E_j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_j^2}; \quad G = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{s} \frac{E_j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_j^2};$$

$$K = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{l} \frac{E_j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2} - \sum_{j=l+1}^{s} \frac{E_j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2}\right]$$

$$\overset{1}{\mu} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{E_j \mu_j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_j^2}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{E_j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_j^2}}; \quad \overset{3}{\mu} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} \dfrac{E_j \mu (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_j^2}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{E_j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_j^2}}$$

$$\overset{2}{\mu} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} \dfrac{E_j \mu_j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2} - \sum\limits_{j=l+1}^{s} \dfrac{E_j \mu_j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{E_j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2} - \sum\limits_{j=l+1}^{s} \dfrac{E_j (\xi_j^2 - \xi_{j-1}^2)}{1 - \mu_j^2}};$$

Din ecuațiile fizice (4) se deduc cîteva relații utile.
Astfel din ecuațiile (4a) vom deduce expresiile deformațiilor tangențiale

$$\varepsilon_1 = \frac{T_\alpha - \overset{1}{\mu}_\alpha T_\beta + \overset{1}{K}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1)\varkappa_1 + \overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha)\varkappa_2}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{T_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta T_\alpha + \overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta)\varkappa_1 + \overset{1}{K}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1)\varkappa_2}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}, \tag{5}$$

$$\omega = \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} T_{\alpha\beta} - \frac{2\overset{2}{K}_\alpha (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} \tau$$

iar din ecuațiile (4b) și (5), expresiile momentelor prin intermediul eforturilor tangențiale și a deformațiilor de încovoiere

$$\begin{aligned}
M_\alpha = &- \frac{\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}} T_\alpha - \frac{\overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{K}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}} T_\beta + \\
&+ \left[\frac{(\overset{1}{K}_\alpha)^2 [\overset{1}{F}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta)^2 + \overset{1}{F}_\beta - 2\overset{1}{F}_\beta \overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha]}{\mathcal{F}} - \overset{1}{G}_\alpha \right] \varkappa_1 - \\
&- \left[\frac{\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{K}_\beta (1 + \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta) \overset{1}{F}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - (\overset{1}{K}_\alpha)^2 \overset{1}{F}_\beta \overset{5}{\mu}_\beta - (\overset{1}{K}_\beta)^2 \overset{1}{F}_\alpha \overset{5}{\mu}_\alpha}{\mathcal{F}} + \overset{1}{G}_x \overset{3}{\mu}_\beta \right] \varkappa_2 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_\beta = &- \frac{\overset{1}{K}_\beta \overset{1}{F}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha - \overset{1}{\mu}_\alpha)}{\mathcal{F}} T_\alpha - \frac{\overset{1}{K}_\beta \overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}} T_\beta + \\
&+ \left[\frac{(\overset{1}{K}_\beta)^2 [\overset{1}{F}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha)^2 + \overset{1}{F}_\alpha - 2\overset{1}{F}_\alpha \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta]}{\mathcal{F}} - \overset{1}{G}_\beta \right] \varkappa_2 - \\
&- \left[\frac{\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{K}_\beta (1 + \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta) \overset{1}{F}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - (\overset{1}{K}_\alpha)^2 \overset{1}{F}_\beta \overset{5}{\mu}_\beta - (\overset{1}{K}_\beta)^2 \overset{1}{F}_\alpha \overset{5}{\mu}_\alpha}{\mathcal{F}} + \overset{1}{G}_\beta \overset{3}{\mu}_\alpha \right] \varkappa_1 ,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\overset{2}{K}_\alpha (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} T_{\alpha\beta} - \left[\frac{(\overset{2}{K}_\alpha)^2 (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)^2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} - \overset{2}{G}_\alpha (1 - \overset{4}{\mu}_\beta) \right] \tau .$$

e) *Deducerea ecuațiilor rezolvente*

În scopul reducerii problemei elastodinamice la un sistem de ecuații în deplasarea normală *w* și funcția de efort *c* vom relua procedeul folosit într-o serie de lucrări anterioare [7], [8], [6]. Conform acestui procedeu vom diferenția prima ecuație din [1a] în raport cu α, a doua ecuație în raport cu β și vom ține seama de relațiile (3). Se obțin în acest fel ecuațiile

$$\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\, \partial \beta} = m\, D_1\, \varepsilon_1\,; \qquad \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{\partial^2 T_\beta}{\partial \beta^2} = m\, D_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{w}{R}\right), \tag{7}$$

unde D_j — operatori de timp definiți de

$$D_j = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g_j \frac{\partial}{\partial t} \qquad (j = 1,\, 2). \tag{8}$$

Utilizînd expresiile lui ε_1 și ε_2 date de relațiile (5) și ținînd seama și de relațiile geometrice (2b), ecuațiile (7) pot fi transcrise sub forma următoare :

$$\begin{gathered}
\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{m}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} D_1\right] T_\alpha + \frac{m\, \overset{1}{\mu}_\alpha}{\overset{1}{F}_\alpha\, (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} D_1\, T_\beta + \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \\
= m\, D_1 \left[\frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right], \\
\left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{m}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} D_2\right] T_\beta + \frac{m\, \overset{1}{\mu}_\beta}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} D_2\, T_\alpha + \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \\
= m\, D_2 \left[\frac{w}{R} + \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1)}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right].
\end{gathered} \tag{9}$$

Prin scăderea celor două ecuații se obține ecuația,

$$\begin{gathered}
\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{m}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} (D_1 + \overset{1}{\mu}_\alpha D_2)\right] T_\alpha - \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \right. \\
\left. - \frac{m}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} (D_2 + \overset{1}{\mu}_\beta D_1)\right] T_\beta = m\, D_1 \left[\frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \right. \\
\left. + \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right] - m\, D_2 \left[\frac{w}{R} + \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \right. \\
\left. + \frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right],
\end{gathered} \tag{10}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM

care se vede uşor că este verificată identic dacă se exprimă eforturile T_α şi T_β prin relaţiile

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - m \overset{1}{N}_\beta \left[(1 + \overset{1}{\mu}_\beta) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (g_2 + \overset{1}{\mu}_\beta g_1) \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} c + F_1, \\ T_\beta &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m \overset{1}{N}_\alpha \left[(1 + \overset{1}{\mu}_\alpha) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (g_1 + \overset{1}{\mu}_\alpha g_2) \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} c + F_2, \end{aligned} \tag{11$^{1)}$}$$

c fiind o funcţie potenţială, F_1 şi F_2 soluţii particulare ale ecuaţiei

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m \overset{1}{N}_\alpha (D_1 + \overset{1}{\mu}_\alpha D_2) \right] F_1 - \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - m \overset{1}{N}_\beta (D_2 + \overset{1}{\mu}_\beta D_1) \right] F_2 = \\ &= m D_1 \left[\frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right] - \\ &- m D_2 \left[\frac{w}{R} + \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1)}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Expresia eforturilor $T_{\alpha\beta}$ se obţine adunînd ecuaţiile (9). Se obţine în acest fel exprimarea lui $\dfrac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\, \partial \beta}$ prin funcţia potenţială c

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha\, \partial \beta} &= - \frac{\partial^4 c}{\partial \alpha^2\, \partial \beta^2} + m \overset{1}{N}_\beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} D_2 c + m \overset{1}{N}_\alpha \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} D_1 c - \\ &- m^2 \overset{1}{N}_\alpha \overset{1}{N}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta) D_1 D_2 c, \end{aligned} \tag{13}$$

în timp ce funcţiile F_1 şi F_2 satisfac şi la ecuaţia

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - m \overset{1}{N}_\alpha (D_1 - \overset{1}{\mu}_\alpha D_2) \right] F_1 + \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - m \overset{1}{N}_\beta (D_2 - \overset{1}{\mu}_\beta D_1) \right] F_2 = \\ &= m D_1 \left[\frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right] + \\ &+ m D_2 \left[\frac{w}{R} + \frac{\overset{1}{K}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\overset{1}{K}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1)}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right]. \end{aligned} \tag{14}$$

În acest fel eforturile tangenţiale T_α, T_β şi $T_{\alpha\beta}$ sînt exprimate prin funcţia potenţială c şi prin funcţiile F_1 şi F_2 (relaţiile (11) şi (13)) acestea din urmă fiind soluţii particulare ale ecuaţiilor (12) şi (14).

---

1) În această relaţie cît şi în cele ce vor urma pentru simplificarea scrisului vom nota :

$$\overset{1}{N}_\alpha = \frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}, \quad \overset{1}{N}_\beta = \frac{1}{\overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}, \quad \mathcal{F} = \overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta).$$

Pentru a construi sistemul de ecuații în deplasarea normală w și funcția potențială c vom observa că sistemul de ecuații ce trebuie a fi satisfăcut în final este format din ecuația de echilibru (1b) precum și din ecuația de compatibilitate (3). Exprimînd în ecuația (1b) momentele cu ajutorul relațiilor (6) iar eforturile tangențiale și deformațiile de încovoiere cu ajutorul relațiilor (11) respectiv a relațiilor (2b) se obține una din ecuațiile căutate

$$\begin{aligned}
& l_{11}\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4}+l_{12}\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+l_{22}\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4}+\left(mf_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+mf_2\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{R}\right)\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}+\\
&+\left(mf_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}+mf_4\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}+m^2 f_5 D_1 D_2 c-\frac{1}{R}\,m\,\overset{1}{N}_\alpha\left(f_6\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f_7\frac{\partial}{\partial t}\right)c+\\
&+\frac{m_1}{R}D_2 w+m_1\left(s_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+s_3\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+m_1\left(s_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+s_4\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}- \qquad (15)\\
&-g_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}-2g_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}-g_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-f_8\frac{\partial^2 F_1}{\partial\alpha^2}-f_9\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}+\\
&+k_{11}\frac{\partial^2 F_2}{\partial\alpha^2}+k_{22}\frac{\partial^2 F_1}{\partial\beta^2}+\frac{F_2}{R}+Z=0.
\end{aligned}$$

Considerînd pe de altă parte ecuația (3) în care vom exprima deformațiile tangențiale cu ajutorul relațiilor (5) iar eforturile tangențiale și deformațiile de încovoiere prin aceleași relații ca anterior, se obține a doua ecuație la care trebuie să satisfacă funcțiile c și w.

$$\begin{aligned}
& \overset{1}{N}_\beta\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4}+\overset{1}{N}_\alpha\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4}-2\left(\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{N}_\alpha-\frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}-\\
&-m\left(q_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+q_2\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-m\left(q_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}+q_4\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}+m^2 q_5 D_1 D_2 c+\\
&+l_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+l_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+l_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+ \qquad (16)\\
&+\overset{1}{N}_\beta\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial\alpha^2}-\overset{1}{\mu}_\beta\frac{\partial^2 F_1}{\partial\alpha^2}\right)+\overset{1}{N}_\alpha\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\beta^2}-\overset{1}{\mu}_\alpha\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}\right)=0.
\end{aligned}$$

Coecifienții l_{ik}, q_{ik}, f_i, q_i, s_i ce apar în ecuațiile (15) și (16) sînt dați prin relațiile

$$l_{11}=\frac{\overset{1}{K}_\alpha\overset{1}{F}_\alpha(\overset{1}{\mu}_\beta-\overset{5}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}},\quad l_{22}=\frac{\overset{1}{K}_\beta\overset{1}{F}_\beta(\overset{1}{\mu}_\alpha-\overset{5}{\mu}_\alpha)}{\mathcal{F}},\quad l_{12}=\frac{2\overset{2}{K}_\alpha(1-\overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}+ \qquad (17)$$

$$+\frac{2\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{F}_\beta \overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{F}_\beta - \overset{1}{K}_\beta \overset{1}{F}_\alpha}{\mathcal{F}}, \quad g_{11} = \overset{1}{G}_\alpha - \frac{(\overset{1}{K}_\alpha)^2 [\overset{1}{F}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta)^2 + \overset{1}{F}_\beta - 2\overset{1}{F}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta]}{\mathcal{F}},$$

$$g_{22} = \overset{1}{G}_\beta - \frac{(\overset{1}{K}_\beta)^2 [\overset{1}{F}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha)^2 + \overset{1}{F}_\alpha - 2\overset{1}{F}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \overset{5}{\mu}_\alpha]}{\mathcal{F}}, \quad g_{12} = \overset{1}{G}_\beta \overset{3}{\mu}_\alpha + \overset{2}{G}_\alpha (1 - \overset{4}{\mu}_\beta) -$$

$$-\frac{(\overset{2}{K}_\alpha)^2 (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)^2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} + \frac{\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{K}_\beta \overset{1}{F}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha (1 + \overset{5}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta) - (\overset{1}{K}_\alpha)^2 \overset{1}{F}_\beta \overset{5}{\mu}_\beta - (\overset{1}{K}_\beta)^2 \overset{1}{F}_\alpha \overset{5}{\mu}_\alpha}{\mathcal{F}},$$

$$f_1 = \frac{1}{\mathcal{F}}\left[\overset{1}{K}_\alpha (1 + \overset{5}{\mu}_\beta) - \frac{2\overset{2}{K}_\alpha \overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} + \frac{m_1}{m} \overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\beta)\right],$$

$$f_2 = \frac{1}{\mathcal{F}}\left[\overset{1}{K}_\alpha (g_2 + \overset{5}{\mu}_\beta g_1) + \frac{m_1}{m} \overset{1}{F}_\alpha (g_2 - \overset{1}{\mu}_\beta g_1) - \frac{2\overset{1}{F}_\alpha \overset{2}{K}_\alpha (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} g_2\right],$$

$$f_3 = \frac{1}{\mathcal{F}}\left[\overset{1}{K}_\beta (1 + \overset{5}{\mu}_\alpha) - \frac{2\overset{2}{K}_\alpha \overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} + \frac{m_1}{m} \overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha)\right],$$

$$f_4 = \frac{1}{\mathcal{F}}\left[\overset{1}{K}_\beta (g_1 + \overset{5}{\mu}_\alpha g_2) - \frac{2\overset{2}{K}_\alpha \overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} g_1 + \frac{m_1}{m} \overset{1}{F}_\beta (g_1 - \overset{1}{\mu}_\alpha g_2)\right],$$

$$f_5 = \frac{2}{\mathcal{F}}\left[\frac{\overset{2}{K}_\alpha (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} - \frac{m_1}{m}\right., \quad f_6 = 1 + \overset{1}{\mu}_\alpha, \quad f_7 = g_1 + \overset{1}{\mu}_\alpha g_2, \tag{17}$$

$$f_8 = \frac{\overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{5}{\mu}_\beta)}{\mathcal{F}}, \quad f_9 = \frac{\overset{1}{K}_\beta \overset{1}{F}_\alpha (1 - \overset{1}{\mu}_\beta \overset{5}{\mu}_\alpha)}{\mathcal{F}},$$

$$q_1 = \overset{1}{N}_\beta \left(\frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right), \quad q_2 = \overset{1}{N}_\beta \left(\frac{g_1}{\overset{1}{F}_\alpha} + \frac{2 g_2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right),$$

$$q_3 = \overset{1}{N}_\alpha \left(\frac{1}{\overset{1}{F}_\beta} + \frac{2}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right), \quad q_4 = \overset{1}{N}_\alpha \left(\frac{g_2}{\overset{1}{F}_\beta} + \frac{2 g_1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right),$$

$$q_5 = \frac{2}{\mathcal{F}\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}, \quad s_1 = \overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1) + \overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{N}_\beta (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta),$$

$$s_2 = \overset{1}{K}_\beta \overset{1}{N}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha) + \overset{1}{K}_\beta \overset{1}{N}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1),$$

$$s_3 = g_1 \overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha (\overset{5}{\mu}_\beta \overset{1}{\mu}_\alpha - 1) + g_2 \overset{1}{K}_\alpha \overset{1}{N}_\beta (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta),$$

$$s_4 = g_1 \overset{1}{K}_\beta \overset{1}{N}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\alpha - \overset{5}{\mu}_\alpha) + g_2 \overset{1}{K}_\beta \overset{1}{N}_\beta (\overset{5}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta - 1).$$

În felul acesta ecuaţiile de bază ale teoriei structurilor subţiri, cilindrice, circulare, neomogene, de mică curbură, au fost reduse la sistemul format din ecuaţiile (15), (16) în funcţiile c şi w, F_1 şi F_2 fiind integrale particulare ale ecuaţiilor (12) şi (14). Se remarcă uşor că efectul forţelor de inerţie tangenţiale şi al forţelor de amortizare tangenţiale se datoreşte în parte deplasării normale w şi în parte eforturilor tangenţiale. În cele ce urmează vom identifica contribuţia lui w în efectul forţelor de inerţie tangenţiale şi al forţelor de amortizare tangenţiale întovărăşind termenii respectivi cu factorul δ_3 iar contribuţia eforturilor tangenţiale în efectul forţelor de amortizare tangenţiale, şi respectiv al forţelor de inerţie tangenţiale întovărăşind termenii respectivi cu factorii δ_2 şi δ_1. Cu această menţiune sistemul de ecuaţii resolvent se scrie astfel

$$\begin{aligned}
&l_{11}\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4}+l_{12}\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+l_{22}\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4}+\Bigl(\delta_1 f_1 m\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\delta_2 f_2 m\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{R}\Bigr)\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}+\\
&+\Bigl(\delta_1 f_3 m\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\delta_2 f_4 m\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}+m^2 f_5\Bigl(\delta_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\delta_2 g_1\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)\Bigl(\delta_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\\
&+\delta_2 g_2\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)c-\frac{1}{R}m\overset{1}{N}_\alpha\Bigl(\delta_1 f_6\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\delta_2 f_7\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)c-g_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}-g_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-\\
&-2g_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+m_1\Bigl(\delta_1 s_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\delta_2 s_3\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+m_1\Bigl(\delta_1 s_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\\
&+\delta_2 s_4\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{m_1}{R}\Bigl(\delta_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\delta_2 g_2\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)w-\delta_3 f_8\frac{\partial^2 F_1}{\partial\alpha^2}-\\
&-\delta_3 f_9\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}+\delta_3 k_{22}\frac{\partial^2 F_1}{\partial\beta^2}+\delta_3 k_{11}\frac{\partial^2 F_2}{\partial\alpha^2}+\delta_3\frac{F_2}{R}+Z=0
\end{aligned}\tag{18a}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{N}_\beta\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4}+\overset{1}{N}_\alpha\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4}-2\Bigl(\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{N}_\alpha-\frac{1}{\overset{2}{F}_\beta(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\Bigr)\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}-m\,\delta_1 q_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\\
&+\delta_2 q_2\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}-m\Bigl(\delta_1 q_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\delta_2 q_4\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2}+m^2 q_5\Bigl(\delta_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\\
&+\delta_2 g_1\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)\Bigl(\delta_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\delta_2 g_2\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)c+l_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+l_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+l_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}+\\
&+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\delta_3\overset{1}{N}_\beta\Bigl(\frac{\partial^2 F_2}{\partial\alpha^2}-\overset{1}{\mu}_\beta\frac{\partial^2 F_1}{\partial\alpha^2}\Bigr)+\delta_3\overset{1}{N}_\alpha\Bigl(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\beta^2}-\overset{1}{\mu}_\alpha\frac{\partial^2 F_2}{\partial\beta^2}\Bigr)=0,
\end{aligned}\tag{18b}$$

$$\begin{aligned}
&\Bigl[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-m\overset{1}{N}_\alpha(D_1+\overset{1}{\mu}_\alpha D_2)\Bigr]F_1-\Bigl[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-m\overset{1}{N}_\beta(D_2+\overset{1}{\mu}_\beta D_1)\Bigr]F_2=\\
&\quad=\delta_3 m D_1\Bigl[k_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-f_8\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\Bigr]-\delta_3 m D_2\Bigl[\frac{w}{R}+k_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}-f_9\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\Bigr],
\end{aligned}\tag{18c}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - m \overset{1}{N}_\alpha (D_1 - \overset{1}{\mu}_\alpha D_2)\right] F_1 + \left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - m \overset{1}{N}_\beta (D_2 - \overset{1}{\mu}_\beta D_1)\right] F_2 =$$
$$= \delta_3 m D_1 \left[k_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - f_8 \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right] + \delta_3 m D_2 \left[\frac{w}{R} + k_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - f_9 \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right]. \tag{18d}$$

Utilizarea sistemului de ecuații (18) la studiul stabilității aeroelastice ne-ar conduce la complicații foarte mari. De aceea, sîntem conduși la simplificarea lui. În acest scop vom observa că neglijarea contribuției deplasării w în efectul forțelor de inerție tangențiale și al forțelor de amortizare tangențiale atrage după sine $\delta_3 = 0$ în sistemul de ecuații (18). Neglijînd această contribuție sistemul de ecuații menționat se simplifică în mod substanțial devenind în acest caz

$$l_{11} \frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4} + l_{12} \frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2 \partial\beta^2} + l_{22} \frac{\partial^4 c}{\partial\beta^2} + \left(\delta_1 f_1 m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta_2 f_2 m \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{R}\right) \frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} +$$
$$+ \left(\delta_1 f_3 m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta_2 f_4 m \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} + m^2 f_5 \left(\delta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta_2 g_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\delta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} +\right.$$
$$\left. + \delta_2 g_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) c - \frac{1}{R} m \overset{1}{N}_\alpha \left(\delta_1 f_6 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta_2 f_7 \frac{\partial}{\partial t}\right) c - g_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} - g_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} - \tag{19a}$$
$$- 2g_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2 \partial\beta^2} + m_1 s_1 \frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2 \partial t^2} + m_1 s_2 \frac{\partial^4 w}{\partial\beta^2 \partial t^2} + \frac{m_1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Z = 0$$

$$\overset{1}{N}_\beta \frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4} + \overset{1}{N}_\alpha \frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4} - 2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right) \frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2 \partial\beta^2} - m \left(\delta_1 q_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} +\right.$$
$$\left. + \delta_2 q_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} - m \left(\delta_1 q_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta_2 q_4 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} + m^2 q_5 \left(\delta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} +\right. \tag{19b}$$
$$\left. + \delta_2 g_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\delta_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \delta_2 g_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) c + l_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + l_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2 \partial\beta^2} + l_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} +$$
$$+ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} = 0.$$

În cazul neglijării contribuției aduse de deplasarea normală w în efectul forțelor de inerție tangențiale și al forțelor tangențiale de amortizare precum și a contribuției aduse de eforturile tangențiale în efectul forțelor de amortizare tangențiale este necesar ca în sistemul de ecuații (18), $\delta_3 = \delta_2 = 0$. Cazul vibrațiilor transversale atrage după sine $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Considerarea în întregime a efectului forțelor de inerție tangențiale precum și a efectului forțelor de amortizare tangențiale atrage după sine $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$ în sistemul de ecuații (18).

3. VIBRAȚIILE STRUCTURILOR CILINDRICE CIRCULARE PLASATE ÎNTR-UN CURENT FLUID COMPRESIBIL

Vom considera în cele ce urmează, bazați pe ecuațiile obținute anterior, problema vibrațiilor structurilor de formă cilindrică circulară plasate într-un curent fluid, ideal, compresibil, curent ce-l vom considera potențial și izentropic cu modulul vitezei la infinit U. Vectorul viteză îl vom considera paralel cu axa structurii cilindrice. Expresia componentei transversale Z a vectorului forțelor exterioare în cazul structurii care vibrează și în condițiile scurgerii curentului compresibil este dată de relația [9], [12]

$$Z = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m g_3 \frac{\partial w}{\partial t} - m_* \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)^2 w, \tag{20}$$

unde

$$m_* = \rho_0 \psi R, \tag{21}$$

definește masa adăugată a scurgerii, ρ_0 — densitatea fluidului,

$$\psi_i = \frac{Z_n(\nu_i R)}{\nu_i R Z_n'(\nu_i R)}, \quad \psi_e = -\frac{Z_n(\nu_e R)}{\nu_e R Z_n'(\nu_e R)}, \tag{22}$$

$Z_n(\nu R)$ fiind una din funcțiile cilindrice de ordin n, $Z_n'(\nu R) = \left.\frac{dZ_n(r_0)}{dr_0}\right|_{r_0=\nu R}$.

În cazul unei scurgeri exterioare

$$Z_n(\nu_e R) = \begin{cases} K_n(\nu_e R) & (M_1 < 1), \\ H_n^{(2)}(\nu_e R) & (M_1 > 1,\ V > U), \\ H_n^{(1)}(\nu_e R) & (M_1 > 1,\ V < U), \end{cases} \tag{23}$$

iar în cazul unei scurgeri interioare

$$Z_n(\nu_i R) = \begin{cases} I_n(\nu_i R) & (M_1 < 1), \\ J_n(\nu_i R) & (M_1 > 1), \end{cases} \tag{24}$$

M_1 fiind numărul Mach corespunzător diferenței vitezelor curentului neperturbat și a undelor călătoare

$$M_1 = \frac{|U - V|}{c_\infty}, \tag{25}$$

iar

$$\nu = k\sqrt{|M_1^2 - 1|},$$

$K_n(\nu R)$ — funcţia Mac-Donald, $H_n^{(1)}(\nu R)$ şi $H_n^{(2)}(\nu R)$, funcţia Hankel de speţa întîia respectiv de speţa a doua, $I_n(\nu R)$ funcţii cilindrice de argument imaginar de ordin n, $J_n(\nu R)$ funcţii Bessel de argument real de ordinul n, $k = \dfrac{\pi}{\lambda}$ unde λ este lungimea semiundei în direcţia generatoarei, ω frecvenţa unghiulară.

În baza expresiilor (22), (23), (24) şi a formulelor de diferenţiere a funcţiilor cilindrice se obţine [9], [12],

$$\frac{1}{\psi_i} = \begin{cases} \nu_i R \dfrac{I_{n-1}}{I_n} - n & (M_1 < 1), \\ \nu_i R \dfrac{J_{n-1}}{J_n} - n & (M_1 > 1), \end{cases} \tag{26}$$

$$\frac{1}{\psi_e} = \begin{cases} \nu_e R \dfrac{K_{n-1}}{K_n} + n & (M_1 < 1), \\ n - \nu_e R \dfrac{H_{n-1}^{(2)}}{H_n^{(2)}} & (M_1 > 1, \quad V < U), \\ n - \nu_e R \dfrac{H_{n-1}^{(1)}}{H_n^{(1)}} & (M_1 > 1, \quad V > U), \end{cases} \tag{27}$$

unde funcţiile cilindrice se consideră pentru $r_0 = \nu R$.

Se poate arăta uşor [9], [12] că pentru $M_1 > 1$, ψ_e este complex putîndu-se scrie sub forma

$$\psi_e = \begin{cases} -\dfrac{1}{\nu R} \dfrac{J_n - i N_n}{J_n' - i N_n'} & (V < U) \\ -\dfrac{1}{\nu R} \dfrac{J_n + i N_n}{J_n' + i N_n'} & (V > U) \end{cases} \tag{28}$$

unde N_n — funcţii Neuman de ordin n.

În cele ce urmează în sistemul de ecuaţii (18) vom neglija contribuţia adusă de deplasarea normală w în efectul forţelor de inerţie tangenţiale şi al forţelor de amortizare tangenţiale. Această neglijare conform convenţiei adoptate anterior atrage după sine $\delta_3 = 0$. În scopul simplificării formulelor, vom neglija şi contribuţia adusă de eforturile tangenţiale în efectul forţelor de amortizare tangenţiale [1]), neglijare care atrage după sine $\delta_2 = 0$

---

[1]) Calculele se pot conduce fără nici o dificultate luînd în considerare şi aceşti termeni (termenii ce dau contribuţia eforturilor tangenţiale în forţele de amortizare tangenţiale). Neglijarea menţionată se face cu unicul scop de a aduce o simplificare a acestor calcule.

Ecuațiile problemei în acest caz devin

$$
\begin{aligned}
& l_{11}\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4}+l_{12}\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+l_{22}\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4}+\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2}+\delta_1 f_1 m\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial t^2}+\\
& +\delta_1 f_3\, m\,\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^2\,\partial t^2}+\delta_1 f_5\, m^2\frac{\partial^4 c}{\partial t^4}-\frac{\delta_1}{R}\,m\,\overset{1}{N}_\alpha f_6\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}-g_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}-g_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-\\
& -2\,g_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+\delta_1 m_1\,s_1\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial t^2}+\delta_1\,m_1\,s_2\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^2\,\partial t^2}+\delta_1\,\frac{m_1}{R}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}- \qquad (29a)\\
& -m\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-mg_3\frac{\partial w}{\partial t}-m_*\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^2 w=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \overset{1}{N}_\beta\,\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^4}+\overset{1}{N}_\alpha\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^4}-2\left(\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{N}_\alpha-\frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}-\\
& -\delta_1\,q_1\,m\,\frac{\partial^4 c}{\partial\alpha^2\,\partial t^2}-\delta_1\,q_3\,m\,\frac{\partial^4 c}{\partial\beta^2\,\partial t^2}+\delta_1\,q_5\,m^2\frac{\partial^4 c}{\partial t^4}+l_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+ \qquad (29b)\\
& +l_{12}\,\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\,\partial\beta^2}+l_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}+\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}=0.
\end{aligned}
$$

În ipoteza cilindrului de lungime infinită, drept soluții ale sistemului de ecuații (29) vom considera

$$
c=c_*\,e^{i\,(\omega t-k\alpha)}\cos n\theta,\quad w=w_*\,e^{i\,(\omega t-k\alpha)}\cos n\theta, \qquad (30)
$$

unde $i=(-1)^{1/2}$, c_*, w_* constante în general complexe.

Substituind soluțiile date de relațiile (30) în sistemul (29) se obține un sistem omogen de două ecuații în c_* și w_* iar din condiția de netrivialitate a valorilor lui c_* și w_* și prin introducerea parametrilor nuldimensionali

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\omega}=\frac{\omega\,R}{c_\infty},\ \tilde{k}=\frac{\pi\,R}{\lambda},\ \overset{\widetilde{1}}{F}_\alpha=\frac{\overset{1}{F}_\alpha}{m\,\overset{2}{c}_\infty},\ \overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha=\frac{\overset{2}{F}_\alpha}{m\,\overset{2}{c}_\infty},\ \overset{\widetilde{1}}{K}_\alpha=\frac{\overset{1}{K}_\alpha}{R\,m\,\overset{2}{c}_\infty},\quad (\alpha\leftrightarrows\beta)^{1)}\\
& \qquad (31)\\
& \overset{\widetilde{2}}{K}_\alpha=\frac{\overset{2}{K}_\alpha}{R\,m\,\overset{2}{c}_\infty},\ \overset{\widetilde{1}}{G}_\alpha=\frac{\overset{1}{G}_\alpha}{R^2\,m\,\overset{2}{c}_\infty},\ \overset{\widetilde{2}}{G}_\alpha=\frac{\overset{2}{G}_\alpha}{R^2\,m\,\overset{2}{c}_\infty},\ \overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha=m\,\overset{2}{c}_\infty\,\overset{1}{N}_\alpha,\ \tilde{m}_1=\frac{m_1}{m\,R}
\end{aligned}
$$

---

1) Semnul $(\alpha\leftrightarrows\beta)$ pus în dreptul anumitor relații indică că din acestea se pot obține relații analoage prin înlocuirea indicelui α prin β.

se obține următoarea ecuație de frecvențe:

$$\begin{aligned}&\delta_1 c_0 \tilde{\omega}^6 - i\delta_1 c_1 \tilde{\omega}^5 - \delta_1 c_2 \tilde{\omega}^4 + i\delta_1 c_3 \tilde{\omega}^3 + (\delta_1 c_2 + c_2')\,\tilde{\omega}^2 - \\ &- i c_1 \tilde{\omega} + \frac{m_*}{m} r_1 (\tilde{\omega} - \widetilde{k} M)^2 - \delta_1 \frac{m_*}{m} r_2 \tilde{\omega}^2 (\tilde{\omega} - \widetilde{k} M)^2 + \\ &+ \delta_1 \frac{m_*}{m} \tilde{\omega}^4 (\tilde{\omega} - \widetilde{k} M)^2 - \tilde{a}_0 \widetilde{k}^8 - \tilde{a}_1 \widetilde{k}^6 n^2 - \tilde{a}_2 \widetilde{k}^4 n^4 - \tilde{a}_3 \widetilde{k}^2 n^6 - \\ &- \tilde{a}_4 n^8 + \tilde{a}_5 \widetilde{k}^4 n^2 + \tilde{a}_6 \widetilde{k}^2 n^4 + \tilde{a}_7 \widetilde{k}^6 - \tilde{a}_8 \widetilde{k}^4 = 0,\end{aligned} \tag{32}$$

unde coeficienții c_i, a_i, r_i sînt dați în tabela 2. Această ecuație poate sta la baza studiului stabilității aeroelastice a structurilor cilindrice circulare

Tabela 2 *)

$$c_0 = 1 + \widetilde{m}_1 (\widetilde{s}_1 \widetilde{k}^2 + \widetilde{s}_2 n^2 - 1), \quad c_1 = \frac{R g_3'}{c_\infty}, \quad c_2 = (1 - \overset{6}{\mu}_\beta)\, \overset{\widetilde{2}}{K}_\alpha\, (\widetilde{l}_{11} \widetilde{k}^4 + \widetilde{l}_{12} \widetilde{k}^2 n^2 + \widetilde{l}_{22} n^4 - \widetilde{k}^2) +$$

$$+ \frac{c_0}{2} \widetilde{\mathcal{F}}\, \overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta) \left[\overset{\widetilde{1}}{N}_\beta \left(\frac{1}{\overset{\widetilde{1}}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) \widetilde{k}^2 + \overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha \left(\frac{1}{\overset{\widetilde{1}}{F}_\beta} + \frac{2}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) n^2 \right] +$$

$$+ (\widetilde{g}_{11} \widetilde{k}^4 + \widetilde{g}_{22} n^4 + 2 \widetilde{g}_{12} \widetilde{k}^2 n^2)$$

$$c_3 = c_5 = \frac{g_3 R \widetilde{\mathcal{F}}\, \overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}{2 c_\infty} \left[\overset{\widetilde{1}}{N}_\beta \left(\frac{1}{\overset{\widetilde{1}}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) \widetilde{k}^2 + \overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha \left(\frac{1}{\overset{\widetilde{1}}{F}_\beta} + \frac{2}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) n^2 \right]$$

$$c_4 = - \frac{\widetilde{\mathcal{F}}\, \overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}{2} \left\{ (\widetilde{l}_{11} \widetilde{k}^4 + \widetilde{l}_{12} \widetilde{k}^2 n^2 + \widetilde{l}_{22} n^4 - \widetilde{k}^2)\, [\overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha (1 + \overset{1}{\mu}_\alpha) + \widetilde{f}_1 \widetilde{k}^2 + \widetilde{f}_3 n^2] - \right.$$

$$- \left[\overset{\widetilde{1}}{N}_\beta \left(\frac{1}{\overset{\widetilde{1}}{F}_\alpha} + \frac{2}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) \widetilde{k}^2 + \overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha \left(\frac{1}{\overset{\widetilde{1}}{F}_\beta} + \frac{2}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) n^2 \right] [\widetilde{g}_{11} \widetilde{k}^4 + \widetilde{g}_{22} n^4 + 2 \widetilde{g}_{12} \widetilde{k}^2 n^2] -$$

$$\left. - \widetilde{m}_1 (\widetilde{s}_1 \widetilde{k}^2 + \widetilde{s}_2 n^2 - 1) \left[\overset{\widetilde{1}}{N}_\beta \widetilde{k}^4 + \overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha n^4 - 2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) \widetilde{k}^2 n^2 \right] \right\}$$

---

*) Expresiile lui $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\widetilde{l}_{ik}$, $\widetilde{g}_{ik}$, $\widetilde{f}_i$, $\widetilde{s}_i$ au aceeași structură cu cele corespunzătoare fără semnul ~, ele fiind exprimate respectiv prin mărimile nuldimensionale date în rel. (31). De ex.:

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \overset{\widetilde{1}}{F}_\alpha \overset{\widetilde{1}}{F}_\beta (1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta) \quad \widetilde{l}_{11} = \frac{\overset{\widetilde{1}}{K}_\alpha \overset{\widetilde{1}}{F}_\alpha (\overset{1}{\mu}_\beta - \overset{5}{\mu}_\beta)}{\widetilde{\mathcal{F}}}.$$

(tabela 2 continuare)

$$c_4' = r_1 = r_2 = \frac{1}{2}\,\widetilde{\mathcal{F}}\,\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)\left[\overset{\widetilde{1}}{N}_\beta\,\widetilde{k}^4 + \overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha\, n^4 - 2\left(\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\widetilde{k}^2 n^2\right]$$

$$\widetilde{A}_0 = \frac{\tilde{a}_0}{\mathcal{E}} = \frac{\overset{\widetilde{1}}{G}_\alpha\,\overset{\widetilde{1}}{F}_\alpha - (\overset{\widetilde{1}}{K}_\alpha)^2}{\widetilde{\mathcal{F}}},\quad \widetilde{A}_1 = \frac{\tilde{a}_1}{\mathcal{E}} = 2\left[\widetilde{l}_{11}\,\widetilde{l}_{12} + \widetilde{g}_{12}\,\overset{\widetilde{1}}{N}_\beta - \widetilde{g}_{11}\left(\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\right],$$

$$\widetilde{A}_2 = \frac{\tilde{a}_2}{\mathcal{E}} = \left[2\,\widetilde{l}_{11}\,\widetilde{l}_{22} + \widetilde{l}_{12}^{2} + \widetilde{g}_{22}\,\overset{\widetilde{1}}{N}_\beta + \widetilde{g}_{11}\,\overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha - 4\,\widetilde{g}_{12}\left(\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\right],$$

$$\widetilde{A}_3 = \frac{\tilde{a}_3}{\mathcal{E}} = 2\left[\widetilde{l}_{22}\,\widetilde{l}_{12} + \widetilde{g}_{12}\,\overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha - \widetilde{g}_{22}\left(\overset{1}{\mu}_\alpha\,\overset{\widetilde{1}}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\right]$$

$$\widetilde{A}_4 = \frac{\tilde{a}_4}{\mathcal{E}} = \frac{\overset{1}{G}_\beta\,\overset{\widetilde{1}}{F}_\beta - (\overset{\widetilde{1}}{K}_\beta)^2}{\widetilde{\mathcal{F}}},\quad \widetilde{A}_5 = \frac{\tilde{a}_5}{\mathcal{E}} = -2\,\widetilde{l}_{12},\quad \widetilde{A}_6 = \frac{\tilde{a}_6}{\mathcal{E}} = -2\,l_{22},\quad \widetilde{A}_7 = \frac{\tilde{a}_7}{\mathcal{E}} = -2\,\widetilde{l}_{11},$$

$$\widetilde{A}_8 = \frac{\tilde{a}_8}{\mathcal{E}} = 1,\quad \mathcal{E} = \frac{\widetilde{F}\,\overset{\widetilde{2}}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}{2}$$

$$C_1 = c_1 + \frac{\rho_0 R}{m},\quad C_2 = c_2,\quad C_2' = \frac{\rho_0 R}{m}\,\widetilde{k}\,M,\quad C_3 = C_5 = c_3 + \frac{\rho_0 R}{m}\,r_1,$$

$$C_{41} = c_4 \quad C_4' = c_4,\quad C_{42} = C_6 = \frac{\rho_0 R}{m}\,r_1\,\widetilde{k}\,M,\ C_0 = c_0$$

subțiri neomogene de lungime infinită plasate într-un curent fluid compresibil, în cazul cînd se iau în considerație pe lîngă forța de inerție transversală și forțele de inerție tangențiale [1]).

Amintim în acest sens că starea neperturbată fluid-structură este stabilă dacă pentru toate valorile posibile ale lui $\widetilde{k}$ și n frecvențele au părți imaginare pozitive.

Trecerea de la stabilitate la instabilitate se poate face pe două căi, aceasta conducînd la două cazuri distincte. Este posibil un caz în care frecvența $\tilde{\omega}$ trece din semiplanul superior al variabilei complexe $\tilde{\omega}$ în semiplanul inferior, luînd pe granița de stabilitate valoarea $\tilde{\omega} = 0$. Acest caz corespunde cazului de instabilitate statică sau divergentă. Un alt caz de pierdere a stabilității, mai general decît primul se produce atunci cînd frecvența $\tilde{\omega}$ trece din semiplanul superior al variabilei complexe în cel inferior intersectînd axa reală într-un punct ce diferă de origine. Acest caz de pierdere a stabilității are un caracter dinamic și se numește flater.

---

[1]) Fără neglijarea făcută anterior, neglijare ce a constat în introducerea lui $\delta_2 = 0$ în sistemul de ecuații (19) ecuația de frecvențe (32) ar fi cuprins și termeni reprezentînd contribuția eforturilor tangențiale în forțele de amortizare tangențiale.

Să studiem cazul de pierdere a stabilității prin divergență pentru $M = M_1 < 1$. Observăm că în acest caz m_* este pozitiv și real [1]). Introducînd în ecuația de frecvență $\tilde{\omega} = 0$ se obține

$$M_{\text{div}} = \frac{V_1}{C_\infty}\sqrt{\frac{m}{m_*}}, \tag{33}$$

unde $\frac{V_1}{c_\infty} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{k}}$, V_1 fiind modulul vitezei de propagare a undelor elastice în cazul vibrațiilor proprii ale structurii în vid; $\tilde{\omega}_1$ — frecvențele (reduse) proprii corespunzînd vibrațiilor transversale ale structurii în vid în absența amortizării ($g_3 = 0$)

$$\tilde{\omega}_1^2 = \frac{\tilde{A}_0\tilde{k}^8+\tilde{A}_1\tilde{k}^6n^2+\tilde{A}_2\tilde{k}^4n^4+\tilde{A}_3\tilde{k}^2n^6+\tilde{A}_4n^8-\tilde{A}_5\tilde{k}^4n^2-\tilde{A}_6n^4\tilde{k}^2-\tilde{A}_7\tilde{k}^6+\tilde{k}^4}{\overset{\tilde{1}}{N}_\beta\tilde{k}^4+\overset{\tilde{1}}{N}_\alpha n^4-2\left(\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{\tilde{1}}{N}_\alpha-\frac{1}{\overset{\tilde{2}}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}_\beta)}\right)\tilde{k}^2n^2}. \tag{34}$$

Deoarece m_* este o funcție transcendentă de U și ω calcularea lui M_{div} se poate face utilizînd de exemplu metoda grafică, indicată în lucrarea [10]. Pentru cazul unei scurgeri exterioare la $M = M_1 > 1$ pierderea de stabilitate prin divergență nu este posibilă deoarece m_* este complex.

În ceea ce privește determinarea vitezei critice de flater pe baza ecuației de frecvențe (32), deoarece m_* este o funcție transcendentă de U și ω calculele necesare devin laborioase. Pentru valori mari ale lui M_1 în cazul unei scurgeri exterioare, expresia lui m_* poate fi pusă sub o formă asimptotică simplă, ceea ce permite utilizarea criteriilor algebrice de stabilitate. După cum se știe pentru mari viteze supersonice formula presiunii poate fi dată aproximativ pe baza *teoriei pistonului*. În cazul scurgerii în jurul unei învelitori cilindrice circulare de lungime infinită, formula liniarizată a presiunii determinată pe baza *teoriei pistonului* este exprimată prin formula

$$p_e - p_0 = -\rho_0 c_\infty\, i\,(\omega - kU)\,w. \tag{35}$$

Condițiile de aplicabilitate a acestei formule pentru cazul $V > U$ au fost deduse de V. V. Bolotin [10], [11] ele fiind exprimate prin inegalitățile

$$M_1^2 \gg 1, \qquad \nu R = kR\sqrt{M_1^2 - 1} \gg n. \tag{36}$$

Pentru acest caz expresia masei adăugată m_* devine

$$m_* = -i\frac{\rho_0 c_\infty}{\omega - kU} = -i\frac{\rho_0 R}{\tilde{\omega} - \tilde{k}M}, \tag{37}$$

---

[1]) În lucrările [9], [12] este dat graficul lui ψ_e pentru diverse valori ale lui n.

în baza căreia, ecuația de frecvențe (32) trece în :

$$\delta_1 C_0 \tilde{\omega}^6 - i\delta_1 C_1 \tilde{\omega}^5 - \delta_1 (C_2 - iC_2') \tilde{\omega}^4 + i\delta_1 C_3 \tilde{\omega}^3 + [\delta_1 (C_{21} - iC_{22}) + C_2'] \tilde{\omega}^2 -$$
$$- iC_1 \tilde{\omega} - iC_0 - \tilde{a}_0 \widetilde{k}^8 - \tilde{a}_1 \widetilde{k}^6 n^2 - \tilde{a}_2 \widetilde{k}^4 n^4 - \tilde{a}_3 \widetilde{k}^2 n^6 - \tilde{a}_4 n^8 + \tilde{a}_5 \widetilde{k}^4 n^2 + \qquad (38)$$
$$+ \tilde{a}_6 \widetilde{k}^2 n^4 + \tilde{a}_7 \widetilde{k}^6 - \tilde{a}_8 \widetilde{k}^4 = 0,$$

unde coeficienții C_i sînt dați în tabela 2.

Condiția ca ecuația algebrică în $\tilde{\omega}$ cu coeficienți complecși dată de relația (38) să nu aibă rădăcini cu părți imaginare negative, se poate exprima sub forma condițiilor Routh-Hurwitz generalizate [13].

Toate rădăcinile ecuației

$$F(\omega) = a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \ldots a_n + i(b_0 \omega^n + b_1 \omega^{n-1} + \ldots) = 0, \qquad (39)$$

unde $a_0, a_1 \ldots a_n, b_0, b_1 \ldots b_n$ sînt numere reale, au părți imaginare pozitive dacă toți minorii de rang par ai matricei

$$H = \left\| \begin{array}{ccc} a_0\, a_1 \ldots a_n & & 0 \\ b_0\, b_1 \ldots b_n & & \\ & a_0\, a_1 \quad a_n & \\ & b_0\, b_1 \quad b_n & \\ 0 & & a_0\, a_1 \ldots a_n \\ & & b_0\, b_1 \ldots b_n \end{array} \right\| \qquad (40)$$

sînt pozitivi. Gradul ridicat al ecuației (38) face ca determinarea vitezei de flater să se poată face mai ușor cu ajutorul unei mașini electronice de calcul.

Un calcul al vitezei de flater bazat pe ecuația (38) ar permite determinarea cantitativă a influenței pe care o are luarea în considerare a forțelor de inerție tangențială $(\delta_1 = 1)$ 1). Se poate totuși afirma apriori că în acest caz viteza critică de flater este mai mică decît viteza de flater determinată în cazul $\delta_1 = 0$, fapt pe care-l vom exprima formal prin relația $M_* |_{\delta_1 = 1} < M_* |_{\delta_1 = 0}$.

În absența forțelor de inerție tangențiale ecuația de frecvențe (38) devine

$$\tilde{\omega}^2 - i \frac{R(mg_3 + \rho_0 c_\infty)}{m c_\infty} \tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1^2 + i \frac{\rho_0 R \widetilde{k}}{m} M = 0. \qquad (41)$$

---

1) Menţinerea în ecuaţia de frecvenţă a termenilor ce reprezintă contribuţia eforturilor tangenţiale în forţele de amortizare tangenţiale $(\delta_2 = 1)$ ar fi permis, de asemenea, determinarea cantitativă a influenţei pe care o are luarea în considerare a forţelor de amortizare tangenţiale asupra vitezei critice de flater.

Prin aplicarea criteriului Routh-Hurwitz generalizat se obţin condiţiile

$$g_3 + \frac{\rho_0 c_\infty}{m} > 0, \quad \left(\frac{mg_3 + \rho_0 c_\infty}{c_\infty}\right)^2 \tilde{\omega}_1^2 - (\rho_0 \widetilde{k} M)^2 > 0, \tag{42}$$

din care prima exprimă faptul că amortizarea este pozitivă (internă şi aerodinamică) iar a doua permite calculul vitezei critice de flater

$$M_*\big|_{\delta_1=0} = \left(1 + \frac{mg_3}{\rho_0 c_\infty}\right)\frac{\tilde{\omega}_1}{\widetilde{k}}. \qquad (43)^{1)}$$

Relaţia (43) arată că viteza critică minimă de flater corespunde valorii minime a lui $\frac{V_1}{c_\infty} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\widetilde{k}}$. Pentru parametrii geometrici şi elastici daţi ai structurii, se pot găsi pe cale grafică valorile lui $\widetilde{k}$ şi n care realizează acest minim. În cazul structurilor construite din straturi izotrope minimul expresiei lui $\frac{V_1(\widetilde{k}, n)}{c_\infty}$ se lasă calculat foarte uşor. Într-adevăr în acest caz

$$\frac{V_1(\widetilde{k}, n)}{c_\infty} = \sqrt{\widetilde{G} - \frac{\widetilde{K}^2}{\widetilde{F}}}\, P(\widetilde{k}, n), \tag{44a}$$

unde

$$P(\widetilde{k}, n) = \sqrt{\frac{(\widetilde{k}^2 + n^2)^2}{\widetilde{k}^2} + \frac{2\widetilde{K}(\overset{2}{\mu} - \overset{1}{\mu})}{\widetilde{G} - \widetilde{K}^2/\widetilde{F}} + \frac{\widetilde{F}(1 - (\overset{1}{\mu})^2)}{\widetilde{G} - \frac{\widetilde{K}^2}{\widetilde{F}}}\, \frac{\widetilde{k}^2}{\widetilde{k}^2 + n^2}}. \tag{44b}$$

Minimul lui $P(\widetilde{k}, n)$ este atins pentru

$$\frac{(\widetilde{k}^2 + n^2)^2}{\widetilde{k}^2} = \sqrt{\frac{\widetilde{F}(1 - (\overset{1}{\mu})^2)}{\widetilde{G} - \frac{\widetilde{K}^2}{\widetilde{F}}}} \tag{45}$$

el fiind egal cu

$$\min P(\widetilde{k}, n) = \sqrt{\frac{2\widetilde{K}(\overset{2}{\mu} - \overset{1}{\mu})}{\widetilde{G} - \frac{\widetilde{K}^2}{\widetilde{F}}} + 2\sqrt{\frac{\widetilde{F}[1 - (\overset{1}{\mu})^2]}{\widetilde{G} - \frac{\widetilde{K}^2}{\widetilde{F}}}}}. \tag{46}$$

În baza relaţiilor (43), (44), (46) se poate calcula uşor viteza critică minimă de flater.

---

1) Se poate arăta uşor [12] că viteza de propagare a undelor elastice în structură V coincide pe graniţa domeniului de stabilitate cu viteza V_1 (aceasta în absenţa forţelor de inerţie tangenţiale).

Din relația (43) rezultă că mărimea lui $M_*|_{\delta_1=0}$ depinde și de mărimea coeficientului de amortizare a structurii g_3 [1]), de unde se vede că utilizarea materialelor cu un înalt coeficient de amortizare poate conduce la o mărire substanțială a vitezei critice de flater. De aici se vede importanța care este rezervată structurilor construite din mai multe straturi în construcția rachetelor și a vehiculelor spațiale.

Menționăm că relațiile obținute în lucrare sînt aplicabile și structurilor construite din straturi izotrope arbitrar dispuse pe grosime (caz pentru care a fost dedusă efectiv viteza critică minimă de flater), structurilor construite din straturi ortotrope simetric dispuse pe grosime, precum și structurilor ortotrope omogene. Particularizările necesare pentru fiecare caz în parte sînt indicate în lucrarea [6] iar expresiile parametrilor mecanici și ai coeficienților Poisson reduși ce corespund fiecărei structuri în parte sînt date în lucrările [3], [4].

Primită la redacție la 25 aprilie 1962

КОЛЕБАНИЯ И АЭРОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОМЕЩЕННЫХ В ПОТОКЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются вопросы колебаний и аэроупругой устойчивости тонких оболочек цилиндрического кругового сечения, полученных произвольным наложением количества s упруго-ортотронных слоев и помещенных в потоке сжимаемой жидкости.

На основании изложенных в п. 1 гипотез, с учетом как сил инерции и поперечного затухания, так и сил инерции и касательного затухания, выводится разрешающая система (8). На основании системы уравнения (18), упрощение которой приводит к системе (29), и выражения решений (30), получается — путем введения параметров нулевой размерности (31) — характеристическое уравнение (32), которое может служить основанием изучения аэроупругой устойчивости цилиндрических неоднородных оболочек бесконечной длины, помещенных в потоке сжимаемой жидкости. На основании этой системы выводится выражение критической скорости дивергенции, даваемой соотношением (33). В продолжении рассматривается случай обтекания при больших значениях M_1. При этом для условий, выраженных соотношениями (36), выражение добавочной массы дано простым соотношением (37), на основании которого уравнение частот (33) сводится к уравнению (38). Далее определяется выражение критической скорости флаттера при пренебрежении силами касательной инерции (43).

---

[1]) Problema determinării valorii coeficientului de amortizare internă pentru structuri construite din mai multe materiale este abordată în lucrarea bibliografică [14].

VIBRATIONS AND AEROELASTIC STABILITY OF NON-HOMOGENEOUS THIN CYLINDRICAL SHELLS IN INCOMPRESSIBLE FLOW

ABSTRACT

This paper approaches the problem of the vibrations and aeroelastic stability of thin circular-cylindrical structures, constructed by the arbitrary superposition of s elastic orthotropic layers, in a compressible fluid flow.

On the basis of the assumptions presented at point 1, and taking into consideration the forces of inertia and the transverse damping as well as the forces of inertia and the tangential damping, the author obtains the solving system (8). Using the system of equations (18), whose simplicity leads to the system (29), as well as the expression of solutions (30) and introducing the non-dimensional parameters (31), the characteristic equation (32) is obtained, which may be employed for studying the non-homogeneous cylindrical shells of infinite length in a compressible fluid flow. On the basis of this system, the expression of the critical divergence velocity given by relation (33) is deduced. Further, the case of a flow at high values of M_1 is considered. In this case, for conditions expressed by the relations (36), the expression of the apparent mass is given by the simple relation (37), on the basis of which the frequency equation (33) turns into the equation (38). Finally, the expression of the flutter critical velocity is deduced for the case in which the tangential forces of inertia are disregarded (43).

BIBLIOGRAFIE

1. T. E. HESS, *Stability of orthotropic cylindrical shells under combinate loading.* American Rocket Society Journal, **31**, *2* (1961).
2. С. А. АМБАТЦУМЯН, *К вопросу слоистых анизотропных оболочек.* Изв. Акад. Наук Армянской ССР, **6**, *3*, 1953.
3. L. LIBRESCU, *Elastische Mehrschichtenschallen.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **V**, *5* (1960)
4. Л. ЛИБРЕСКУ, *К теории тонкостенных конструкций, симметрично построенных из ортотропных слоев*, Revue de Mécanique Appliquée, **V**, *1*, 1960.
5. А. Л. ГОЛДЕНВЕЙЗЕР, *Теория упругих тонких оболочек.* Гостехиздат, Москва, 1953.
6. L. LIBRESCU, *Vibration of non-homogeneous circular cylindrical shells in compressible fluid flow.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **VI**, *5* (1961).
7. P. M. NAGHDI, *On the general problem of elasto-kinetics in the theory of shallow shells.* Proceedings of the Symposium on the theory of thin elastic shells. North Holland Publishing Company-Amsterdam, Edited by W.T. Koiter.
8. L. LIBRESCU, Revue de Mécanique Appliquée, *4* (1962) (sub tipar).
9. В. В. БОЛОТИН, *Колебания и устойчивость цилиндрических оболочек в потоке сжимаемой жидкости.* Инж. сборник, 1956, 24.
10. В. В. БОЛОТИН, *Некоторые новые задачи динамики оболочек. Расчеты на прочность.* Сборник статей в 4 Машгиз, Москва, 1959.

11. В. В. БОЛОТИН, *О применении „закона плоских сечений" для определения аэродинамических сил, действующих на колебающиеся оболочки.* Известия Акад. Наук СССР, Механика и машиностроение, I, 1960.
12. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.* Государственное издательство физико-матем. литерат. Москва, 1961.
13. Н. Г. ЧЕБОТАРЕВ, Н. С. МЕЙМАН, *Проблема Гауса-Гурвица для полиномов и целых функций,* Изд.-во АН СССР, 1949.
14. BENJAMIN I. LAZAN, *Damping properties of materials and material composites.* Applied Mechanics Reviews, **15**, *2* (1962).

ASUPRA UNOR METODE APROXIMATIVE DE CALCUL ALE LAGĂRELOR CIRCULARE LUBRIFIATE CU GAZE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

După cum se știe, deși obținută pe baza a numeroase aproximații (neglijarea forțelor de inerție, a curburii suprafețelor etc.) ecuația diferențială a presiunilor pentru problema lubrificației cu gaze este neliniară și din această cauză nu poate fi rezolvată analitic decît în anumite cazuri cu totul particulare : lagăre de alungire infinită compuse din suprafețe plane [1]. Pentru restul tipurilor de lagăre cu aer utilizate în aplicații, deducerea distribuției presiunilor este o problemă analitică extrem de dificilă, mai ales în condițiile reale ale lagărelor de alungire finită, cînd mișcarea în stratul de lubrifiant este tridimensională. De aceea, pentru aplicații, se preferă astăzi deducerea directă a rezultatelor prin metode numerice de integrare a ecuației presiunilor. Cu toată relativa ușurință prin care se pot obține rezultatele numerice cu ajutorul mașinilor electronice de calcul, metodele analitice de studiu, fie numai aproximative, păstrează în continuare un interes teoretic și aplicativ pronunțat, datorită proprietăților de generalitate pe care le posedă, posibilităților de relevare a condițiilor de optim, a unor factori secundari etc. Acesta este de altfel motivul pentru care în ultimii ani s-au depus eforturi susținute pentru deducerea unor metode aproximative de integrare a ecuației presiunilor, în special pentru lagărele circulare, care constituie tipul cel mai frecvent utilizat în aplicații [2]–[12].

Posibilitățile de simplificare aproximativă a ecuației presiunilor sînt destul de limitate. De aceea, metodele analitice deduse pot fi grupate într-un număr restrîns de categorii, mai precis aceste metode pot avea la bază două idei : O primă idee este înlocuirea variației reale a grosimii $h(x)$ a stratului de lubrifiant cu o variație echivalentă cît mai apropiată de cea corectă, dar exprimată sub o formă analitică astfel încît să se poată construi mai simplu soluția presiunilor. Este vorba de metoda lui Harrison [13] care înlocuieşte variaţia trigonometrică a grosimii $h(x)$ cu două variaţii liniare şi care cu unele îmbunătăţiri [4], [5] permite obţinerea de rezultate suficient de precise pentru lagărele circulare de alungire infinită.

O a doua idee care poate sta la baza construirii unor metode aproximative de soluţionare o constituie liniarizarea ecuaţiilor presiunilor prin dezvoltarea în serie a presiunilor în raport cu un parametru mic : excentricitatea [7], [8], viteza în cazul vitezelor reduse, inversul vitezei în cazul vitezelor mari [2], [9]—[12]. Toate aceste metode sînt inspirate din probleme similare de liniarizare din alte domenii. Ele au avantajul că permit obţinerea soluţiei sub forme analitice relativ simple. În schimb, prezintă inconvenientul unui domeniu de utilizare limitat, de exemplu la excentrităţile reduse sau viteze mari.

LAGĂRE DE ALUNGIRE INFINITĂ

Deoarece problema este relativ mai simplă în cazul lagărelor de alungire finită vom considera mai întîi acest caz în scopul punerii în evidenţă a aproximaţiilor introduse. În acest caz, sub formă adimensională, ecuaţia diferenţială a presiunilor are forma cunoscută

$$\frac{d\bar{p}}{d\theta}=\frac{6H}{\bar{h}^{2}}\left(1-\frac{K_{1}}{\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\bar{h}}\right), \tag{1}$$

unde

$$\bar{p}=\frac{p}{p_0},\ \bar{h}=\frac{h_0}{c},\ H=\frac{\mu\omega}{p_0\psi^2},\ \psi=\frac{c}{r_1}, \tag{2}$$

în care $\bar{p}$ — este presiunea, p_0 — presiunea mediului înconjurător, c — jocul radial, μ — viscozitatea, ω — viteza unghiulară a fusului, ψ — jocul relativ, r_1 — raza fusului iar $\theta=\frac{x}{r_1}=\bar{x}$ coordonata unghiulară. În acelaşi timp grosimea filmului de lubrifiant are expresia

$$\frac{h}{c}=\bar{h}=1+\varepsilon\cos\theta, \tag{3}$$

unde $\varepsilon=\frac{e}{c}$ este excentritatea relativă. În sfîrşit, K_1 este o constantă de integrare.

Să considerăm apoi soluţia p sub forma [9]

$$\bar{p}=\frac{K_{1(0)}}{\bar{h}}+\bar{p}_*, \tag{4}$$

unde $\overline{p}_{(0)} = \dfrac{K_{1(0)}}{\overline{h}}$ este soluția asimptotică pentru $H \to \infty$. Funcția $\overline{p}_*$ tinde deci către zero cînd $H \to \infty$, observație care permite deci liniarizarea ecuației presiunilor. Astfel se poate pune aproximativ

$$\overline{p}^2 \cong \frac{K_{1(0)}^2}{\overline{h}^2} + \frac{2\,K_{1(0)}}{\overline{h}}\,\overline{p}_*, \tag{5}$$

iar ecuația (1) cu $\varkappa = 1$ se scrie

$$\frac{d\overline{p}_*}{d\overline{x}} - \frac{\dfrac{6\,H}{K_{1(0)}} + \dfrac{d\overline{h}}{d\overline{x}}}{\overline{h}}\,\overline{p}_* - \frac{6\,H\left(1 - \dfrac{K_1}{K_{1(0)}}\right) + \dfrac{d\overline{h}}{d\overline{x}}}{\overline{h}^2} = 0. \tag{6}$$

Dacă mișcarea este politropică ($\varkappa > 1$) ecuația presiunii se poate reduce la cazul $\varkappa = 1$. Astfel să considerăm în locul relației (4) următoarea schimbare de funcție:

$$\left.\begin{aligned} \overline{p}^{\frac{1}{\varkappa}} &= \frac{K_{1(0)}}{\overline{h}} + \overline{p}_*, \\ \overline{p}^{\frac{1}{\varkappa}+1} &= \left(\frac{K_{1(0)}}{\overline{h}} + \overline{p}_*\right)^{\varkappa+1} = \left(\frac{K_{1(0)}}{\overline{h}}\right)^{\varkappa+1} + (\varkappa+1)\left(\frac{K_{1(0)}}{\overline{h}}\right)^{\varkappa}\overline{p}_* + \dots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Introducînd aceste expresii în ecuația (1) se obține

$$\begin{aligned} &(\varkappa+1)\,K_{1(0)}^{\varkappa+1}\,\overline{h}^{1-\varkappa}\frac{dh}{d\overline{x}} - (\varkappa+1)\,\varkappa\,K_{1(0)}^{\varkappa}\,\overline{h}^{2-\varkappa}\frac{d\overline{h}}{d\overline{x}}\,\overline{p}_* + \\ &+ (\varkappa+1)\,K_{1(0)}^{\varkappa}\,\overline{h}^{3-\varkappa}\frac{d\overline{p}_*}{d\overline{x}} = 12\,H\,(K_{1(0)} - K_1) + 12\,H\overline{p}_*\,\overline{h}. \end{aligned} \tag{8}$$

Deoarece cînd H crește influența primului termen al ecuației de mai sus este din ce în ce mai redusă și tinde către zero cînd $H \to \infty$, se poate considera aproximativ $\varkappa + 1 \cong 2$. Atunci însă ecuația (8) ia aceeași formă cu ecuația (6). Prin urmare, dacă $\varkappa > 1$, se deduce

$$\overline{p} = \left(\frac{K_{1(0)}}{\overline{h}} + \overline{p}_*\right)^{\varkappa} \cong \left(\overline{p}_{\varkappa=1}\right)^{\varkappa}, \tag{9}$$

unde s-a notat cu $p_{\varkappa=1}$ presiunea în cazul unei evoluții izoterme.

Integrarea ecuației (6) pentru lagăre circulare [9] conduce la o expresie a distribuției presiunilor de o frapantă analogie cu aceea obținută de Katto și Soda [2]. Rezultatul este normal deoarece, deși obținută pe o altă cale, metoda Katto și Soda conține în esență aceleași aproximații și poate fi dedusă direct din ecuația (6). Astfel dacă se revine la funcția inițială p, prin intermediul substituției (4) se obține în locul ecuației (6) ecuația

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} - \left(\frac{6\,H}{K_{1(0)}\,\bar{h}} + \frac{1}{\bar{h}}\,\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}\right)\bar{p} = -\,\frac{K_{1(0)}}{\bar{h}^2}\,\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} - \frac{6\,H}{\bar{h}^2}\,\frac{K_1}{K_{1(0)}}. \tag{10}$$

În ecuațiile precedente s-a pus x în loc de θ, deoarece ele au o valabilitate generală, indiferent de forma de variație a grosimii h (atunci se va înțelege prin c o grosime de referință, de exemplu grosimea medie h_m sau grosimea minimă h_2).

La numere H mari, $K_{1(0)} \cong K_1$; apoi în primul membru $\dfrac{1}{\bar{h}}\,\dfrac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$ devine neglijabil față de $\dfrac{6\,H}{K_1\,\bar{h}}$. În sfîrșit, în membrul secund $\dfrac{K_1}{\bar{h}^2}\,\dfrac{d\bar{h}}{d\bar{x}}$ devine neglijabil față de $\dfrac{6\,H}{\bar{h}^2}\,\dfrac{K_1}{K_{1(0)}} \cong \dfrac{6\,H}{\bar{h}^2}$. Cu aceste observații, ecuația (10) se scrie mai simplu

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} - \frac{6\,H}{K_1\,\bar{h}}\,\bar{p} + \frac{6\,H}{\bar{h}^2} = 0, \tag{11}$$

adică tocmai ecuația obținută de Katto și Soda (scrisă în variabilele curente p, x, h). Față de ecuația (10), ecuația (11) conține aproximații mai numeroase. În schimb, deși eroarea relativă introdusă crește cu scăderea numărului H, eroarea absolută rămîne mărginită și mai mult se anulează cînd $H \to 0$ (pentru care din (11) rezultă $p = \text{const.}$).

De altfel, ecuația (11) se poate deduce direct și din ecuația (1). Într-adevăr dacă ($\varkappa = 1$)

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{6\,H}{\bar{h}^2}\left(1 - \frac{K_1}{\bar{p}\,\bar{h}}\right) = \frac{6\,H}{\bar{h}}\,\frac{K_1}{\bar{p}\,\bar{h}}\left(\frac{\bar{p}}{K_1} - \frac{1}{\bar{h}}\right), \tag{12}$$

ecuație care se reduce la forma (11) dacă se face aproximația că $\bar{p}\,\bar{h} = K_1$, adică la viteze mari. Aceasta este în fond eroarea introdusă de metodă, care este dificil de pus în evidență sub forma prezentată de autori [2].

Din ecuația (11) se poate deduce în mod simplu și sensul erorii introduse. Astfel $\bar{p}\,\bar{h} = K_1$ numai pentru $H \to \infty$; în rest $\bar{p}\,\bar{h} > K_1$ pentru zona în care $\dfrac{d\bar{p}}{d\theta} > 0$ și $\bar{p}\,\bar{h} < K_1$ pentru zona în care $\dfrac{d\bar{p}}{d\theta} < 0$. În consecință, gradientul $\dfrac{d\bar{p}}{d\theta}$ este mărit prin metoda de mai sus atunci cînd este pozitiv și micșorat în valoarea absolută (deci mărit în continuare) atunci cînd este negativ. Rezultă deci că presiunile determinate prin metoda de mai sus vor fi mai mari decît cele corecte, diferențele crescînd cu scăderea numărului H.

De asemenea, ecuația în $\Pi = ph$ obținută de J. Ausman [10] poate fi obținută plecînd de la ecuația (10), dar cu prețul unor aproximații mai grosiere. Astfel Ausman consideră ca importanți în ecuația presiunilor termenii care au ca factor derivata funcției h, prin faptul că determină semnul termenilor corespunzători. În schimb, pentru termenii care au ca factor H, consideră o valoare medie constantă. Cu observațiile precedente, și înlocuind în primul termen al membrului secund (10) $K_{1(0)}$ cu $\bar{p}\bar{\bar{h}}$ această ecuație se scrie

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} - \left(\frac{6\,H}{K_{1(0)}\,\bar{\bar{h}}} - \frac{1}{\bar{\bar{h}}}\,\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}\right)\bar{p} = \frac{\bar{p}}{\bar{\bar{h}}}\,\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}}, \tag{13}$$

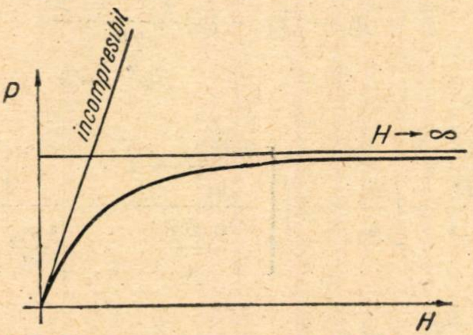


Fig. 1. — Variația capacității de încărcare a unui lagăr circular cu numărul H.

sau, înmulțind cu $\bar{h}$ în ambii membri și notînd cu $\overline{\Pi} = \bar{p}\bar{h}$

$$\frac{d\overline{\Pi}}{d\bar{x}} - \frac{6\,H}{K_{1(0)}\,\bar{\bar{h}}}\,\overline{\Pi} = \frac{1}{\bar{\bar{h}}}\,\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} - \frac{6\,H}{K_{1(0)}\,\bar{\bar{h}}}\,K_1, \tag{14}$$

unde în primul termen al membrului al doilea s-a pus $\bar{p} \cong 1$. Această ecuație devine identică cu aceea obținută de Ausman [10]

$$\frac{d^2\overline{\Pi}}{d\bar{x}^2} - 6\,H\,\frac{d\overline{\Pi}}{d\bar{x}} = \frac{d^2\bar{h}}{d\bar{x}^2}, \tag{15}$$

dacă se consideră aproximativ

$$\bar{h} \cong 1\,; \quad \frac{6\,H}{K_{1(0)}\,\bar{\bar{h}}} \cong 6\,H. \tag{16}$$

Ecuația (15) conține deci aproximații grosiere. Totuși erorile introduse au sensuri diferite astfel încît se compensează parțial. În fond, pentru ecuația (15) cît și pentru ecuația (11) eroarea absolută rămîne mărginită, deoarece se impune ca presiunile sau rezultanta acestora să tindă asimptotic către o limită exactă pentru $H \to \infty$ și să se anuleze la $H = 0$ (fig. 1). De altfel, cu o aproximație ceva mai mare s-ar putea considera direct de exemplu în locul curbei $P(H)$ cele două drepte date de soluția incompresibilă (valabilă pentru $H \to 0$) și soluția asimptotică $\bar{p}\bar{h} = \text{const.}$ (fig. 1).

Erorile introduse de diferitele metode menţionate pot fi uşor puse în evidenţă din studiul unor cazuri simple.

Suprafeţe paralele. Dacă $h = \text{const.}$, $\bar{h} = 1$, ecuaţia (6) sau (10) ia o formă simplă

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} - \frac{6H}{\bar{p}_1}\bar{p} = -\frac{6HK_1}{\bar{p}_1}, \tag{17}$$

unde $K_{1(0)} = \bar{p}_1$, $\bar{p}_1$ fiind de exemplu presiunea la $x = 0$. Soluţia ecuaţiei de mai sus se scrie

$$\bar{p} = \bar{p}_1 - (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\frac{e^{\frac{6H}{\bar{p}_1}\bar{x}} - 1}{e^{\frac{6H}{\bar{p}_1}} - 1} \tag{18}$$

şi

$$\zeta = \frac{P}{p_0 l} = \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)\left[\frac{\frac{6Hp_0}{p_1} - 1}{\frac{6Hp_0}{p_1}} + \frac{1}{e^{\frac{6Hp_0}{p_1}} - 1}\right] \tag{19}$$

dacă $\bar{p}_2 = 1$ $(p_2 = p_0)$.

În cazul ecuaţiei (11), soluţia are aceeaşi formă cu deosebirea că una din constante apare ca exponent

$$\bar{p} = K_1 - (\bar{p}_2 - \bar{p}_1)\frac{e^{\frac{6H}{K_1}\bar{x}} - 1}{e^{\frac{6H}{K_1}} - 1}, \tag{20}$$

şi cu $\bar{p}_2 = 1$

$$\zeta = K_1 - 1 - \frac{K_1}{6H}\left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right), \tag{21}$$

unde K_1 se determină din condiţia

$$H = \frac{K_1}{6}\ln\frac{K_1 - \bar{p}_2}{K_1 - \bar{p}_1}. \tag{22}$$

În sfîrşit, plecînd de la ecuaţia (15) se deduce presiunea sub forma

$$\bar{p} = p_1 - (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\frac{e^{6H\bar{x}} - 1}{e^{6H} - 1} \tag{23}$$

şi

$$\zeta = \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)\left[\frac{6H - 1}{6H} - \frac{}{e^{6H} - 1}\right]. \tag{24}$$

Erorile introduse pot fi stabilite direct de pe relațiile precedente. Ca exemplu în figura 2 se prezintă variația coeficientului de încărcare ζ în funcție de H pentru $\frac{p_1}{p_0} = 4$. Se constată că formulele (19) și (21) dau rezultate asemănătoare, ultima introducînd erori ceva mai mari. În schimb, relația (21) are avantajul că se poate aplica cu o eroare finită pentru orice H. Eroarea introdusă are sensul invers cazului lagărelor circulare, deoarece pentru lagărul din figura 2, $\frac{dp}{dx}$ are peste tot același semn; după cum se va arăta în cazul lagărelor circulare, constanta K se determină printr-o integrală în timp ce în cazul de față ea rezultă din constanta $\bar{p} = 1$ la $\bar{x} = 1$ regiune în care $\frac{dp}{dx} \rightarrow +\infty$ cînd $H \rightarrow \infty$. În consecință, valoarea K_1 va fi modificată de unde rezultă sensul erorii menționate.

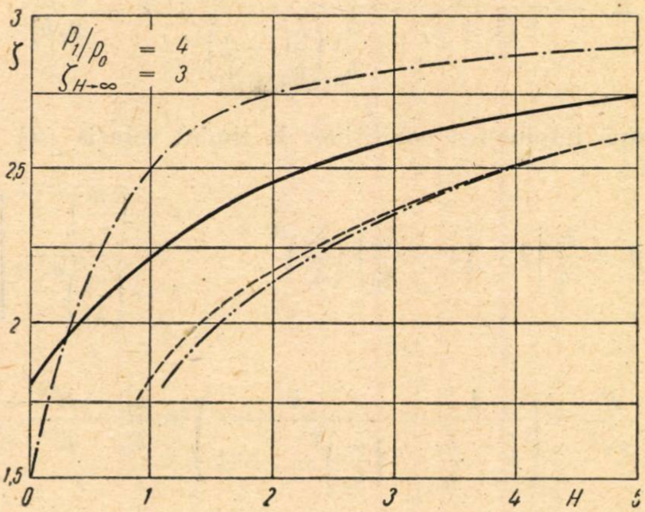


Fig. 2. — Variația coeficientului de încărcare ζ în funcție de H pentru două suprafețe paralele cu $\frac{p_1}{p_0} = 4$. ——— exact [1]; — — — formula (19); — · · — formula (21); — · — formula (24).

Suprafețe plane înclinate. În acest caz

$$h = h_1 - (h_1 - h_2)\frac{x}{l}\,; \quad \frac{h}{h_m} = \bar{h} = \bar{h}_1 - (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)\,\bar{x} \tag{25}$$

sau

$$\bar{h} = 1 + \varepsilon - 2\,\varepsilon\bar{x}\,; \quad \varepsilon = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}, \tag{26}$$

iar ecuația (6) se scrie, cu $K_{1(0)} = \bar{h}_1$,

$$\frac{d\bar{p}_*}{d\bar{x}} - \frac{\dfrac{6H}{\bar{h}_1} - 2\varepsilon}{\bar{h}}\,\bar{p}_* = \frac{6H\left(1 - \dfrac{K_1}{\bar{h}_1}\right) - 2\varepsilon}{\bar{h}^2} = \frac{C_1}{\bar{h}^2}. \tag{27}$$

Înlocuind $\bar{x}$ cu $\bar{h}$ prin intermediul relației (26) și notînd

$$H^\star = \frac{3H}{2(1+\varepsilon)} = \frac{6\bar{H}}{\dfrac{h_1}{h_2}\left(\dfrac{h_1}{h_2} - 1\right)}\ ; \quad \bar{H} = \frac{\mu V l}{p_0 h_2^2}, \tag{28}$$

se obține, după impunerea condițiilor la limită soluția [9]

$$\bar{p} = \frac{h_1}{h}\left[1 - \left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right)\left(\frac{h_2}{h}\right)^{H^\star - 2} - \frac{1 - \left(\dfrac{h}{h_1}\right)^{H^\star - 2}}{1 - \left(\dfrac{h_2}{h_1}\right)^{H^\star - 2}}\right] \tag{29}$$

și

$$\zeta = \frac{P}{p_0 l} = \left(\frac{1}{1 - \dfrac{h_2}{h_1}} + \frac{1}{\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^{H^\star - 2} - 1}\right)\ln\frac{h_1}{h_2} - \frac{H^\star - 1}{H^\star - 2}. \tag{30}$$

Dacă se consideră ecuația (11) se deduce pentru distribuția presiunilor relația

$$\bar{p} = \frac{h_1}{h}\left[1 - \left(1 - \frac{h_2}{k_1}\right)\left(\frac{h_2}{h}\right)^{H^\star\frac{\bar{h}_1}{K_1} - 1},\frac{1 - \left(\dfrac{h}{h_1}\right)^{H^\star\frac{\bar{h}_1}{K_1} - 1}}{1 - \left(\dfrac{h_2}{h_1}\right)^{H^\star\frac{\bar{h}_1}{K_1} - 1}}\right], \tag{31}$$

iar pentru rezultanta presiunilor

$$\zeta = \left(\frac{1}{1 - \dfrac{h_2}{h_1}} + \frac{1}{\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^{H^\star\frac{\bar{h}_1}{K_1} - 1} - 1}\right)\ln\frac{h_1}{h_2} - \frac{H^\star\dfrac{\bar{h}_1}{K_1}}{H^\star\dfrac{\bar{h}_1}{K_1} - 1}, \tag{32}$$

unde constanta K_1 se deduce din condiția

$$H^\star = \left\{ \frac{\bar{h}_1}{K_1} - \left[1 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{H^\star \frac{\bar{h}_1}{K_1}} \frac{1 - \frac{h_2}{h_1}}{1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{H^\star \frac{\bar{h}_1}{K_1}}} \right]^{-1} \right\}^{-1} \cong \frac{1}{\frac{\bar{h}_1}{K_1} - 1}. \tag{33}$$

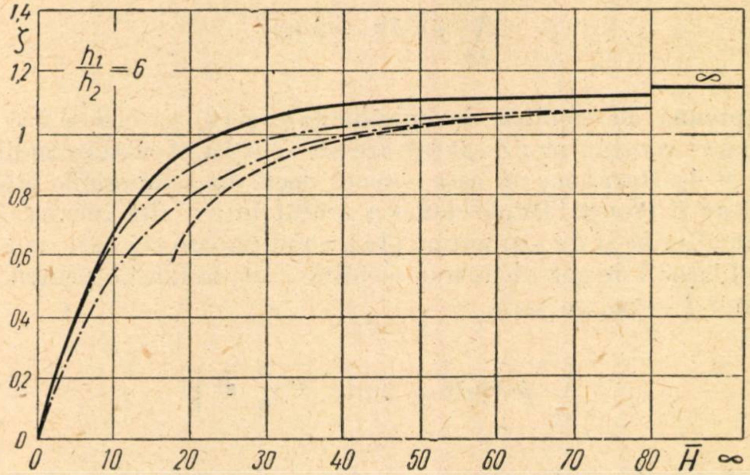


Fig. 3. — Variația coeficientului de încărcare ζ în funcție de $\bar{H} = \frac{\mu\, Vl}{p_0 h_2^2}$ pentru două suprafețe plane înclinate cu $\frac{h_1}{h_2} = 6$, ——— exact [1]; — — — formula (30); —··— formula (32); —·— formula (35).

În sfîrșit, plecînd de la ecuația (15) se obține

$$\bar{p} = \frac{h_1}{h} - \frac{h_1 - h_2}{h} \frac{e^{6\,H\bar{x}} - 1}{e^{6\,H} - 1} \tag{34}$$

și

$$\zeta = \left(\frac{1}{1 - \frac{h_2}{h_1}} + \frac{1}{e^{6\,H} - 1} \right) \ln \frac{h_1}{h_2} - 1 - \frac{e^{\frac{6\,Hh_1}{h_1 - h_2}}}{e^{6\,H} - 1} \left[Ei\left(- \frac{6\,Hh_2}{h_1 - h_2} \right) - Ei\left(- \frac{6\,Hh_1}{h_1 - h_2} \right) \right]. \tag{35}$$

Se remarcă din nou analogia dintre formulele (30) și (31). Ca exemplu, în figura 3 s-a reprezentat variația coeficientului ζ cu $\bar{H}$ pentru $\frac{h_1}{h_2} = 6$, dedusă cu ajutorul formulelor de mai sus. Rezultatele sînt comparabile pentru $\bar{H} > 30$, erorile cele mai mici fiind date de formula (32).

★

Revenind acum la cazul lagărelor circulare trebuie să remarcăm că pe lîngă problema modificării ecuației presiunilor se mai pune chestiunea alegerii unor condiții la limita corecte. În majoritatea metodelor prezentate [2], [7], [10], [12] se consideră că masa de gaz conținută între cele două suprafețe este constantă de unde rezultă condiția (pentru $\varkappa = 1$)

$$\int_0^{2\pi} \overline{p}\overline{h}\, d\theta = 2\,\pi, \tag{36}$$

care, împreună cu condiții de periodicitate $p(\theta) = p(\theta + 2\pi)$ permite determinarea constantelor de integrare ale soluției. Această condiție, pusă de altfel și de Harrison, nu este corectă decît dacă marginile laterale ale lagărului ar fi etanșe. După cum s-a arătat într-o altă lucrare [6], fapt accentuat ulterior și de alți autori [14], condiția corectă este de a impune ca debitul lateral de gaz să fie nul, condiție care, la limită, pentru o lățime a lagărului $b \to \infty$, se scrie

$$\int_0^{2\pi} \overline{p}^2\overline{h}^3\, d\theta = 2\pi\left(1 + \frac{3}{2}\,\varepsilon^2\right). \tag{37}$$

Dacă se notează de exemplu cu p_0^* presiunea în zona grosimii maxime a stratului de lubrifiant ($\theta = 0$) atunci valorile acestei presiuni sînt diferite, după cum se aplică relația (36) sau (37), așa cum rezultă din diagramele din figurile 4 și 5. Aceste diagrame au fost deduse plecînd de la datele numerice, pentru distribuțiile de presiuni obținute de S. A. Scheinberg [3] și prin calculul numeric al integralelor (36) (37). Se constată că în cazul condiției (37) p_0^* rezultă mai mare decît în cazul condiției (36).

În cazul metodei perturbațiilor mici [7] condițiile (36) și (37) rezultă identice pentru o soluție în care se neglijează pătratul excentricității ε. În rest, formulele obținute trebuie corectate în consecință.

Astfel pentru metoda „*ph*" a lui Ausman [10] plecînd de la ecuația (15) și ținînd seama că grosimea h are expresia (3) se deduce

$$\overline{p} = \frac{K_1}{1 + \varepsilon \cos\theta} + \frac{\varepsilon}{1 + 36\,H^2}\,\frac{6\,H \sin\theta + \cos\theta}{1 + \varepsilon\cos\theta}. \tag{38}$$

Pentru condiția (36) rezultă $K_1 = 1$. În cazul condiției (37) se deduce o ecuație de gradul doi în K_1

$$K_1^2 + \frac{\varepsilon^2}{1 + 36\,H^2} K_1 + \frac{\varepsilon^2}{2\,(1 + 36\,H^2)} - \left(1 + \frac{3}{2}\,\varepsilon^2\right) = 0, \tag{39}$$

de unde

$$K_1 = -\frac{\varepsilon^2}{2(1+36H^2)} + \left[\frac{\varepsilon^4}{4(1+36H^2)} - \frac{\varepsilon^2}{2(1+36H^2)} + 1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2\right]^{1/2}. \quad (40)$$

Dacă $H \to 0$ sau $\varepsilon \to 0$ atunci $K_1 \to 1$; în schimb pentru $H \to \infty$, $K_1 \to \sqrt{1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2}$. Variația coeficientului K_1 în funcție de H și ε este reprezentată în diagrama din figura 6.

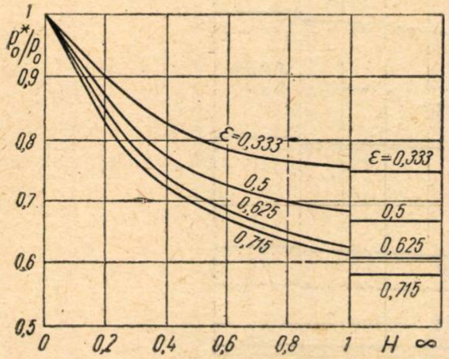


Fig. 4. — Variația presiunii p_0^* la $\theta = 0$ în funcție de H pentru un lagăr circular (condiția (36)).

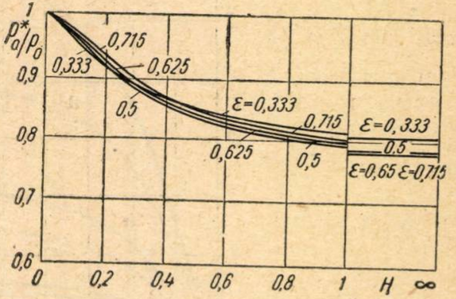


Fig. 5. — Variația presiunii p_0^* la $\theta = 0$ în funcție de H pentru un lagăr circular (condiția (37)).

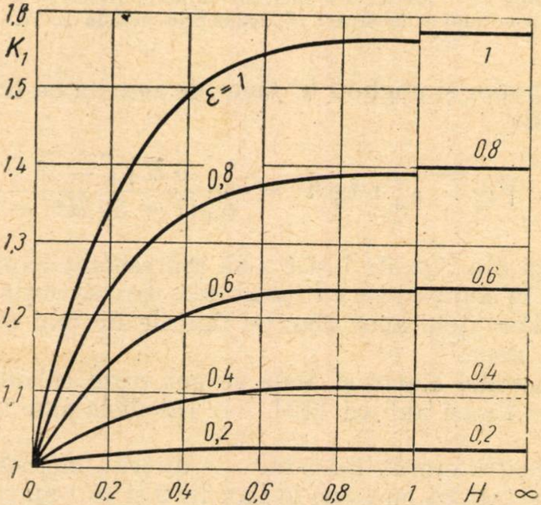


Fig. 6. — Constanta K_1 în funcție de H și ε în cazul condiției (37).

Componentele P_t şi P_n ale rezultantei presiunilor după linia centrelor şi o normală la aceasta rezultă egale cu

$$\left.\begin{aligned} C_t &= \frac{P_t}{2\,p_0 r_1} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(K_1 - \frac{1}{1+36\,H^2}\right),\\ C_n &= \frac{6\,H}{1+36\,H^2}\,\frac{\pi}{\varepsilon}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

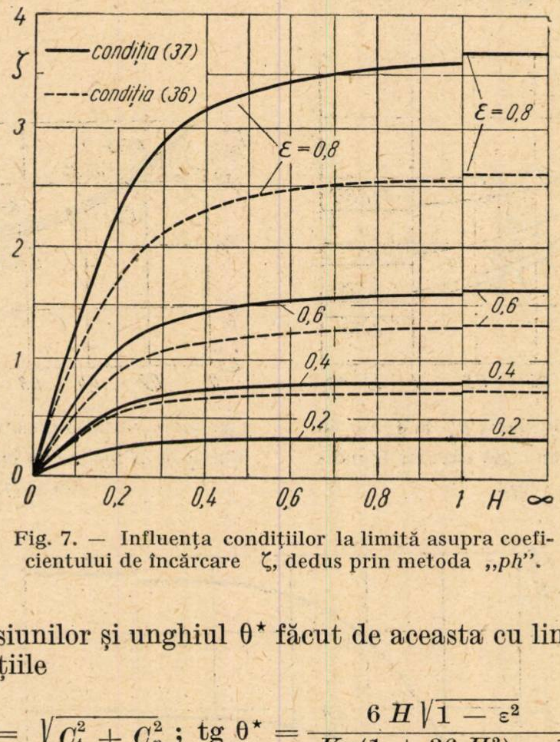


Fig. 7. — Influenţa condiţiilor la limită asupra coeficientului de încărcare ζ, dedus prin metoda „*ph*".

Rezultanta presiunilor şi unghiul $\theta^{\star}$ făcut de aceasta cu linia centrelor vor fi date de relaţiile

$$\zeta = \sqrt{C_t^2 + C_n^2}\;;\; \operatorname{tg}\theta^{\star} = \frac{6\,H\sqrt{1-\varepsilon^2}}{K_1\,(1+36\,H^2)-1}. \tag{42}$$

În diagrama din figurile 7 şi 8 s-au reprezentat expresiile ζ şi $\theta^{\star}$ în funcţie de ε şi H în comparaţie cu rezultatele care se obţin dacă se impune condiţia (36). Diferenţele apar clar pe figurile de mai sus, în special la excentrităţi mai mari.

În cazul metodei Katto şi Soda se pot relua calculele urmînd procedeul indicat de însăşi autorii [12], dar calculele sînt în acest caz mai laborioase.

Pentru a ilustra erorile introduse de diferite metode, sub forma lor originală sau corectată ca mai sus, în figurile 9 şi 10 s-au reprezentat coeficienţii ζ (H) pentru ε = 0,8 şi respectiv $\theta^{\star}$ (ε) pentru H = 0,167 în cazul condiţiilor (36) şi (37). Pe aceste figuri s-a notat cu 1 rezultatele care se obţin în regim incompresibil; cu 2, 3 rezultatele numerice deduse după [3] în cazul condiţiei (36) şi din [14] pentru condiţia (37); cu 4 s-au notat curbele obţinute după metoda Katto şi Soda [2] iar cu 5 după metoda lui Ausman [10] respectiv formulele (41) (42). În sfîrşit cu 6 s-au notat rezultatele obţinute după metoda Harrison modificată [5] iar cu 7 rezultatele obţinute prin metoda perturbaţiilor mici [7]. După cum era de aşteptat, metoda perturbaţiilor mici nu este aplicabilă la excentrităţi mari. Restul metodelor dau erori în exces, cele mai mari erori fiind date de metoda Katto şi Soda. Pentru unghiul θ*, diferenţele între cele două metode sînt mai reduse.

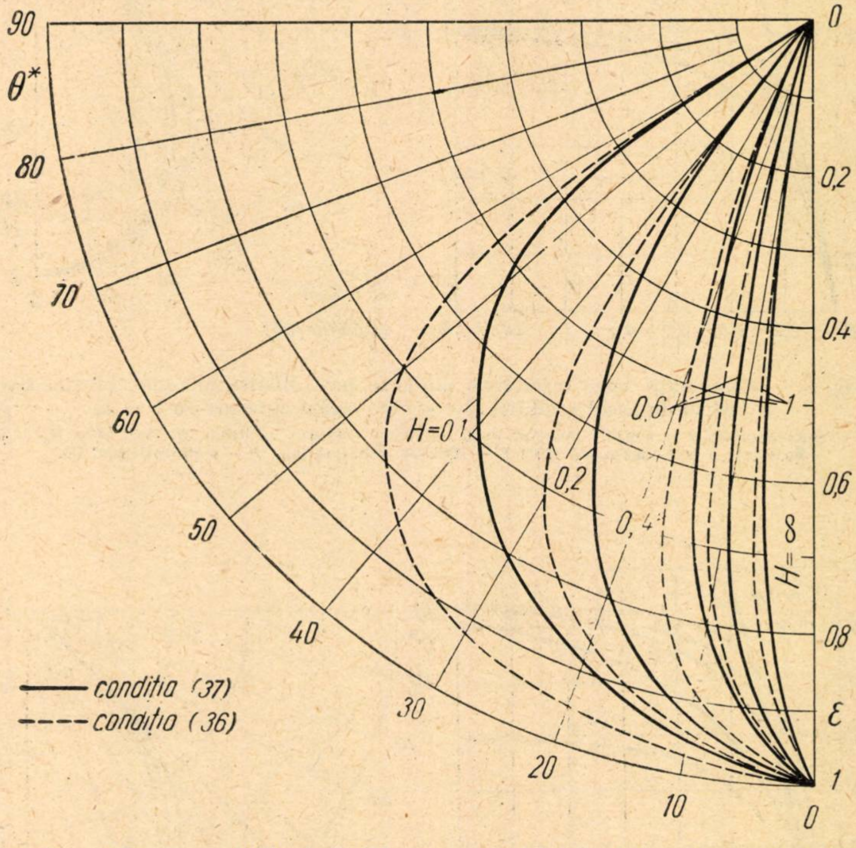


Fig. 8. — Influenţa condiţiilor la limită asupra unghiului θ*, dedus prin metoda „ph".

În consecinţă, toate metodele aproximative prezentate introduc în calculul rezultantei presiunilor o eroare în exces, care scade pe măsura creşterii parametrului H. Unii autori caută să compenseze eroarea semnalată prin utilizarea condiţiei incorecte (36); în acest caz, după cum se constată din figurile 9 şi 10 eroarea introdusă este acoperitoare, dar creşte cu numărul H fiind importantă tocmai la viteze mari şi excentrităţi mari.

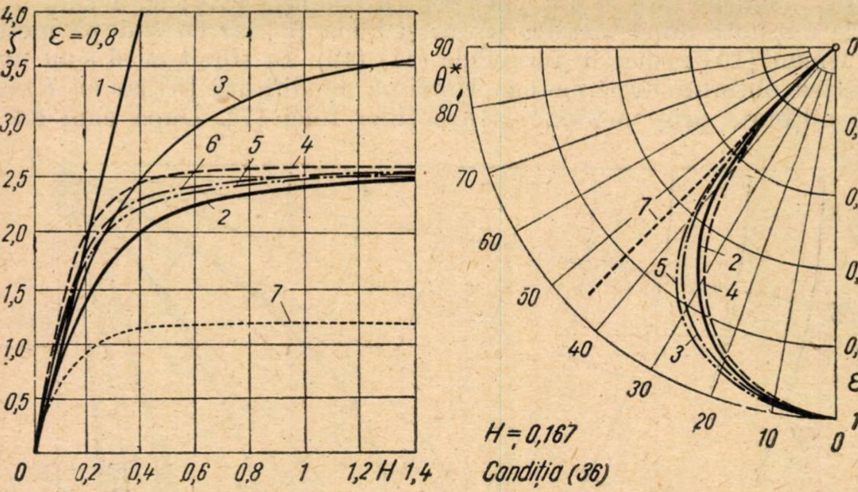


Fig. 9. — Comparații între rezultatele obținute prin diferite metode aproximative de calcul în cazul condiției (36) pentru lagăre circulare cu λ = ∞

1 — incompresibil; 2 — numeric (adaptat după [3]); 3 — numeric, condiția (37) [14]; 4 — Katto și Soda [2]; 5 — Ausman „ph" [10]; 6 — Harrison modificat [5]; 7 — perturbații mici [7].

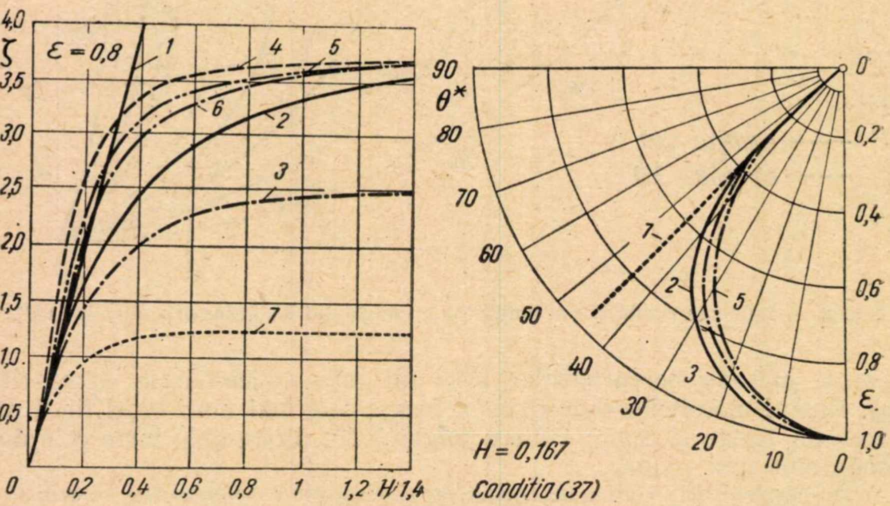


Fig. 10. — Comparație între rezultatele obținute prin diferite metode aproximative de calcule în cazul condiției (37) pentru lagăre circulare cu λ = ∞.

1 — incompresibil; 2 — numeric [14]; 3 — numeric condiția (36); 4 — Katto și Soda modificat; 5 — Ausman „ph" modificat; 6 — Harrison modificat; 7 — perturbații [7] mici.

LAGĂRE DE DIMENSIUNI FINITE

Dacă se consideră şi influenţa mişcării laterale, în direcţia z problema este desigur mai complexă. Ecuaţia presiunilor are cunoscuta formă, pentru mişcări permanente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 p^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 p^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=3\,\mathrm{V}\left(\frac{1}{\varkappa}+1\right)\frac{\partial\left(p^{\frac{1}{\varkappa}}h\right)}{\partial x}, \tag{43}$$

unde cu o aproximaţie suficient de redusă, se poate considera $\varkappa = 1$. Cu variabile adimensionale ecuaţia de mai sus se scrie

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{h}^3\bar{p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\bar{h}^3\bar{p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\right)=6\,H\,\frac{\partial(\bar{p}h)}{\partial \bar{x}}, \tag{44}$$

unde $\bar{x} = \dfrac{x}{r_1}$ şi $\bar{z} = \dfrac{\bar{z}}{r_1}$.

Metodele de determinare a distribuţiei presiunilor care să permită conducerea pînă la capăt a calculelor sub formă analitică au la bază fie ipoteze semiempirice [3], [9] fie liniarizarea ecuaţiei presiunilor sub una din formele deja examinate [8], [10], [12]. În ultimul caz, liniarizarea ecuaţiei presiunilor permite scrierea soluţiei sub forma

$$p = p_\infty - p^\star, \tag{45}$$

unde $p^\star$ este soluţia ecuaţiei omogene iar p_∞ este o soluţie particulară a ecuaţiei presiunilor, soluţie funcţie numai de $\bar{x}$ (respectiv θ) şi care este egală cu soluţia în cazul lagărelor de alungire infinită. În acest mod dacă alungirea λ respectiv lăţimea b a lagărului tinde către infinit, sau $H \to \infty$, atunci $p^\star \to 0$ iar $p \to p_\infty$. Să considerăm de exemplu metoda „*ph*" a lui Ausman [10], în care caz ecuaţia presiunilor (43) se scrie sub forma aproximativă

$$\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\overline{\Pi}}{\partial\bar{z}^2}-6\,H\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial\theta}=-\varepsilon\cos\theta. \tag{46}$$

Prin analogie cu (45) se poate pune

$$\overline{\Pi} = \overline{\Pi}_\infty - \overline{\Pi}^\star, \tag{47}$$

unde $\overline{\Pi}^\star$ satisface ecuaţia (46) fără membru secund, iar $\overline{\Pi}$ are expresia (38)

$$\overline{\Pi}_\infty = K_1 + \frac{\varepsilon}{1+36H^2}(6\,H\sin\theta+\cos\theta). \tag{48}$$

Ausman reuşeşte să obţină soluţia $\Pi^\star$ sub formă închisă dar numai în cazul în care se consideră în expresia (48) $K_1 = 1$. Dar, după cum s-a arătat mai înainte această ipoteză corespunde condiţiei la limită (36), care este incorectă. O condiţie analoagă utilizează şi Katto şi Soda [12] căutînd să o justifice considerînd că efectiv, pentru lagărele de alungire infinită condiţia (36) ar fi corectă şi nu condiţia (37). Această ambiguitate impune cercetarea mai atentă a modului de punere a condiţiei menţionate.

Rezultatele care se obţin direct prin integrarea numerică a ecuaţiei presiunilor [15] [16], şi care nu utilizează nici un moment soluţia p_∞, arată că dacă $\lambda \to \infty$ sau $H \to \infty$ presiunile tind către soluţia p_∞ corespunzătoare condiţiei (37), fapt care sugerează că această condiţie este cea corectă. De altfel J. Ausman consideră utilizarea condiţiei (36) ca o eroare a metodei.

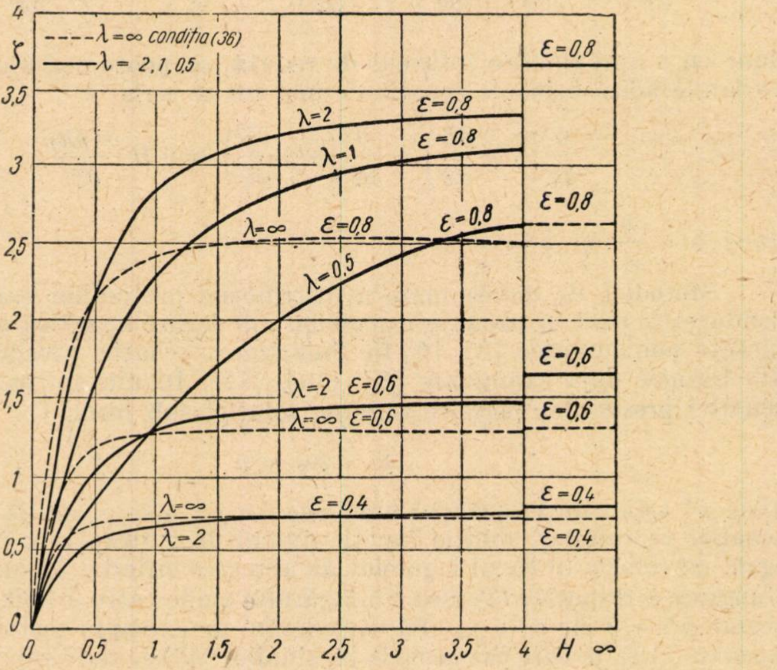


Fig. 11. — Comparaţie între coeficientul de încărcare ζ pentru diferite alungiri λ şi coeficientul ζ pentru λ = ∞ şi condiţia (36).

O indicaţie suplimentară în această privinţă se poate obţine comparînd rezultatele pentru $\lambda = \infty$ (cu condiţia (36)) cu rezultatele numerice menţionate. Curbele corespunzătoare sînt redate în figura 11, din care se constată că, începînd de la un anumit număr H, curbele ζ se situează deasupra curbelor pentru $\lambda = \infty$. Ori este foarte puţin probabil ca un lagăr de alungire finită, de exemplu $\lambda = 2$ să aibă o capacitate de încărcare mai mare decît în cazul $\lambda = \infty$ (pentru $H = 1$ şi $\lambda = 2$, $\varepsilon = 0{,}8$, rezultă [15] $\zeta = 2{,}82$ în timp ce pentru $\lambda = \infty$ în condiţiile menţionate se deduce

$\zeta = 2{,}41$). Rezultă deci că trebuie să se considere drept corectă condiția (37) nu numai pentru cazul asimptotic $H \to \infty$, dar și în soluția particulară (48).

Este însă de remarcat că dacă în soluția particulară (48) se consideră pentru K_3 valoarea dată de relația (40) (fig. 6) soluția $\Pi^\star$ nu mai poate fi obținută sub formă închisă iar calculele devin foarte laborioase. De aceea, este preferabil să se păstreze soluția analitică sub forma dată de J. Ausman [15] iar în cele din urmă să se efectueze o corecție care să compenseze în prima aproximație eroarea introdusă. Astfel observînd că, pentru $H \to \infty$ se deduce

$$(\overline{\Pi})_{H\to\infty} = 1, \tag{49}$$

în timp ce valoarea corectă este

$$(\overline{\Pi})_{H\to\infty} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2}\,, \tag{50}$$

rezultă că trebuie să se introducă un factor de corecție egal cu $\sqrt{1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2}$.

În acest mod caracteristicile de funcționare sînt egale cu

$$\left.\begin{aligned}
&C_t = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2}\, C_t^{(1)} \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,;\; C_n = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2}\, C_n^{(1)} \frac{2}{\varepsilon^2}\left(1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}\right),\\
&\operatorname{tg}\theta^\star = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\operatorname{tg}\theta^{\star(1)};\; \zeta = \zeta^{(1)}\sqrt{1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2}\,\frac{2}{\varepsilon^2}\,\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta^{\star(1)}}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

unde $C_n^{(1)}$, $C_t^{(1)}$, $\theta^{\star(1)}$, $\zeta^{(1)}$ sînt caracteristicile care se obțin prin metoda perturbațiilor mici (excentricități reduse [8]):

$$\left.\begin{aligned}
&C_t^{(1)} = \frac{3\,\pi\varepsilon H}{1+36H^2}\left[6H + \frac{(\alpha - 6\,\beta H)\sin 2\,\beta\lambda - (6\,H\alpha + \beta)\operatorname{sh}\alpha\lambda}{\lambda\sqrt{1+36\,H^2}\,(\operatorname{ch}2\,\alpha\lambda + \cos 2\,\beta\lambda)}\right],\\
&C_n^{(1)} = \frac{3\,\pi\varepsilon H}{1+36H^2}\left[1 - \frac{(\alpha - 6\,\beta H)\operatorname{sh}2\,\alpha\lambda + (6\,H\alpha - \beta)\sin 2\,\beta\lambda}{\lambda\sqrt{1+36\,H^2}\,(\operatorname{ch}2\,\alpha\lambda + \cos 2\,\beta\lambda)}\right],\\
&\qquad\zeta^{(1)} = \sqrt{C_t^{(1)^2} + C_n^{(1)^2}}\;;\; \operatorname{tg}\theta^{\star(1)} = \frac{C_n^{(1)}}{C_t^{(1)}}\,,\\
&\qquad\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{1+36\,H^2}+1}{2}}\;;\; \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{1+36\,H^2}-1}{2}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Pentru a fixa ideile, în figurile 12 *a*, *b*, și 13 s-a reprezentat variația coeficientului de încărcare ζ și a unghiului $\theta^\star$ în funcție de H, pentru $\lambda = 1$ și $\varepsilon = 0{,}8$. Pe diagrame s-au trecut curbele obținute prin integrarea numerică a ecuației presiunilor [15], prin metoda empirică propusă de S. A. Scheinberg [3] (extrapolînd rezultatele pentru $\varepsilon = 0{,}8$), prin metoda

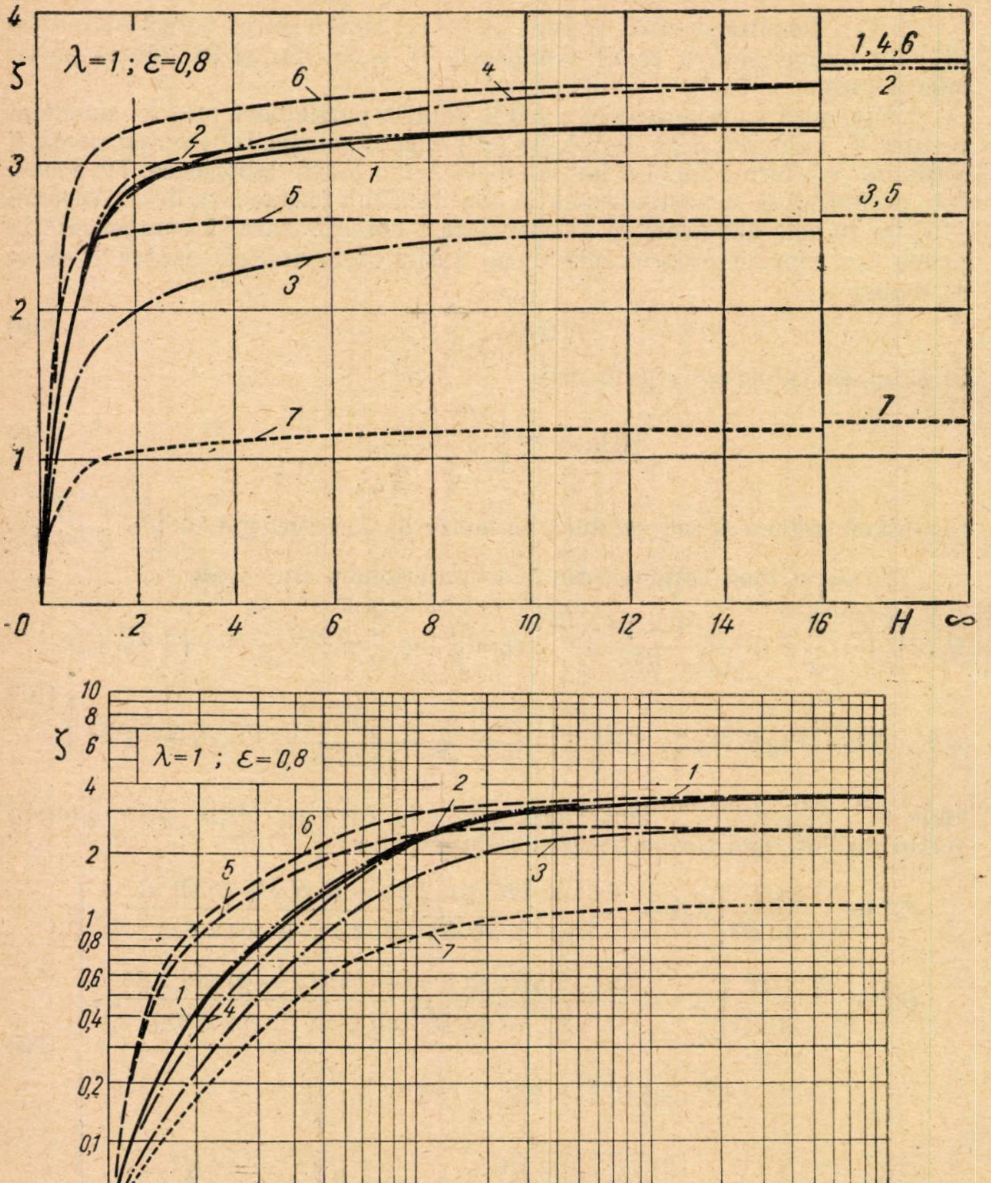


Fig. 12 *a*, *b*, — Comparaţie între rezultatele obţinute prin diferite metode aproximative de calcul pentru coeficientul de încărcare ζ (lagăre circulare cu $\varepsilon = 0{,}8$; $\lambda = 1$).

1 – numeric [15]; *2* – S.A. Scheinberg [3]; *3* – J. Ausman „*ph*" [10]; *4* – J. Ausman corectat; *5* – Katto şi Soda [12]; *6* – Katto şi Soda corectat; *7* – perturbaţii mici [8].

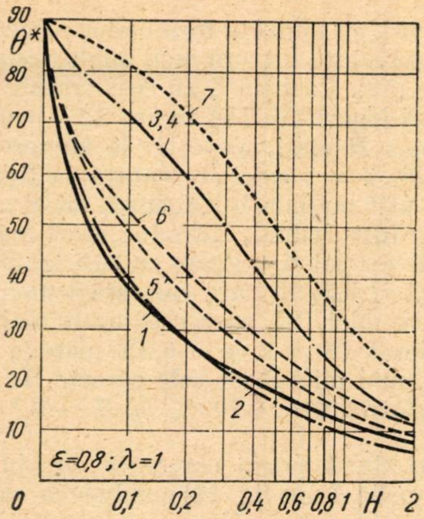


Fig. 13. — Comparație între rezultatele obținute prin diferite metode aproximative de calcul pentru unghiul θ* (lagăre circulare cu ε = 0,8 ; λ = 1).

1 — numeric [15] ; 2 — S. A. Scheinberg [3] 3 — J. Ausman „ph" [10] ; 4 — J. Ausman corectat ; 5 — Katto și Soda [12] ; 6 — Katto și Soda corectat ; 7 — perturbații mici [8].

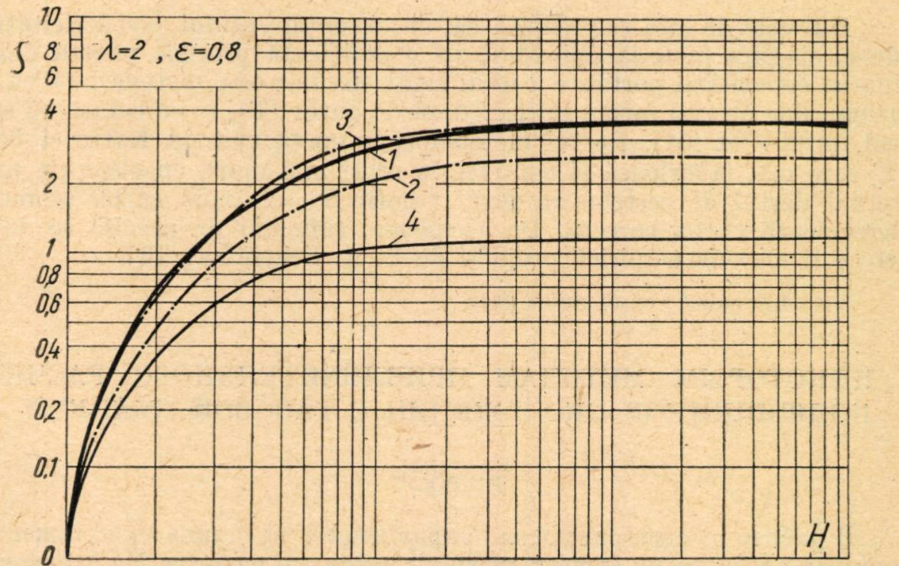


Fig. 14. — Comparații între rezultatele obținute prin diferite metode aproximative de calcul pentru coeficientul de încărcare ζ (lagăre circulare cu ε = 0,8 ; λ = 2).

1 — numeric [15] ; 2 — J. Ausman „ph" [10] ; 3 — J. Ausman corectat ; 4 — perturbații mici [8].

„*ph*” a lui Ausman [10], cu ajutorul formulelor corectate (51), prin metoda Katto şi Soda [12], corectată într-un mod analog relaţiilor (51) şi în sfîrşit cu ajutorul relaţiilor (52). Curbele ζ au fost trasate cu scări obişnuite în figura 12 *a* şi cu scări logaritmice în figura 12 *b* pentru a se pune în evidenţă erorile la numere H mari, respectiv la numere H reduse. O comparaţie analoagă, pentru $\lambda = 2$ este prezentată în figura 14.

Se constată că atît metoda lui Ausman cît şi metoda Katto şi Soda sub forma în care au fost deduse, introduc erori mari la numere H mari ($H > 1$); de aceea ele nu pot fi aplicate cu suficientă precizie decît pentru excentrităţi reduse ($\varepsilon < 0{,}5$) în care caz este atunci preferabilă utilizarea metodei perturbaţiilor mici [8], care este mult mai simplă. De exemplu pentru cazul considerat ($\lambda = 1$, $\varepsilon = 0{,}8$), metoda Ausman conduce la valori ζ cu cca 40% mai mici decît cele corecte. În cazul metodei Katto şi Soda, eroarea variază între +100% la $H \sim 0{,}1$ şi −40% la numere $H > 3$.

În schimb, metoda Ausman corectată cu ajutorul formulelor (51) (curbele din fig. 12, curba *3* din fig. 14) conduce la valori suficient de apropiate de cele corecte pentru întregul interval de variaţie pentru parametrii ε, H. De asemenea, suprinzător de precisă se dovedeşte a fi metoda empirică a lui S. A. Scheinberg [3] atît la numere H reduse, cît şi la numere H mari.

Concluziile de mai sus rămîn calitativ valabile pentru orice alungire (fig. 14 pentru $\lambda = 2$, fig. 10 pentru $\lambda = \infty$).

CONCLUZII

Din cele de mai sus rezultă că, cu excepţia cazului excentricităţilor reduse, singura metodă aplicabilă cu o suficientă precizie pentru determinarea capacităţii portante a unui lagăr circular este metoda „*ph*” a lui Ausman dar nu sub forma iniţială dată de autor [10] ci corectată cu ajutorul formulelor (51). Restul metodelor, în speţă metoda Katto şi Soda [12] este mai laborioasă şi conduce la erori mai mari, cu excepţia unui interval destul de restrîns în jurul valorii $H = 1$ unde curba teoretică intersectează curba corectă. De asemenea, suficient de precisă se dovedeşte a fi metoda empirică propusă de S. A. Scheinberg [3].

Primită la redacţie la 30 aprilie 1962

К НЕКОТОРЫМ МЕТОДАМ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНОГО РАСЧЕТА ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ С ГАЗОВОЙ СМАЗКОЙ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются направление и величина приближений, вводимых различными существующими методами расчета. На основании этих соображений выводятся корректированные аналитические выражения, точность расчета которых выявляется сравнением с числовыми данными.

ON SOME APPROXIMATE METHODS FOR THE ANALYSIS OF GAS LUBRICATED JOURNAL BEARINGS

ABSTRACT

This paper analyses the sense and the magnitude of approximations introduced by various existing methods of analysis for the gas lubricated journal bearings. On the basis of these considerations, corrected analytical expressions are deduced whose calculation accuracy is emphasized by comparisons with numerical data.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Calculul lagărelor de alungire lubrificate cu gaze, compuse din suprafețe plane.* St. cerc. mec. apl., **VII,** *3,* 741—771 (1956).
2. Y. Katto, N. Soda, *Theory of Lubrication by Compressible Fluid with Special Reference to Air Bearing.* Proc. Second Japan Nat. Congress for Appl. Mech., 267—270 (1952).
3. С. А. Шэйнберг, *Газовая смазка подшипников скольжения. Трение. Износ в машинах,* **VIII,** 107—204 (1953).
4. V. N. Constantinescu, *Considerații asupra calculului lagărelor de alungire infinită lubrificate cu gaze.* I. St. cerc. mec. apl., **VI,** *3—4,* 377—400 (1955) ; II. St. cerc. mec. apl., **VII,** *1,* 81—105 (1956).
5. — *Sur la théorie des paliers à gaz.* Revue de Mécanique Appliquée, **I,** *1,* 141 — 155 (1956).
6. — *Sur le problème tridimensionnel de la lubrification aux gaz.* Revue de Mécanique Appliquée, **I,** *2,* 123—138 (1956).
7. J. S. Ausman, *The Fluid Dynamic Theory of Gas Lubricated Bearings.* ASME Transaction, **79,** *6,* Aug., 1218—1224 (1957).
8. — *Finite Gas Lubricated Journal Bearings.* IME Conference on Lubrication and Wear, London, Oct. 1957, paper 22.
9. N. Tipei, V. N. Constantinescu, *On High-Speed Self-Acting Gas Bearings.* Proceedings of the First Intern. Symposium on Lubricated Bearings, Washington, Oct. 1959, 225—241.
10. J. S. Ausman, *An Improved Analytical Solution for Self-Acting Gas Lubricated Bearings of Finite Length.* ASME Transaction, Series D. Journ. of Basic Eng., **83,** *2,* June, 188—194 (1961).
11. W. A. Gross, E. C. Zachmanoglou, *Perturbation Solutions for Gas. Lubricating Films.* ASME Transaction, Series D., Journ. of Basic Eng., **83,** *2,* June, 139—144 (1961).
12. Y. Katto, N. Soda, *Theoretical Contribution to the Study of Gas Lubricated Journal Bearing.* ASME Transactions, Series D, Journal of Basic Engineering, **84,** *1,* March, 123—131 (1962).
13. W. I. Harrison, *The Hydrodynamic Theory of Lubrication with Special Reference to Air as a Lubricant.* Trans. Cambridge Phil. Soc., **XXII,** 37—54 (1913).
14. H. G. Elrod, A. Burgdorfer, *Refinements of the Theory of the Infinitely-Long, Self-Acting, Gas-Lubricated Journal Bearing.* Proceedings of the First International Symposium on Gas-Lubricated Bearings, Oct., Washington, 93—118 (1959).
15. A. A. Raimondi, *A Numerical Solution for the Gas Lubricated Journal Bearings of Finite Length.* ASLE Transactions Academic Press Inc., **4,** 131—155 (1961).
16. W. A. Gross, *Study of Performance, Characteristics of Gas Lubricated Journal Bearings with Slenderness Ratio* $L/B = \pi$. Journal of Aero Space Sciences, **27,** *11,* Nov., 869—870 (1960).

STUDII

UNELE ASPECTE CANTITATIVE EXPERIMENTALE ALE COEFICIENTULUI DE FRECARE LA LAGĂRELE CU ALUNECARE

DE

GH. VASILCA

Se poate considera că diferitele soluţii existente, rezultate din teoria hidrodinamică a lubrificaţiei, cu privire la calcularea coeficienţilor de frecare la lagărele cu alunecare, conduc la rezultate cantitative ce pot fi utilizate cu succes pentru necesităţile de proiectare.

Atît pentru coeficienţii de încărcare ζ relativ mici (fig. 1), cît şi pentru valori mai mari ale acestora (fig. 2) se poate constata o destul de bună concordanţă între valorile coeficienţilor de frecare calculate cu relaţii de calcul mai aproximative, ca de exemplu după Vogelpohl [1]

$$f_{V_0} = \psi \frac{3}{S_0}, \qquad \text{pentru } S_0 < 1, \tag{1}$$

$$f_{V_0} = \psi \frac{3}{\sqrt{S_0}}, \qquad \text{pentru } S_0 > 1,$$

şi cu relaţiile mai exacte după N. Tipei [2], [3]

$$f_{T_i} = \psi \frac{\pi}{2} \frac{C_m}{\zeta}, \tag{2}$$

în care ψ este jocul relativ, iar S_0, ζ şi C_m sînt coeficienţi adimensionali, daţi de expresiile

$$S_0 = \frac{d\psi^2 p_m}{2\mu_m V}, \tag{3}$$

$$\zeta = \frac{d\psi^2 p_m}{2\mu_1 V} = \Phi(\lambda, \varepsilon, q), \tag{4}$$

$$C_m = \frac{2\psi M}{\pi d b \mu_1 V} = \varphi(\lambda, \varepsilon, q). \tag{5}$$

În aceste relații și în cele ce urmează

d — diametrul fusului,

$\lambda = \frac{b}{d}$ — alungirea relativă,

V — viteza periferică a fusului,

$p_m = \frac{P}{bd}$ — presiunea specifică medie,

μ_m — viscozitatea lubrifiantului corespunzătoare temperaturii medii a peliculei de lubrifiant,

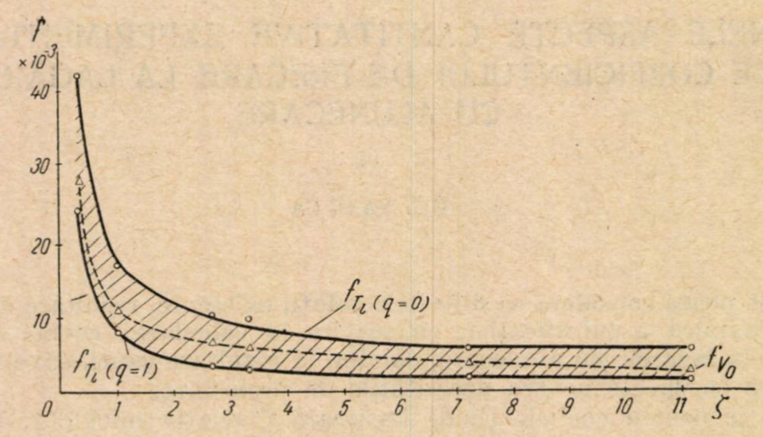


Fig. 1

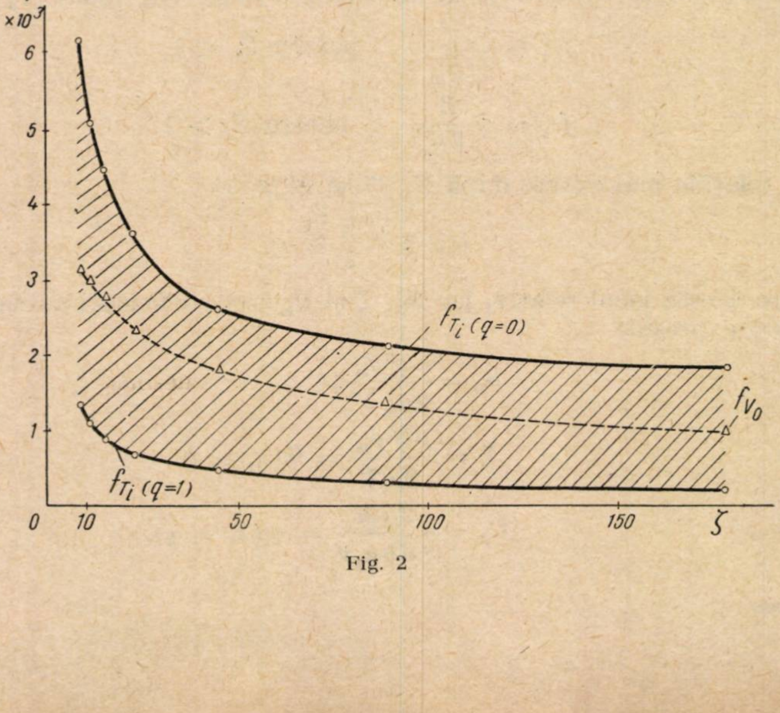


Fig. 2

μ_1 — viscozitatea lubrifiantului la intrarea în lagăr,
ε — excentricitatea relativă,
h — grosimea peliculei de lubrifiant într-un punct curent,
h_1, h_2 — grosimea peliculei de lubrifiant în dreptul orificiului de intrare a uleiului în suprafaţa activă, respectiv grosimea minimă a peliculei,
M — momentul de frecare la fus,
t_b — temperatura lubrifiantului în bazinul de alimentare,
t_1 — temperatura lubrifiantului la intrare în suprafaţa activă,
t_c — temperatura cuzinetului.

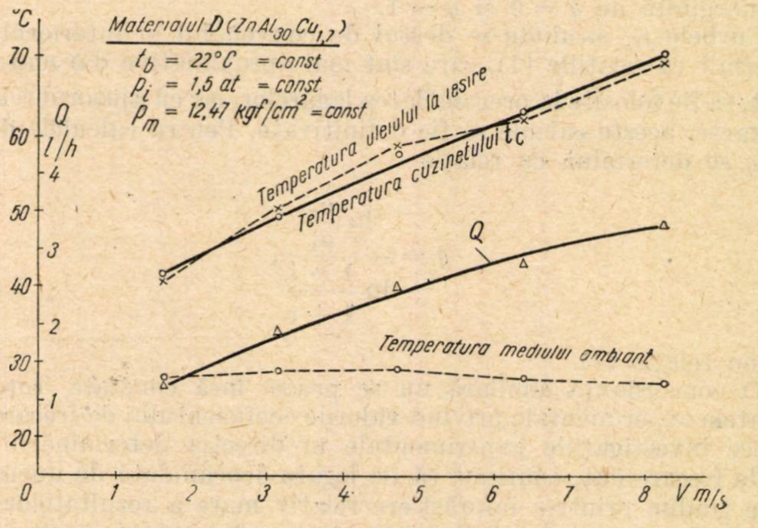


Fig. 3

Relaţiile (1) conţin trei aproximaţii importante : coeficientul constant 3, caracterul de valoare medie μ_m pentru viscozitate şi admiterea în calcul că temperatura corespunzătoare acestei viscozităţi medii este egală cu temperatura de funcţionare a lagărului. Această ultimă ipoteză se verifică în unele cazuri constructive şi funcţionale de lagăre (fig. 3), ca de exemplu în condiţiile experimentale arătate mai jos la materialul *D*, constatîndu-se că, la debite relativ mici de lubrifiant, temperatura medie a uleiului la ieşire din lagăr este sensibil egală cu temperatura t_c a cuzinetului. Suportul relaţiei (1) în totalitate şi din punctul de vedere al aplicaţiilor constă în aceea că valorile astfel calculate ale coeficientului de frecare se situează întro zonă în care se situează de asemenea numeroase rezultate experimentale.

Particularitatea relaţiei (2) constă în admiterea ipotezei că viscozitatea lubrifiantului variază în funcţie de grosimea peliculei, sub forma

$$\mu = \mu_1 \left(\frac{h}{h_1}\right)^q, \tag{6}$$

ceea ce corespunde mai bine cu fenomenul de lubrificație real din lagăr. Relația (2) nu conține aproximații de natura celor menționate, viscozitatea lubrifiantului la intrare poate fi stabilită mai precis decît μ_m, iar prin valori ale lui $q = 0 \div 1$, se cuprinde întregul domeniu constructiv și funcțional al lagărelor cu condițiile la limită care stau la baza relației (2). Cercetări experimentale au arătat [4] că q depinde nu numai de lubrifiant, ci în suficient de mare măsură de condițiile de disipare și evacuare a căldurii din lagăr. Coeficientul q poate fi privit prin urmare și ca o caracteristică a tipului respectiv de lagăr. În figurile 1 și 2, variația coeficientului de frecare f_{T_i} este reprezentată în consecință printr-o zonă mărginită de $q = 0$ și $q = 1$.

Curbele f_{V_0} situîndu-se destul de convenabil în interiorul zonei lui f_{T_i}, permit ca relațiile [1), care sînt mai aproximative dar mai simplu de aplicat, să fie folosite la precalcularea lagărelor, iar cu ajutorul relațiilor (2), mai exacte, aceste calcule să fie definitivate. Pentru calculele de definitivare, q se determină cu relația

$$q = \frac{\ln \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\ln \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}}, \tag{7}$$

iar ζ cu relația (4).

O concordanță similară nu se poate constata însă totdeauna la rezultatele experimentale privind valorile coeficientului de frecare. Aceasta deoarece investigațiile experimentale în direcția determinării coeficientului de frecare dat, continuă să fie legate deocamdată de unele greutăți, care se traduc printr-o împrăștiere relativ mare a rezultatelor obținute. Împrăștierile acestea împiedică uneori formularea unei concluzii suficient de sigure, mai ales atunci cînd se compară rezultatele experimentale cu acelea obținute prin calcul. Evident că în astfel de cazuri concordanța între rezultate depinde de gradul în care la ansamblul experimental s-au realizat condițiile la limită; împrăștierea poate fi apoi atribuită preciziei instalației și a aparaturii de măsură folosite. Nu poate fi neglijat uneori nici aspectul influenței posibile a interacțiunii fizice a materialelor fus-lubrifiant-cuzinet, asupra procesului de frecare.

Așa cum la calcule există mai multe căi pentru verificarea rezultatelor, apar necesare metode sau căi de verificare similare și cu privire la rezultatele obținute pe cale experimentală, prezentarea unor asemenea căi formînd obiectul lucrării de față.

În acest scop s-au folosit pentru valorile măsurate ale coeficientului de frecare rezultate experimentale obținute în condiții constructive complet diferite, avînd însă comun faptul că momentul de frecare s-a măsurat la cuzinet, ca moment de reacțiune rezultant.

S-au folosit rezultate obținute de E. Heidebroek [5] pentru două materiale antifricțiune, ambele cu bază de plumb, însă unul fără staniu A : 81,63% Pb, 14% Sb, 0% Sn, 3,07% As, 0,98 % Cu, 0,1% Ni și unul cu staniu B : 78% Pb, 14,9% Sb, 6,9% Sn, 2% Cd, 1% Cu, 1,3% Ni. Condițiile de experimentare pentru ambele au fost : $d = 60$ mm ; $\lambda = 0,7$; $\psi = 4,17‰$; $p_i = 3,5$ at = const., $t_1 = 30°C$ = const., lubrifiantul fiind uleiul mineral BC8 (4,5°E la 50°C). Încercările au fost făcute la o sarcină constantă $p_m = 44,4$ kgf/cm^2 și s-au măsurat, la diferite viteze, momentul de frecare, temperatura cuzinetului t_c și debitul de lubrifiant Q.

Alte rezultate [6] se referă la un cuzinet din fontă nodulară C : 3,24%C; 1,72%Si; 0,68%Mn; 0,14%P; 0,03%S; 0,1%Mg; cu d=60mm; $\lambda = 0,67$ și $\psi = 4‰$. Ungerea s-a făcut cu ulei avînd 6°E la 50°C (~ tip 305 STAS), sub presiune, cu un debit $Q = 8$ l/h = const. Încercările s-au făcut sub sarcină statică între limitele $p_m = 1-34$ kgf/cm^2, la vitezele constante $V = 0,82$ m/s și $V = 1,65$ m/s. S-au măsurat momentul de frecare și temperatura cuzinetului la diferite sarcini.

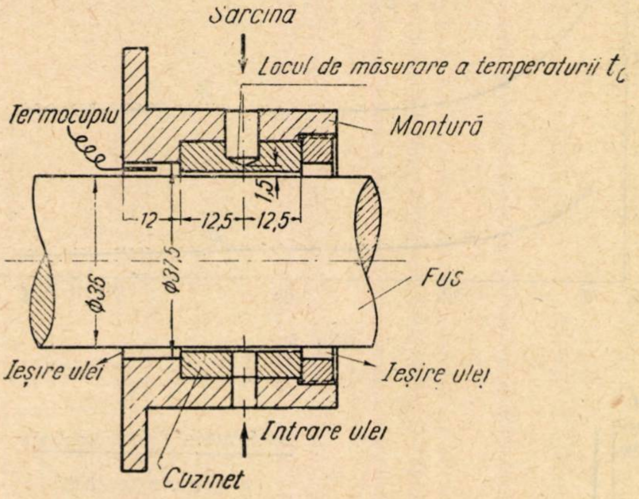


Fig. 4

Alte încercări [7] se referă la un material antifricțiune D, cu bază de zinc, de tipul ZnAl$_{30}$ Cu$_{1,7}$. Condițiile experimentale au fost :

— fusul : $d = 36$ mm, din OLC 16, cementat, călit și rectificat;

— cuzinetul : sub formă de bucșă cu pereți groși (6 mm);

— $\lambda = 0,7$;

— $\psi = 1,5‰$;

— lubrifiantul : ulei tip 305 STAS (~6°E la 50°C);

— $p_i = 1,5$ at = const. ;

— $t_b = 22°C$ = const. ;

— orificiul de alimentare : ∅ 4,5 mm, situat la $b/2$, în zona descărcată (la π față de direcția sarcinii);

— temperatura mediului ambiant : 22—23°C ;

— temperatura în lagărele de sprijin ale fusului : s-a menținut constantă la $t_{3/4} = 33°C$;

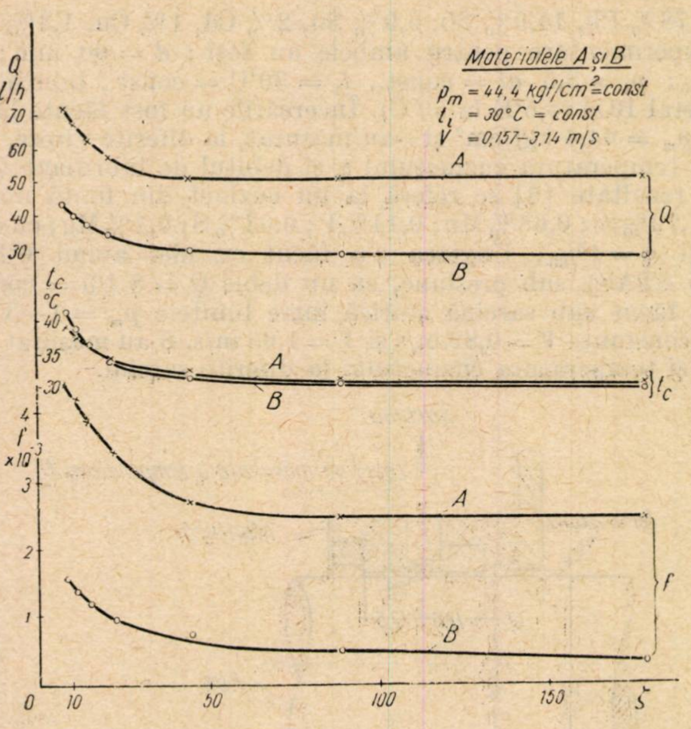

Q
l/h
70
60
50
40
30
Materialele A și B
p_m = 44,4 kgf/cm² = const
t_i = 30°C = const
V = 0,157–3,14 m/s
A
B
Q
t_c
°C
40
35
30
A
B
t_c
f
×10^-3
4
3
2
1
A
B
f
0
10
50
100
150
ζ

Fig. 5

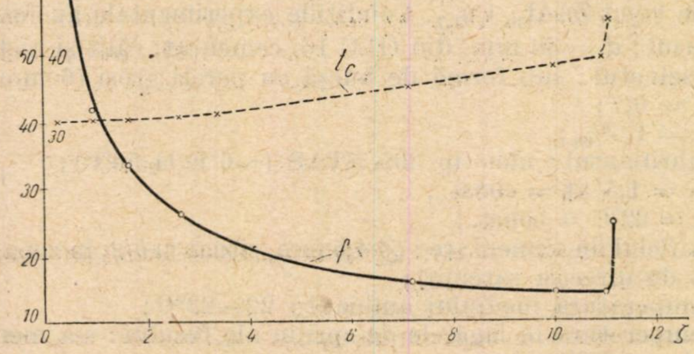

f
×10^-3
80
70
60
50
40
30
20
10
t_c
°C
50
40
30
Materialul C (fontă nodulară)
V = 0,82 m/s = const
p_m = 1 ÷ 34 kgf/cm²
Q = 8 l/h = const
t_1 = 25°C = const
t_c
f
0
2
4
6
8
10
12
ζ

Fig. 6

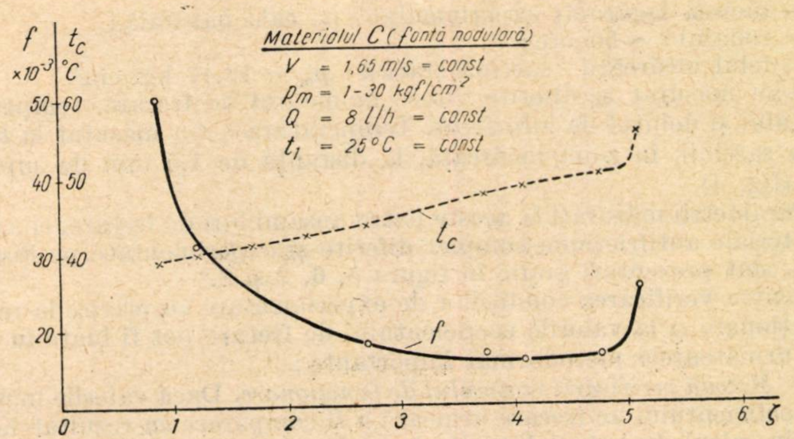

Materialul C (fontă nodulară)
V = 1,65 m/s = const
p_m = 1-30 kgf/cm²
Q = 8 l/h = const
t_1 = 25°C = const
f
t_c
×10⁻³
°C
50
60
40
50
30
40
20
t_c
f
0
1
2
3
4
5
6
ζ

Fig. 7

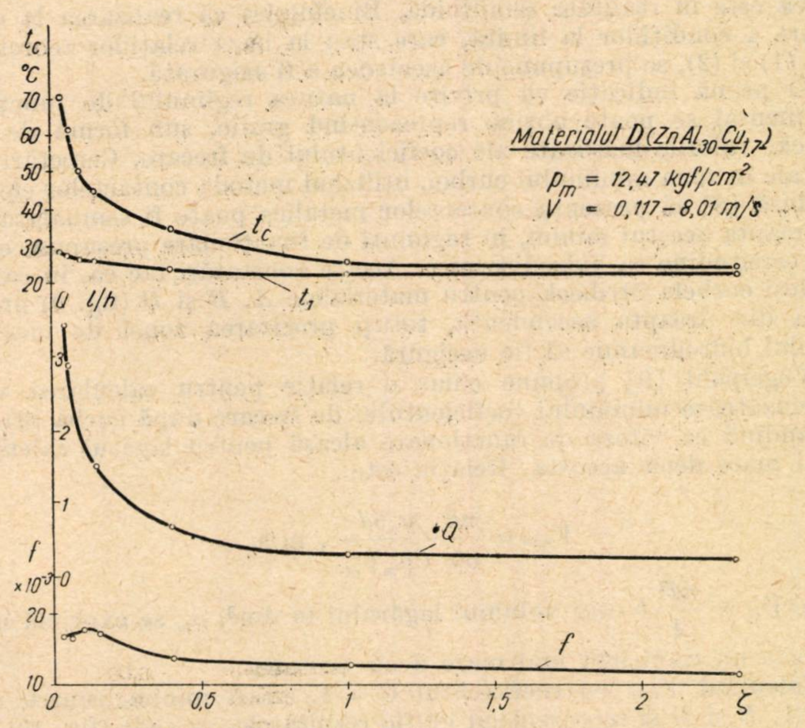

Materialul D (ZnAl30 Cu1,7)
p_m = 12,47 kgf/cm²
V = 0,117 – 8,01 m/s
t_c
°C
70
60
50
40
30
20
t_c
t_1
Q l/h
3
2
1
Q
f
×10⁻³
0
20
10
f
0
0,5
1
1,5
2
ζ

Fig. 8

— răcirea lagărului experimental : pe cale naturală ;

— rodajul : ~60 ore ;

— felul încărcării : sarcină statică : $p_m = 12{,}47$ kgf/cm².

S-au măsurat la diferite viteze momentul de frecare, temperatura cuzinetului și debitul de lubrifiant. Temperatura t_c s-a măsurat la $b/2$, pe direcția sarcinii, în zona încărcată, la distanța de 1,5 mm de suprafața activă (fig. 4).

Parametrii măsurați la aceste patru ansambluri de frecare, construite din materiale antifricțiune complet diferite și experimentate pe instalații diferite, sînt prezentați grafic în figura 5, 6, 7 și 8.

Pentru verificarea condițiilor de experimentare cu privire la regimul de funcționare și la valorile coeficientului de frecare pot fi luate în considerare următoarele metode mai importante :

1. *Metoda verificării regimului de funcționare.* Dacă valorile măsurate f_m ale coeficientului de frecare urmează a fi comparate cu rezultatele obținute prin calcul, trebuie delimitate cu grijă zonele în care în timpul experimentării regimul de funcționare a fost într-adevăr hidrodinamic. Aceasta deoarece un regim de funcționare experimental se poate prezenta stabil din punct de vedere termic și deci aparent hidrodinamic, chiar dacă frecarea este în realitate semifluidă. Bineînțeles că realizarea la experimentare a condițiilor la limită, care stau la baza relațiilor teoretice de calcul (1) și (2), se presupune de asemenea a fi asigurată.

O primă indicație cu privire la natura regimului de funcționare experimental se poate obține reprezentînd grafic, sub formă de curbe Stribeck, valorile măsurate ale coeficientului de frecare. Cercetări experimentale în zona minimului curbei, utilizînd metoda contactelor electrice, arată însă [8] că prezența contactelor metalice poate fi semnalată chiar și la dreapta acestui minim, în regimuri de funcționare presupuse cu mai multă certitudine ca hidrodinamice. Aceste constatări fac ca, în cazul de față, deși curbele Stribeck pentru materialele A, B și D (fig. 9) prezintă ramura din dreapta ascendentă, totuși precizarea zonei de început a regimului hidrodinamic să fie nesigură.

Vogelpohl [9] propune chiar o relație pentru calcularea vitezei corespunzătoare minimului coeficientului de frecare după curba Stribeck, recomandînd ca viteza de funcționare aleasă pentru lagărul calculat să fie mai mare decît aceasta. Relația este

$$V_{\min} = \frac{\pi d}{60} \frac{p_m b d}{C \mu_m V_{ol}}, \text{ m/s,} \tag{8}$$

în care $V_{ol} = \dfrac{\pi d^2}{4} b$ este volumul lagărului în dm³, μ_m se exprimă în cP, iar C este un coeficient mai mare decît unitatea.

Calculînd $V_{\min}$ cu coeficientul $C = 1$, adică minim, pentru materialele A, B și D și reprezentînd grafic rezultatele, se vede (fig. 10) că la stînga punctului de intersecție R, regimul de funcționare experimental în cazul materialelor A și B nu a fost în mod sigur hidrodinamic. La dreapta punctului R, adică la viteze peste 0,35 m/s, curbele $V_{\min\, A,\, B}$ și

$V_{A,B}$ se distanțează tot mai mult, marcînd prin aceasta instalarea unui regim hidrodinamic din ce în ce mai ferm.

În cazul materialului D, atît alura curbei coeficientului de frecare (fig. 9), cît și lipsa unei intersecții a curbelor $V_{\min D}$ cu V_D, pledează pentru existența regimului hidrodinamic pe întreg domeniul experimental. La vitezele de funcționare mici, mai ales între D_1 și D_2, diferențele între $V_{\min D}$ și V_D fiind mici, existența regimului hidrodinamic poate fi considerată totuși ca nesigură.

În cazul materialului C, viteza minimă pentru cel mai dezavantajos punct (la sarcina maximă) este $V_{\min} = 0{,}414$ m/s, respectiv $V_{\min} = 0{,}58$ m/s. Acestea fiind ambele mai mici decît vitezele corespunzătoare de expe-

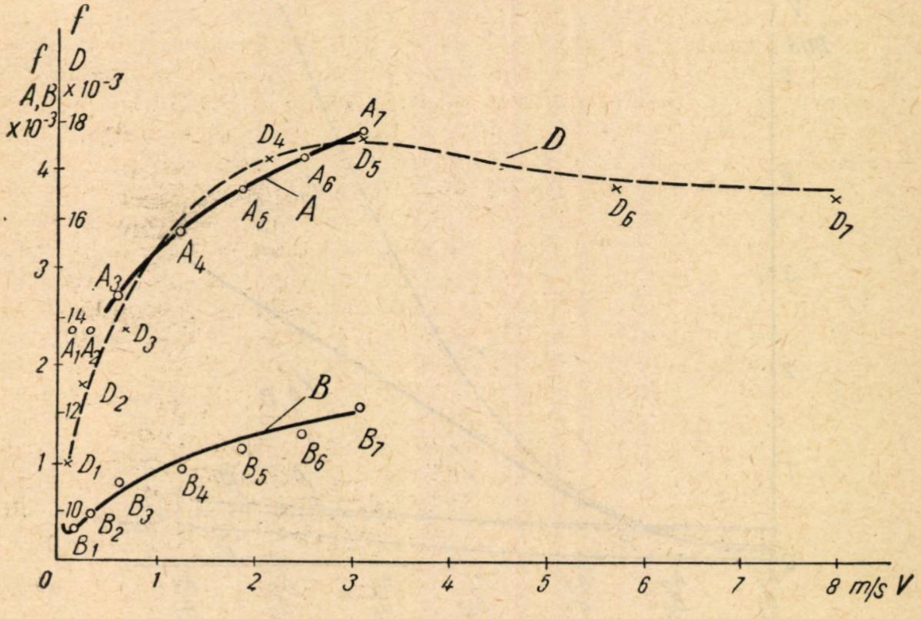


Fig. 9

rimentare și anume $V = 0{,}82$ m/s $=$ const. și $V = 1{,}65$ m/s $=$ const., rezultă că regimul de funcționare în care s-a măsurat coeficientul de frecare a putut fi hidrodinamic.

Verificarea rezultatelor experimentale cu ajutorul acestei metode permite deci obținerea unor indicații suficient de utile cu privire la natura regimului de funcționare realizat în timpul experimentării.

2. *Metoda liniarității caracteristicii* K_0Q_0 *a instalației.* Veridicitatea valorilor măsurate experimental poate fi examinată cercetînd, de exemplu, cum au variat și alți parametri simultani ai aceluiași proces în cadrul experienței.

Un asemenea parametru îl poate constitui, în cazul de față, cantitatea de căldură cedată mediului exterior, prin răcire naturală, de către elementele constructive ale lagărului experimental. Această căldură este reprezentată de termenul K_0Q_0 din relația de echilibru termic [10]

$$K_0Q_0 = fp_mV - KQ, \tag{9}$$

în care fp_mV se referă la cantitatea de căldură produsă în lagăr prin frecare, iar KQ la cantitatea de căldură evacuată prin lubrifiant.

Cantitatea de căldură cedată mediului ambiant fiind proporțională cu temperatura lagărului, expresia

$$K_0Q_0 = \Phi\,(t_c), \tag{10}$$

calculată cu parametrii f, p_m, V și Q măsurați, și în cazul temperaturii constante a mediului ambiant, trebuie să se prezinte sub formă de linie dreaptă. Nerealizarea acestei condiții poate fi interpretată ca o lipsă de concordanță între valorile măsurate ale parametrilor urmăriți și acelea reale din proces.

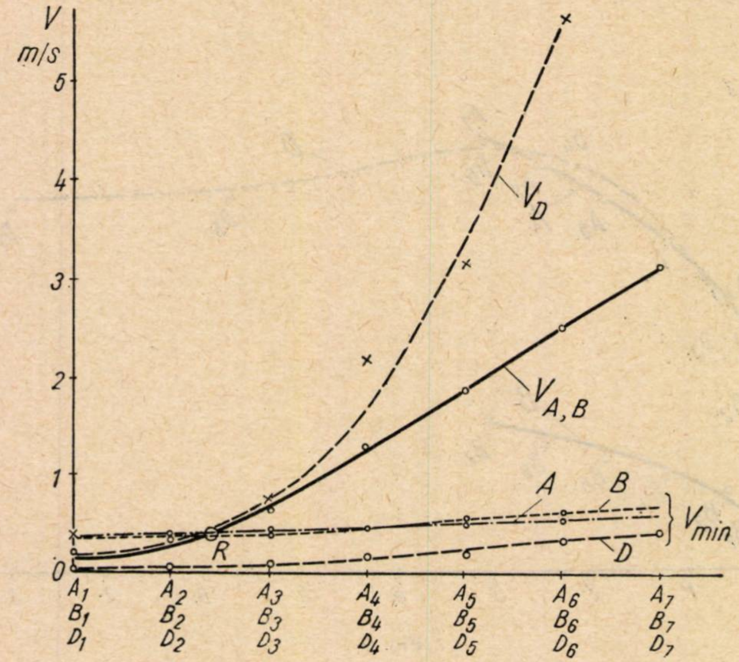


Fig. 10

În figura 11 s-a reprezentat grafic $K_0Q_0 = \Phi\,(t_c)$ pentru cele patru materiale. Din această figură se vede că în cazul materialului D, pentru $t_c = 35-70°\text{C}$, deci pe aproape întregul cîmp de experimentare, relația (10) se prezintă cu suficientă exactitate ca linie dreaptă. Se poate deci considera că parametrii măsurați, deci inclusiv coeficientul de frecare, au valori foarte apropiate de acelea reale. Nu poate fi exclusă desigur posibilitatea ca valorile măsurate ale unor parametri să fie afectate de erori care în relația (9) se compensează.

În cazul materialului C, alura generală a curbei K_0Q_0 este ascendentă, însă cu o accentuată lipsă de coliniaritate a diferitelor puncte de funcționare. În consecință, se poate considera că, la unele din aceste puncte, valorile măsurate ale coeficientului de frecare f și eventual ale debitului Q, diferă mai mult de cele reale.

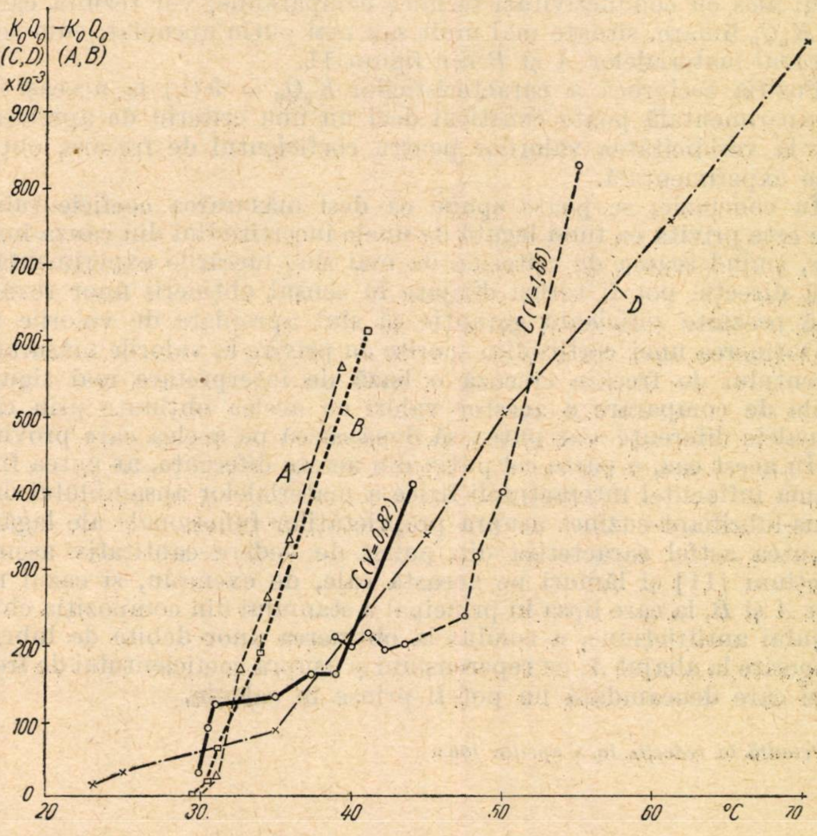


Fig. 11

Dacă se calculează în același fel K_0Q_0 pentru materialele A și B și se consideră temperatura medie a lubrifiantului la ieșire din lagăr egală cu t_c (conform diagramei din fig. 3), se constată că valorile respective sînt negative. Ținînd seama că debitul de lubrifiant este mare, rezultatul de mai sus însemnează că temperatura medie a uleiului la ieșirea din lagăr este în realitate mai mică decît t_c. Din figura 11 se constată însă că variația lui K_0Q_0 în funcție de t_c, chiar cu valorile negative, este foarte apropiat liniară. De aici rezultă că dacă f este real, variația lui KQ din (9) cu t_c nu este mare, ceea ce pare posibil, dat fiind debitul foarte mare de lubrifiant.

Metoda liniarității caracteristicii K_0Q_0 permite deci investigații de verificare directe asupra valorilor măsurate ale coeficientului de frecare cu o suficientă eficacitate.

3. *Metoda caracteristicilor K_0Q_0 multiple.* K_0Q_0 fiind o caracteristică a instalației experimentale, din repetarea în aceleași condiții a unei lucrări experimentale trebuie să rezulte, în limita erorilor de măsură, aceleași valori pentru K_0Q_0. Sau, dacă se experimentează la aceeași instalație cuzineți construiți din materiale cu proprietăți antifricțiune apropiate, dar mai ales cu conductivități termice comparabile, vor rezulta caracteristici K_0Q_0 liniare, situate mai mult sau mai puțin apropiat, cum se prezintă cazul materialelor A și B din figura 11.

Poziția reciprocă a caracteristicilor $K_0Q_0 = \Phi\,(t_c)$ la aceeași instalație experimentală poate constitui deci un nou criteriu de apreciere cu privire la veridicitatea valorilor pentru coeficientul de frecare, obținute pe cale experimentală.

În concluzie, se poate spune că deși măsurarea coeficientului de frecare este privită ca fiind legată de unele incertitudini din cauza împrăștierilor, ținînd seama de criteriile de mai sus, lucrările experimentale în această direcție pot fi totuși dirijate în sensul obținerii unor rezultate, care să prezinte suficientă garanție că sînt apropiate de valorile reale.

Obținerea unei certitudini sporite cu privire la valorile măsurate ale coeficientului de frecare creează o bază de interpretare mai sigură în lucrările de comparare a acestor valori cu acelea obținute prin calcul. Eventualele diferențe s-ar putea să depășească pe acelea care provin din erori. În acest caz, o parte cel puțin din aceste diferențe, ar putea fi dată pe seama influenței interacțiunii fizice a materialelor ansamblului de frecare fus-lubrifiant-cuzinet asupra proprietăților funcționale ale lagărului. S-ar putea astfel caracteriza din punct de vedere cantitativ asemenea interacțiuni [11] și lămuri pe această cale, de exemplu, și cazul materialelor A și B, la care lipsa în principal a staniului din compoziția chimică a aliajului antifricțiune, a condus la obținerea unor debite de lubrifiant mult sporite la aliajul A, cu repercusiuni și asupra coeficientului de frecare, aspecte care deocamdată nu pot fi prinse în calcule.

Primită la redacție la 5 aprilie 1962.

НЕКОТОРЫЕ КОЛИЧЕСТВЕННО-ОПЫТНЫЕ АСПЕКТЫ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Устанавливается, что опытные работы в направлении определения коэффициента трения в данном ансамбле трущихся деталей продолжают еще встречать затруднения, выражающиеся в большой разбросанности получаемых результатов. Этот разбросанный характер данных не дает возможности в некоторых случаях сформулировать достаточно верные выводы, главным образом, при сравнении опытных данных с результатами, полученными расчетным путем.

Приводятся аспекты такой разбросанности в опытных исследованиях с подшипниками скольжения из разных материалов, и экспериментов, проведенных на различных установках. Затем указываются несколько методов, при помощи которых результаты, полученные опытным путем, могут проверяться, вследствие чего могут направляться соответствующим образом экспериментальные работы.

QUELQUES ASPECTS QUANTITATIFS EXPÉRIMENTAUX CONCERNANT LE COEFFICIENT DE FROTTEMENT DANS LE CAS DES PALIERS LISSES

RÉSUMÉ

L'auteur constate que dans les recherches expérimentales concernant la détermination du coefficient de frottement d'un ensemble de frottement donné, on rencontre pour le moment certaines difficultés qui produisent une dispersion assez grande des résultats obtenus. Cette dispersion empêche quelquefois de formuler des conclusions assez précises, surtout lorsqu'il s'agit de comparer les résultats expérimentaux avec ceux fournis par le calcul.

L'auteur présente des aspects de pareilles dispersions constatées lors des travaux expérimentaux sur des paliers construits avec divers matériaux et des expériences effectuées avec diverses installations. Il indique quelques méthodes permettant de vérifier les résultats obtenus expérimentalement et de diriger, par conséquent, convenablement les travaux expérimentaux.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Vogelpohl, *Das Reibungsverhalten von Gleitlagern.* Konstruktion, *3*, 81–86 (1956).
2. N. Tipei, *Hidro-aerodinamica lubrificației.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
3. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Bița, *Lagăre cu alunecare.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1961.
4. N. Tipei, Al. Nica, *Cercetări asupra regimurilor de funcționare a lagărelor.* St. cerc. mec. apl., **X**, *3*, 738 (1959).
5. E. Heidebroek, *Neuere Forschungen auf dem Gebiete der Lagertechnik.* ATZ, **14**, 351 (1941).
6. Al. Ghișu și alții, *Mașină de încercat cuzineți și cîteva rezultate obținute la cuzineți din fontă nodulară cu structură ferito-perlitică.* Metalurgia și construcția de mașini, 1957.
7. Gh. Vasilca, Al. Nica, *Cercetări asupra caracteristicilor de funcționare a lagărelor construite din materiale diferite.* St. cerc. mec. apl., **IX**, *2*, 377 (1958).
8. B. Lunn, *Epilamen- und Mischreibung aus der Sicht des Metallkundlers.* VDI-Berichte, **20**, 42 (1957).
9. G. Vogelpohl, *Die Bedeutung des Viskositätsverhaltens der Schmiermittel für Betrieb und Bau der Maschinen.* Brennstoff-Chemie, **35**, *23/24*, 367 (1954).
10. Gh. Vasilca, *Betrachtungen über isothermische Variation der Reibungszahl bei Gleitlagern.* Revue de Mécanique Appliquée, **III**, *3*, 323 (1958).
11. B. I. Kostețki, J. G. Nosovski, N. L. Golego, P. K. Topeha, *Clasificarea metalelor și aliajelor în funcție de rezistența lor la uzură.* **I**, București, I.D.T., 18, 1962.

STUDIUL VITEZELOR ÎN MECANISMELE PLANE PE BAZE MECANOELECTRONICE

DE

R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC și GR. ANTONESCU

I. Metodele de măsurare a vitezei punctelor în mișcare sînt variate și diferă de la caz la caz, în funcție de caracterul mișcării. Acest lucru se datorește în primul rînd faptului că, la efectuarea măsurătorilor de viteză, este de obicei necesară o anumită aparatură ajutătoare și proprie unui anumit fel de mișcare, evident mai simplă sau mai complexă, tocmai după caracterul mișcării punctului considerat.

Funcție de cele de mai sus, efectuarea măsurătorilor de viteză [1] poate fi împărțită astfel:

a) măsurarea vitezelor liniare în cazul unor deplasări mici ($0 \div 10$ mm), după o direcție [6];

b) măsurarea vitezelor liniare în cazul deplasărilor pe distanțe mai mari ($0 \div 1\,000$ mm), dar tot după o singură direcție;

c) măsurarea vitezei unui punct ce se deplasează în plan după o traiectorie oarecare în mișcare periodică;

d) măsurarea vitezei unui punct ce se deplasează în plan sau în spațiu, pe distanțe mari și foarte mari;

e) măsurarea vitezelor unghiulare, fără schimbarea sensului de rotație;

f) măsurarea vitezelor unghiulare variabile, cu schimbarea sensului de rotație, pentru o mișcare periodică sau neperiodică.

Pentru măsurarea vitezelor liniare și unghiulare sînt cunoscute pînă în prezent și utilizate diferite metode:

1. Metoda marcării timpului începutului și sfîrșitului deplasării pe un interval dat, parcurs după o direcție, în plan sau în spațiu. Prin acest procedeu se determină viteza medie a mobilului pentru distanța parcursă în timpul măsurat. Această metodă poate fi utilizată în cazul mișcării continui, cînd variația vitezei pentru intervalul de timp considerat este mică și deci variația nu prezintă un interes deosebit.

2. Metoda transformării vitezei liniare într-o viteză unghiulară proporțională; se folosește, de exemplu, la măsurarea vitezei la un moment dat a unui vehicul cu ajutorul vitezometrului, vitezei de deplasare a aerului în raport cu pămîntul, cu ajutorul anemometrului etc. Drept instrument pentru astfel de măsurători se întrebuințează de obicei un tahometru, a cărui scală este gradată în unități de viteză liniară.

3. Metoda derivării sau a integrării grafice, a curbelor deplasării respectiv a accelerației în funcție de timp. Pentru aceasta este necesară să existe în prealabil trasată diagrama spațiului sau a accelerației în funcție de timp.

Un neajuns al acestei metode este faptul că se întîmpină dificultăți la construcția grafică precisă a curbelor derivate sau integrate.

4. Metodele indirecte sînt utilizate în general la măsurarea vitezelor punctelor care parcurg spații mari. De exemplu, pentru măsurarea vitezei unui avion se folosește un tub Pitot, sau pentru măsurarea vitezei aerului în raport cu solul se utilizează un traductor cu fir incandescent etc.

Pînă în prezent, în literatura de specialitate nu au fost publicate studii și descrieri de aparate, care să fi dat posibilitatea unei înregistrări directe a vitezelor liniare în funcție de timp în cazul unor deplasări mari, fie după o direcție, fie în mișcarea oarecare plană.

II. În lucrarea de față vom prezenta metoda mecanoelectronică, care permite măsurarea continuă a vitezei unui punct în mișcarea plană, periodică sau oarecare. Cu ajutorul instalației se pot obține diagramele vitezei punctului unui element dintr-un mecanism plan, în funcție de timp, $v_x = v_x(t)$ și $v_y = v_y(t)$ sau hodograful vitezei punctului respectiv.

Redarea și măsurarea vitezei unui punct se efectuează cu ajutorul acestei instalații, prin derivarea electronică a variației deplasării punctului în funcție de timp. În lucrările noastre anterioare, [2], [3], [4], [5], au fost studiate metodele de obținere a traiectoriilor mecanismelor plane; cu ajutorul traductorilor pentru traiectorii, pe ecranul unui oscilograf catodic, putem obține traiectoria punctului respectiv în mișcarea plană, cît și proiecțiile deplasării punctului dat, pe cele două axe de coordonate, în funcție de timp : $s_x = s_x(t)$ și $s_y = s_y(t)$.

Curba deplasărilor unui punct oarecare în mișcarea plană poate fi redată pe ecranul unui oscilograf catodic cu ajutorul traductorului cartezian sau polar. Pentru simplitate și obținerea unei precizii ridicate este mai indicat traductorul polar (fig. 1).

Prin intermediul culegătorilor de tensiune din punctele M_x, M_y și O se culeg tensiuni proporționale cu variațiile de rezistență ale firelor așezate de-a lungul brațelor OM_x, OM_y și OM. Astfel, în punctele O, M_x și M_y se obțin tensiunile u_ρ, $u_{\cos\theta}$ și $u_{\sin\theta}$ proporționale cu ρ, $\cos\theta$ și $\sin\theta$, în care ρ și θ sînt coordonatele polare ale punctului M.

Realizarea produselor $\rho\cos\theta = x$ și $\rho\sin\theta = y$, necesare pentru obținerea coordonatelor carteziene ale punctului $M(x, y)$ în planul xoy, se face pe cale electronică, utilizînd principiul înmulțirii potențiometrice.

Cu ajutorul traductorului polar realizat în laborator, s-au putut explora curbe ale traiectoriilor diferitelor puncte situate într-un sector circular de unghi $\theta = 60°$ și rază maximă $\rho = 1\,000$ mm.

Tensiunile culese de traductorii electrici rezistivi, respectiv u_ρ, $u_{\cos\theta}$ şi $u_{\sin\theta}$ sînt de maximum 0,2 V, iar la ieşirea din înmulţitor şi amplificator de aproximativ 200 V, pentru intrarea direct pe plăcile oscilografului catodic. Ecranul util al oscilografului fiind de 100 mm, rezultă o scară pentru spaţii $k_s = 1 : 10$. În cazul fotografierii curbei traiectoriei, această scară se modifică în raport cu reducerea aparatului de fotografiat $\left(\frac{1}{2,5}\right)$, deci $k_s = \frac{1}{25}$.

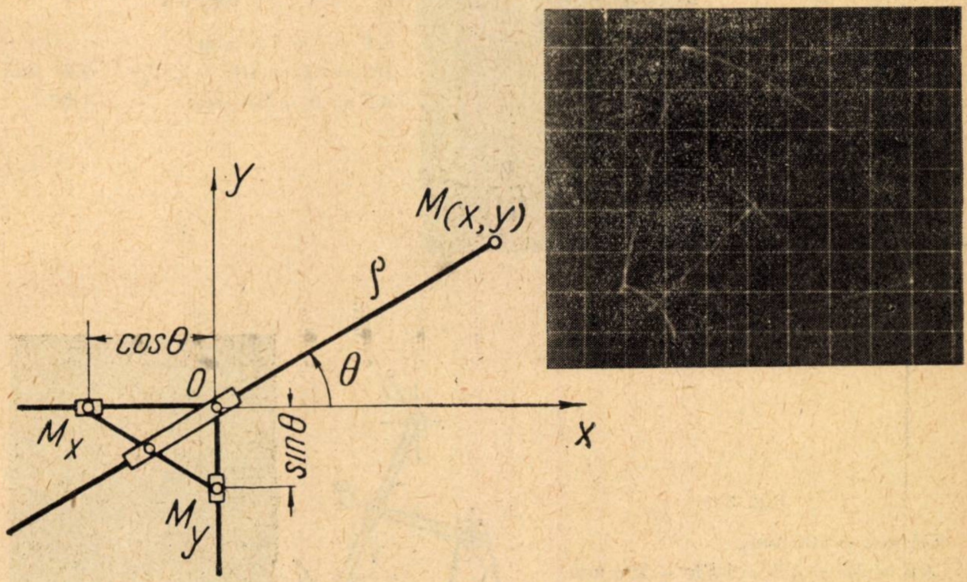


Fig. 1

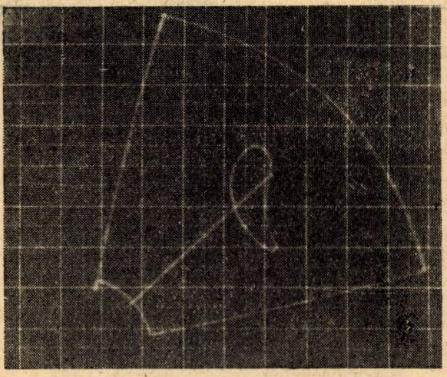


Fig. 2 *a*

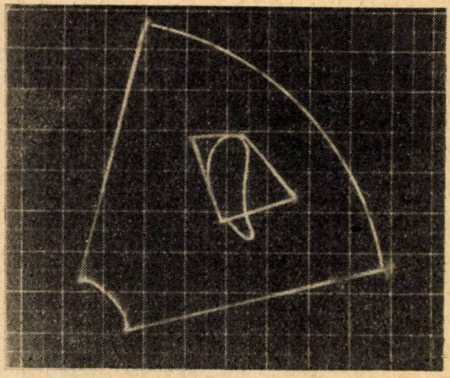


Fig. 2 *b*

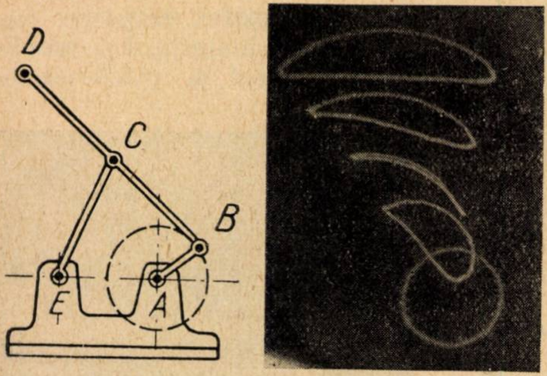


Fig. 3 *a*

$AB = r = 130$ mm;
$BC = CD = DE = 2{,}50\, r = 325$ mm
$AE = 2r = 260$ mm; $k_s = 1/20$

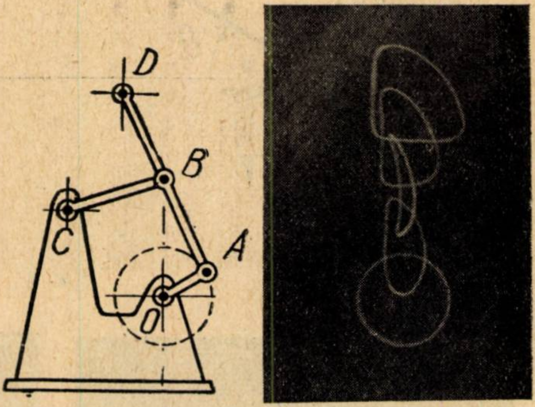


Fig. 3 *b*

$OA = r = 120$ mm;
$AB = BC = CD = 2{,}17 r = 260$ mm
$OC = 2{,}83\, r = 340$ mm; $k = {}^1/_{20}$

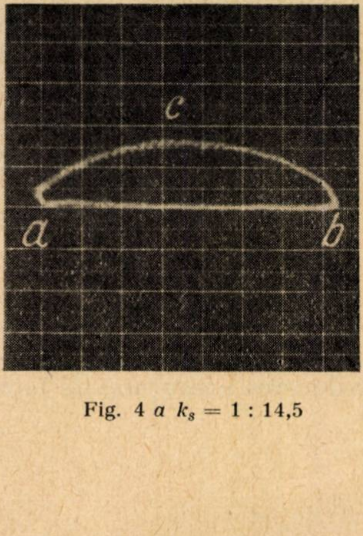


Fig. 4 *a* $k_s = 1:14{,}5$

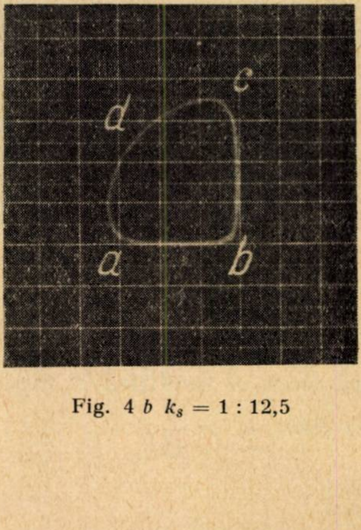


Fig. 4 *b* $k_s = 1:12{,}5$

Eroarea totală a traductorului polar este de aproximativ 1,5%, acceptabilă pentru astfel de măsurători. În figurile 2 *a* și 2 *b* sînt arătate domeniile care pot fi explorate de punctul *M* și respectiv o curbă de bielă a unui mecanism patrulater, cît și amplasarea mecanismului în domeniul respectiv ($k_s = 1 : 30$).

În figurile 3 *a* și 3 *b* sînt arătate traiectoriile mai multor puncte ale bielelor unor mecanisme patrulatere, așa cum se obțin ele direct pe ecranul oscilografului catodic. Figura 3 *a* reprezintă traiectoriile a cinci puncte succesive ale bielei *AD* a mecanismului patrulater director cunoscut sub denumirea de mecanism lambda sau Cebîșev. Punctul *D* descrie pe o porțiune (*a* — *b*), o traiectorie aproape liniară, figura 4 *a* ($k_s = 1 : 14{,}5$).

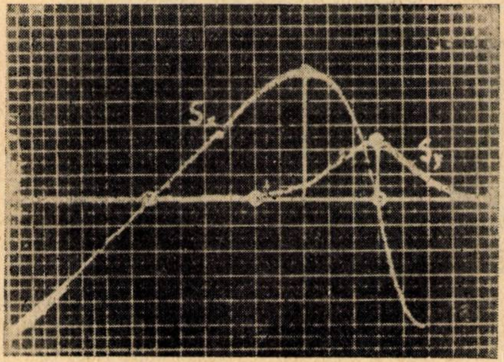


Fig. 5 *a*

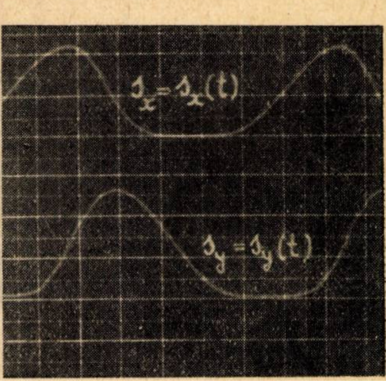


Fig. 5 *b*

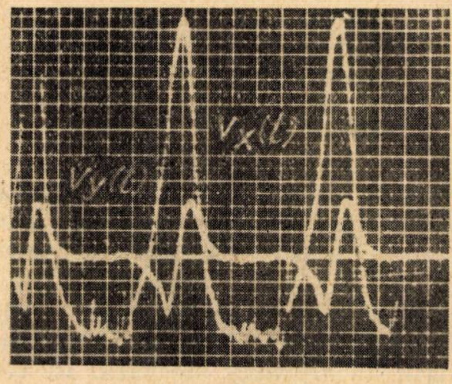


Fig. 6 *a*

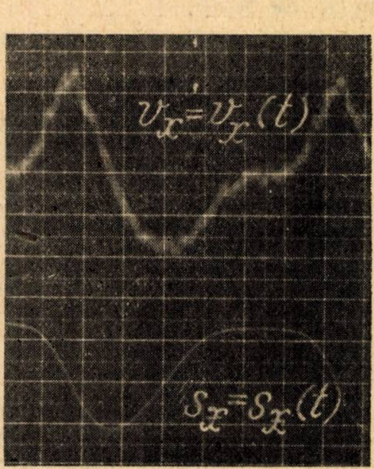


Fig. 6 *b*

Figura 3 *b* reprezintă traiectoriile a cinci puncte date ale bielei unui mecanism patrulater, asemănător cu mecanismul lambda, dar cu alte dimensiuni ale elementelor sale. Punctul *D* descrie o traiectorie care pe anumite porţiuni formează un unghi drept (a, b, c), aşa cum se vede şi în figura 4 b ($k_s = 1 : 12{,}5$).

Figurile 5 a şi 5 b reprezintă variaţiile proiecţiilor punctelor (D) pe axele de coordonate, în funcţie de timp, adică tocmai diagramele spaţiilor $s_x(t)$ şi $s_y(t)$.

Avînd posibilitatea în felul acesta de a obţine diagramele spaţiilor în funcţie de timp pentru orice punct dintr-un mecanism plan, se poate trece în continuare la măsurarea şi redarea vitezei punctului respectiv în funcţie de timp.

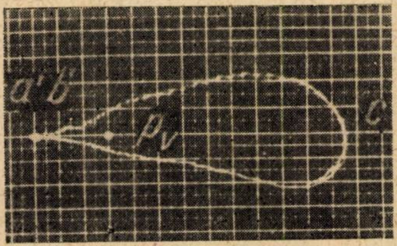


Fig. 7 a

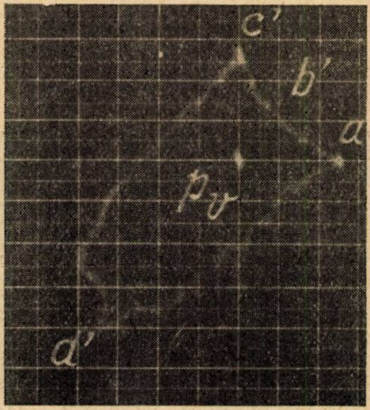


Fig. 7 b

În acest scop este necesară derivarea funcţiilor spaţiilor $s_x(t)$ şi $s_y(t)$, în raport cu timpul

$$\frac{ds_x}{dt} = v_x(t),$$
$$\frac{ds_y}{dt} = v_y(t), \tag{1}$$

pentru a obţine diagramele proiecţiilor vitezei punctului respectiv pe axele de coordonate în funcţie de timp (fig. 6 a şi 6 b) sau pentru a obţine hodograful vitezei aceluiaşi punct, (fig. 7 a şi 7 b) în cazul mecanismelor din figurile 3 a şi 3 b.

Dat fiind forma de tensiuni sub care se obţin variaţiile deplasării punctului considerat în timp, operaţia de derivare este efectuată pe cale electronică cu ajutorul unei instalaţii de derivare adecvată. În vederea realizării acestei instalaţii s-a ţinut seama de următoarele elemente :

— caracteristicile mişcării în plan ale punctului considerat ;
— condiţiile specifice în care se obţin mărimile $s_x(t)$ şi $s_y(t)$;
— mărimea şi modalitatea de utilizare a semnalului derivat ;
— precizia derivării.

În ceea ce privește caracterul derivării mișcării, periodicitatea mișcării elementelor mecanismelor plane studiate, a fost cuprinsă între limitele

$$1{,}5 \geqslant \left(\frac{1}{T}\right) H_z > 0{,}1.$$

Acest interval de frecvențe foarte joase a dus la dificultăți deosebite în ceea ce privește utilizarea amplificatorilor RC obișnuiți.

III. În vederea realizării unei aparaturi electronice de derivare pentru lucrările de laborator, cu o precizie cît mai mare, s-a urmărit obținerea unor derivări cu caracteristici ridicate. Dintre circuitele existente pentru derivare, circuitul RC prezintă avantajele pentru condițiile impuse (fig. 8), și-l fac preferat față de alte soluții.

Dacă R are o valoare suficient de mică, pentru a nu influența curentul din circuit, se poate scrie cu suficientă aproximație

$$u_2 = RC\frac{du_1}{dt}. \tag{2}$$

Precizia derivării și deci precizia relației depinde de gradul în care este satisfăcută condiția

$$R \ll \frac{1}{2\pi f C}, \tag{3}$$

unde

$$\tau = RC \ll \frac{1}{2\pi f}. \tag{4}$$

Relația (3) este reală pentru cazul unei tensiuni armonice; dacă se aplică o tensiune periodică oarecare, atunci dezvoltînd-o în serie Fourier, va trebui ca inegalitatea (4) să fie satisfăcută pentru toate componentele armonice, inclusiv componenta de frecvență superioară (f_s), corespunzătoare frecvenței care mai joacă un rol hotărîtor.

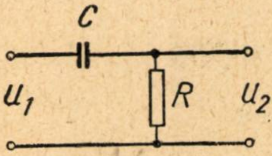


Fig. 8

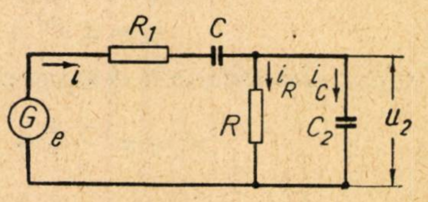


Fig. 9

Ținînd seama de faptul că traiectoria poate avea o formă oarecare, trebuie avută în vedere și eventualitatea unor variații bruște, ceea ce implică o constantă de timp mai mică, care duce la o valoare mică a tensiunii de ieșire din circuitul de derivare.

Pentru obținerea unei derivări corecte, circuitul de derivare trebuie analizat în complexitatea schemei de utilizare, deci să se țină seama și de efectul parametrilor paraziţi, care face ca practic situaţia reală să se prezinte ca în figura 9.

Frecvenţa de lucru fiind joasă, capacităţile parazite, respectiv C_2, nu sînt importante decît în cazul apariţiei unor variaţii bruşte, corespunzătoare unui semnal în formă de impuls.

Ţinînd seama de circuitul din figura 9, se poate scrie

$$i_1 R_1 + \frac{1}{C}\int i_1\, dt + i_R R = E, \tag{5}$$

$$i_R R = \frac{1}{C_2}\int i_c\, dt. \tag{6}$$

Derivînd, se obţine

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + R\frac{di_R}{dt} + \frac{i_1}{C} = 0, \tag{7}$$

$$R\frac{di_R}{dt} = \frac{i_1}{C_2} - \frac{i_R}{C}. \tag{8}$$

Din cele două ecuaţii diferenţiale rezultă

$$\frac{d^2 i_R}{dt^2} + \frac{di_R}{dt}\frac{1+x}{\tau_n} + i_R\frac{y}{\tau_n^2} = 0, \tag{9}$$

unde s-a notat cu

$$R_1 C_2 = \tau_n, \tag{10}$$

$$\frac{R_1}{R} + \frac{C_2}{C} = x, \tag{11}$$

$$\frac{R_1 C_2}{RC} = y. \tag{12}$$

Ecuaţia diferenţială (7) are soluţia de forma

$$i_R = A\, e^{\gamma_1 t} + B\, e^{\gamma_2 t}, \tag{13}$$

în care γ_1 şi γ_2 sînt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\gamma^2 + \gamma\frac{1+x}{\tau_n} + \frac{y}{\tau_n^2} = 0. \tag{14}$$

Forma şi durata impulsului de tensiune la ieşirea unui circuit de derivare sînt determinate de constantele de timp τ_1 şi τ_2, care sînt mărimi inverse cu rădăcinile ecuaţiei caracteristice luate cu semne opuse, şi se poate scrie

$$\tau_{1,2} = \frac{2\,\tau_n}{(1+x)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4y}{(1+x)^2}}\right]}. \tag{15}$$

Dacă $\frac{4y}{(1+x)^2} \ll 1$ atunci

$$1 - \sqrt{1 - \frac{4y}{(1+x)^2}} \simeq \frac{2y}{(1+x)^2}. \tag{16}$$

Dacă $\frac{4y}{(1+x)^2} \leqslant 0{,}2$, eroarea ε a rezultatului va fi mai mică decît 5%.

Dacă $\frac{4y}{(1+x)^2} \leqslant 0{,}35$, eroarea rezultatului va fi mai mică decît 10%.

Dacă $\frac{R_1}{R}$ sau $\frac{C_2}{C}$ este mai mic de 0,5 sau 0,25, la orice valoare a celuilalt raport eroarea rămîne sub 10%, respectiv sub 5%.

Ţinînd seama de considerentele amintite şi de unele măsurători şi experimentări efectuate s-a ales un circuit cu constanta $RC = 10^{-3}$ s.

Semnalul de la aparatul pentru redarea traiectoriilor reprezentînd pe $s_x(t)$ şi $s_y(t)$ se obţine modulat pe 10 kHz.

După o amplificare prealabilă, semnalul este detectat. Deoarece la derivare frecvenţele înalte sînt favorizate, s-au utilizat în montaj filtre suplimentare de tipul dublu T pentru frecvenţa de 10 kHz.

Tensiunea detectată la nivel mare este derivată şi apoi amplificată printr-un amplificator simetric de curent continuu, de la a cărui ieşire semnalul are o amplitudine suficientă pentru a fi aplicat direct pe plăcile unui oscilograf catodic.

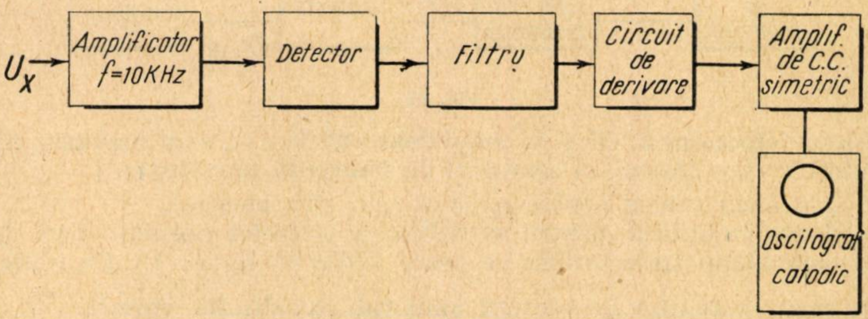


Fig. 10

Soluţia adoptată permite utilizarea modulării efectuate cu ajutorul aparatului pentru redarea traiectoriilor. Semnalele reprezentînd pe $s_x(t)$ şi $s_y(t)$ sînt amplificate în amplificator cu etaje RC. Ultimul etaj are în anodă un transformator în al cărui secundar sînt montaţi detectorii T_2 T_3 (fig. 11). La ieşirea din detectori se află circuitele de derivare C_6 R_5; C_7 R_6.

Soluția utilizată la detecție permite ca la ieșire să se obțină un semnal simetric, care poate fi amplificat după derivare într-un amplificator simetric, la a cărui ieșire amplitudinea să fie suficientă pentru a putea fi aplicată pe plăcile de deflecție ale unui tub catodic. Tensiunea u_2 obținută la ieșire, după circuitele de derivare, se aplică unui amplificator simetric de c.c. (curent continuu).

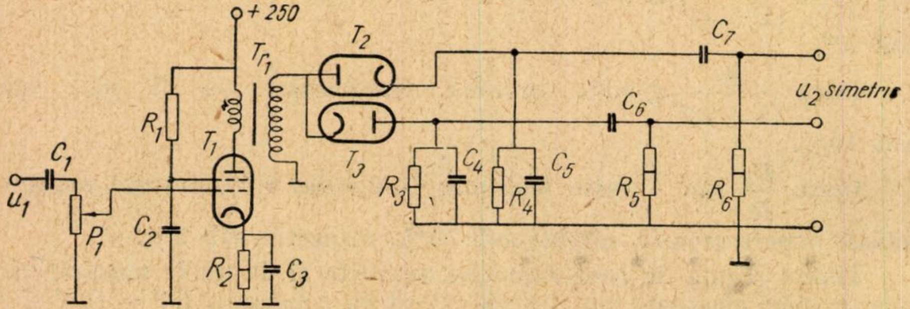

+250
Tr_1
T_2
C_7
C_6
u_2 simetric
R_1
T_1
C_1
u_1
P_1
C_2
R_2
C_3
T_3
R_3
C_4
R_4
C_5
R_5
R_6

Fig. 11

După cum s-a mai amintit, grupurile de detecție R_3C_4 și R_4C_5 nu atenuează în suficientă măsură semnalul de frecvență purtătoare, pe care este modulat semnalul, astfel încît după derivare, amplitudinea lui să nu influențeze dimensiunea spotului pe oscilograful catodic. De aceea, atît la ieșirea detectorului, cît și în amplificatorul de c.c., s-au prevăzut filtre în dublu T care atenuează semnalul de frecvență purtătoare.

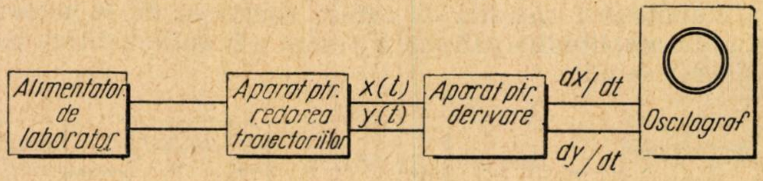

Alimentator de laborator
Aparat ptr. redarea traiectoriilor
x(t)
y(t)
Aparat ptr. derivare
dx/dt
dy/dt
Oscilograf

Fig. 12

Cele două canale pentru $s_x(t)$ și $s_y(t)$ sînt identice.

Montajul utilizat pentru vizualizarea vitezelor obținute prin derivarea semnalului traiectoriilor se poate vedea în figura 12. Cu ajutorul lui se poate vizualiza pe ecranul unui tub catodic fie variația $\frac{ds_x}{dt}$ sau $\frac{ds_y}{dt}$ în funcție de timp, fie hodograful vitezei unui punct de pe un mecanism plan.

IV. Determinarea scării de reprezentare a vitezelor. Aflarea valorii reale a vitezei unui punct, la un moment dat, de pe diagrama vitezei în funcție de timp, sau a hodografului vitezei, se poate face în mai multe feluri. De exemplu, punctul $M(x, y)$ al bielei ρ poate fi articulat cu butonul de manivelă A, de rază $OA = r$, care are o mișcare circulară $\omega = \text{const.}$; viteza periferică a punctului A va fi

$$v_A = \frac{2\pi r}{T}\left[\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right] \tag{17}$$

Pe ecranul oscilografului va apare hodograful vitezei butonului de manivelă în mișcarea circulară de perioadă T, adică tot un cerc de rază r_v reprezentînd viteza $v = \frac{v_A}{k}$ [mm] cu polul vitezelor P_v în centrul cercului (fig. 13).

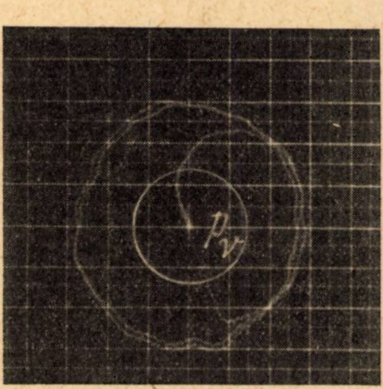


Fig. 13 $k_v = 3{,}2 \frac{\text{cm}}{\text{s. mm}}$

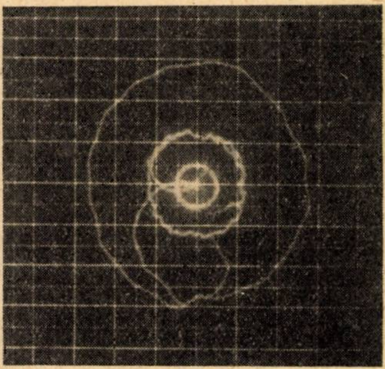


Fig. 14

Cunoscînd lungimea manivelei r [cm] și perioada de rotație a manivelei, se poate stabili foarte ușor scara vitezelor, care rămîne aceeași pentru oricare punct de pe mecanismul studiat.

Exemplu, $r = 12$ cm; $T = 1{,}57$ s; $v_A = 48$ cm/s, $v = 15$ mm; $k_v = 3{,}2 \frac{\text{cm}}{\text{s. mm.}}$.

În fotografie este surprinsă pornirea și oprirea punctului A al manivelei OA; pornirea se face ceva mai brusc iar oprirea mult mai lent; butonul de manivelă a executat două rotații complete.

Figura 14 reprezintă fotografierea hodografelor vitezelor punctului A al manivelei OA, de lungime constantă $r = 12$ cm, ce se rotește respectiv cu $\omega_1 \simeq 0{,}63 \frac{1}{\text{s}}$; $\omega_2 \simeq 1{,}58 \frac{1}{\text{s}}$; $\omega_3 \simeq 4 \frac{1}{\text{s}}$.

În felul acesta se poate determina și raportul de reducere al reductorului folosit pentru varierea turației n a manivelei. În cazul de față $i = \frac{1}{2{,}5}$.

Scara de măsură a vitezelor, reprezentate prin diagrama $v_x = v_x(t)$ pe ecranul oscilografului, poate fi determinată foarte ușor și cu destulă precizie, prin proiectarea hodografului vitezei unui punct în mişcarea circulară pe axa respectivă ; de asemenea se poate utiliza relaţia $s = \int v \, dt$, dat fiind că putem avea oricînd reprezentată pe ecranul oscilografului şi diagrama spaţiului $s_x = s_x(t)$ sau $s_y = s_y(t)$, în funcţie de timp.

Abscisa, după care măsurăm timpul, poate fi exprimată prin scara timpului k_t

$$t = k_t \, n,$$

iar ordonata, după care se măsoară viteza, poate fi exprimată prin scara vitezei k_v

$$v_x = k_v \, m,$$

de unde

$$s_x = k_v \, k_t \int m \, dn = k_v \, k_t \, A_v$$

şi în continuare, scara vitezei este

$$k_v = \frac{s_x}{k_t \, A_v}.$$

Dacă s_x este exprimat în [cm], k_t în secunde pe milimetru [s/mm] şi A în [mm^2], atunci expresia dimensională a scării vitezei va fi $k_v = \left[\frac{\text{cm}}{\text{s. mm}}\right]$.

Precizia stabilirii scării vitezei prin această metodă, depinde în mare măsură de precizia cu care este determinată aria de sub curba vitezei, care este mai bine a fi calculată, deoarece prin planimetrare se introduc erori.

Scara timpului şi mărimea deplasării pot fi determinate cu precizie mare, fapt pentru care scara vitezei poate fi şi ea determinată cu o precizie bună.

Valoarea absolută a vitezei unui punct oarecare la un moment dat, poate fi determinată astfel prin înmulţirea ordonatei corespunzătoare de pe curba vitezei, cu scara vitezei k_v mai înainte determinată.

Figura 15 reprezintă diagrama spaţiului $s_x = s_x(t)$ şi a vitezei $v_x = v_x(t)$ a punctului (D), al mecanismului din figura 3 a; $S_{\max}$ este egal cu $k_s \, 1 = 56$ cm; $T \simeq 4$ s; $k_t = 0{,}0825 \, \frac{s}{\text{mm}}$; $A_v \simeq 100$ mm^2; $k_v = \dfrac{56 \text{ cm}}{0{,}0825 \, \frac{s}{\text{mm}} \, 100 \text{ mm}^2} = 6{,}8 \, \dfrac{\text{cm}}{\text{s. mm}}$; prin metoda proiecţiei hodografului vitezei $k_v = 6{,}7 \, \dfrac{\text{cm}}{\text{s. mm}}$.

Este deci mult mai simplu şi mai comod a stabili scara vitezelor prin metoda proiecţiei.

Figura 16 reprezintă traiectoria şi hodograful vitezei punctului E al balansierului mecanismului cu şase elemente din figura 17, cît şi dia-

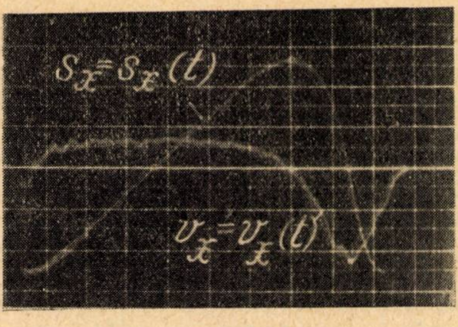


Fig. 15

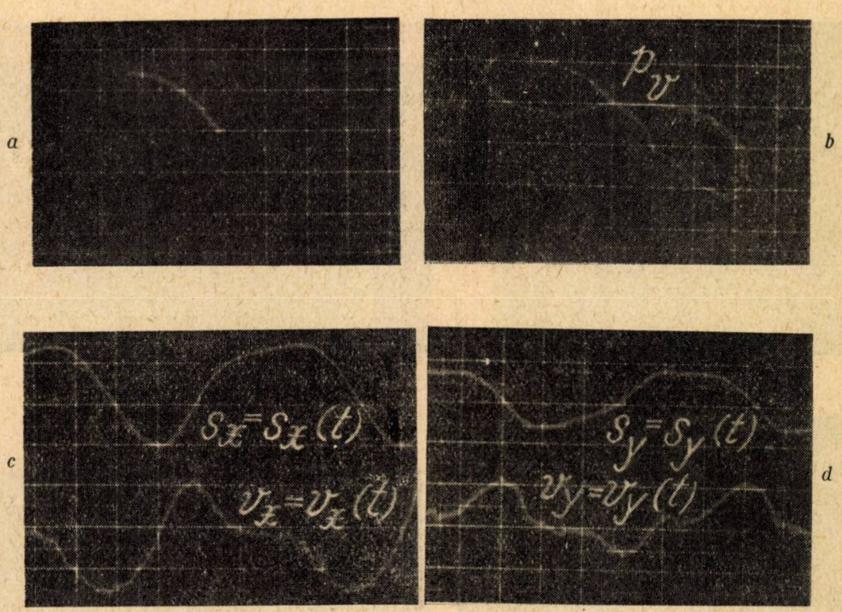


Fig. 16

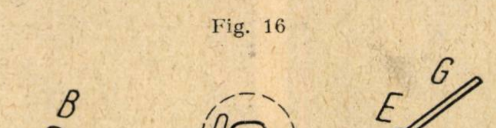


Fig. 17

gramele spaţiului şi ale vitezei în funcţie de timp. În timpul unei rotaţii complete a elementului conducător, elementul condus, adică balansierul EF, ar trebui să facă o scurtă pauză ; în realitate elementul condus nu se opreşte , ci numai îşi încetineşte mersul pentru o fracţiune de timp. Acest fapt poate fi verificat pe diagrama vitezelor v_x şi v_y în funcţie de timp.

Figura 18 reprezintă traiectoria şi hodograful vitezei unui punct G de pe biela prelungită a aceluiaşi mecanism ; aceasta a fost făcută cu scopul de a verifica dacă pe porţiunea circulară descrisă de punctul A, corespunde pentru punctul G un arc de cerc, condiţie pentru care elementul condus EF ar trebui să facă o pauză.

Figura 19 reprezintă traiectoriile a cinci puncte de pe biela unui mecanism patrulater, avînd elementele $OA = r = 111{,}4$ mm $AB = BC = BD = 196$ mm ; $OC = 272$ mm, scara lungimilor $k_s = 1 : 13{,}5$; T = 1,57 s.

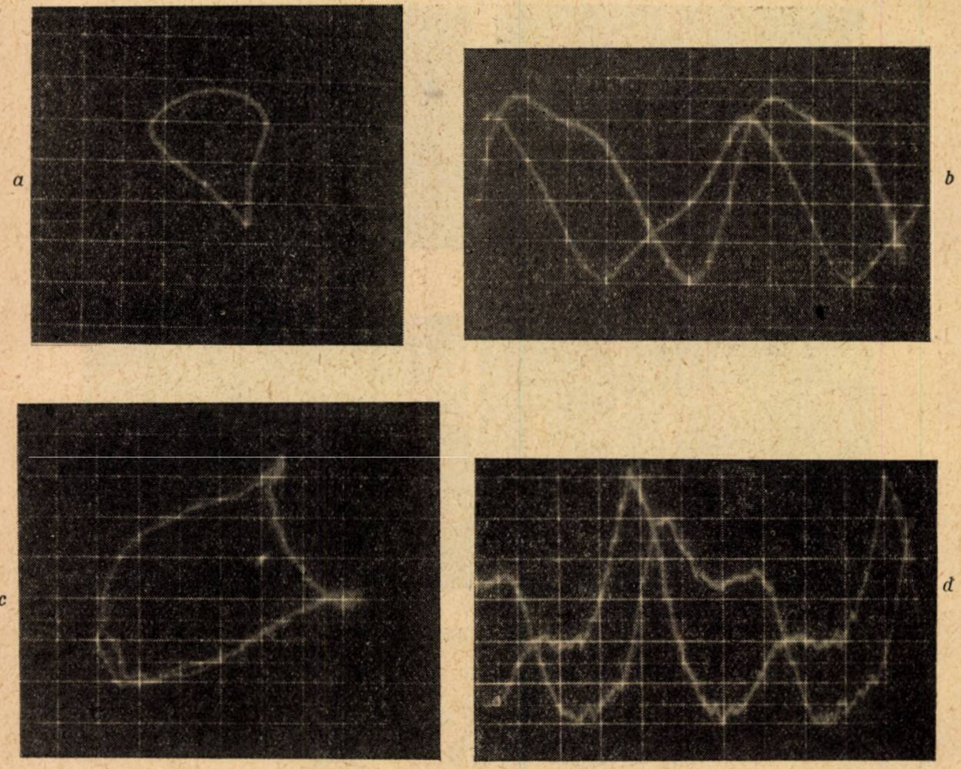


Fig. 18

Fotografiile din figura 20 a,b,c,d,e, reprezintă, luate separat, traiectoria şi hodograful vitezei punctului respectiv de pe biela mecanismului de mai sus. Scara vitezelor $k_v = 4{,}8 \dfrac{\text{cm}}{\text{s. mm.}}$.

Primită la redacţie la 28 aprilie 1962.

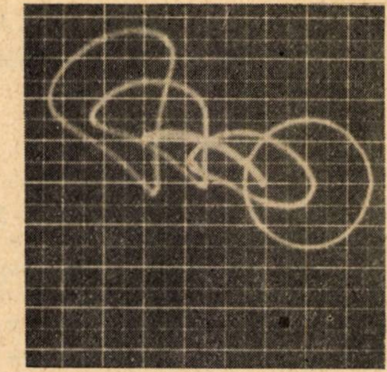
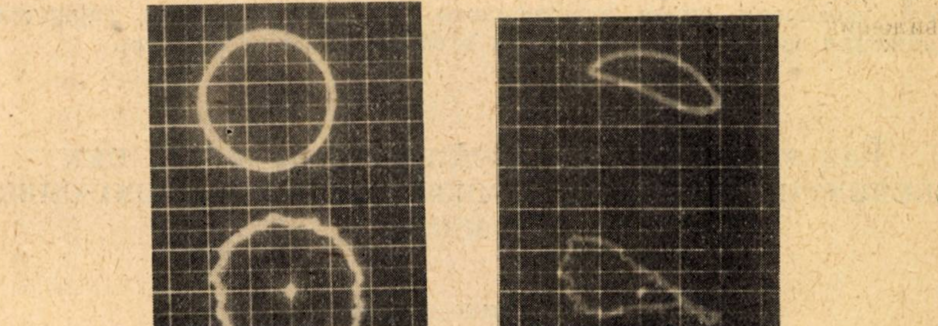


Fig. 19



a b

c d e

Fig. 20

ИЗУЧЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМАХ НА МЕХАНО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИНЦИПАХ

РЕЗЮМЕ

В работе описывается механо-электронная установка для измерения изменения скорости точки в плоскостном периодическом или каком-либо другом движении, а также для непрерывного визуального наблюдения за этим изменением. При помощи описанной установки могут быть получены диаграммы скорости некоторой точки элемента плоского механизма в зависимости от времени $V_x = V_x(t)$ и $V_y = V_y(t)$ или годограф скорости соответствующей точки в своем движении.

Измерение и выражение скорости точки выполняется при помощи этой установки путем электронного дифференцирования вариации движения соответствующей точки в зависимости от времени.

DAS STUDIUM DER GESCHWINDIGKEITEN IN DEN EBENEN GETRIEBEN AUF MECHANISCH-ELEKTRONISCHER BASIS

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die mechanisch-elektronische Einrichtung beschrieben, welche die ständige Messung und Sichtbarmachung der Geschwindigkeitsveränderung eines Punktes in periodischer oder einer beliebigen anderen ebenen Bewegung ermöglicht. Mit Hilfe dieser Einrichtung können die Diagramme für die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes eines ebenen Getriebes als Funktion der Zeit $V_x = V_x(t)$ und $V_y = V_y(t)$, oder der Geschwindigkeitshodograph des entsprechenden Punktes erzielt werden.

Die Messung und Wiedergabe der Geschwindigkeit eines Punktes mit Hilfe dieser Einrichtung erfolgt durch elektronische Differenzierung des Weges des betreffenden Punktes als Funktion der Zeit.

BIBLIOGRAFIE

1. Н. П. РАЕВСКИЙ, *Датчики механических параметров машин*, Изд. Акад. Наук, Москва, 1959.
2. R. BOGDAN, CHR. PELECUDI, E. BUGAJEVSKI, L. CALMACIUC, *Über die experimentelle Bestimmung der Bewegungen in ebenen Getrieben.* Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *2* (1957).
3. R. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC, *Study on the mechanical transducers for the determination of paths in plane mechanisms, in Cartesian or polar coordinate systems.* Buletinul Institutului politehnic, Iaşi, **IV** (1958).

4. R. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC, GR. ANTONESCU, *Ein polarer Übertrager zur Untersuchung von Getrieben*. Revue de Mécanique Appliquée, **V**. *1* (1960).

5. CHR. PELECUDI, *Die Darstellung von Funktionen mit Hilfe von rotierenden Kurvenscheiben mit schiebendem Stössel*. Revue de Mécanique Appliquée, **V**, *1* (1960).

6. KARL LINDNER, *Untersuchungen über Störbeschleunigungen an Kurvenscheiben infolge von Formfehlern sowie ein neues Verfohren zum Berechnen und Herstellen von Kurvenscheiben*. Verlag GmbH—Düsseldorf. VDI. Forschungsheft *477*, Ausgabe B, **26** (1960).

STUDII

MECANISM CU ROȚI DINȚATE PENTRU OBȚINEREA UNUI MARE NUMĂR DE RAPOARTE DE TRANSMITERE DIFERITE

DE

A. CSULAK [1]) și I. SZÉKELY [1])

Marea majoritate a variatoarelor de viteză mecanice sînt variatoare de fricțiune. Ele au găsit o largă aplicare în practică în cele mai diferite domenii ale construcțiilor de mașini. Sînt însă cazuri în practică unde ele nu pot fi folosite deoarece nu asigură un raport de transmitere constant. Din această cauză în multe locuri pentru schimbarea vitezei de lucru se mai folosesc roțile de schimb (la mașina de filat bumbac, la mașinile de sudat etc.), ceea ce împiedică introducerea automatizării la aceste mașini și necesită un foarte mare număr de roți dințate.

În lucrarea de față, se propune și se studiază un mecanism cu roți dințate cilindrice prezentat în trei variante (fig. 1, 2 și 3), care poate realiza un mare număr de rapoarte de transmitere diferite, ceea ce face ca în mod practic trecerea de la o viteză la alta să se realizeze aproape fără trepte. Pe de altă parte, mecanismul propus asigură un raport de transmitere constant în orice împrejurări (puteri mari, șocuri în timpul lucrului etc.).

Prima variantă a mecanismului propus (fig. 1) este compusă din două roți baladoare (notate cu z_{Bx} și z_{By}) care se pot deplasa pe axele I și III și din nouă roți dințate cilindrice fixate pe axa intermediară II. Toate cele nouă roți dințate sînt corijate în așa fel, ca diametrele exterioare ale lor să fie egale între ele, iar numerele de dinți să difere cu un dinte de la o roată la alta. Roțile baladoare z_{Bx} și z_{By} pot intra în angrenare succesiv cu fiecare din roțile corijate fixate pe axa II.

În scopul obținerii formulelor necesare pentru determinarea numărului de rapoarte de transmitere diferite, în scopul sistematizării acestor rapoarte, cît și pentru determinarea domeniului de reglare, este necesar ca aceeași roată de pe axa intermediară să se noteze diferit în funcție de faptul cu care dintre roțile baladoare se angrenează ; cu z_{Bx} sau z_{By}. Dacă se angrenează cu z_{Bx} atunci roata respectivă de pe axa II se va nota cu z_{K_x} iar dacă angrenarea va avea loc cu z_{By} atunci acea roată se va nota cu z_{K_y} (unde K_x și K_y pot avea valorile 1, 2, 3, . . . 9).

---

[1]) Institutul politehnic, Cluj.

Ținînd seamă de faptul că diferența dintre numerele de dinți a roților dințate vecine de pe axa intermediară II este constantă, atunci

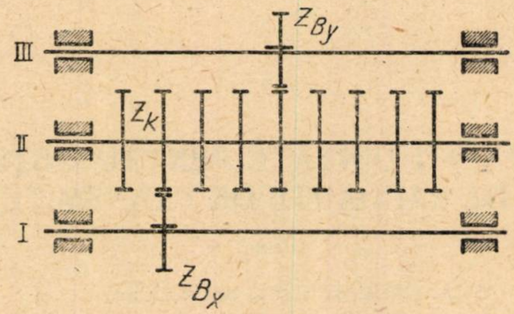


Fig. 1

pentru determinarea numerelor de dinți ale acestor roți se poate scrie următoarea relație :

$$z_{K_x} = z_1 + q\,(k_x - 1), \tag{1}$$
$$z_{K_y} = z_1 + q\,(k_y - 1), \tag{2}$$

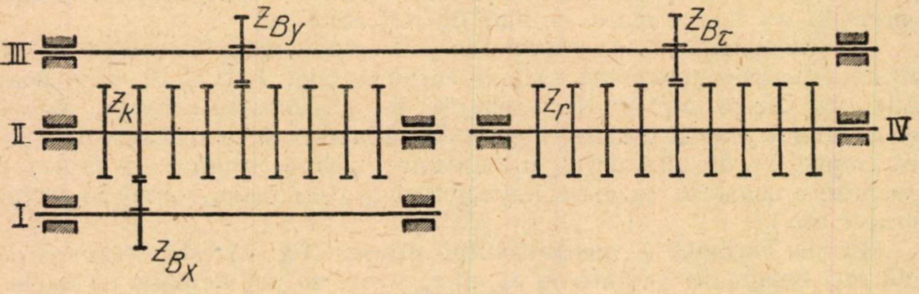


Fig. 2

unde

z_1 — numărul de dinți ai primei roți de pe axa II,
q — rația progresiei aritmetice,
K_x, K_y — numărul de ordine a roților dințate de pe axa II considerînd că numerotarea se face de la stînga la dreapta.

Avînd în vedere că în cazul ce se tratează $q = 1$ și introducînd notația $z_1 - 1 = \beta_K$ relațiile (1) și (2) care servesc pentru determinarea numărului de dinți a unei roți oarecare de pe axa II, care la epoca dată se angrenează cu una din roțile baladoare z_{Bx} sau z_{By} vor primi următoarea formă :

$$z_{K_x} = \beta_K + K_x, \tag{3}$$

$$z_{K_y} = \beta_K + K_y. \tag{4}$$

De exemplu în figura 1 roata baladoare z_{Bx} se angrenează cu a doua roată de pe axa II, deci $K_x = 2$. Prin urmare numărul de dinți a roții respective va fi $z_{K_x} = \beta_K + 2$. Din aceeași figură se vede că z_{By} intră în angrenare cu a cincea roată de pe axa II, deci $K_y = 5$. Prin urmare numărul de dinți al roții respective va fi $z_{K_y} = \beta_K + 5$.

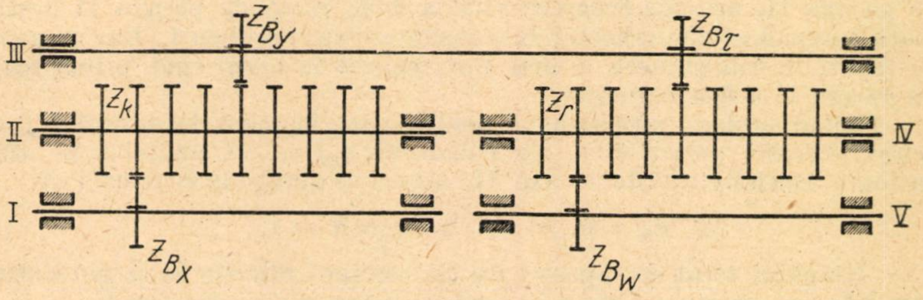


Fig. 3

A doua variantă (fig. 2) diferă de prima doar prin aceea că în schema mecanismului se introduce în plus o roată baladoare $z_{B\tau}$ care se poate deplasa de-a lungul axei III și o serie de roți dințate coriiate fixate pe axa IV.

Pentru obținerea variantei a treia (fig. 3) este necesar să se mai introducă în plus față de varianta a doua o roată baladoare z_{Bw}, care poate să se deplaseze de-a lungul axei V.

În mod analog ca și în cazul primei variante roțile dințate de pe axa IV se vor nota cu $z_{r\tau}$, dacă acestea se angrenează cu baladorul $z_{B\tau}$ și cu z_{rw}, dacă acestea se angrenează cu baladorul z_{Bw}. Prin urmare formulele pentru determinarea numerelor de dinți a roților dințate corijate fixate pe axa IV vor fi

$$z_{r_\tau} = \beta_r + K_\tau, \tag{5}$$

$$z_{r_w} = \beta_r + K_w. \tag{6}$$

DETERMINAREA NUMĂRULUI DE RAPOARTE DE TRANSMITERE DIFERITE CE SE POT OBȚINE CU MECANISMELE DIN FIGURILE 1, 2 ȘI 3

La început se va analiza varianta întîia (fig. 1). Presupunem că roata baladoare z_{Bx} se angrenează tot timpul cu prima roată de pe axa II, iar baladorul z_{By} se va angrena succesiv cu toate roțile de pe această axă atunci numărul de rapoarte de transmitere diferite ∂_{α_1} între axa I şi axa III va fi egal cu numărul total K al roţilor fixate pe axa II

$$\partial_{\alpha_1} = K. \tag{7}$$

Presupunem în continuare că baladorul z_{Bx} se angrenează tot timpul cu a doua roată de pe axa II, iar z_{By} şi în acest caz se va angrena succesiv cu toate roţile de pe această axă. În acest caz numărul de rapoarte de transmitere diferite ∂_{α_2} între axa I şi axa III va fi

$$\partial_{\alpha_2} = K - 1, \tag{8}$$

adică cu un raport de transmitere mai puţin decît numărul total al roţilor de pe axa II, aceasta deoarece cînd a doua roată de pe axa II devine roată parazită atunci raportul de transmitere va fi egal cu 1. Dar un astfel de raport de transmitere a mai fost realizat în cazul cînd prima roată de pe axa II a fost parazită.

Făcînd acelaşi raţionament pentru cazurile cînd baladorul z_{Bx} va ocupa succesiv poziţii fixe, iar baladorul z_{By} se va angrena pe rînd cu toate celelalte roţi de pe axa II, atunci se ajunge la concluzia că

$$\partial_{\alpha_3} = \partial_{\alpha_4} = \ldots = \partial_{\alpha_k} = K - 1. \tag{9}$$

Numărul total de rapoarte de transmitere diferite ce se pot obţine prin folosirea variantei întîi a mecanismului cu roţi dinţate va fi

$$\partial_\alpha = \partial_{\alpha_1} + \partial_{\alpha_2} + \partial_{\alpha_3} + \ldots + \partial_{\alpha_k} = k + (k-1)^2 = k^2 - (k-1). \tag{10}$$

În mod analog se obţin numerele de rapoarte de transmitere diferite ∂_β şi ∂_γ ce se pot realiza prin folosirea variantelor a doua şi a treia a mecanismului cu roţi dinţate din figurile 2 şi 3

$$\partial_\beta = \partial_\alpha \cdot r, \tag{11}$$

unde

r — numărul total al roţilor dinţate fixate pe axa IV şi

$$\partial_\gamma = \partial_\alpha \, [r^2 - (\tau - 1)]. \tag{12}$$

Dacă se adoptă $K = r = 9$ atunci

$$\partial_\alpha = 73\,; \quad \partial_\beta = 657\,; \quad \partial_\gamma = 5329,$$

DETERMINAREA RAPOARTELOR DE TRANSMITERE ŞI SISTEMATIZAREA LOR

Raportul de transmitere i_α considerînd că mişcarea se transmite de la axa I la axa III (fig. 1) se determină din relaţia

$$i_\alpha = (-1)^m \frac{z_{K_x}}{z_{Bx}} \frac{z_{By}}{z_{K_y}}, \tag{13}$$

unde

m — numărul angrenărilor exterioare.

Înlocuind relaţiile (3) şi (4) în (13) şi avînd în vedere că $z_{Bx} = z_{Bv}$ avem.

$$i_\alpha = (-1)^m \frac{\beta_k + K_x}{\beta_k + K_v}. \tag{14}$$

În formula (14) B_K este o mărime constantă, iar i_α K_x şi K_v sînt mărimi variabile.

Prezentăm relaţia (14) în forma

$$i_\alpha \beta_K + i_\alpha K_v - (-1)^n (\beta_K + k_x) = 0. \tag{15}$$

Raportul de transmitere i_β considerînd că mişcarea se transmite de la axa I la axa III (fig. 2) se determină din relaţia

$$i_\beta = i_\alpha \frac{z_{r\tau}}{z_{B\tau}}. \tag{16}$$

Ţinînd seamă de expresiile (5) şi (14) şi introducînd notaţiile

$$\beta_r + K_\tau = \lambda, \tag{17}$$

relaţia (16) devine.

$$i_\beta \beta_k + i_\beta K_v - (-1)^m \frac{\lambda}{z_{B\tau}} (\beta_k + K_x) = 0. \tag{18}$$

Raportul de transmitere i_γ considerînd că mişcarea se transmite de la axa I la axa V (fig. 3) se determină din relaţia

$$i_\gamma = i_\beta \frac{z_{Bw}}{z_{r_w}}. \tag{19}$$

Avînd în vedere expresiile (6), (14) şi (16) şi introducînd notaţia

$$\beta_r + K_w = \mu \tag{20}$$

şi presupunînd că are loc egalitatea $z_{B\tau} = z_{Bw}$ relaţia (19) ia forma

$$i_\gamma \beta_k + i_\gamma K_v - (-1)^m \frac{\lambda}{\mu} (\beta_k + K_x) = 0. \tag{21}$$

Se observă că relaţiile (15), (18), (21) sînt cazurile particulare ale expresiei

$$i\beta_k + iK_v - (-1)^m p\,(\beta_k + K_x) = 0, \tag{22}$$

unde

$$p = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Astfel pentru valorile

$$m = 2\,;\ p = 1 \text{ se obține ecuația (15),}$$

$$m = 3\,;\ p = \frac{\lambda}{z_{B\tau}} \text{ se obține ecuația (18),}$$

$$m = 4\,;\ p = \frac{\lambda}{\mu} \text{ se obține ecuația (21).}$$

Menționăm că relația (22) reprezintă ecuația parametrică a unei familii de cuadrice. Pentru studiul naturii acestei suprafețe (22) se formează ecuația în S [1] așa cum urmează:

$$\begin{vmatrix} -S & 0 & 0 \\ 0 & -S & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -S \end{vmatrix} = -S\cdot S^2 + \frac{S}{4} = 0. \tag{23}$$

Rădăcinile ecuației în S sînt

$$S_1 = 0\,;\ S_2 = \frac{1}{2}\,;\quad S_3 = -\frac{1}{2}\,. \tag{24}$$

Avînd în vedere că în cazul de față forma patratică a cuadricei va fi

$$\varphi(K_x,\ K_y,\ i) = iK_y \tag{25}$$

și efectuînd calculele corespunzătoare, se determină ecuațiile axelor OK_x, OK_y și Oi așa cum urmează:

ecuația axei OK_x

$$\frac{K_x}{1} = \frac{K_y}{0} = \frac{i}{0}\,; \tag{26}$$

ecuația axei OK_y

$$\frac{K_x}{0} = \frac{K_y}{1} = \frac{i}{1}\,; \tag{27}$$

ecuația axei Oi

$$\frac{K_x}{0} = \frac{K_y}{-1} = \frac{i}{1}\,. \tag{28}$$

Pentru a găsi ecuația redusă a cuadricei se efectuează o rotație și o translație a sistemului de axe de coordonate.

Relaţiile dintre sistemul vechi de axe K_x, K_y şi i şi sistemul nou de axe x_1, y_1, şi z_1 obţinute prin rotaţie sînt

$$\begin{aligned} K_x &= x_1, \\ K_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - z_1), \\ i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + z_1). \end{aligned} \tag{29}$$

Înlocuind (29) în (22) se obţine

$$\frac{\beta_k}{\sqrt{2}}(y_1 + z_1) + \frac{1}{2}(y_1^2 - z_2^2) - (-1)^m p\,(\beta_k + \alpha_1) = 0,$$

sau

$$\frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{\beta_k}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(z_1 - \frac{\beta_k}{\sqrt{2}}\right)^2 - (-1)^m p\,(\beta_k + x_1) = 0. \tag{30}$$

După efectuarea translaţiei a sistemului de axe $Ox_1y_1z_1$ se obţine un al treilea sistem de axe $O'XYZ$.

Relaţiile între cele două axe vor fi

$$\begin{aligned} X &= \alpha_1 + \beta_k. \\ Y &= y_1 + \frac{\beta_k}{\sqrt{2}} \\ Z &= z_1 - \frac{\beta_k}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{31}$$

Înlocuind (31) în (30) avem

$$Y^2 - Z^2 = (-1)^m\, 2p\,X. \tag{32}$$

Relaţia (32) reprezintă ecuaţia unei familii de paraboloizi hiperbolici. Prin urmare se poate afirma că relaţiile (15), (18) şi (21) reprezintă ecuaţiile unor paraboloizi hiperbolici din aceeaşi familie.

Înlocuind valorile $m = 2$ şi $p = 1$ în relaţia (32) avem

$$Y^2 - Z^2 = 2X. \tag{33}$$

Relaţia (33) este ecuaţia redusă a expresiei (15) şi reprezintă un singur paraboloid hiperbolic (fig. 4).

Înlocuind valorile $m = 3$ şi $p = \frac{\lambda}{z_{B\tau}}$ în relaţia (32) se obţine

$$Y^2 - Z^2 = -\frac{2\lambda}{z_{B\tau}}X. \tag{34}$$

Relația (34) este ecuația redusă a expresiei (18) și reprezintă o familie de paraboloizi hiperbolici cu parametrul λ.

Înlocuind valorile $m = 4$ și $p = \frac{\lambda}{\mu}$ în relația (32) se obține

$$Y^2 - Z^2 = 2\frac{\lambda}{\mu} X. \tag{35}$$

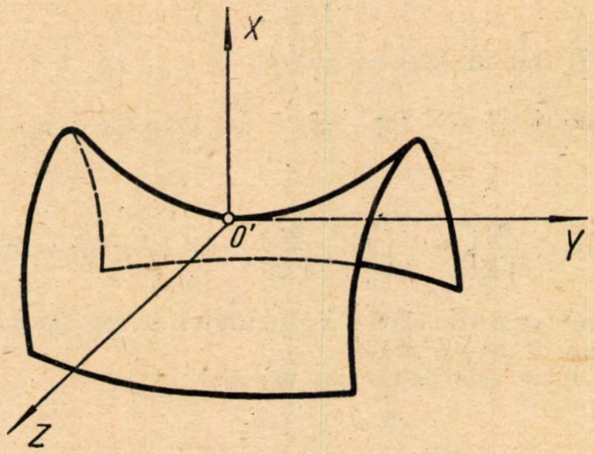


Fig. 4

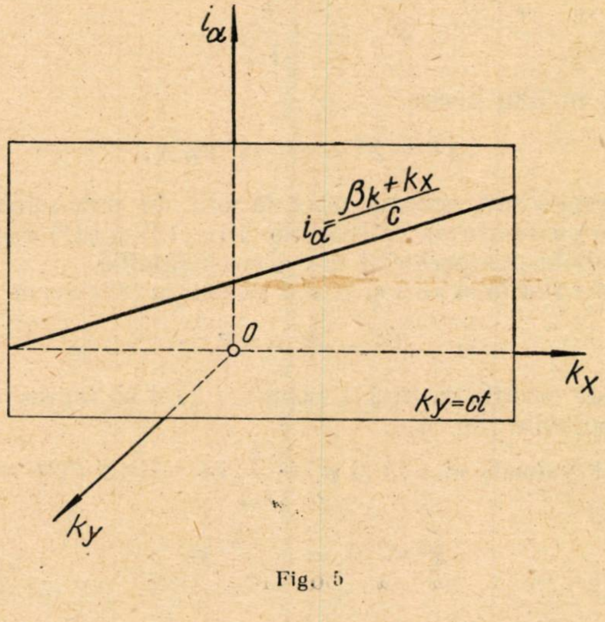

i_α
$i_\alpha = \frac{\beta_k + k_x}{c}$
O
k_x
$k_y = ct$
k_y

Fig. 5

Relația (35) este ecuația redusă a expresiei (21) și reprezintă o congruență de paraboloizi hiperbolici cu parametri λ și μ.

În continuare se va trece la studierea ecuațiilor (15), (18) și (21) care sînt ecuațiile unor paraboloizi hiperbolici ce fac parte din aceeași familie, fapt ce dă posibilitate de aplicare a aceleiași metode de studiu.

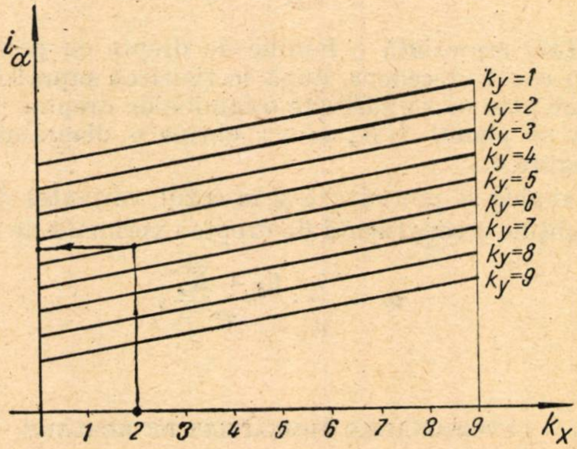


Fig. 6

Secționînd suprafața (15) care corespunde variantei din figura 1, cu planul K_y = const. se obține următoarea expresie pentru raportul de transmitere:

$$i_\alpha = \frac{\beta_k + K_x}{C}, \tag{36}$$

unde

$$C = \beta_k + K_y.$$

Relația (36) reprezintă o dreaptă, adică una din generatoarele paraboloidului hiperbolic (fig. 5). Ținînd seamă de faptul că K_y poate să ia nouă valori diferite ($K_y = 1$, $K_y = 2 \ldots K_y = 9$) se vor obține nouă drepte situate în nouă plane diferite.

Pentru a avea o privire generală asupra tuturor rapoartelor de transmitere ce se pot obține cu ajutorul variantei din figura 1 se proiectează toate dreptele obținute în cele 9 plane diferite pe planul $i_\alpha K_x$. Astfel se obține diagrama din figura 6.

Se determinăm de exemplu valoarea raportului de transmitere i_α în cazul cînd baladorul z_{Bx} se angrenează cu a doua roată a blocului cilindric dințat, iar baladorul z_{By} cu a cincea roată de pe acest loc. În acest caz $K_x = 2$ și $K_y = 5$. La valoarea abscisei $K_x = 2$ se caută ordonata corespunzătoare de pe dreapta înclinată determinată de $K_y = 5$. Valoarea acestei ordonate va reprezenta raportul de transmitere i_α.

Secționînd familia de suprafețe (18), care corespunde variantei din figura 2 cu planul $K_v = \text{const.}$ se obține următoarea expresie pentru raportul de transmitere i_β :

$$\dot{i}_\beta = -\frac{\lambda}{z_{B\tau}}\cdot\frac{\beta_k + K_x}{C}. \tag{37}$$

Relația (37) reprezintă o familie de drepte cu parametrul λ. Procedînd ca și în cazul precedent, după secționarea suprafeței (18) cu nouă plane, în fiecare plan se va găsi cîte o familie de drepte, iar după proiectarea acestora pe planul $i_\beta K_x$ se va obține o diagramă asemănătoare cu aceea din figura 6.

În mod analog se procedează și în cazul variantei din figura 3. Ca urmare se va obține o congruență de drepte exprimată de relația

$$\dot{i}_\gamma = \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\beta_k + K_x}{C}. \tag{38}$$

DETERMINAREA DOMENIULUI DE REGLARE

Domeniul de reglare N se determină de relația

$$N = \frac{n_{\max}}{n_{\min}} \tag{39}$$

unde

$n_{\max}$ și $n_{\min}$ — numărul de turații maxim și minim ale axei conduse.

Ținînd seamă de figurile 1, 2 și 3 formulele pentru determinarea domeniului de reglare corespunzătoare celor trei variante se exprimă în felul următor :

pentru varianta din figura 1

$$N_\alpha = \frac{n_{\mathrm{I}}\,\dfrac{z_{Bx}}{z_1}\cdot\dfrac{z_9}{z_{Bv}}}{n_{\mathrm{I}}\,\dfrac{z_{Bx}}{z_9}\cdot\dfrac{z_1}{z_{Bv}}} = \left(\frac{z_9}{z_1}\right)^2; \tag{40}$$

pentru varianta din figura 2

$$N_\beta = N_\alpha\,\frac{\dfrac{z_{r_\tau}}{z_1}}{\dfrac{z_{r_\tau}}{z_9}} = N_\alpha\,\frac{z_9}{z_1} = \left(\frac{z_9}{z_1}\right)^3; \tag{41}$$

pentru varianta din figura 3

$$N_\gamma = N_\beta \frac{\frac{z_9}{z_{Bw}}}{\frac{z_1}{z_{Bw}}} = N_\beta \frac{z_9}{z_1} = \left(\frac{z_9}{z_1}\right)^4. \tag{42}$$

În caz că numărul de dinţi a primelor şi ultimelor roţi de pe axa II şi IV (fig. 1 şi 2) vor fi egale cu $z_1 = 40$ şi respectiv $z_9 = 48$ atunci valorile domeniilor de reglare corespunzătoare celor trei variante vor fi

$$N_\alpha = 1{,}44\,;\ N_\beta = 1{,}73\,;\ N_\gamma = 2{,}07.$$

Aceste valori ale domeniilor de reglare se pot mări de două sau de trei ori, dacă în schema cinematică a variatorului se introduce un reductor cu două, respectiv trei trepte.

Primită la redacţie la 6 aprilie 1962.

ЗУБЧАТЫЙ МЕХАНИЗМ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТУПЕНЕЙ СКОРОСТИ

Посредством приведенного зубчатого механизма можно получить несколько тысяч ступеней скорости при диапазоне регулирования $N = \frac{n_{\max}}{n_{\min}} = 6$.

ZAHNRADGETRIEBE ZUR ERZIELUNG EINER GROSSEN ANZAHL VERSCHIEDENER ÜBERSETZUNGSVERHÄLTNISSE

ZUSAMMENFASSUNG

Dans untersuchte Getriebe erzeugt eine große Anzahl (einige Tausend) Geschwindigkeitsstufen und sichert gleichzeitig einen Regelbereich $N = \frac{n_{\max}}{n_{\min}} = 6$.

BIBLIOGRAFIE

1. N. ABRAMESCU, *Lecţiuni de geometrie analitică.* Ed. Universităţii, Bucureşti, 1944.

STUDII

ASUPRA REGIMURILOR ECONOMICE DE STRUNJIRE A OȚELURILOR CARBON

DE

M. P. POPOV, E. D. DECIU şi I. MITRICĂ

Studiile în vederea stabilirii regimurilor economice la operațiile de prelucrare prin aşchiere, urmăresc să determine legăturile reciproce ce există între parametrii regimului de aşchiere şi durabilitate, cu condiția ca uzura sculelor să fie plafonată pînă la acele valori, care asigură ca precizia şi calitatea suprafețelor prelucrate să fie în limitele prescrise.

Parametrii regimului de aşchiere, aşa după cum este cunoscut, sînt : viteza de aşchiere, avansul şi adîncimea de aşchiere.

Complexitatea fenomenelor de aşchiere în general şi al strunjirii în particular, face ca legătura dintre uzură şi timpul în care aceasta se produce să fie influențată de mulți parametri. Aşa după cum se cunoaşte, forma generală sub care se exprimă această legătură este

$$\delta = C_\delta \Theta^{f\,(m_1,\, m_2 \cdots m_n,\, \gamma,\, \alpha,\, \alpha_1\, \varkappa,\, \varkappa_1,\, \lambda,\, r,\, \gamma_f,\, f,\, v,\, t,\, s)}, \tag{1}$$

unde s-a notat cu

δ — uzura admisă drept criteriu;

C_δ — constantă de proporționalitate;

Θ — timpul în care se ajunge la uzura δ;

$m_1, m_2 \ldots m_n$ — parametri fizico-mecanici, chimici şi metalografici ai materialului de prelucrat, ai materialului sculelor etc.;

$\gamma, \alpha, \alpha_1, \ldots$ —parametrii geometrici ai feții active ai sculei [1], [2], [3];

v — viteza de aşchiere;

t — adîncimea de aşchiere;

s — avansul.

Este evident că practic nu este posibilă rezolvarea unei asemenea expresii, în care numărul variabilelor de care depinde funcţia exponenţială este foarte mare. Pentru simplificare se admite că în anumite domenii limitate fenomenul analizat poate fi prins într-o formă mai simplă şi anume :

$$\delta = C'_\delta \Theta^{X_1} v^{X_2} t^{X_3} s^{X_4}, \qquad (2)$$

unde s-au introdus următoarele notaţii noi :

C'_δ — constantă de proporţionalitate ;

X_1, X_2, X_3, X_4 — exponenţi funcţie de parametrii m_1, m_2 etc. mai sus-amintiţi (1) şi de parametrii geometrici γ, α, etc.

Utilizarea relaţiei (2) introduce un oarecare grad de aproximaţie, care însă nu afectează rezolvarea problemei propuse, ţinîndu-se seama că fenomenele se analizează într-un anumit domeniu limitat. În afara avantajului simplităţii această formă scoate în evidenţă parametrii regimului de aşchiere, permiţînd un studiu mai atent al lor.

În relaţiile (1) şi (2) se urmăreşte între altele o legătură între uzură şi timpul în care aceasta se produce. Pentru aceasta este necesar a se aminti că în cazurile practice uzura nu poate avea o evoluţie nelimitată, deoarece s-ar pierde realitatea fenomenelor ce apar în timpul procesului de aşchiere în prezenţa unor condiţii tehnologice şi funcţionale date. Astfel, realizarea unor anumite calităţi a suprafeţei prelucrate, obţinerea unei toleranţe prescrise, cît şi limitarea consumului de materiale de scule impun limitarea uzurei de pe feţele active ale sculei. În acest fel a apărut noţiunea de uzură plafon. În alte lucrări [1], [2], [3], [4] s-a arătat că urmărind uzura de pe cele trei feţe active ale sculei, de degajare, de aşezare principală şi de aşezare secundară, se observă că deşi aceste uzuri capătă în timp mărimi diferite, totuşi evoluţia lor este corelată încît uzura plafon, pînă la care scula este utilizabilă, este atinsă concomitent pe toate feţele. Analizînd felul în care aceste uzuri influenţează calitatea piesei prelucrate, s-a ajuns la concluzia că cea mai importantă este uzura de pe faţa de aşezare secundară, deoarece ea determină în ultimă instanţă precizia şi calitatea suprafeţei prelucrate. Ţinînd seama de toate considerentele expuse mai înainte, adică precizia prelucrării, calitatea suprafeţei prelucrate şi consumul de scule s-a ales pentru uzura de pe faţa de aşezare secundară valoarea plafon $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm.

În aceste condiţii, admiţînd noţiunea de uzură plafon, în relaţia (2) se poate considera

$$\delta = \delta_0 = \text{const.} \qquad (3)$$

Prima problemă care se ridică în studiul de faţă este legătura ce există între durabilitatea sculei şi viteza de aşchiere a oţelurilor carbon romîneşti. În vederea stabilirii acestei dependenţe, lucrările experimentale au fost făcute pentru mai multe avansuri şi adîncimi de aşchiere.

Ţinînd seama de cele prezentate pînă aici rezultă că în relaţia (2) toţi parametrii de bază sînt constanţi în afara vitezei v şi a timpului Θ, care devine durabilitatea T.

Relația (2) se poate scrie deci

$$v = \frac{\delta_0^{\frac{1}{X_2}}}{C_\delta'^{\frac{1}{X_2}} t^{\frac{X_3}{X_2}} s^{\frac{X_4}{X_2}}} \cdot \frac{1}{T^{\frac{X_1}{X_2}}}. \tag{4}$$

Notînd

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\delta_0}{C_\delta'}\right)^{\frac{1}{X_2}} \frac{1}{t^{\frac{X_3}{X_2}} s^{\frac{X_4}{X_2}}} &= C_1 \\ \text{și} \qquad \frac{X_1}{X_2} &= n \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

se obține relația cunoscută :

$$v\,T^n = C_1. \tag{6}$$

Studiile făcute la Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'' au urmărit evoluțiile exponentului n și ale constantei C_1, care sînt influențați de parametrii enunțați mai înainte. Astfel pentru un domeniu foarte larg de variație al parametrilor regimului de așchiere, deci cînd este valabilă doar relația (1), legătura dintre durabilitate și viteza de așchiere poate fi exprimată sub forma (6) numai cînd se ține seama de influența tuturor parametrilor asupra lui n și C_1. Reprezentînd grafic relația (6) în aceste cazuri se obțin curbe foarte complicate. Rezolvată în acest fel problema nu prezintă importanță practică și din această cauză a fost mărginită la domeniul durabilităților uzuale și a mărimilor obișnuite ale parametrilor regimului de așchiere. Domeniile durabilităților și ale parametrilor regimului de așchiere, în care s-au făcut experiențele sînt

$$\left.\begin{aligned} T &= 50 \;\ldots\; 120 \text{ min}, \\ s &= 0{,}1 \;\ldots\; 0{,}8 \text{ mm/rot}, \\ t &= 0{,}1 \;\ldots\; 5 \text{ mm}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Astfel se ajunge la situația în care se poate opera cu relația (2) și deci sînt valabile relațiile (5). Prin aceasta se urmărește o exprimare suficient de simplă din punct de vedere matematic, însă cu o aproximație bună a fenomenului fizic. Aceasta revine la liniarizarea în coordonate logaritmice pentru domeniul durabilităților economice uzuale a curbelor care dau variația durabilității în funcție de viteza de așchiere.

Din analizarea relațiilor (5) se vede că constanta C_1 este funcție de avans și de adîncimea de așchiere, iar n este independent în raport cu acești parametri ai regimului de așchiere.

Lucrările experimentale au confirmat considerațiile teoretice expuse mai sus. Experiențele au fost executate pe oțelurile carbon prelucrate la cald OL 38, OL 42, OL 50, OL 60, OL 70, OL C 25, OL C 35, OL C 45 și OL C 60. Proprietățile mecanice caracteristice și principalii constituenți chimici sînt dați în tabela 1.

Tabela 1

Oțelul experimentat	Proprietăți mecanice		Compoziția chimică				
	σ_r med (kgf/mm²)	*HB* med (kgf/mm²)	C (%)	Mn (%)	Si(%)	S (%)	P (%)
OL 38	39,2	110	0,12	0,44	0,01	0,022	0,015
OL 42	46,5	123	0,23	0,57	0,18	0,032	0,017
OL 50	56,0	153	0,28	0,80	0,35	0,028	0,030
OL 60	66,6	175	0,45	0,71	0,24	0.053	0,040
OL 70	83,4	238	0,63	0,70	0,26	0,031	0,046
OL C 25	48,7	139	0,24	0,57	0,17	0,030	0,028
OL C 35	57,7	165	0,32	0,64	0,29	0,029	0,029
OL C 45	69,7	199	0,41	0,54	0,37	0,024	0,026
OL C 60	85,3	241	0,59	0,66	0,28	0,035	0,029

Cu ajutorul datelor experimentale din tabela 1 se pot stabili următoarele relații între proprietățile mecanice caracteristice :

$$\sigma_r = 0{,}34\,HB + 2{,}92. \tag{8}$$

sau

$$\sigma_r \approx 0{,}36\ HB \tag{9}$$

și respectiv între proprietățile mecanice și conținutul în carbon C (%).

$$\sigma_r = 96{,}15\ \mathrm{C} + 26{,}73 \tag{10}$$

și

$$HB = 258{,}71\ \mathrm{C} + 68{,}57. \tag{11}$$

Rezultatele cercetărilor care urmăresc legătura dintre viteza de așchiere și durabilitate au fost parțial publicate [4], [5], [6]. În lucrarea de față se prezintă în figurile 1, 2 și 3 rezultatele obținute pe cîteva oțeluri carbon de calitate.

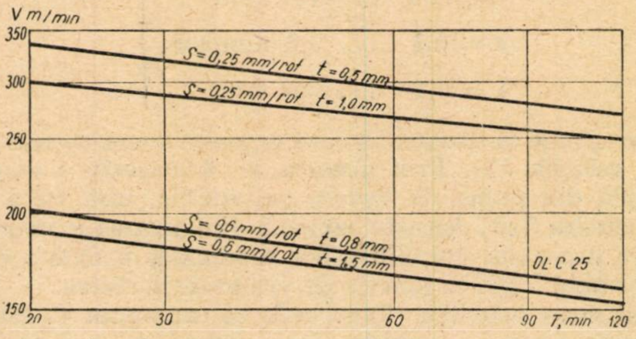


Fig. 1. — Variația durabilității în funcție de viteza de așchiere în cazul strunjirii oțelului OL C 25.

Din analizarea rezultatelor experimentale se vede că se poate admite cu o precizie satisfăcătoare că exponentul n din relaţia (6) este constant şi egal cu valoarea medie a tuturor valorilor determinate la mai multe regimuri. În acest fel s-au determinat valorile n_{med} pentru fiecare oţel în parte, prezentate în tabela 2.

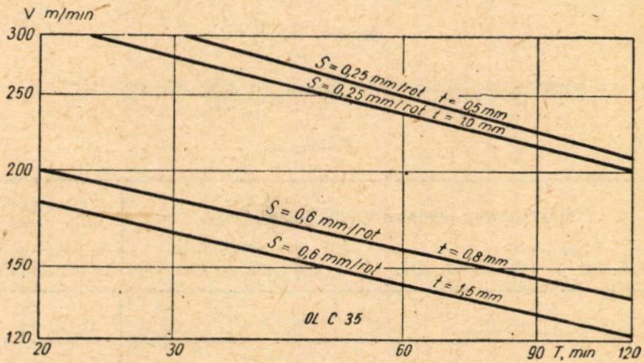


Fig. 2. — Variaţia durabilităţii în funcţie de viteza de aşchiere în cazul strunjirii oţelului OL C 35.

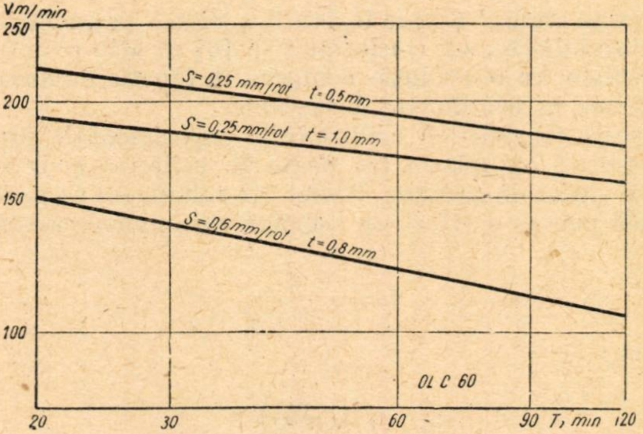


Fig. 3. — Variaţia durabilităţii în funcţie de viteza de aşchiere în cazul strunjirii oţelului OL C 60.

Din valorile medii n_{med} obţinute pentru fiecare oţel se pot determina valorile n_{MED} pe grupe de oţeluri, care sînt şi ele prezentate în tabela 2 pentru oţelurile carbon obişnuite (STAS 500—49) şi oţelurile carbon de calitate (STAS 880—49). De aici se vede că materialul prelucrat are influenţă asupra valorii lui n. Se poate însă observa că în cadrul fiecărei grupe de oţeluri există o variaţie suficient de mică încît se poate ajunge la o valoare generalizată n_{MED} pentru fiecare grupă.

Diferenţa care apare între cele două valori ale lui n_{MED} este legată de structura şi compoziţia chimică diferenţiată ce există între cele două grupe de oţeluri. Aceste valori conduc spre calcule mai precise, dar introduc şi o serie de complicaţii legate de faptul că sînt necesare tabele şi nomograme separate pentru cele două grupe de oţeluri. Pentru calcule mai generale, care admit o aproximaţie mai mare se va utiliza valoarea

$$n_0 = 0{,}18 \tag{12}$$

determinată ca medie pentru cele două grupe de oţeluri.

Tabela 2

Materialul aşchiat	Oţel carbon obişnuit (STAS 500-49)					Oţel carbon de calitate (STAS 880-49)		
	OL 38	OL 42	OL 50	OL 60	OL 70	OL C 25	OL C 35	OL C 60
n_{med}	0,234	0,225	0,224	0,220	0,203	0,145	0,133	0,154
n_{MED}	0,220					0,144		
n_0	0,18							

Continuînd studiul asupra legăturilor dintre parametrii regimului de aşchiere şi durabilitate, s-a constatat [5], [6] că atît avansul cît şi adîncimea de aşchiere au o evoluţie continuă în funcţie de durabilitate, care pot fi linializate în coordonate logaritmice.

Aprecierile teoretice şi confirmările experimentale prezentate pînă aici demonstrează că relaţia (4) poate fi utilizată şi la stabilirea formulei pentru viteza de aşchiere. Astfel din relaţia (4) se poate obţine formula generală pentru o viteză de aşchiere corespunzătoare durabilităţii T

$$v_T = \frac{C_\Delta^*}{T^n\, t^x\, s^y}, \tag{13}$$

unde s-a notat cu

$$\left.\begin{aligned} C_\Delta^* &= \left(\frac{\delta_0}{C_\delta'}\right)^{\frac{1}{X_2}}, \\ x &= \frac{X_3}{X_2}, \\ y &= \frac{X_4}{X_2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ţinînd însă seama că pentru o anumită durabilitate dată, de exemplu 60 minute şi un anumit material de prelucrat, termenul T^n devine şi el o constantă și poate fi înglobat într-o constantă $C^\star$ a cărei expresie este

$$C^\star = \frac{C_\Delta^\star}{T^n}. \tag{15}$$

Se vede deci că noua constantă $C^\star$ cuprinde influența mai multor parametri, a căror efect poate fi controlat. Din aceste motive se poate scrie

$$C^\star = C\,K, \tag{16}$$

unde s-a nota cu

C — constantă ce depinde de natura materialului prelucrat;
K — coeficient global de corelație al vitezei de așchiere.

Plecînd de la expresia (13) și ținînd seama și de relațiile (15) și (16) se obține următoarea formă pentru viteza de așchiere:

$$v_T = \frac{C}{t^x s^y} K. \tag{17}$$

Sub această formă simplificată s-a stabilit legătura ce există între viteza de așchiere și ceilalți doi parametri ai regimului de așchiere cînd aceștia variază în domeniile date de relația (7), în condițiile atingerii uzurii plafon $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm și a unei durabilități T, care în cazul experiențelor de bază a fost $T = 60$ min.

Determinarea vitezei economice de așchiere reprezintă unul din scopurile finale ale unui studiu privind parametrii regimului de așchiere.

Elementele formulei (17) au fost stabilite pe cale experimentală pentru fiecare din oțelurile enumerate mai înainte. Faptul că variația avansului și a adîncimii de așchiere în funcție de durabilitate poate fi liniarizată în coordonate logaritmice, conduce la concluzia că în domeniul dat de relația (7) exponenții x și y din formula (17) au valori constante în cazul fiecărui oțel. Determinarea valorilor x și y pentru fiecare oțel s-a făcut prelucrînd matematic rezultatele experimentale obținute unde s-a urmărit variația viteză — durabilitate la mai multe avansuri și adîncimi de așchiere. S-au menținut aceleași condiții de experimentare atît în ceea ce privește sculele cît și epruvetele, cum ar fi: parametrii geometrici optimi, durabilitatea, condițiile de pregătire a epruvetelor, domeniul parametrilor regimului de așchiere etc. În acest fel se elimină efectul mai multor parametri, rămînînd doar acel al proprietăților mecanice a oțelurilor prelucrate.

Rezultatele obținute sînt prezentate în tabela 3.

Tabela 3

Materialul așchiat		CK	Pentru fiecare oțel		Pe grupe de oțeluri		Pentru toate oțelurile carbon	
			x	y	x	y	x	y
Oțel carbon obișnuit (STAS 500-49)	OL 38	101,75	0,1425	0,4711	0,15	0,43	0,17	0,45
	OL 42	138,20	0,1237	0,4176				
	OL 50	131,24	0,1362	0,4234				
	OL 60	98,43	0,1446	0,3826				
	OL 70	83,44	0,2012	0,4535				
Oțel carbon de calitate (STAS 880-49)	OL C 10	88,0	—	—	0,20	0,47		
	OL C 16	118,0	—	—				
	OL C 25	136,7	0,2200	0,4700				
	OL C 35	122,9	0,2200	0,4310				
	OL C 45	92,8	—	—				
	OL C 60	86,31	0,1470	0,4989				

Din tabela 3 rezultă că atît x cît și y are valori distincte pentru fiecare oțel în parte. Pentru a simplifica calculele exponenții x și y au fost grupați sub formă de valori medii, întîi pentru cele două grupe de oțeluri din STAS 500—49 și STAS 880—49, apoi pentru toate oțelurile carbon. Aceste două aproximații simplifică calculele, dar în același timp influențează asupra preciziei lor. Abaterile ce apar se mențin însă în limitele uzuale și ca atare calculele cu valorile generalizate ale exponenților x și y pot fi aplicate cu succes în practică și conduc la forme ușor accesibile de prezentare a rezultatelor, cum ar fi nomogramele.

După cum s-a arătat mai înainte constanta C^* înglobează influența parametrilor care intervine în procesul de așchiere și așa cum se vede în relația (16) s-a recurs la coeficientul global de corecție al vitezei de așchiere K, pentru a exprima influența acestor parametri asupra vitezei de așchiere. Coeficientul global de corecție al vitezei de așchiere se definește

$$K=K_1\cdot K_2\cdot K_3\cdot K_4\cdot K_T\cdot K_m\cdot K_\gamma\cdot K_\alpha\cdot K_{\alpha_1}\cdot K_\varkappa\cdot K_{\varkappa_1}\cdot K_\lambda\cdot K_r\cdot K_{\gamma_f}\cdot K_f. \quad (18)$$

Semnificația fiecărui coeficient de corecție al vitezei de așchiere este

K_1 = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de proprietățile mecanice ale materialului prelucrat;

K_2 = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere funcție de sistemul de răcire adoptat;

K_3 = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de modul de ascuțire al cuțitului;

K_4 = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de omogenitatea materialului prelucrat, prezența straturilor ecruisate, prezența incluziunilor etc.;

K_T = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de durabilitatea economică aleasă a cuțitului;

K_γ = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de valoarea unghiului de degajare;

K_α = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de valoarea unghiului de așezare principal;

K_{α_1} = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de valoarea unghiului de așezare secundar;

$K_\varkappa$ = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de valoarea unghiului de atac principal;

$K_{\varkappa_1}$ = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de valoarea unghiului de atac secundar;

K_λ = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de valoarea unghiului de înclinație al muchiei așchietoare principale;

K_r = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere funcție de valoarea razei de racordare a vîrfului cuțitului;

$K_{\gamma f}$ = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere, funcție de valoarea unghiului de înclinație al fațetei muchiei așchietoare principale;

K_f = coeficientul de corecție al vitezei de așchiere funcție de lățimea fațetei muchiei principale așchietoare.

Analiza celor două valori C și K conduce la determinarea mărimilor necesare aplicării în practică, pe cazuri concrete a formulei (17).

Așa cum s-a definit, constanta C este funcție de materialul prelucrat și va avea valori diferite de la material la material, cum ar fi de exemplu oțeluri, fonte etc. În cazul oțelurilor studiate, pe baza datelor experimentale din tabela 3 s-a ales valoarea

$$C = 100 \tag{19}$$

pe criteriul simplificării calculului cu formula (17). Ținînd seama că experiențele au fost făcute în condiții similare, deci coeficienții de corecție respectivi au valori egale cu unitatea, rezultă că în tabela 3 se poate urmări influența proprietăților mecanice a oțelurilor prelucrate și prin urmare este posibilă determinarea valorilor coeficientului de corecție K_1.

Influența proprietăților mecanice a oțelurilor prelucrate apare mai elocventă în figura 4 unde este reprezentată variația coeficientului K_1 de corecție a vitezei de așchiere în funcție de rezistența de rupere la tracțiune.

Curba trasată printre punctele experimentale obținute pentru cele două grupe de oțeluri studiate permite determinarea coeficientului de corecție K_1, atît pe cale grafică cît și pe cale analitică cu ajutorul relațiilor

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= 6{,}6.10^{-5}\,\sigma_r^{-3} - 1{,}244.10^{-2}\,\sigma_r^2 + 7{,}475.10^{-1}\,\sigma_r - 13{,}128, \\ &\qquad \text{pentru } 35 < \sigma_r \leqslant 65 \text{ kgf/mm}^2; \\ K_1 &= 4{,}94.10^{-4}\,\sigma_r^2 - 8{,}30.10^{-2}\,\sigma_r + 4{,}316, \\ &\qquad \text{pentru } 65 < \sigma_r \leqslant 85 \text{ kgf/mm}^2. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

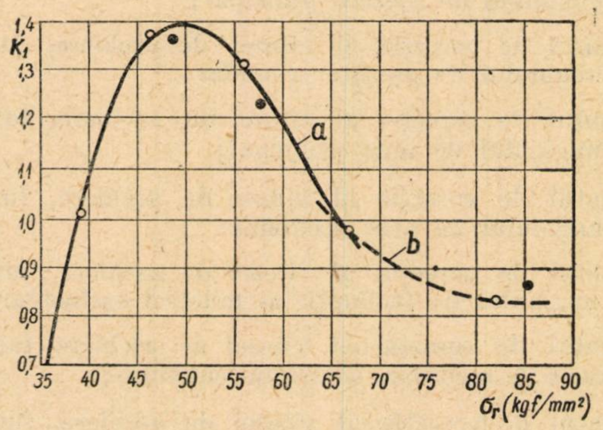


Fig. 4. — Variația coeficientului de corecție al vitezei de așchiere în funcție de rezistența de rupere la tracțiune. Curba *a* pentru $35 < \sigma_r \leqslant 65$ kgf/mm², curba *b* pentru $65 < \sigma_r \leqslant 85$ kgf/mm².

Exprimarea legii de variație a lui K_1 prin două relații, valabile fiecare într-un domeniu dat, dă posibilitatea unui calcul mai operativ, decît în cazul folosirii unei singure relații, care ar fi condus la calcule mai laborioase.

Elementele care stau în momentul de față la dispoziție permite să se calculeze viteza economică de așchiere cu relația (17), unde toți coeficienții de corecție cu excepția lui K_1 sînt egali cu unitatea. Condițiile în care acești coeficienți sînt egali cu 1 vor fi analizate ulterior. Cu astfel de date pot fi construite nomograme de așchiere pentru fiecare oțel în parte [5], [6], [7] cu care să fie determinată rapid viteza de așchiere v_{60} în funcție de avansul s și adîncimea de așchiere t. Se subliniază că datele folosite la astfel de nomograme sînt cele obținute pentru fiecare oțel în parte. Astfel de nomograme dau rezultate mai precise, însă lucrul cu ele în munca de normare poate apărea în unele cazuri mai anevoios din cauza numărului mare de nomograme.

Mergînd pe linia generalizării, s-au construit nomograme care să utilizeze valori determinate pentru o grupă de oțeluri. O astfel de nomogramă a fost prezentată în [4] pentru oțelurile carbon obișnuite. În lucrarea de faţă, în figura 5 se prezintă nomograma pentru oţelurile carbon de calitatea (STAS 880—49) construită pe baza formulei (17) cu ajutorul exponenţilor x şi y din tabela 3 pentru grupa respectivă de oţeluri şi utilizînd relaţiile (19) şi (20).

O generalizare mai avansată o reprezintă nomograma din figura 6 care a fost construită pe baza formulei (17) pentru toate oţelurile carbon romîneşti. S-au utilizat valorile medii ale exponenţilor x şi y din tabela 3 determinate pentru toate oţelurile carbon şi relaţiile (20) care dau influenţa proprietăţilor mecanice.

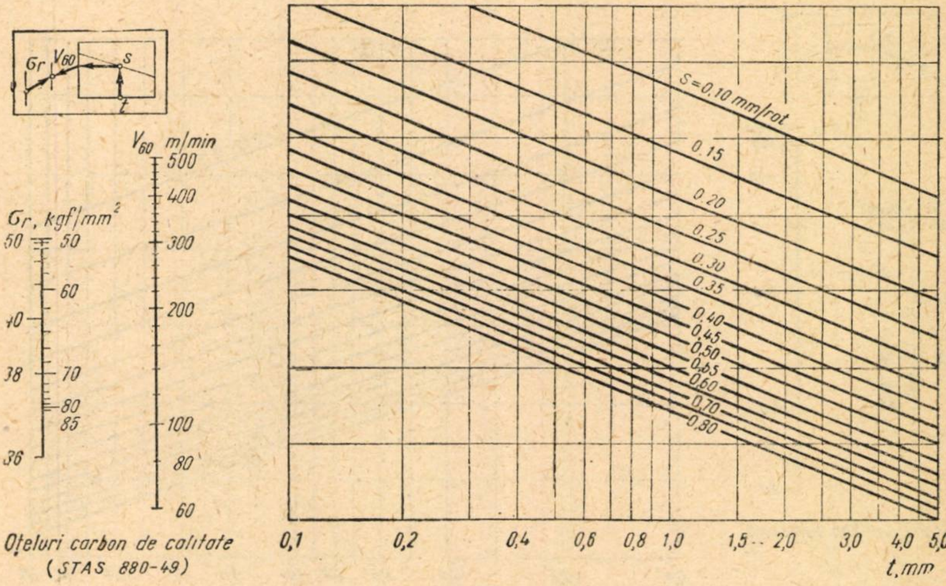


Fig. 5. — Nomogramă generalizată pentru aşchierea pe strung a oţelurilor carbon de calitate (STAS 880-49) cu cuţite armate cu plăcuţe din carburi metalice S_1, ascuţite la geometria optimă.

Nomogramele din figurile 5 şi 6 corespund unei durabilităţi de 60 minute, cînd se utilizează cuţite armate cu plăcuţe S_1 ascuţite în aceleaşi condiţii la geometria optimă [1].

Stabilirea vitezei economice de aşchiere în nomogramele din figurile 5 şi 6 se face după cum este indicat în schemele anexate, considerîndu-se date : rezistenţa de rupere σ_r a materialului prelucrat, adîncimea de aşchiere t şi avansul s în funcţie de tehnologia adoptată. Din punctul corespunzător adîncimii de aşchiere t date, se ridică o verticală pînă la intersecţia cu dreapta corespunzătoare avansului s de asemenea dat. Din acest punct se duce o orizontală pînă la marginea din stînga a tabloului dreptunghiular al nomogramei. Acest punct se uneşte printr-o dreaptă cu punctul de pe scara verticală a rezistenţelor, corespunzător rezistenţei σ_r date. Această dreaptă determină la intersecţie pe scara verticală a vitezelor tocmai viteza economică de aşchiere v_{60} căutată.

Datorită faptului că la construirea nomogramelor din figurile 5 și 6 s-au utilizat valorile medii ale exponenților x și y date în tabela 3 vor apare desigur abateri față de cazul cînd se calculează viteza de așchiere cu exponenții determinați pentru fiecare oțel în parte. Aceste abateri se încadrează însă în limitele admise uzual în tehnică, mai cu seamă că de obicei variația turației la strunguri se face în trepte. Rațiile normalizate utilizate curent la construcția cutiilor de viteză a strungurilor conduc la variații ale vitezii mai mari decît cele provenind din utilizarea nomogramelor din figurile 5 și 6.

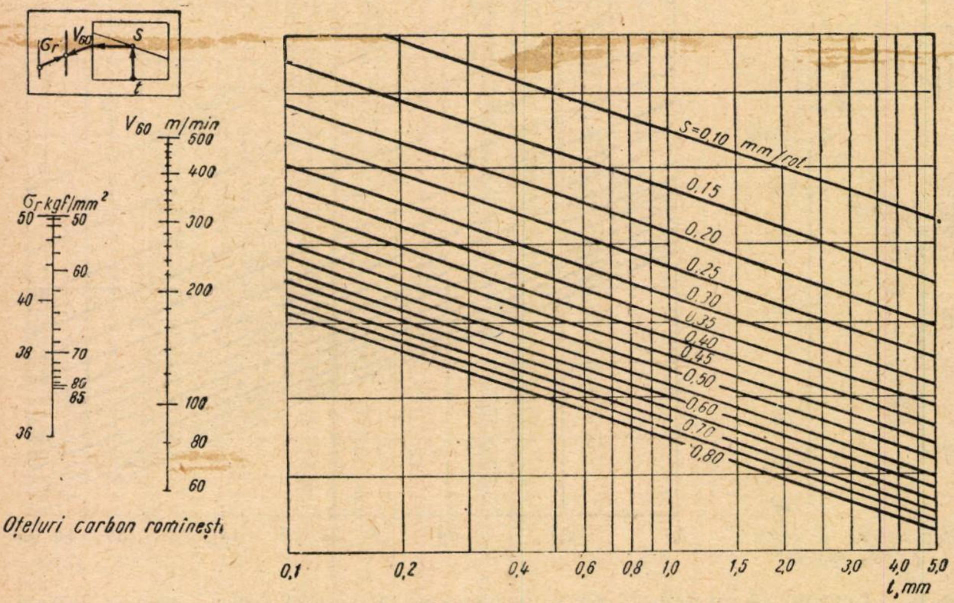


Fig. 6. — Nomogramă generalizată pentru așchierea pe strung a tuturor oțelurilor carbon romînești, cu cuțite armate cu plăcuțe din carburi metalice S_1 ascuțite la geometria optimă.

Nomograma din figura 6 prezintă avantajul că rezolvă cel mai operativ pentru tehnologi stabilirea regimurilor economice de așchiere în cazul prelucrării pe strung a tuturor oțelurilor carbon romînești.

Așa după cum s-a amintit, nomogramele sînt construite pentru cazul cînd ceilalți coeficienți de corecție ai vitezei de așchiere au valoarea

$$K_2 = K_3 = K_4 = K_T = K_m = K_\gamma = K_\alpha = K_{\alpha_1} =$$
$$= K_\varkappa = K_{\varkappa_1} = K_\lambda = K_r = K_{\gamma f} = K_f = 1.$$

Analizarea diverșilor coeficienți de corecție ai vitezei de așchiere se face în cele ce urmează.

Coeficientul K_2 de corecție al vitezei de așchiere în funcție de sistemul de răcire adoptat are valoarea $K_2 = 1$ pentru prelucrările efectuate fără răcire și $K_2 > 1$ pentru cazul utilizării lichidelor de răcire și ungere.

Pentru coeficientul de corecție al vitezei de așchiere în funcție de modul de ascuțire s-a admis $K_3 = 1$ pentru condițiile în care au fost pregătite cuțitele folosite în cursul experimentării și anume utilizarea pietrelor din carbură de siliciu cu liant ceramic, care au duritatea J și granulația 60. Cînd se asigură suprafețelor active o calitate superioară celei ce rezultă din utilizarea pietrelor de polizor cu caracteristicile date mai înainte, atunci $K_3 > 1$, iar cînd se obține o calitate inferioară, atunci $K_3 < 1$.

În cazul prelucrării pieselor la care s-au îndepărtat straturile ecruisate, scoria, incluziunile etc., coeficientul $K_4 = 1$. Prezența straturilor ecruisate, a scoriei, incluziunilor etc., scăzînd performanțele de așchiere, conduc la valori $K_4 < 1$.

Coeficientul K_m de corecție al vitezei de așchiere funcție de materialul sculei se definește prin relația

$$K_m = \frac{v_{M_2}}{v_{M_1}}, \tag{21}$$

unde s-a notat cu

v_{M_1} — viteza de așchiere cu materialul M_1 de sculă;

v_{M_2} — viteza de așchiere cu materialul M_2 de sculă.

Ambele viteze de așchiere din relația (21) corespund aceleași durabilități economice.

Ținînd seama de relația (17) se vede că se obține imediat [4], [7], următoarea expresie:

$$K_m = C_m \, s^{m_1} \left(\frac{s}{t}\right)^{m_2}. \tag{22}$$

Din relațiile (21) și (22) se observă, după cum $K_m \gtreqless 1$, că pentru diverse valori ale avansului și ale adîncimii de așchiere sînt de preferat anumite materiale de scule. În acest sens a putut fi stabilită o corespondență între diverse tipuri de plăcuțe din carburi metalice, cum ar fi de exemplu între plăcuțele T15K6 și S_1.

În experiențele efectuate s-a ajuns la concluzia că pentru un grup de materiale de scule, în domeniul uzual al parametrilor regimului de așchiere, la operațiile de strunjire de finisare se pot utiliza valorile medii ale coeficientului K_m, care sînt date în tabela 4. În această tabelă sînt trecute și duritățile Rockwell medii ale plăcuțelor.

Tabela 4

Tipul plăcuței	T15K6	S_1	T14K8	S_2	T5K10	S_3
H_{RC}	78	75	75	76,4	74,6	74,1
K_m	1,05	1,00	0,93	0,94	0,86	0,87

Coeficientul K_T de corecție al vitezei de așchiere în funcție de durabilitatea economică T aleasă, pentru un anumit material prelucrat la același avans și adîncime de așchiere se definește cu ajutorul relației (6) cînd se ia drept etalon durabilitatea $T = 60$ min

$$K_T = \frac{v_T}{v_{60}} = \left(\frac{60}{T}\right)^n. \tag{23}$$

Este de reținut faptul ca variațiile mici ale exponentului n nu afectează sensibil valorile coeficientului K_T. Din această cauză se pot utiliza valorile medii ale lui n din tabela 2. Astfel în tabela 5 se dau valorile lui K_T pentru domeniul 50...120 min, calculate cu n_{MED} pentru grupe de oțeluri și cu n_0 pentru toate oțelurile carbon. Valoarile coeficientului K_T pentru toate oțelurile carbon, prezentînd abateri mici față de valorile calculate pe grupe de oțeluri, demonstrează că sînt posibile generalizări cu ajutorul exponentului n_0 și totodată se vede utilitatea lor.

Tabela 5

T (min)		50	60	70	80	90	100	110	120
K_T	Oțeluri carbon obișnuite	1,04	1,00	0,97	0,94	0,91	0,89	0,87	0,86
	Oțeluri carbon de calitate	1,03	1,00	0,98	0,96	0,94	0,93	0,92	0,90
	Toate oțelurile carbon	1,03	1,00	0,97	0,95	0,93	0,91	0,90	0,88

Coeficienții K_i (unde $i = \gamma, \alpha, \alpha_1, \varkappa, \varkappa_1, \lambda$) de corecție ai vitezei de așchiere în funcție de unghiurile active ale cuțitului au rolul de a modifica viteza de așchiere în cazurile în care se utilizează unghiuri diferite de cele optime și se urmărește menținerea constantă a durabilității economice.

Un coeficient K_i de corecție al vitezei de așchiere în funcție de un parametru geometric se definește a fi raportul dintre viteza de așchiere obținută în cazul parametrului geometric diferit de cel optim și dintre viteza de așchiere obținută cu parametrul geometric optim, ambele viteze corespunzînd aceleiași durabilități economice.

Determinarea coeficienților de corecție K_i se face plecînd de la curbele care dau variația vitezei de așchiere în funcție de durabilitate și care sînt exprimate prin relația (6). Așa după cum s-a arătat mai înainte, se poate admite că fasciculul de curbe experimat de relația (6), se construiește cu ajutorul unei valori constante a exponentului n, care este o valoare medie. Se face ipoteza, verificată experimental că, această situație se menține și în cazul cînd parametrii geometrici variază într-un domeniu limitat. Rezultă deci că cele două viteze a căror raport definește coeficientul K_i se găsesc pe două curbe date de relația (6) care au constantele diferite. Fie v_1 viteza de așchiere, care rezultă din nomogramă și care corespunde unei durabilități economice T_e și este obținută cu parametrii geometrici optimi. În acest caz relația (6) devine

$$v_1 T_e^n = C_1'. \qquad (24)$$

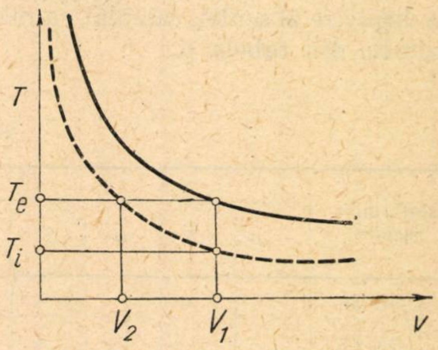


Fig. 7. — Exemplu de variație a curbelor $vT^n = C$, cînd se modifică parametrii geometriei optimi.

Modificarea unui parametru geometric optim face ca variația vitezei de așchiere în funcție de durabilitate să aibă loc după o altă curbă, așa după cum este reprezentat în figura 7. Menținînd aceeași viteză de așchiere v_1 se obține o durabilitate T_i diferită de T_e. În acest nou caz relația (6) se scrie

$$v_1 T_i^n = C_1'' \cdot \qquad (25)$$

Punînd condiția să se mențină durabilitatea economică T_e și avînd în vedere modificările aduse de schimbarea valorii parametrilor geometrici optimi, se obține o nouă viteză de așchiere v_2 astfel că relația (6) se scrie

$$v_2 T_e^n = C_1''. \qquad (26)$$

Ținînd seama de definiția sa și de relațiile (25) și (26) se obține valoarea căutată a coeficientului K_i de corecție al vitezei de așchiere în funcție de parametrii geometrici

$$K_i = \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^n = (\tau_i)^n, \qquad (27)$$

unde τ_i este coeficientul de corecţie al durabilităţii în funcţie de parametrii geometrici definit în lucrarea [1].

Raţionamentele expuse sînt valabile pentru toate cazurile în care $T_e \neq T_i$, în figura 7 exemplificîndu-se doar cazul pentru $T_i < T_e$.

Cu ajutorul relaţiei (27) şi cu datele din lucrarea [1] se determină coeficienţii K_i de corecţie ai vitezei de aşchiere, care au importanţă în aplicaţiile practice.

Coeficientul K_γ de corecţie al vitezei de aşchiere funcţie de unghiul de degajare al sculei, calculat cu relaţia (27), are în cazul oţelurilor studiate valorile din tabela 6.

Tabela 6

	Materialul aşchiat	γ										
		−10°	−5°	0°	2°	5°	10°	15°	17°	19°	20°	22°
K_γ	OL 38	—	—	—	—	—	—	0,95	—	1,00	—	0,94
	OL 42	—	—	—	—	—	0,98	1,00	—	—	0,92	—
	OL 50	—	—	—	—	0,95	1,00	0,96	—	—	—	—
	OL 60	0,94	0,97	0,99	—	1,00	0,95	—	—	—	—	—
	OL 70	—	0,98	1,00	—	0,97	—	—	—	—	—	—
	OL C 25	—	—	—	—	—	0,89	1,00	0,95	—	—	—
	OL C 35	—	—	—	—	0,98	1,00	0,95	—	—	—	—
	OL C 45	0,90	0,92	0,96	1,00	0,94	0,87	—	—	—	—	—
	OL C 60	0,96	1,00	0,96	—	—	—	—	—	—	—	—

Din această tabelă apare evidentă importanţa pe care o are coeficientul K_γ şi deci alegerea judicioasă a unghiului de degajare.

În mod analog se determină coeficienţii K_α, K_{α_1}, $K_\varkappa$, $K_{\varkappa_1}$, pentru fiecare oţel în parte.

Analog cu nomogramele de aşchiere se poate ajunge la situaţii de generalizare, calculîndu-se valori medii pentru coeficienţii K_i de corecţie ai vitezei de aşchiere în funcţie de parametrii geometrici. Şi în acest caz se obţine o simplificare în lucrul curent cu tabelele de coeficienţi, precizia fiind mai redusă. Valorile generalizate ale coeficienţilor $K_{i\,med}$ de corecţie ai vitezei de aşchiere s-au calculat cu ajutorul coeficienţilor $\tau_{i\,med}$ de corecţie ai durabilităţii din lucrarea [1] şi cu exponentul n_0 deci cu valori medii pentru toate oţelurile carbon.

În tabelele 7—11 sînt date valorile coeficienţilor $K_{i\,med}$.

Tabela 7

γ	$\gamma^0_{opt} - 5°$	γ^0_{opt}	$\gamma^0_{opt} + 5°$
$K_{\gamma\ med}$	0,96	1,00	0,95

Tabela 8

α	7°	11°	15°
$K_{\alpha\ med}$	0,95	1,00	0,96

Tabela 9

α_1	10°	15°	20°
$K_{\alpha_1\ med}$	0,93	1,00	0,94

Tabela 10

$\varkappa$	30°	45°	90°
$K_{\varkappa\ med}$	1,03	1,00	0,86

Tabela 11

$\varkappa_1$	5°	10°	15°
$K_{\varkappa_1\ med}$	0,96	1,00	0,95

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

În domeniul $\lambda = -5° \ldots +5°$ se poate considera $K_\lambda \approx 1$.

În cele ce urmează vor fi analizaţi cîţiva coeficienţi de corecţie ai vitezei de aşchiere pentru cazurile în care se aduc îmbunătăţiri geometriei optime şi ca urmare se obţine fie o mărire a durabilităţii sculei la regim constant, fie o ridicare a vitezei de aşchiere la o aceeaşi durabilitate economică aleasă.

O ridicare a performanţelor de aşchiere se obţine prin racordarea vîrfului cuţitului [2]. În tabela 12 se dau valorile coeficientului de corecţie K_r în funcţie de raza de racordare r.

Tabela 12

r (mm)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
K_r	1,00	1,05	1,10	1,13	1,17	1,20	1,23

O altă metodă pentru mărirea vitezei de aşchiere constă în executarea unei faţete de-a lungul muchiei aşchietoare principale [2]. Elementele faţetei fiind unghiul de înclinare γ_f şi lăţimea ei f, coeficienţii respectivi de corecţie ai vitezei de aşchiere sînt $K_{\gamma f}$ şi K_f.

Respectînd indicaţiile de a se executa faţeta la valorile optime [2]

$$\left.\begin{aligned} \gamma_f &= -\alpha_{opt} \approx 10°, \\ f &= (2{,}8\ldots2{,}9)\, s \sin \varkappa, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

se obţine o valoare globală pentru coeficientul respectiv de corecţie a vitezei de aşchiere

$$K_f^* = K_{\gamma f} \cdot K_f = 1{,}08. \qquad (29)$$

Calculul coeficienţilor de corecţie ai vitezei de aşchiere K_r, $K_{\gamma f}$ şi K_f s-a efectuat cu relaţii similare expresiei (27), utilizîndu-se coeficienţii de corecţie ai durabilităţii în funcţie de parametrii respectivi, care sînt daţi în lucrarea [2].

Indicaţiile din tabela 12 şi din formula (29) referitoare la coeficienţii de corecţie K_r, $K_{\gamma f}$ şi K_f sînt valabile pentru toate oţelurile carbon studiate. Aceste valori urmează să fie aplicate vitezelor de aşchiere ce se obţin fie din nomogramă, fie cu ajutorul formulelor, deoarece acestea au fost determinate pentru cazul sculelor care nu au vîrful racordat şi nici faţetă pe muchia aşchietoare principală.

★

Lucrarea de faţă reprezintă o sinteză a cercetărilor de aşchiere a metalelor întreprinse la Institutul de mecanică aplicată ,,Traian Vuia'', care au urmărit prelucrabilitatea oţelurilor carbon romîneşti utilizate în construcţia de maşini şi se bazează pe un număr însemnat de determinări experimentale.

Scopul lucrării este acela de a aduce şi prezenta rezultatele într-o formă cît mai generală, care să urmărească fenomenele fizice ale aşchierii metalelor, punîndu-se accentul pe parametrii regimului de aşchiere.

Prin aceasta s-a urmărit lămurirea unor legi după care au loc fenomenele în cursul procesului de aşchiere a metalelor. Astfel s-au cercetat legăturile dintre parametrii regimului de aşchiere şi influenţa pe care o exercită asupra lor proprietăţile mecanice a oţelurilor prelucrate şi o serie de parametri legaţi de pregătirea piesei şi a sculelor. În acest sens o atenţie deosebită s-a acordat parametrilor geometrici ai sculelor.

Studiul influenţei diverşilor parametri asupra vitezei economice de aşchiere s-a concretizat într-o serie de coeficienţi de corecţie ai vitezei de aşchiere, care au importanţă deosebită în aplicaţiile practice.

În cursul dezvoltării studiului s-a urmărit să se stabilească relaţii şi valori generale, aplicabile pentru grupe de oţeluri sau pentru toate oţelurile carbon. În acest fel se scoate în evidenţă dependenţa fenomenului respectiv de diverşi parametri şi totodată se simplifică posibilităţile de aplicare practică, mărind operativitatea calculelor. Se aminteşte că în acest sens s-au stabilit valorile medii ale exponenţilor n, x şi y din formulele (6) şi (17), s-au construit nomogramele din figurile 5 şi 6 şi s-au calculat coeficienţii de corecţie ai vitezei de aşchiere din tabelele 5...12. Prin aplicarea valorilor generalizate şi medii apar desigur diferenţe faţă de valorile obţinute pe fiecare oţel în parte. În marea lor majoritate aceste diferenţe sînt mici şi se încadrează în limitele admise uzual în acest gen de calcule.

În încheiere trebuie amintit că între valorile ce se obțin pentru regimurile de așchiere pe baza rezultatelor prezentate în lucrarea de față și valorile ce se obțin pe baza recomandărilor din literatura străină de specialitate pentru oțeluri similare vor apare neconcordanțe, care de altfel se întîlnesc și între normele străine. Acestea se datoresc desigur deosebirilor în compoziția oțelurilor, modului de elaborare al lor etc., ceea ce face ca normele de așchiere să difere de la o țară la alta.

Primită la redacție la 30 aprilie 1962.

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ТОЧЕНИЯ УГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

РЕЗЮМЕ

В работе излагаются результаты исследований, проведенных Институтом прикладной механизки „Траян Вуя", Академии РНР, в области обработки точением румынских углеродистых сталей, указанных в стандартах STAS 500-49 и STAS 880-49, применяющихся в машиностроении.

Рассматриваются существующие соотношения между различными параметрами режима резания: скоростью резания v, подачей s, глубиною резания t и стойкостью T. Более широко проводится изучение соотношения (6) между скоростью резания и стойкостью, а также изучение оптимальной скорости течения, выводимой при помощи соотношения (17). Особое внимание уделяется поправочным коэффициентам скорости резки K, которые представляют значительный интерес для практических применений.

В работе преследуется цель представить результаты в самой общей форме, выражающей влияние главных параметров, как например, механических свойств обрабатываемых сталей или геометрических размеров инструмента на процесс резания. В связи с этим были установлены средние значения показателей степени n, x и y в формулах (6) и (17) и построены обобщенные номограммы резания, подобные изображенным на рис. 5 и 6. Изложение материала в обобщенной форме производится для того, чтобы результаты были даны в простой и легкодоступной форме.

ÜBER WIRTSCHAFTLICHES DREHEN VON KOHLENSTAHLWERKSTOFFEN

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden die Ergebnisse dargestellt, die im „Institut für angewandte Mechanik Trajan Vuja" der Akademie der Rumänischen Volksrepublik bei der Zerspanung der rumänischen Kohlenstahlwerkstoffe

(STAS 500-49 und STAS 880-49), im Maschinenbau Verwendung finden.

Die Beziehungen zwischen den Zerspanungsparametern: Zerspanungsgeschwindigkeit v, Vorschub s, Spantiefe t und der Standzeit T werden untersucht. Besondere Aufmerksamkeit ist dem Studium der Beziehung (6) zwischen Spangeschwindigkeit und Standzeit sowie der Bestimmung wirtschaftlicher Zerspanungsgeschwindigkeiten mit Hilfe der Beziehung (17) gewidmet, ferner auch dem Umrechnungskoeffizienten K und der Zerspanungsgeschwindigkeit, der von besonderem Interesse für praktische Anwendungen ist.

Die erzielten Ergebnisse sind in möglichst allgemeiner Form dargestellt, um den Einfluß der wichtigsten Parameter, wie mechanische Eigenschaften der bearbeiteten Werkstoffe oder geometrische Parameter des Meißels auf die Zerspanungsvorgänge hervorzuheben. In diesem Sinne wurden Mittelwerte für die Exponenten n, x und y aus den Formeln (6) und (17) bestimmt und verallgemeinerte Zerspanungsnomogramme (Bild 5 und 6) aufgestellt. Bei dieser verallgemeinerten Darstellung wurde ständig auf eine möglichst einfache, für praktische Anwendungen zugängliche Ausdrucksweise geachtet.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Popov, I. Mitrică, E. Deciu, *Geometria sculei așchietoare pentru prelucrarea oțelurilor carbon.* St. cerc. mec. apl., **XII**, *6* (1961).
2. — *Influența fațetii și a razei de racordare asupra uzurii sculei așchietoare.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *1* (1962).
3. M. Popov, D. Pavelescu, I. Mitrică, E. Deciu, M. Calciu, N. Pascu, *Cu privire la parametrii geometrici ai cuțitului armat cu plăcuță de carburi metalice.* St. cerc. mec. apl., **VIII**, *2* (1957).
4. M. Popov, I. Mitrică, E. Deciu, *Contribution to the study on the cutting of carbon steels.* Revue de Mécanique Appliquée, **V**, *6* (1960).
5. M. Popov, D. Pavelescu, I. Mitrică, E. Deciu, M. Calciu, N. Pascu, *Despre regimul optim de așchiere cu cuțite de strung armate cu plăcuțe din carburi metalice.* St. cerc. mec. apl., **VIII**, *3* (1957)
6. М. Попов, И. Митрикэ, Е. Дечиу, *Сравнительное исследование условий обработки резанием на токарном станке резцами, оснащенными минерально-керамическими пластинками и пластинками из твердых сплавов.* Revue de mécanique appliquée, **IV**, 1 (1959).
7. М. Попов, И. Митрикэ, Е. Дечиу, *Некоторые стороны вопроса резания металлов токарными резцами из быстрорежущей стали.* Revue de mécanique appliquée, **IV**, 4 (1959).
8. Н. Н. Зорев, *Вопросы механики процесса резания металлов.* Машгиз, Москва, 1956.
9. А. М. Розенберг, А. Н. Еремин, *Элементы теории процесса резания металлов.* Машгиз, Москва-Свердловск, 1956.
10. ⁂ *Энциклопедия Машиностроения*, **VII**, Машгиз, Москва, 1947.
11. E. Blanpain, *Théorie et pratique des outils de coupe.* Ed. Eyrolles, Paris, 1955.
12. ⁂ *Richtwerte für wirtschaftliche Zerspanung.* Drehen. Verlag Technik, Berlin, 1952.

STUDII

UN PROCEDEU ELECTRIC PENTRU AMORTIZAREA OPTIMĂ A UNOR TRADUCTOARE DE MĂRIMI MECANICE

DE

I. JAKAB

1. La o categorie importantă și numeroasă de traductoare pentru măsurarea electrică a mărimilor mecanice mărimea de măsurat acționează asupra elementului sensibil nu direct, ci prin intermediul unui dispozitiv mecanic. Acest dispozitiv are fie rolul de a transmite această acțiune, fie chiar acela de a transforma mărimea de măsurat într-o altă mărime, de asemenea mecanică (de obicei o deplasare sau o deformație), care la rîndul ei acționează asupra elementului sensibil și produce semnalul electric folosit în procesul de măsurare. Din această categorie fac parte, între altele, traductoarele vibrometrice și accelerometrice de tip seismic, majoritatea tipurilor de traductoare pentru măsurarea forțelor și presiunilor etc.

Din punct de vedere dinamic aceste dispozitive pot fi considerate, în cele mai multe cazuri, sisteme de ordinul II și se caracterizează printr-o frecvență proprie și un factor de amortizare. Acești parametri influențează comportarea dinamică a traductorului, dar chiar de cele mai multe ori, avînd în vedere că elementul sensibil are proprietăți dinamice superioare, dispozitivul mecanic este cel care determină calitățile dinamice ale traductorului.

2. Sistemele mecanice folosite în traductoare în scopul arătat au în general o amortizare proprie slabă, ceea ce, după cum se știe, le face improprii pentru lucrul în regim dinamic, fără introducerea unei amortizări suplimentare [1].

Într-adevăr, să considerăm un sistem fără amortizare, descris de ecuația

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = ax(t), \tag{1}$$

unde $x(t)$ este mărimea de măsurat (de exemplu o forță sau presiune), iar $y(t)$ efectul produs asupra sistemului mecanic (de exemplu, o deplasare).

Aplicînd ecuației (1) transformarea Laplace, deducem funcția de transfer a părții mecanice a traductorului

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a}{p^2 + \omega_0^2}. \tag{2}$$

Dacă semnalul aplicat este saltul unitar, răspunsul sistemului va fi

$$Y(p) = \frac{a}{p(p^2 + \omega_0^2)},$$

sau, ca funcție de timp

$$y(t) = \frac{a}{\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 t). \tag{3}$$

Rezultă, că semnalul aplicat excită oscilațiile proprii ale sistemului şi răspunsul care se obține nu reproduce bine semnalul (fig. 1).

Nici reproducerea semnalelor periodice nu va fi corectă. Înlocuind în (2) $p = j\omega$ găsim caracteristica de frecvență a sistemului

$$|F(j\omega)| = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{4}$$

de unde se vede că în banda de lucru nu este asigurată uniformitatea reproducerii diferitelor frecvențe (fig. 2).

Dacă sistemul are amortizare, funcția de transfer devine

$$F(p) = \frac{a}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}, \tag{5}$$

unde δ este factorul de amortizare.

Aducerea amortizării la o valoare potrivit aleasă îmbunătățeşte răspunsul tranzitoriu şi caracteristica de frecvență a traductorului (fig. 1 şi 2).

3. Pentru alegerea valorii optime a amortizării se pot formula mamulte criterii. Astfel se poate pune condiția minimului erorii medii pătratice a răspunsului la saltul unitar, sau se poate impune, ca supracreşterea în cazul semnalului salt să nu depăşească un anumit procent din valoarea saltului. De asemenea, se poate porni de la o condiție de uniformitate a caracteristicii de frecvență etc.

Adoptarea unuia sau altuia dintre aceste criterii trebuie făcută în funcție de caracterul măsurătorilor cărora le este destinat traductorul. Valorile optime care rezultă din diferite criterii diferă între ele, dar sînt cuprinse între limitele

$$n = \frac{\delta}{\omega_0} = 0{,}5 \div 1{,}0.$$

Mărimea n poartă numele de coeficient de amortizare şi reprezintă raportul dintre amortizarea efectivă şi cea critică.

4. Realizarea amortizării dorite se face în general prin amplasarea traductorului într-un lichid cu viscozitatea corespunzător aleasă (ulei, glicerină etc.). De multe ori este însă dificil să se găsească lichidul care să aibă valoarea necesară a viscozității, iar viscozitatea, după cum se ştie,

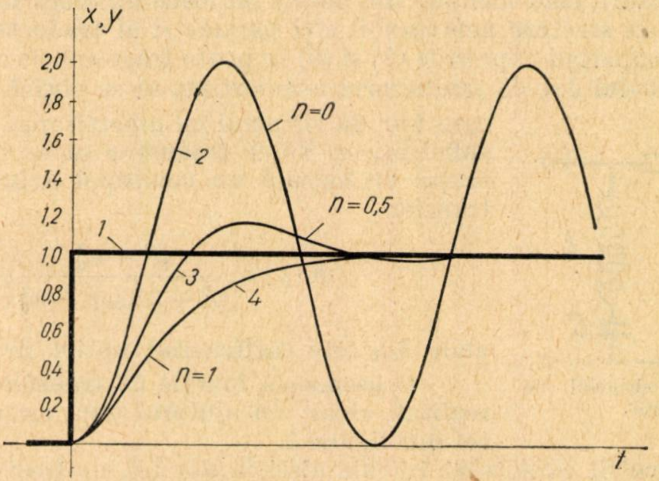


Fig. 1. — Semnalul aplicat traductorului (curba *1*) şi răspunsul acestuia la diferite valori ale coeficientului de amortizare $n = \frac{\delta}{\omega_0}$ (curbele *2—3—4*).

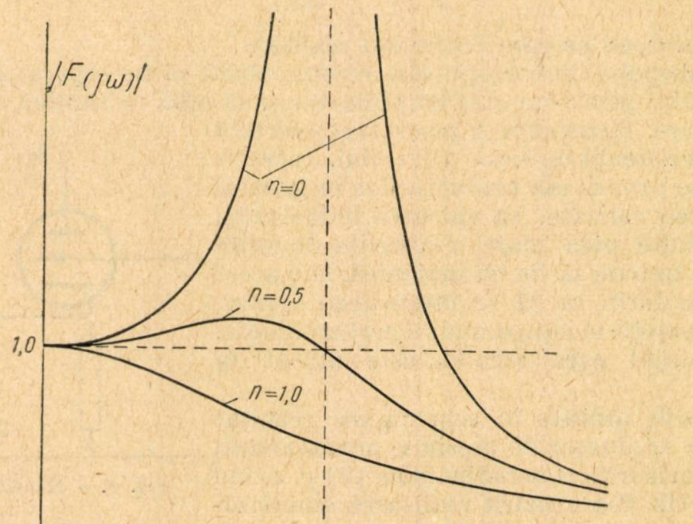


Fig. 2. — Caracteristica de frecvenţă a sistemului mecanic al traductorului la diferite valori ale amortizării.

variază sensibil cu temperatura. În afară de aceasta, prezența lichidului complică construcția și mărește gabaritul și greutatea proprie a traductorului.

Amortizarea mai poate fi realizată pe cale pneumatică sau magnetică, sînt însă cazuri, cînd niciunul din aceste mijloace nu oferă soluții comode și care să nu afecteze nefavorabil alți parametri ai traductorului.

5. Comparînd expresiile (2) și (5) se poate trage concluzia, că pentru ca din semnalul dat de traductorul neamortizat să se obțină semnalul pe care l-ar da sistemul cu amortizarea optimă, este suficient, ca după traductor să se intercaleze în lanțul de măsură un cuadripol avînd funcția de transfer

$$K(p) = \frac{p^2 + \omega_0^2}{p^2 + 2\delta_{\text{opt}}\, p + \omega_0^2}, \tag{6}$$

unde δ_{opt} este coeficientul optim de amortizare.

O asemenea funcție de transfer este ușor de realizat, chiar cu ajutorul unui circuit pasiv, ca cel din figura 3.

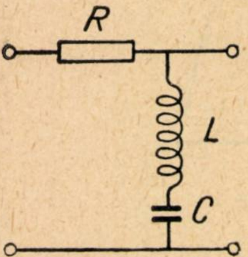


Fig. 3. — Cvadripolul de corecție.

Parametrii circuitului trebuie aleși în așa fel, ca frecvența proprie a circuitului LC să coincidă cu frecvența proprie mecanică a traductorului, iar amortizarea

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

să aibă valoarea pe care dorim s-o realizăm.

Cuadripolul de corecție este recomandabil să fie separat de circuitul traductorului printr-un etaj amplificator și să aibă ca sarcină o rezistență cît mai mare. Rezistența R poate fi constituită chiar de rezistența de ieșire a etajului. Întrucît frecvențele proprii ale traductorilor în general nu sînt prea ridicate, ca valoarea inductanței să nu rezulte prea mare, rezistența de ieșire a etajului trebuie să fie cît mai mică. Din acest motiv e de dorit, ca să se intercaleze cvadripolul de corecție la ieșirea unui repertor catodic.

Montajul care rezultă este arătat în figura 4.

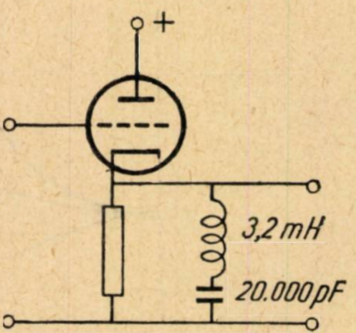


Fig. 4. — Repetor catodic.

Valorile arătate în schemă au rezultat pentru un traductor de presiune miniaturizat, folosit în măsurători aerodinamice [2] și avînd $f_0 = 20$ k Hz. S-a urmărit realizarea amortizării critice, pentru a elimina supracreșterea în cazul semnalelor în formă de salt.

6. Dacă frecvența proprie a traductorului este în domeniul infraacustic (cum se întîmplă de exemplu la traductoarele vibrometrice de tip

seismic) realizarea schemei din figura 4 întîmpină dificultăți din cauza valorilor care rezultă pentru inductanță și capacitate.

În acest caz este mai indicată realizarea funcției de transfer (6) pe altă cale și anume cu ajutorul amplificatorului cu reacție negativă prin circuite selective *RC*. Această categorie de scheme, cu posibilități foarte variate, se folosește din ce în ce mai larg în ultimul timp pentru realizarea diferitelor tipuri de filtre [3], [4].

Să considerăm montajul din figura 5. Ca circuit de reacție negativă selectivă se folosește un circuit dublu T.

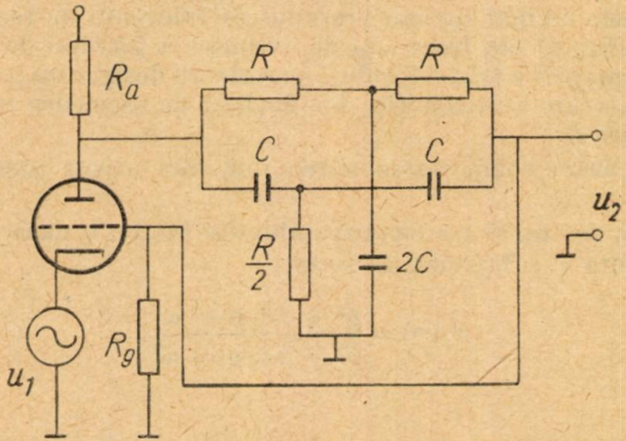


Fig. 5. — Montaj de corecție cu filtru RC activ.

Dacă amplificarea etajului fără reacție este K_0 iar funcția de transfer a circuitului de reacție o notăm cu $T(p)$ funcția de transfer a etajului cu reacție va fi pînă la anod

$$K_1(p) = \frac{K_0}{1 + K_0 T(p)},$$

iar pînă la bornele de ieșire

$$K_2(p) = \frac{K_0 T(p)}{1 + K_0 T(p)}. \qquad (7)$$

Cum funcția de transfer a circuitului dublu T din schemă este

$$T(p) = \frac{p^2 + \omega_0^2}{p^2 + 4\omega_0 p + \omega_0^2}, \qquad (8)$$

în care $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Înlocuind în (7), obținem

$$K_2(p) = \frac{K_0}{K_0 + 1} \cdot \frac{p^2 + \omega_0^2}{p^2 + \frac{4\omega_0}{K_0 + 1} p + \omega_0^2}. \qquad (9)$$

Alegînd deci K_0 în aşa fel, ca

$$\frac{2\omega_0}{K_0+1}=\delta_{\text{opt}},$$

se realizează funcţii de transfer de forma (6).

De remarcat faptul că circuitul dublu T în sine are funcţia de transfer (8) de forma (6); el nu permite însă realizarea unui coeficient de amortizare mai mic de 2.

7. În cele de mai sus am presupus că frecvenţa de rezonanţă a circuitului LC (fig. 4) sau frecvenţa de extincţie a filtrului dublu T coincid cu frecvenţa proprie a traductorului. Acest lucru desigur nu poate fi realizat decît cu o oarecare aproximaţie. Am neglijat de asemenea rezistenţa proprie a bobinei L.

Să analizăm comportarea sistemului, fără aceste presupuneri simplificatoare.

Funcţia de transfer a cuadripolului din figura 3, dacă se ţine seama şi de rezistenţa r a bobinei, se scrie

$$F_1(p)=\frac{p^2+2\delta_1 p+\omega_1^2}{p^2+2\delta_2 p+\omega_1^2}, \tag{10}$$

unde

$$\omega_1^2=\frac{1}{LC},\quad \delta_1=\frac{r}{2L},\quad \delta_2=\frac{r+R}{2L}.$$

Semnalul aplicat este semnalul de ieşire al traductorului, excitat cu un salt

$$u_1(t)=U_0(1-\cos\omega t)$$

sau, sub formă operaţională,

$$U_1(p)=\frac{U_0\,\omega^2}{p(p^2+\omega^2)}$$

(considerăm în continuare traductorul neamortizat, această presupunere fiind acoperitoare din punctul de vedere al efectului cvadripolului de corecţie).

Răspunsul sistemului va fi

$$U_2(p)=U_0\,\omega^2\frac{p^2+2\delta_1 p+\omega_1^2}{p(p^2+\omega^2)(p^2+2\delta_2 p+\omega_1^2)}. \tag{11}$$

Originalul acestei expresii este de forma

$$u_2(t)=U_0\left[1-M\cos(\omega t+\varphi)-Ne^{-\delta_2 t}\sin\left(\sqrt{\omega_1^2-\delta_2^2}\,t+\psi\right)\right]. \tag{12}$$

Notînd $\omega_1 - \omega = \Delta\omega$, și ținînd seama de faptul că $\Delta\omega \ll \omega$, $\delta_1 \ll \delta_2$ se ajunge la următoarele expresii simplificate ale coeficienților M, N și ale unghiurilor de fază φ, ψ:

$$M = \frac{\sqrt{(\Delta\omega)^2 + \delta_1^2}}{\delta_2},$$

$$N = \sqrt{1 + \frac{(\delta_2^2 - \omega\Delta\omega)^2}{\delta_2^2(\omega_1^2 - \delta_2^2)}},$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{\Delta\omega \cdot \delta_2}{(\Delta\omega)^2 + \delta_1^2}\right],$$

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\omega_1^2 - \delta_2^2}}{\delta_2}.$$

Semnalul la ieșirea cvadripolului de corecție conține deci, pe lîngă semnalul corect (un salt, avînd valoarea U_0), un termen, care reprezintă oscilațiile proprii cu frecvența ω ale traductorului și un ultim termen, reprezentînd regimul tranzitoriu propriu al cvadripolului de corecție. Acesta din urmă, întrucît δ_2 este de același ordin de mărime cu ω, se amortizează repede, practic în cursul primei perioade a oscilațiilor proprii ale traductorului, și nu influențează decît evoluția frontului semnalului.

Amplitudinea oscilațiilor proprii ale traductorului (coeficientul M) este cu atît mai mică, cu cît ecartul dintre frecvența proprie a traductorului și cea a circuitului de corecție este mai mică, iar factorul de calitate

$$Q = \frac{\omega_1}{2\delta_1},$$

al circuitului mai mare. De exemplu, pentru $\frac{\Delta\omega}{\omega} = 0{,}02$, $Q = 50$, $\frac{\delta_2}{\omega_1} = 1$, amplitudinea oscilațiilor proprii va fi de 2% din valoarea saltului.

Formula (12) este valabilă pentru o amortizare subcritică. La amortizări supracritice ultimul termen din (12) devine aperiodic, dar acest lucru nu modifică caracterul fenomenului.

Concluziile obținute au fost confirmate experimental. În figurile 6 și 7 se văd oscilogramele semnalului dat de un traductor de presiune capacitiv, înainte și după cvadripolul de corecție din figura 4. Traductorul a fost supus unui salt de presiune, produs în tubul de șoc. Amortizarea realizată este ușor supracritică.

Primit la redacție la 30 aprilie 1962.

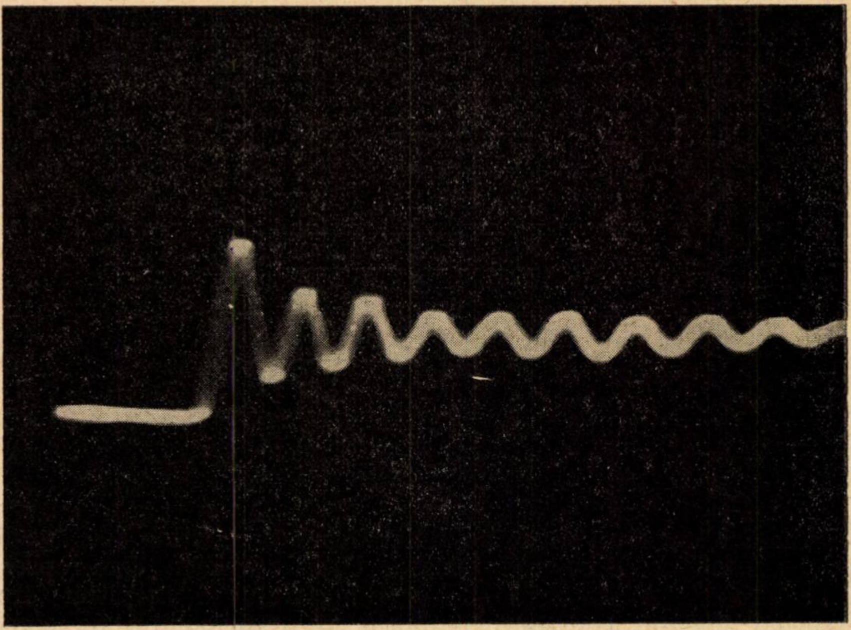


Fig. 6. — Semnalul dat de traductorul neamortizat.

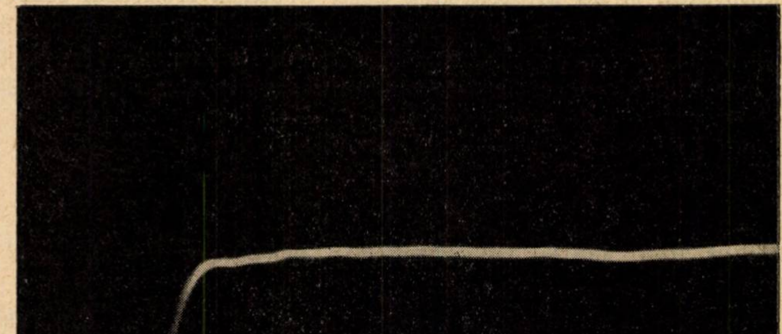


Fig. 7. — Acelaşi semnal, la ieşirea etajului din figura 4.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПТИМАЛЬНОГО УСПОКОЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДАТЧИКОВ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

РЕЗЮМЕ

Датчики, предназначенные для измерений в динамическом режиме, должны обладать определенным успокоением, близким к критическому.

Предлагается осуществить оптимальное успокоение путем введения в измерительную цепь надлежащим образом подобранного электрического четырехполюсника. Выводится передаточная функция, которой должен обладать четырехполюсник и указываются пути его осуществления.

Полученные выводы подтверждаются экспериментально.

AN ELECTRICAL TECHNIQUE FOR THE OPTIMUM DAMPING OF MECHANICAL TRANSDUCERS

ABSTRACT

The transducers used under dynamic operating conditions must have a certain damping, close to the critical one.

This paper tries to achieve the optimum damping by inserting a conveniently chosen four-terminal network in the measuring channel. The transfer function which defines the network is determined and the manner of achieving it is indicated.

The conclusions obtained are in agreement with the experimental results.

BIBLIOGRAFIE

1. M. HETENYI, *Handbook of Experimental Stress Analysis.* J. Wiley, New York, 1950.
2. E. PROCOPOVICI, L. DUMITRESCU, *Măsurarea presiunilor aerodinamice în tubul de şoc.* St. cerc. mec. apl., **XII**, *1* (1961).
3. В. О. КОБАК, *Электросвязь*, 2 (1962).
4. А. А. РИЗКИН, *Основы теории усилительных схем.* Сов. радио, 1958.

N O T E

OBSERVAŢII ASUPRA FORMULEI LUI RIVALS

DE

V. V. TOPENCIAROV şi B. I. CEKANKOV¹)

Expresia acceleraţiei punctelor unui solid rigid în mişcare generală este dată de formula lui Rivals [1]

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{AM} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AM}), \tag{1}$$

$\overline{a}_A$ fiind acceleraţia punctului A, ales ca reper, $\overline{AM}$ fiind vectorul punctului M în raport cu reperul A ; $\overline{\omega}$ — vectorul de rotaţie, $\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}}$ derivata vectorului de rotaţie în raport cu timpul. Formula (1) prezintă cîmpul de acceleraţie ca suma a trei cîmpuri de vectori :

$\overline{a}_A$ — cîmp uniform, $\overline{\varepsilon} \times \overline{AM}$ — cîmp de momente şi $\overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AM})$ cîmp de gradient.

În (2) mişcarea solidului Σ este descompusă la un moment dat în raport cu expresia acceleraţiei într-o rotaţie cu $\overline{\omega} = \text{const.}$, $\overline{\varepsilon} = 0$ în jurul axei Ω paralelă cu $\overline{\omega}$ şi o rotaţie suplimentară cu $\overline{\omega} = 0$, $\overline{\varepsilon} \neq 0$ în jurul axei E paralelă cu $\overline{\varepsilon}$ după formula

$$\overline{a}_M = \overline{\varepsilon} \times \overline{PM} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{KM}). \tag{2}$$

În timp ce în (1) rotaţiile se produc în jurul axelor concurente în punctul A, în (2) axele, în cazul general, nu se întîlnesc, însă punctele P şi K nu pot fi alese arbitrar.

În lucrarea de faţă, se prezintă o nouă extindere a formulei lui Rivals pentru acceleraţia solidului, în mişcarea generală în spaţiu. Mişcarea, în raport cu formula acceleraţiilor, este descompusă într-o translaţie şi două rotaţii.

---

¹) Institutul de mecanică şi electrotehnică, Sofia.

Pentru accelerația punctului M aparținînd solidului $\sum$ se poate scrie

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{BM} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{CM}), \tag{3}$$

$\bar{a}_A$ fiind accelerația punctului A ales ca reper, B — punctul axei de direcție $\bar{\varepsilon}$ și C — punctul axei paralele cu $\bar{\omega}$. Deoarece C poate fi ales arbitrar pe axa paralelă la $\bar{\omega}$ se poate obține ca $\bar{\omega}$ și $\overline{CM}$ să fie perpendiculari și (3) devine

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{BM} - \omega^2 \overline{CM}. \tag{4}$$

Din formulele (3) și (1) se obține

$$\bar{\varepsilon} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AC}) = 0. \tag{5}$$

Pentru ca (3) sau (4) să fie valabile, trebuie și este de ajuns să se aleagă A, B și C în așa fel încît să se respecte relația (5).

Punctul A fiind ales arbitrar, B poate fi ales în planul determinat de A și de vectorii $\bar{\omega}$ și $\bar{\varepsilon}$ duși prin A, iar C este un punct oarecare al axei paralele cu $\bar{\omega}$ și conținînd punctul de coordonate

$$x_c = 0, \quad y_c = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2} x_B, \quad z_c = 0. \tag{6}$$

Coordonatele (6) sînt date în raport cu axele reprezentate în figura 1. Se poate considera C ca putînd a fi ales pe axa perpendiculară plenului $(A, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon})$. Atunci B este un punct arbitrar al axei paralele cu $\bar{\varepsilon}$ și conține punctul de coordonate

$$x_B = \frac{\omega^2}{\varepsilon_z} y_c, \quad y_B = 0, \quad z_B = 0, \tag{7}$$

în raport cu aceleași axe (fig. 1).

Vectorul $\overline{CB}$ este pur cinematic. Într-adevăr, exprimînd după (3) accelerația lui B, rezultă

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \overline{BB} - \omega^2 \overline{CB},$$

de unde

$$\overline{CB} = \frac{1}{\omega^2} (\bar{a}_B - \bar{a}_A). \tag{8}$$

Dacă punctul reper A nu este fixat în prealabil, punctele B şi C pot fi alese în mod arbitrar. Punctul A este atunci unic determinat ceea ce rezultă din (5). Într-adevăr, fie B originea unui sistem de axe de coordonate carteziene şi să presupunem $(x_c y_c z_c)$ coordonatele lui C. Axele x, y, z, sînt considerate ca în figura 2. Punctul A este definit de sistemul scalar

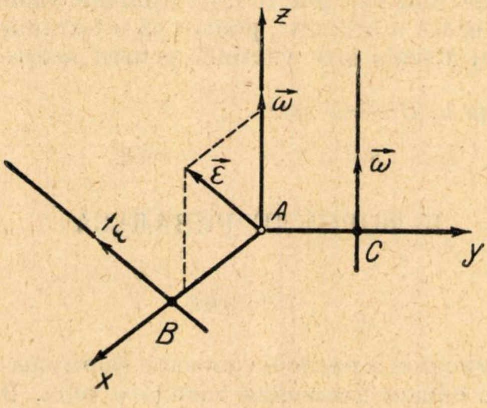


Fig. 1

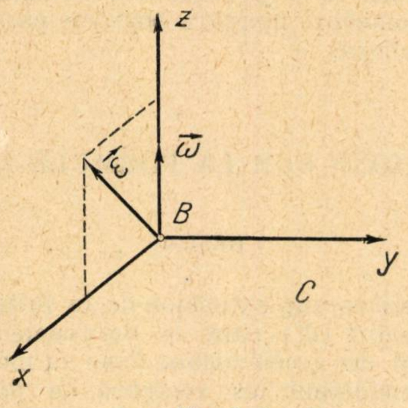


Fig. 2

$$\begin{aligned}&\varepsilon_z\, y_A - \omega^2\,(x_C - x_A) = 0,\\ -&\varepsilon_z\, x_A + \varepsilon_x\, z_A - \omega^2\,(y_C - y_A) = 0,\\ -&\varepsilon_x\, y_A = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

a cărui rădăcină unică este: $x_A = x_C y_A = 0 \qquad z_A = \dfrac{\varepsilon_z x_c + \omega^2 y_c}{\varepsilon_x}$ (10)

Este clar că A aparţine planului definit de B, $\overline{\omega}$, $\overline{\varepsilon}$.

Rezultatele obţinute (formula (4)) arată că acceleraţia unui punct al solidului în mişcarea generală în spaţiu este suma vectorială a celor trei acceleraţii, fiecare fiind aceea a unei mişcări elementare. În particular, dacă A coincide cu Q (centrul instantaneu al accelerațiilor), se obține rezultatul din [2] şi dacă $B \equiv C \equiv A$ se obține formula clasică a lui Rivals.

Rezultatele de mai sus pot fi uşor aplicate elementelor cinematice (accelerații) de un ordin n arbitrar, pentru că o formulă de structură identică cu aceea a lui Rivals este valabilă pentru acestea [3].

Primită la redacție la 17 martie 1962.

К ФОРМУЛЕ РИВАЛЬСА

РЕЗЮМЕ

В работе приводится распространение формулы Ривальса на ускорение точки (M) в общем движении твердого тела. В расчетах ускорения, получающихся при вращательном движении, учитываются векторы положения точек M с различными началами, таким образом, представляется возможность придать формуле различные формы путем соответствующего выбора.

OBSERVATIONS SUR LA FORMULE DE RIVALS

RÉSUMÉ

Le travail constitue une extension de la formule de Rivals pour l'accélération d'un point (M) dans le mouvement général du solide rigide. Dans le calcul des accélérations dues au mouvement de révolution, les auteurs considèrent les vecteurs de position du point M avec diverses origines, et réussissent ainsi, par des choix convenables, de faire revêtir à la formule diverses formes.

BIBLIOGRAFIE

1. RIVALS, J. Journ. de l'Ec. polyth., **20**, *35*, 113 (1853).
2. M. S. KONSTANTINOV, P. I. GUENOVA, V. V. TOPENTCHAROV, Ann. de l'inst. de méc. appl. et d'élec., **XI**, *1*, (1962).
3. V. V. TOPENTCHAROV, Ann. de l'inst. de méc. appl. et d'élec., **XI**, *1*, (1962) (sous presse).

RECENZII

N. TIPEI, V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA, O. BIŢĂ, *Lagăre cu alunecare* (Calcul, proiectare, ungere). Ed. Acad. R.P.R., 1961, 430 p.

Autorii îmbrăţişează, în circa 430 pagini, vastul cîmp al lagărelor cu alunecare — radiale şi axiale — abordînd problemele complexe legate de tratarea în profunzime a fenomenelor, pe care le rezolvă cu un aparat matematic de înalt nivel, stăpînit pe deplin, şi aducînd rezultatele pînă la forma în care trebuie să devină accesibile proiectanţilor chemaţi a construi pe baza ştiinţei şi tehnicii moderne.

Aşa cum se arată de altfel în prefaţă, lucrarea poate fi considerată ca o continuare a volumului *Hidroaerodinamica lubrificaţiei* de N. Tipei, apărut anterior, în sensul unei sinteze utilizabile în practica înaintată, cu completările cerute de scop.

Materialul prezentat este împărţit în douăsprezece capitole care, după sfere mai largi, pot fi regrupate în :

— consideraţii generale şi introducere în teoria hidrodinamică a ungerii, cu deducerea ecuaţiilor fundamentale cu caracter general;

— studiul lagărelor radiale şi axiale, în regim laminar şi în regim turbulent;

— materiale folosite în construcţia cuzineţilor;

— lubrificaţia şi problemele de uzură;

— încercarea lagărelor.

După indicaţii asupra alegerii tipului fundamental de lagăr şi a elementelor principale care intervin în calculul lagărelor cu alunecare, pentru care se observă oarecare preferinţă, înt deduse ecuaţiile de bază ale lubrificaţiei, într-o formă generală dată de considerarea directă a scurgerii spaţiale, în ipoteza viscozităţii variabile după o lege $\mu = \mu_1 \left(\frac{h}{h_1} \right)^q$ şi sînt stabilite ecuaţiile presiunilor pentru suprafeţele plane şi pentru cele circulare, creîndu-se punctele de pornire pentru studiul ulterior al lagărelor axiale, cît şi al celor radiale. O extindere valoroasă este făcută prin cercetarea lubrificaţiei în regim hidrodinamic turbulent.

În dezvoltarea teoriei *lagărelor radiale circulare*, pentru care s-au determinat relaţiile de calcul ale elementelor care prezintă importanţă : presiune, portanţă, momente de frecare, debite de lubrifiant, se foloseşte pentru legea de variaţie a vîscozităţii exponentul $q = \ln \frac{\mu_2}{\mu_1} / \ln \frac{h_2}{h_1}$ care urmăreşte această variaţie destul de apropiat de realitate (μ_1, respectiv μ_2 — vîscozitatea lubrifiantului la intrare, în zona cu grosimea maximă a peliculei de lubrifiant h_1, respectiv în punctul cu grosimea minimă a peliculei h_2). Interesant pentru practică este studiul condiţiilor de optimum sub aspectele diferite ale siguranţei în funcţionare şi durabilităţii maxime, pericolului de frecare pe margini, frecării minime şi puterii minime consumate prin frecare, încălzirii minime. Aspectul concret este totodată oglindit în consideraţiile asupra grosimii minime a stratului de lubrifiant, ca şi asupra jocului relativ legat de dilatările în exploatare, de material şi de masivitatea construcţiei, precum şi de cîmpurile de toleranţe. Metoda de calcul şi proiectare este prezentată atît în forma verificării funcţionării lagărului, cît şi în aceea a dimensionării. Ca aplicaţii, din numeroşii parametri care intră în structura formulelor deduse teoretic, sînt desprinse prin permutări succesive, datele presupuse cunoscute, spre a fi calculate cele necunoscute, pînă la epuizarea posibilităţilor oferite de teorie.

Studiul lagărelor circulare cu forţe şi viteze variabile scoate în evidenţă deplasarea caracteristică a centrului fusului faţă de cel al cuzinetului, diferită de deplasarea în cazul sarcinii constante, efectul dăunător al măririi turaţiei în cazul sarcinii rotitoare, necesitatea de a se lua în consideraţie aceste condiţii speciale de funcţionare, la alimentarea cu lubrifiant. Aci se tratează cazul lagărelor pentru motoare, pînă la calcule numerice.

Un capitol separat este destinat lagărelor radiale cu *cuzinet parţial*, cu încărcare simetrică şi cu încărcare nesimetrică. Ca variante, sînt studiate mai succint formele recente ale lagărelor eliptice şi ale lagărelor cu cuzinet constituit din mai multe sectoare fixe sau oscilante ; mai pe larg apare tratarea lagărelor *fără joc radial*, folosite în cazul opririlor şi pornirilor frecvente, de exemplu pentru osiile vagoanelor de cale ferată, pentru care sînt redate unele rezultate obţinute experimental.

Cu aceeaşi rigurozitate matematică şi acelaşi caracter de generalitate sînt deduse ecuaţiile pentru suprafeţele plane, spre a se putea face trecerea la *lagărul axial* format din sectoare, cu suprafeţe fixe sau din segmenţi oscilanţi, în ultimul caz fiind considerată plană una din suprafeţele care delimitează interstiţiul, iar cealaltă elicoidală. Este relevat şi cazul general tratat de A. K. Diacikov al interstiţiului cu formă oarecare, sectoarele avînd colţurile rotunjite, spre a se facilita circulaţia lubrifiantului.

Un element de progres în cercetarea lagărelor este constituit de rezultatele obţinute de autori în studiul condiţiilor de funcţionare în *regim turbulent*, care apare la valori mari ale numărului lui Reynolds. Introducînd în ecuaţiile de mişcare termenii suplimentari ai tensiunilor turbulente, se arată efectul de uniformizare a distribuţiei vitezelor pe direcţia normală la suprafeţele în mişcare relativă, precum şi de mărire a frecărilor, respectiv a puterii consumate prin frecare. Totodată se relevă, motivat analitic, mărirea capacităţii portante şi micşorarea debitului de lubrifiant pe direcţia principală de mişcare, faţă de regimul laminar, ultimul proces influenţînd defavorabil echilibrul termic al lagărului.

Chiar dacă, aşa cum arată autorii înşişi, cercetările asupra funcţionării lagărelor în regim turbulent sînt mai puţin avansate, totuşi ei oferă baze matematice suficiente pentru o informare corectă asupra tuturor elementelor care interesează funcţionarea atît a lagărelor radiale, cît şi a celor axiale, stabilind o legătură logică între aspectele teoretice, condiţiile de optimum şi metodele de dimensionare.

Pe scurt se face o incursiune în probleme privind vibraţiile lagărelor, în cazul încărcării constante şi al încărcării centrifugale, din care decurg recomandări pentru combaterea lor.

Aşa cum indică autorii, lubrificaţia lagărelor cu gaze va forma conţinutul unui volum separat.

Tratarea amplă a bazelor teoretice şi a metodelor de calcul a obligat la restrîngerea celorlalte probleme în spaţiul oferit de circa o treime din lucrare, conform de altfel cu intenţia mărturisită în prefaţă.

În capitolul privind *materialele* folosite în construcția lagărelor, s-a renunțat la unele aspecte teoretice, de exemplu referitoare la structură și la procese de conductibilitate și de cedare a căldurii, accentul fiind pus în principal pe elementele care hotărăsc în mod uzual alegerea materialelor pentru lagăre, expunerea caracteristicilor principale ale acestor materiale, în special a celor funcționale, rezultate din încercări proprii. De remarcat sînt tabelele care facilitează comparația diverselor materiale de lagăre, în care figurează și materiale neuzuale la noi, însă care pot servi ca orientare pentru introducerea unora asemănătoare.

Autorii au rezervat un spațiu mai larg capitolelor referitoare la *alegerea lubrifianților* pentru lagăre și la *uzura* lagărelor, ceea ce apreciem a fi în totul justificat.

Combaterea uzurii premature este o problemă fundamentală a construcției de mașini, deci tratarea corectă a proceselor legate de frecare și de lubrificație reprezintă un factor de prim ordin, cu aspect economic pregnant. Stau încă prea puține date la îndemîna proiectanților asupra caracteristicilor lubrifianților, fără sau cu aditivi, și există încă multe divergențe în acest domeniu. Cu atît mai de folos apar indicațiile date și criteriile fundamentate științific, elaborate de autori, pentru alegerea lubrifianților, cu precizări pentru diversele categorii de mașini, la rodaj, ca și în cazul unei stări înaintate de uzură. Această alegere este ușurată prin tabelele cu clasificarea uleiurilor din R.P.R., precum și a celor din U.R.S.S. și S.U.A., în care sînt conținute o serie de date caracteristice și recomandări.

Cercetările experimentale efectuate în laborator, în afara granițelor și de către autori, au arătat importanța deosebită a modului de *alimentare a lagărului cu lubrifiant*, ceea ce i-a determinat să consacre un capitol acestei probleme. Sînt arătate aci diversele metode de ungere și eficacitatea lor ; totodată rezultatele încercărilor scot în evidență influența geometriei și poziției orificiilor și a canalelor de alimentare asupra debitului de lubrifiant, dînd indicații asupra complexității naturii mișcării lubrifiantului în strat, în zona din afara celei portante, către locul de aducțiune a uleiului. Aplicarea practică se traduce prin recomandări pentru diferite cazuri din construcția de mașini, în privința poziției orificiului de aducțiune și a canalelor din cuzinet. Cum formele canalelor de distribuție a uleiului apar întrucîtva diferite de cele uzuale, conținute de exemplu în lucrarea ,,Detali Mașin'' apărută sub redacția Prof. N. S. Acerkan, ar fi interesante unele confruntări experimentale. În completare sînt menționate lagărele impregnate cu lubrifiant, ungerea cu lubrifianți solizi și unele exemple de lagăre fără ungere.

Sprijinit pe o bogată literatură de specialitate a cercetătorilor consacrați în acest domeniu ca Bowden, Tabor, Hrusciov, Dubinin ș.a., capitolul referitor la *studiul uzurii* prezintă elemente a căror cunoaștere este o necesitate pentru orice inginer, elemente menite a le lămuri pe scurt procesul dificil al uzurii, felurile de uzură, parametrii care influențează uzura și metodele de apreciere, respectiv de măsurare a uzurii.

În ultimul capitol se tratează *încercarea lagărelor*. Sînt stabilite aci, în primul rînd, criteriile de similitudine pentru cazul regimului staționar și pentru cel al regimului turbulent de ungere. Sînt descrise apoi instalațiile folosite de autori în cadrul laboratorului Institutului de Mecanică Aplicată ,,Traian Vuia'' al Academiei R.P.R., pentru încercările multilaterale efectuate.

Lucrarea conține un mare număr de diagrame, menite nu numai a scoate în evidență dependențele dintre parametrii în studiul diverselor procese ci, mai ales, a ușura calculul, tratarea teoretică cu rigurozitatea urmărită de autori, ducînd la relații finale greu de manipulat.

În măsura în care a permis conținutul capitolelor, prezentarea materialului este făcută în mod unitar.

Bogatul material rezultat din cercetări proprii, teoretice și experimentale, reprezintă un merit deosebit al lucrării.

Gh. Manea

CRISTEA MATEESCU, *Hidraulica*. Editura de Stat didactică şi pedagogică, Bucureşti 1961, 778 p., 586 fig.

Tratatul de hidraulică alcătuit de prof. dr. ing. Cristea Mateescu reprezintă o contribuţie valoroasă la literatura tehnică de specialitate în limba romînă în care există pînă în prezent un număr destul de restrîns de lucrări de sinteză şi cu un pronunţat caracter teoretic. Pentru prima oară ni se prezintă în limba noastră într-un singur volum atît o expunere destul de amplă a principalelor rezultate teoretice care alcătuiesc mecanica fluidelor propriu-zisă cît şi un bogat material aplicativ, referitor la numeroase probleme practice.

Parcurgînd lucrarea, alcătuită din 25 capitole se constată de la prima vedere că materia se divizează într-o parte cu caracter mai teoretic, cuprinsă în primele 13 capitole, în timp ce următoarele 12 capitole conţin aplicaţiile la care ne-am referit mai înainte. Această împărţire nu are un caracter absolut strict, fapt care credem că l-a determinat pe autor să nu o marcheze printr-o subîmpărţire a volumului. Astfel, în prima parte, capitolul de hidrostatică are în conţinutul său numeroase aplicaţii, în timp ce în partea a doua sînt introduse probleme teoretice noi ca, de pildă, în capitolul referitor la teoria valurilor. Totuşi, în linii mari, împărţirea pe care am făcut-o rămîne valabilă.

Aşa cum precizează de la început, autorul rămîne în domeniul care este atribuit astăzi hidraulicii, adică studiul stării de repaus şi de mişcare a fluidelor incompresibile. Aceasta face ca în partea teoretică a volumului să nu se trateze problemele dinamicii gazelor, făcîndu-se numai o scurtă expunere a staticii gazelor, care prin ea însăşi nu comportă dezvoltări prea mari. În schimb, în capitolele referitoare la aplicaţii, apar numeroase probleme practice, cu caracter complex, ce nu pot fi studiate cu ajutorul metodelor teoretice ale mecanicii fluidelor, ci numai prin dezvoltări bazate pe unele formule cu caracter global (ecuaţia impulsului, ecuaţia lui Bernoulli).

Primul capitol, cu caracter introductiv, conţine o serie de consideraţii în legătură cu obiectul lucrării şi o scurtă privire istorică. Proprietăţile fluidelor sînt prezentate în cadrul capitolului al doilea. Urmează capitolul în care sînt expuse unele noţiuni fundamentale asupra mişcărilor fluidelor şi ecuaţiile generale ale mediilor continui deformabile. Capitolul care cuprinde hidrostatica este destul de amplu, rezultatele fiind utilizate pentru o serie de aplicaţii, dintre care cităm calculul eforturilor în pereţii rezervoarelor. Noţiunile de cinematică formează obiectul capitolului al cincilea, în timp ce ecuaţiile şi teoremele generale ale dinamicii fluidelor ideale sînt prezentate în capitolul al şaselea. Următoarele trei capitole sînt consacrate diverselor aspecte ale teoriei mişcărilor potenţiale. În capitolul al zecelea şi al unsprezecelea sînt tratate mişcarea laminară şi aceea turbulentă a fluidelor reale, iar capitolul al doisprezecelea cuprinde teoria similitudinii şi a modelelor. Ultimul capitol din partea pe care o considerăm că reprezintă expunerea problemelor teoretice, este dedicat teoriei stratului limită.

Tratarea problemelor practice începe cu două capitole în care se expune pe larg mişcarea staţionară şi nestaţionară în conductele sub presiune. Urmează apoi studiul mişcării oscilatorii în castelele de echilibru. În capitolul al şaptesprezecelea sînt grupate problemele referitoare la scurgerea prin orificii, ajutaje şi peste deversoare. Mişcarea curenţilor cu suprafaţă liberă, cu caracter uniform, gradual-variat sau variat, formează conţinutul a trei capitole ample, în care problemele sînt tratate cu toată atenţia necesară. Un capitol separat este consacrat studiului racordării biefurilor. În continuare, se trece la prezentarea problemei undelor şi valurilor, iar un alt capitol conţine cîteva aspecte ale problemei forţelor hidrodinamice în mişcarea fluidelor reale. Ultimele două capitole sînt consacrate respectiv mişcării apelor subterane şi mişcării aluviunilor. În anexă, sînt date tabele pentru o serie de mărimi care apar în formulele de calcul din diferite capitole. Mai menționăm, de asemenea, că unele capitole conțin și aplicații numerice bine alese.

Din prezentarea sumară a conținutului, se constată că autorul a urmărit cu atenție scopul pe care și l-a propus și anume acela de a da un tratat util în primul rînd inginerilor hidrotehnicieni. Pentru aceștia, manualul poate fi utilizat cu succes atît în studiu cît și în proiectare și cercetare. Experiența bogată a autorului, specialist în acest domeniu, i-a permis să elaboreze o lucrare bine închegată, redactată la un nivel corespunzător utilizărilor indicate mai sus. Prezentarea clară, conținutul bogat în probleme teoretice și practice care pot folosi și specialiștilor din alte ramuri ale hidraulicii sau mecanicii fluidelor conferă însă tratatului redactat de prof. Cristea Mateescu un interes mult mai mare și îl situează printre lucrările remarcabile din acest domeniu.

T. Oroveanu

Z. GÁBOS, D. MANGERON, I. STAN, *Fundamentele mecanicii*. Acad. R.P.R., București, 1962, 388 p.

Această lucrare, apărută sub redacția prof. T. T. Vescan, face parte dintr-un ciclu de publicații dedicate unor capitole moderne de fizică teoretică. Fără a fi un curs sau un manual de mecanică teoretică, volumul prezentat este o sinteză a unor capitole importante, alese de autori ținînd seama de lipsurile care se resimțeau în literatura noastră de specialitate.

Volumul este divizat în patru capitole.

Primele două capitole, redactate de Z. Gábos, sînt dedicate dinamicii punctului material și a sistemelor de puncte materiale, precum și dinamicii corpului solid rigid. Se folosesc atît metodele calculului vectorial cît și metodele mecanicii analitice. După o scurtă introducere, privitoare la spațiu, timp, mișcare, se introduce vectorul cantitate de mișcare și masa. În cadrul descrierii *de particulă* a mișcării, se discută principiile lui Newton pentru un punct material și se deduc consecințele acestor principii pentru un sistem de puncte materiale, în special pe baza noțiunii de cantitate de mișcare ; introducîndu-se și noțiunile de energie cinetică și lucru mecanic se obțin teoremele generale ale dinamicii sistemelor de puncte materiale ; menționăm, de asemenea, un studiu al ciocnirilor elastice și neelastice. În cadrul descrierii *de cîmp* avem o infinitate de stări inițiale, care formează o mulțime continuă ; se deduce ecuația Hamilton-Iacobi și se introduce funcția S ; cu această ocazie se studiază invarianții integrali ai ecuațiilor canonice. Un paragraf special este dedicat principiilor variaționale ale mecanicii ; se insistă în special asupra principiului lui Hamilton-Ostrogradski și asupra principiului lui Maupertuis ; menționăm legătura care se face între funcțiile L și H. În cadrul teoriei transformărilor se face distincție între tranformări punctuale și transformări canonice ; această teorie este în special legată de proprietățile parantezelor lui Poisson ; un loc important în prezentarea problemei îl ocupă transformările infinitezimale. Se fac apoi unele considerații cu caracter general privind posibilitățile de integrare ale sistemului de ecuații de mișcare ; se discută mai ales posibilitatea de a obține integrale prime, de exemplu cu ajutorul teoremei lui Poisson ; un rol important îl joacă introducerea coordonatelor ciclice. În ceea ce privește stabilitatea mișcării unui sistem de puncte materiale, se dă noțiunea de stabilitate în sensul lui Liapunov, se dau condiții de stabilitate și se expun anumite metode aproximative de integrare a ecuaţiilor de mişcare. Un ultim paragraf al primului capitol (poate că ar fi fost bine ca acest studiu să se facă mai înainte) cuprinde, pe scurt, cele mai importante probleme legate de introducerea legăturilor ; cu această ocazie se expune şi principiul celei mai mici constrîngeri. În capitolul al doilea se tratează întîi problema corpului solid rigid liber ; se introduc mărimile cinematice care apar, parametrii Cayley-Klein, elipsoidul de inerţie etc. ; se stabilesc apoi ecuaţiile de mişcare în caz general. În cazul corpului solid rigid supus la legături, după consideraţii cu caracter general, se studiază cazul mişcării în jurul unei axe fixe şi cazul mişcării în jurul unui punct fix ; menţionăm, de asemenea, mişcarea corpului solid rigid în contact cu o suprafaţă.

Capitolul al treilea, redactat de I. Stan, cuprinde mecanica corpului de masă variabilă. După o serie de consideraţii introductive, se obţine ecuaţia lui Meşcerski şi ecuaţia sa generalizată. Rezultatele obţinute sînt aplicate la : mişcarea unui punct de masă variabilă în lipsa unor forţe exterioare, în cîmpul gravitaţional sau într-un mediu rezistent ; problema avionului cu motor aeroreactor, mişcarea unui vas cu reacţie şi problema inversă a mişcării punctului de masă variabilă. Se expun apoi teoremele generale ale dinamicii punctului de masă variabilă (teorema impulsului, teorema momentului cinetic şi teorema energiei) ; ca aplicaţie se consideră pendulul matematic de masă variabilă şi mişcarea punctului de masă variabilă într-un cîmp central. Se generalizează apoi aceste rezultate pentru cazul corpului de masă variabilă, obţinîndu-se de asemenea ecuaţiile lui Lagrange şi ecuaţiile canonice corespunzătoare. O aplicaţie importantă este făcută pentru problema celor două, trei sau *n* corpuri de masă variabilă.

Mecanica vibraţiilor este expusă în capitolul al patrulea, redactat de D. Mangeron. După cum menţionează şi autorul, într-o scurtă introducere, mecanica modernă a vibraţiilor, subdivizîndu-se în teoria oscilaţiilor şi mecanica tehnică a vibraţiilor, îmbrăţişează un ansamblu de fenomene ale naturii, care creşte şi se lărgeşte fără încetare. De aceea, în cadrul prezentului volum s-a acordat un spaţiu deosebit de mare acestei părţi (aproape 200 de pagini). Se introduce întîi noţiunea de oscilaţie şi, în special, de oscilaţie armonică ; după diferite consideraţii generale, se studiază compunerea oscilaţiilor armonice. O atenţie desebită este acordată sistemelor cu caracteristică liniară ; se consideră astfel oscilaţii neamortizate şi oscilaţii amortizate (forţă de amortizare constantă, forţă de amortizare proporţională cu viteza sau forţă de amortizare proporţională cu patratul vitezei) ; influenţa a diferite tipuri de forţe perturbatoare este de asemenea luată în considerare. Se trece apoi la studiul sistemelor oscilatorii cu două sau mai multe grade de libertate ; se indică transformarea axelor principale şi se introduc coordonatele normale ; ca aplicaţie se prezintă teoria micilor oscilaţii în jurul unei poziţii de echilibru ; menţionăm studiul unor fenomene ereditare în cadrul mecanicii vibraţiilor sistemelor cu *n* grade de libertate ; problemele considerate sînt extinse formal la sisteme cu o infinitate de grade de libertate. După o scurtă introducere privind mecanica neliniară în fizică şi tehnică, se trece la considerarea metodelor calitative şi cantitative în cazul unui singur grad de libertate. Se introduc apoi metode topologice ; menţionăm studiul unor sisteme neliniare conservative, cazul ciclurilor limită şi teoremele lui Bendixon. Dintre metodele analitice folosite, menţionăm metoda lui Poincaré, metoda lui Van der Pool, metoda Krîlov şi Bogoliubov (metoda K. B.), metoda ecuaţiilor integrale a lui Mangeron, metoda lui Panovko de linearizare directă şi generalizările sale, metode grafo-analitice etc. Se studiază apoi fenomenul de rezonanţă neliniară şi alte fenomene înrudite ; menţionăm rezonanţa subarmonică de ordinul $1/n$ şi excitaţia parametrică. Se consideră şi unele probleme de mecanică neliniară spaţială a vibraţiilor. O atenţie deosebită este acordată aplicării teoriei micilor oscilaţii la studiul oscilaţiilor moleculelor poliatomice (în special a celor biatomice). Se dau de asemenea unele noţiuni de mecanica vibraţiilor fortuite.

Întreaga lucrare este însoţită de o foarte bogată bibliografie, împărţită pe capitole (în total 509 titluri).

Cu toată conciziunea expunerii, lucrarea este foarte clară şi, prin unele din capitolele sale (mai ales ultimele două), umple un gol resimţit în literatura noastră de specialitate. Ea se adresează tuturor cercetătorilor din domeniul mecanicii teoretice, studenţilor — ca un manual de specializare — şi tuturor celor care, avînd cunoştinţe generale de fizică şi matematică, doresc să fie la curent cu unele din cele mai noi probleme în acest domeniu.

P. P. Teodorescu

MARCIAN GUTMANN, *Probleme de calcul vectorial*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1961, 392 p.

O nouă lucrare asupra calculului vectorial vine să completeze ceea ce s-a scris pînă acum în literatura de specialitate romînă. Concentrată pe analiza vectorială şi în special pe teoria cîmpurilor, lucrarea cuprinde şi probleme deosebite de algebră vectorială, prezentînd în general un material nou şi bogat. Se menţionează expunerea lucrării prin prisma teoriei grupurilor, rezolvarea problemelor de calcul vectorial fiind însoţită de obicei de discuţii, de interpretări geometrice şi de evidenţierea caracteristicilor invariante. O bună parte din probleme sînt axate pe demonstraţii, iar altele pe rezolvări de teme teoretice, aplicative la formulele şi definiţiile date în îndreptarele fiecărui capitol. Sub acest aspect pe lîngă problemele rezolvate, lucrarea este completată şi cu partea teoretică necesară aplicaţiilor.

Lucrarea începe cu o prezentare succintă de elemente de teoria mulţimilor şi a grupurilor, după care se ocupă în capitolul — algebră vectorială — de operaţii elementare, produse multiple şi ecuaţii vectoriale, trecînd apoi la analiza vectorială — cu probleme de teoria diferenţială a curbelor şi suprafeţelor şi expunînd detaliat probleme multiple de teoria cîmpurilor scalare şi vectoriale.

Materialul bogat, este redat înghesuit în paginile cărţii, îngreunînd astfel cercetarea lucrării. Prin materialul său se adresează atît studenţilor, cît şi inginerilor şi fizicienilor, fiind de folos celor ce se interesează de calculul vectorial.

Chr. Pelecudi

И. А. ЧАРНЫЙ, *Основы газовой динамики* (Bazele dinamicii gazelor). Гостоптехиздат, Москва, 1961, 200 p., 72 fig.

Acest mic manual de dinamica gazelor se deosebeşte destul de mult de numeroasele tratate care se referă la problemele mişcării gazelor la viteze mari, prin aceea că este destinat inginerilor de petrol. La baza lucrării stau chiar lecţiile predate de autor la Institutul industriei petrochimice şi a gazelor din Moscova. Pe lîngă capitolele care conţin problemele clasice ale dinamicii gazelor, în manual se găsesc tratate, ca urmare a destinaţiei lui, o serie de probleme cu caracter special, destul de interesante.

Partea generală este alcătuită din patru capitole care cuprind recapitularea unor noţiuni de fizică şi termodinamică, ecuaţiile mişcării fluidelor compresibile, problemele fundamentale ale mişcării unidimensionale a gazelor şi teoria undelor de şoc.

Celelalte patru capitole sînt consacrate studiului scurgerii gazelor prin tuburi. În primul dintre ele sînt prezentate aspectele principale ale scurgerii staţionare în diferite condiţii, iar următorul se ocupă de problema variaţiei temperaturii în lungul unui tub, la viteze subsonice. În continuare, se studiază problema rezistenţelor locale, iar ultimul capitol, destul de amplu dezvoltat, are ca obiect scurgerea nestaţionară în tuburi, cu viteză subsonică. În această parte, autorul face uz de o serie de rezultate ale cercetărilor sale.

Manualul prezintă un cert interes teoretic prin aceea că îmbrăţişează unele aspecte ale dinamicii gazelor mai puţin cunoscute. Interesul lui practic însă este deosebit de mare, deoarece pune la dispoziţia inginerilor care se ocupă cu transportul gazelor prin conducte materialul, teoretic necesar pentru efectuarea corectă şi judicioasă a calculelor.

T. Oroveanu

Х. А. РАХМАТУЛИН, Н. А. ДЕМЬЯНОВ, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках* (Rezistenţa la încărcări intensive de scurtă durată). Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961, 400 p.

Cartea este dedicată principalelor probleme dinamice studiate în plasticitate sau în domenii alăturate. Rezultatele obţinute de primul autor (Rahmatulin), publicate începînd din 1945, sînt expuse aici sistematic. Aşa după cum este binecunoscut, aceste rezultate au fost fundamentale, în acest domeniu. În carte sînt expuse de asemenea principalele rezultate obţinute de alţi autori în acest domeniu.

Cartea este împărţită în patru capitole. Primul capitol este dedicat propagării undelor longitudinale în bare subţiri. Autorii fac distincţie între propagarea undelor în materiale neliniare elastice şi elasto-plastice. Problema elasto-plastică intervine efectiv numai dacă se consideră şi problema descărcării, determinarea frontierei dintre domeniul încărcării şi cel al descărcării fiind punctul cel mai dificil şi esenţial al acestor tipuri de probleme. Aceasta a fost considerată în amănunt, fiind dată de asemenea metoda aproximativă (Şapiro-Biderman) pentru determinarea acestei frontiere. Apoi este considerată problema propagării undelor longitudinale în bare cu limita de plasticitate variabilă (descrescătoare sau crescătoare). Sînt examinate în special cazurile de deformare elasto-plastică a unui capăt al barei ce este supusă la încărcări repetate la acelaşi capăt sau la capătul opus. Apoi sînt expuse diferite probleme legate de lovirea barelor finite elasto-plastice sau plastic rigide (incluzînd rezultatele obţinute de Taylor, Lee-Tupper, Lenskii şi alţii). Sfîrşitul primului capitol se ocupă cu analiza diferitelor tipuri de experienţe necesare pentru determinarea relaţiei tensiune-deformaţie pentru problemele dinamice; concluzia este că pentru majoritatea materialelor (oţel, aluminiu etc.) teoria propagării undelor bazată pe relaţia dinamică tensiune-deformaţie este în bună concordanţă cu experienţele.

Capitolul al doilea se ocupă cu mişcarea transversală şi longitudinală a firelor extensibile. Au fost considerate numai mişcările plane. Aşa după cum este bine ştiut, ecuaţiile de mişcare sînt cvasi-liniare cînd undele longitudinale şi cele transversale se propagă simultan în aceeaşi porţiune a firului; în acest caz, pentru studiul interacţiunii dintre cele două tipuri de unde, se poate utiliza numai metoda aproximativă. Autorii consideră cazurile cînd ecuaţiile de mişcare pot fi liniarizate, adică iniţial firul este rectiliniar, undele longitudinale se propagă într-o porţiune rectiliniară a firului care nu are mişcare transversală, undele transversale în general se reduc la o singură undă de şoc care se propagă într-o porţiune a firului în care deformaţia este constantă etc. În toate aceste cazuri propagarea undelor longitudinale şi a celor transversale se poate studia separat. Sînt expuse diferite probleme (majoritatea se datoresc lui Rahmatulin şi colaboratorilor săi) : lovirea unui fir infinit rectiliniar cu un punct ce posedă viteză constantă sau variabilă, lovirea unui fir elastic finit considerînd interacţiunea dintre undele longitudinale reflectate şi cele transversale (capătul firului este liber sau frînat proporţional cu puterea a doua a vitezei), lovirea unui fir cu corpuri de diferite forme (este interesant de notat aici posibilitatea apariţiei tensiunii de compresiune într-o anumită regiune a firului în contact cu corpul care loveşte). Sfîrşitul capitolului este dedicat problemelor încărcării dinamice transversale a barelor subţiri, incluzînd analiza plastic-rigidă.

În capitolul al treilea sînt considerate probleme dinamice în care intervine o singură coordonată spaţială dar mai multe componente ale tensiunii sau deformaţiei. În toate problemele intervine numai un singur tip de unde. Aceste probleme impun folosirea unor *teorii ale plasticităţii*. Recenzentul doreşte să semnaleze că în literatură au fost considerate de asemenea probleme în care intervin mai multe tipuri de unde elasto-plastice, dar după părerea sa rezultatele sînt îndoielnice. Aceasta în special pentru că teoriile *clasice* ale plasticităţii sînt *statice* şi în general sînt valabile numai pentru încărcări proporţionale, încărcările în problemele dinamice fiind neproporţionale. Pentru acelaşi motiv, şi de asemenea pentru altele, o discuţie generală a suprafeţelor de discontinuitate pentru teoriile clasice ale plasticităţii îi pare recenzentului nesigură. Asemenea tipuri de probleme nu sînt discutate în carte, ci numai acelea în care intervine un tip de unde plastice. Astfel sînt : propagarea undelor elasto-plastice longitudinale în bare groase, propagarea undelor cilindrice de forfecare datorită rotaţiei unui cilindru rigid circular într-un spaţiu elasto-plastic, propagarea undelor sferice într-un spaţiu elasto-plastic datorită unei presiuni aplicate de-a lungul unei deschideri sferice, propagarea undelor longitudinale în bare cu secţiunea transversală variabilă, propagarea undelor cilindrice într-un tub circular supus unei presiuni interioare, lovirea unei membrane flexibile cu un punct sau cu un corp axial simetric, analiza plastic rigidă a deformării dinamice a plăcilor subţiri, lărgirea bruscă a unei deschideri practicată într-o placă plană.

Capitolul al patrulea şi ultimul este dedicat propagării undelor în corpuri elasto-plastice, ale căror relaţii tensiune-deformaţie depind de asemenea de timp. La început sînt considerate relaţiile dintre tensiune, deformaţie, viteză de deformare etc. Propagarea perturbaţiilor în bare şi alte probleme în care se foloseşte metoda operaţională şi metoda separării variabilelor sînt studiate de asemenea. Apoi se studiază propagarea perturbaţiilor în medii vîsco-plastice : deformaţia unui tub supus unei presiuni interioare, rotaţia unui cilindru rigid în medii vîsco-plastice, lovirea unei plăci vîsco-plastice cu un cilindru rigid etc. Se consideră, de asemenea, probleme de propagări în medii elasto-vîsco-plastice. Sfîrşitul capitolului se ocupă cu propagarea undelor de şoc plane şi sferice în pămînturi, considerate ca *gaze ideale plastice*.

La sfîrşitul cărţii este dată o bibliografie pentru fiecare capitol (în total 126 titluri). În general, bibliografia se opreşte la 1956, astfel încît lucrările apărute după această dată (incluzînd lucrările autorului) nu sînt cuprinse.

Recenzentul consideră prezenta carte foarte valoroasă. Ea va fi folositoare în special pentru cercetători şi ingineri, dar şi pentru studenţi, deoarece conţinutul ei este clar şi sistematic expus.

N. Cristescu

HELMER SAUPE, *Theoretische Grundlagen für die Beherrschung der Strömungsvorgänge flüssiger und gasförmiger Phasen in erdöl- und erdgasführenden Gesteinen* (Bazele teoretice pentru controlul proceselor de scurgere ale fazelor lichide şi gazoase în rocile permeabile pentru petrol şi gaze). Freiberger Forschungshefte (Caiete de cercetări de la Freiberg), C 105, Akademie-Verlag, Berlin, 1961, 105 p., 20 fig.

Scopul acestei lucrări, mărturisit în prefaţă, este acela de a pune la îndemîna cititorului o introducere în hidrodinamica mediilor poroase şi în problemele fundamentale ale exploatării zăcămintelor de petrol şi de gaze. Este deci vorba de o lucrare de sinteză, bazată pe o literatură destul de bogată şi care încearcă să înlăture necesitatea de a se consulta aceste surse bibliografice.

Ca urmare, lucrarea este împărţită în două părţi, prima avînd ca obiect definirea mărimilor hidrodinamice şi prezentarea legilor fundamentale, iar a doua cuprinzînd un număr de soluţii pentru diferite probleme care pot avea un corespondent în practica exploatării.

Astfel, în prima parte, după ce se dă definiţia unor mărimi fundamentale ca porozitatea, permeabilitatea şi tortuozitatea, se trece la o expunere destul de amplă a teoriilor referitoare la permeabilitate, insistîndu-se în special asupra teoriei lui Kozeny. Se discută apoi problema permeabilităţii mediilor poroase anizotrope şi se introduce în continuare noţiunea de permeabilitate relativă. În încheierea acestor consideraţii, sînt date rezultatele privind permeabilitatea pentru gaze.

Capitolul următor este consacrat unei expuneri a teoriei statistice dezvoltată de Scheidegger, cu toate că aceasta prezintă în momentul de faţă mai mult un interes teoretic şi mai necesită unele completări.

Ultimul capitol al acestei părţi conţine prezentarea legii lui Darcy. Autorul include în textul său şi una din numeroasele încercări de a se deduce această lege din ecuaţiile Navier-Stokes şi anume aceea datorită lui Irmay.

În partea a doua se tratează mai întîi scurgerea lichidelor incompresibile, alegîndu-se cîteva probleme tipice (scurgerea axial-simetrică spre o sondă, scurgerea fără simetrie axială, sonda imperfectă după gradul de deschidere a stratului). În continuare, se trece la scurgerea lichidelor compresibile, tratîndu-se problema zăcămîntului circular închis, aceea a zăcămîntului cu presiune constantă pe contur şi debit constant precum şi aceea a restabilirii presiunii după închiderea sondei. Se trece însă foarte repede peste problema importantă a scurgerii a două lichide nemiscibile.

În capitolele următoare, se prezintă sumar scurgerea gazelor şi scurgerea amestecurilor miscibile de lichid şi gaz. Mai ample sînt consideraţiile care urmează, asupra alegerii distanţei dintre sonde şi a interferenţei acestora.

O anexă conţine cîteva indicaţii asupra porozităţii şi permeabilităţii rocilor fisurate.

Bibliografia lucrării este relativ bogată, fiind citate aproximativ 80 tratate şi studii. În ceea ce priveşte pe acestea din urmă, nu putem şti care au fost criteriile de selecţionare ale autorului, deoarece lipsesc unele lucrări destul de importante în legătură cu subiectele tratate.

În ansamblu, lucrarea este interesantă, putînd servi ca o introducere în studiul hidrodinamicii mediilor poroase, cu aplicaţii la exploatarea zăcămintelor de petrol şi gaze. Ni se pare însă că autorul nu a realizat un just echilibru între cele două părţi ale lucrării, prima fiind prea amplu, iar a doua prea sumar dezvoltată, în raport cu importanţa practică a subiectelor tratate.

T. Oroveanu

N. K. SNITKO, *Dinamica construcțiilor*. Ed. tehnică, București, 1962, 446 p.

Dezvoltarea din ce în ce mai mare pe care o capătă în ultimul timp atît construcțiile civile și industriale cît și construcțiile de mașini, mecanizarea și automatizarea industriei precum și introducerea unor mijloace de transport moderne, fac necesară rezolvarea unor probleme de dinamica construcțiilor din ce în ce mai complexe și dificile ; calculul construcțiilor supuse la vibrații și șoc sau calculul construcțiilor supuse la flambaj sînt din ce în ce mai actuale. Lucrarea prof. N. K. Snitko are ca scop o prezentare corectă din punct de vedere științific a acestor probleme și a posibilităților de rezolvare a lor din punct de vedere practic.

Cartea este împărțită în 12 capitole.

După un capitol introductiv privind clasificarea sarcinilor dinamice și clasificarea oscilațiilor, se trece în capitolul al II-lea la studiul oscilațiilor proprii ale sistemului cu un singur grad de libertate (neamortizate și amortizate). Menționăm luarea în considerare a influenței de compresiune asupra frecvenței oscilațiilor transversale proprii ale barei.

Capitolul următor cuprinde un studiu al oscilațiilor forțate ale sistemelor cu un singur grad de libertate sub acțiunea sarcinilor periodice ; se consideră atît cazul oscilațiilor neamortizate și apariția fenomenului de rezonanță cît și cazul oscilațiilor amortizate. Rezultatele obținute sînt aplicate la problemele de calcul ale construcțiilor supuse la sarcini seismice.

Oscilațiile forțate neamortizate ale sistemului cu un singur grad de libertate sub acțiunea sarcinilor neperiodice formează obiectul capitolului al IV-lea iar oscilațiile forțate amortizate, în același caz, formează obiectul capitolului al V-lea. Se consideră astfel cazul în care forța perturbatoare este constantă în timp sau cazul în care are o variație liniară. Menționăm construcția liniilor de influență dinamice ale deplasărilor și ale eforturilor. Se consideră, de asemenea, și șocurile repetate cînd se ține seama de forțele rezistente.

În capitolul al VI-lea se studiază șocul aplicat unei construcții considerate ca un sistem cu un singur grad de libertate. Se introduce coeficientul dinamic și masa redusă. Influența amortizării este, de asemenea, luată în considerare. Rezultatele obținute sînt aplicate la calculul la șoc al grinzilor și barelor.

Capitolul al VII-lea este dedicat problemei oscilațiilor sistemului cu două grade de libertate. Se determină frecvența oscilațiilor proprii, se dă soluția generală pentru deplasări și se introduce masa echivalentă. În felul acesta se prezintă procedeul maselor aplicate la noduri. Oscilațiile forțate sînt, de asemenea, luate în considerare.

Oscilațiile sistemelor cu mai multe grade de libertate sînt cuprinse în capitolul al VIII-lea. Se studiază oscilațiile proprii și oscilațiile forțate. Coeficientul dinamic se determină prin metoda aproximațiilor succesive.

În capitolul al IX-lea se studiază oscilațiile sistemelor cu un număr infinit de grade de libertate. După considerații generale privind oscilațiile transversale ale barelor, privite ca sisteme continue avînd un număr infinit de grade de libertate, se trece la determinarea oscilațiilor proprii ale grinzilor cu o singură deschidere și ale grinzilor continue (ecuația celor trei momente). Frecvențele proprii ale cadrelor se determină prin metoda momentelor sau prin metoda deplasărilor. Menționăm și calculul grinzilor pe mediu elastic.

Capitolul al X-lea este destinat studiului vibrațiilor barelor și cadrelor supuse la compresiune și încovoiere. Se determină frecvențele proprii și se studiază oscilațiile forțate. Aceste rezultate permit considerarea unor probleme de stabilitate dinamică și oscilații neliniare.

Oscilaţiile longitudinale ale barelor, ţinînd seama de distribuţia de mase, sînt prezentate în capitolul al XI-lea. Se determină frecvenţele oscilaţiilor proprii pentru diferite cazuri de rezemare ale barei, între care şi pentru cazul unei tasări elastice a acestor reazeme.

În capitolul al XII-lea se fac unele aplicaţii pentru probleme de construcţii inginereşti. Se calculează astfel tensiunile dinamice care iau naştere în terenurile de fundaţie, împingerea dinamică a materialelor pulverulente asupra zidurilor de sprijin, precum şi deplasările dinamice ale acestora.

Cele patru anexe care completează lucrarea [1]) cuprind întabulate diferite funcţii importante ce apar în decursul calculelor, uşurînd astfel aplicarea practică a rezultatelor obţinute. Se dă de asemenea o bibliografie de 61 de titluri.

Într-o expunere succintă şi deosebit de clară se dau astfel principalele rezultate ale cercetărilor legate de studiul fenomenelor complexe cu caracter dinamic. Adesea cercetările experimentale sînt îmbinate cu cercetările cu caracter teoretic. În fiecare caz în parte se indică posibilităţile de aplicare practică a rezultatelor obţinute, mergîndu-se uneori pînă la calcule numerice.

În felul acesta, volumul prof. Snitko este deosebit de interesant atît pentru studenţii institutelor tehnice şi inginerii proiectanţi cît şi pentru cercetătorii ştiinţifici în domeniul problemelor dinamice.

P. P. Teodorescu

KLAUS ISERLAND, *Untersuchung über die Umlenkung eines freien Luftstrahls mit Hilfe von Drall* (Cercetări asupra devierii unui jet de aer liber prin rotirea jetului). Disertationsdruckerei Leeman A. G., Zürich, 1958, 100 p.

Creşterea continuă a vitezei de zbor a avioanelor moderne cu reacţie ar fi putut determina lungirea excesivă a pistelor de decolare şi aterizare, dacă nu s-ar fi realizat diferite sisteme de hipersustentaţie sau instalaţii de accelerare (cu rachete) pentru decolarea pe distanţe scurte, şi dispozitive speciale de frînare pentru micşorarea distanţei de rulare pe sol, după aterizare.

Reversorii de jet — adaptaţi turboreactoarelor — s-au dovedit a fi cele mai sigure şi mai eficiente dispozitive de frînare pentru avioanele cu reacţie. De aceea, inversarea tracţiunii turboreactoarelor prin reversarea jetului reactiv a devenit una dintre cele mai actuale probleme ale ştiinţei şi tehnicii aviatice.

În teza sa de doctorat, Klaus Iserland prezintă sistematic şi cu o remarcabilă claritate rezultatele cercetărilor teoretice şi experimentale asupra devierii unui jet de aer liber prin rotirea jetului, cercetări pe care le-a efectuat — sub conducerea prof. dr. J. Ackeret — în vederea realizării unui nou tip de inversor de tracţiune

★

Primul capitol al lucrării cuprinde un studiu comparativ privind diversele metode de frînare a avioanelor pe sol, la aterizare şi o scurtă — însă bine documentată — trecere în revistă a celor mai reprezentative tipuri de reversori de jet (Boeing, Rolls-Royce, NACA, SNECMA etc.).

Datele prezentate scot în evidenţă avantajele frînării cu inversori de tracţiune, faţă de frînarea *pe roţi* sau cu ajutorul paraşutelor-frînă.

---

[1]) Prelucrate de ing. E. Beiu-Paladi.

În al doilea capitol, Klaus Iserland expune ideea ce a stat la baza lucrării : posibilitatea devierii unui jet gazos folosind în mod convenabil acțiunea forțelor centrifuge (care pot apărea în jet datorită rotirii acestuia) și anumite instalații ajutătoare, care asigură reversarea completă a jetului.

În ambele scheme constructive de inversori propuse de autor, mişcarea de rotaţie este imprimată jetului de nişte palete-directoare, mobile, plasate radial în ajutajul de reacţie. Pentru reversarea jetului, în prima schemă se utilizează un grătar de palete inelare, situat în avalul secţiunii de ieşire a ajutajului. În a doua schemă, perfecţionată, grătarul de palete a fost eliminat, reversarea completă fiind asigurată de aspiraţia stratului limită prin fante inelare practicate în peretele curb al ajutajului, chiar în secţiunea de ieşire.

Tot în al doilea capitol, după descrierea amănunţită a instalaţiei experimentale şi a machetelor inversorilor de jet realizate de autor în laboratorul Institutului de aerodinamică al Politehnicii Federale din Zürich, este dată lista notaţiilor folosite în lucrare, sînt definite anumite mărimi caracteristice unui *jet liber* de aer (rotitor) şi se stabilesc formulele de calcul corespunzătoare.

Rezultatele primelor experienţe, executate cu inversorul de tracţiune cu grătar de palete inelare, sînt prezentate în al treilea capitol al lucrării. Mărindu-se treptat viteza de rotaţie a jetului de aer, s-a observat că pînă la o anumită *viteză critică* jetul rămîne *strîns* şi nu poate fi deviat, datorită depresiunii din nucleul jetului. Însă, *cînd viteza de rotaţie depăşeşte* valoarea critică, *brusc, jetul de aer la ieşirea din ajutaj se împrăştie radial* — sub acţiunea forţelor centrifuge —, *iar grătarul de palete* prinde *şi reversează complet jetul.*

Lămurirea cauzelor care determină apariţia acestui interesant fenomen aerodinamic a constituit principala problemă studiată de Klaus Iserland în lucrarea sa.

Analizînd influenţa parametrilor geometrici ai inversorului de tracţiune asupra caracteristicilor fizice ale jetului de aer deviat (la viteze subsonice şi supersonice), autorul a constatat că *reversarea bruscă, completă şi stabilă a jetului de aer, nu depinde de geometria ajutajului de reacţie şi este datorită unui regim special de scurgere* („Ringstrahlbildung”) *care ia naştere în ajutaj la viteze de rotaţie supercritice ale jetului.*

O cercetare mai atentă a mişcării aerului într-un jet rotitor (capitolul patru) a arătat că la „*viteza critică” de rotaţie se produce o schimbare calitativă bruscă* — prin salt — *a structurii jetului, caracterizată prin formarea aşa numitului* jet inelar liber *şi prin distrugerea echilibrului radial dintre forţele de presiune şi cele centrifuge, care acţionează asupra particulelor de aer din jet.*

Acest fenomen aerodinamic nou a permis autorului să obţină reversarea completă şi stabilă a unui jet de aer rotitor, folosind macheta inversorului de tracţiune cu aspiraţie prin fante inelare (capitolele cinci şi şase).

Ingenioasa metodă de reversare a unui jet gazos imaginată de Klaus Iserland n-a putut fi aplicată în practică, datorită dificultăţilor tehnice legate de plasarea unor palete-directoare în jetul reactiv al turboreactorului. Dar acest fapt nu micşorează valoarea şi importanţa lucrării, care are marele merit de a fi un model de cercetare experimentală a unor fenomene aerodinamice complexe.

Teza dr. Klaus Iserland, prin actualitatea problemelor studiate, interesează cercetătorii şi proiectanţii care lucrează în domeniul motoarelor cu reacţie.

Constantin Sabin Ioan

Progress in very high pressure research (Succesele în cercetările la presiuni foarte înalte). Lucrările Conferinței Internaționale de la Bolton Landing, New York, 1960. Editori : F. P. Bundy, W. R. Hibbard Jr., H. M. Strong, John Wiley & sns, New York—London, 1961.

Cîmpul de activitate științifică al cercetătorilor din domeniul presiunilor înalte este foarte vast cuprinzînd probleme din cele mai variate care ating diverse discipline. O dată însă cu cercetările încununate de succes care au dus la sinteza diamantului cu ajutorul presiunilor și temperaturilor înalte, activitatea din domeniul presiunilor înalte a încetat să fie o problemă pur științifică, transformîndu-se — așa cum s-a întîmplat și în alte cazuri — într-o problemă de mare importanță practică chemată să rezolve cerințele cele mai acute ale diverselor ramuri ale industriei și tehnicii. Conferința Internațională asupra presiunilor foarte înalte care a avut loc între 13—14 iunie 1960 la Bolton Landing, Lake George, New York, așa după cum reiese din cuvîntarea de deschidere a lucrărilor conferinței, și-a pus drept scop trecerea în revistă a succeselor remarcabile obținute în domeniul acestei tehnici noi și în plin progres precum și stimularea cercetărilor legate de presiunile înalte prin schimbul de informații și experiență care are loc de obicei cu ocazia întîlnirilor de acest fel.

Lucrările conferinței, în general, s-au axat pe cîteva probleme, care constituie în același timp direcțiile principale de dezvoltare a cercetărilor și a tehnicii presiunilor ultraînalte. Una din cele mai importante și mai actuale probleme este, fără îndoială, aceea a aparatelor și a instalațiilor destinate obținerii presiunilor înalte în care, simultan, probele să fie încălzite la o temperatură cît mai ridicată. O contribuție la rezolvarea acestei probleme a constituit comunicarea dr. H. T. Hall, care propune noi metode efective, dintre care aceea a utilizării mediilor solide pentru transmiterea presiunilor ni se pare de o valoare reală.

După cum se știe, studiul proprietăților optice ale materialelor în funcție de presiune prezintă o mare importanță datorită indicațiilor pe care ni le poate da asupra structurii energetice a cristalelor. În această privință, o deosebită însemnătate au cercetările efectuate asupra semiconductorilor, la care variațiile lărgimii zonei interzise cu presiunea pot să ne vorbească într-o mare măsură despre efectele distanței interatomice asupra structurii zonale a materialului respectiv. Sub acest aspect, foarte interesantă este lucrarea dr. H. G. Drickamer în care tratează problema tehnicii măsurării absorbției optice pînă la presiuni de 200 000—280 000 atm prezentînd în același timp rezultatele obținute cu privire la comportarea semiconductorilor (atît elementari cît și a compușilor intermetalici) la presiuni înalte și foarte înalte. În urma acestei lucrări s-a văzut că, în ultimă instanță, la presiuni mai mari de 50 000 atm — germaniul se comportă la fel ca și siliciul, lărgimea zonei interzise a acestor semiconductori micșorîndu-se cu creșterea presiunii. În ce privește ceilalți compuși din șirul izoelectronic al Ge (GaAs și ZnSe) se observă de asemenea (ca și la Ge) o creștere a lărgimii zonei interzise cu presiunea pînă la o valoare a acesteia de aproximativ 55 000, respectiv 145 000 atm după care, o dată cu creșterea presiunii pînă la 200 000 atm lărgimea zonei interzise scade.

O altă parte din lucrările Conferinței a fost consacrată morfologiei și caracteristicilor fizice ale diamantului sintetic precum și sintezei formei cubice a compusului BN la presiuni de aproximativ 60 000 atm și la temperaturi în jurul a 1 700°C.

De o mare atenție s-au bucurat la Conferință, de asemenea, problemele legate de termodinamica proceselor și de starea materiei la presiuni înalte precum și acelea legate de efectele presiunilor asupra vitezei transformărilor de fază în diverse aliaje (de ex. austenită-perlită). Studiile efectuate asupra transformării de fază rețea cubică cu fețe centrate ⇆ rețea cubică cu volum centrat din aliajele pe bază de fier au confirmat prevederile teoriei precum că presiunile mari favorizează structurile cristalografice cele mai dense.

Dar studiul comportării materiei la presiuni extrem de înalte este interesant şi din punctul de vedere al reconstituirii în laboratoare a condiţiilor ce domnesc în străfundurile globului terestru. Acestui scop i-a fost consacrată lucrarea lui Sydney P. Clark, în care autorul, printre altele, arată şi greutăţile mari care trebuie învinse în vederea reconstituirii cît mai complete a condiţiilor din centrul pămîntului.

Progresul rapid al tehnicii obţinerii de presiuni ultraînalte a permis ca experienţele foarte fine de rezonanţă magnetică nucleară să fie efectuate în funcţie de diferite valori ale presiunii la temperaturi variind între 4,2°K şi 35,7°K. Tot cu ajutorul unei tehnici avansate C. T. Tomizuka a studiat efectele presiunii hidrostatice asupra vitezei de autodifuzie în monocristalele de argint arătînd că sub acţiunea creşterii presiunii coeficientul de autodifuzie (la o temperatură dată, egală cu 906°C) începe simţitor să se micşoreze.

O contribuţie însemnată la succesul Conferinţei a adus delegaţia sovietică, care prin comunicarea profesorului L. F. Vereschagin de la Institutul de fizică a presiunilor înalte din Moscova, a împărtăşit oamenilor de ştiinţă prezenţi la conferinţă succesele precum şi problemele care se pun în U.R.S.S. în acest domeniu al ştiinţei şi tehnicii.

Lucrările conferinţei, tipărite de către Editura John Wiley într-un volum ireproşabil de mai bine de 300 pagini, au apărut la puţin timp după încheierea lucrărilor conferinţei ceea ce, avînd în vedere repreziciunea cu care se dezvoltă ştiinţa şi tehnica presiunilor înalte, fără îndoială, constituie un merit al editorilor cărţii.

Eugen Cruceanu

Radiation and Waves in Plasmas (Radiaţie şi unde în plasmă). Edited by Morton Mitchner. Stanford Univ. Press, California, 1961, 156 pag.

Această carte conţine şapte conferinţe ţinute la al cincilea simpozion Lockheed de magnetohidrodinamică ce a avut loc, în S.U.A. la Palo Alto la 15—16 decembrie 1960. Sînt prezentate unele aspecte ale comportării gazelor ionizate în cîmp magnetic, în particular urmărindu-se problema radiaţiei şi a undelor în plasmă. Primele cinci articole au, în general, un caracter teoretic, iar ultimele două expun unele metode şi rezultate experimentale.

În lucrarea lui A. Simon *Ecuaţiile cinetice pentru plasmă şi radiaţie* se porneşte de la ecuaţiile de bază ale plasmei complet ionizate, dîndu-se o schemă sistematică de aproximaţii. Neglijînd termenul de ciocnire se obţin ecuaţiile lui Vlasov ; luînd în considerare interacţia culombiană se obţine ecuaţia Fokker-Planck.

I. B. Bernstein, în *Echilibrul static, stabilitatea şi propagarea undelor în plasma fără ciocniri, cilindrică*, dă soluţii exacte ale ecuaţiilor plasmei staţionare şi neuniforme în care terenul de ciocnire este neglijabil. În legătură cu aceasta studiază stabilitatea plasmei şi propagarea undelor în plasmă.

O. Buneman, în lucrarea *Modelul de fascicul electronic al plasmei şi problema conservării energiei în amortizarea Landau* studiază de asemenea plasma în lipsa ciocnirilor, concepînd-o ca un ansamblu infinit de fascicule care se întrepătrund.

D. B. Beard trece în revistă în conferinţa sa *Emisia de microunde din plasme ultramagnetice*, problema calculului radiaţiei de ciclotron din plasme de energie relativistă.

Analiza propagării undelor de înaltă frecvenţă în plasma neuniformă face obiectul lucrării *Studiul unor proprietăţi de propagare de unde coerente în plasmă* de J. E. Drummond. Autorul studiază unele modele pentru schimbul de energie între plasmă şi radiaţie. De asemenea, discută problema fasciculelor electronice în plasmă, deplasarea termică în microundele de rezonanţă ciclotron ş.a.

G.S. Kino în lucrarea *Generarea termică a plasmei de cesiu complet ionizată* descrie metode experimentale de obţinere a plasmei izoterme de cesiu, cu un grad înalt de ionizare. Ionii pozitivi sînt formaţi prin ionizarea rezonantă a atomilor de cesiu pe o suprafaţă încălzită de lucru de ieşire mare iar electronii rezultă din emisia termoelectrică a aceleiaşi suprafeţe. Se studiază, de asemenea, interacţia dintre un fascicul electronic şi plasma de cesiu.

În sfîrşit, în lucrarea lui J. M. Wilcox ş.a., *Experienţe cu privire la propagarea undelor Alfvén* se face un studiu experimental cu privire la propagarea undelor Alfvén într-un ghid de undă hidromagnetic. Se găseşte un bun acord cu prevederile teoretice.

În concluzie, cartea *Radiaţii şi unde în plasmă* tratează o problemă actuală şi interesantă pentru specialiştii din acest domeniu.

I. Popescu

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

— Trudî vîcislitelnogo Ţentr Akademii Gruzinskoi S.S.R. T. I/1960.

M. S. Beliţkii, Osnovî ekspluataţionnoi dolgovecinosti dvigatelia avtomobilia. Novocerkassk. 1962. 167 p.

— Trudî Novocerkasskogo Politehniceskogo Instituta. Nr. 112, 1961.

— Igor Nikolaevici Plaksin. Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR. 111 p. 1962.

— Feodosii Nikolaevici Cernîşev. Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR. 350 p. 1961.

— Izvestia Kazanskogo Filiala Akademii Nauk SSSR. T. 8/1955, 9/1956, 11/1957, 13/1959.

— Metallovedenie i obrabotka metallov davleniem.

Trudî Instituta Iadernoi Fiziki Akademii Nauk Kazahskoi SSR Alma Ata. 183 p. Tom 4/1961.

— Gheologhia i gazoneftenosnost prikaspiiskoi vpadinî i sopredelnîh s nei oblastei.

Trudî Instituta neftehimiceskoi i gazovoi promîşlennosti Vîp. 36, 1962. Moskva. 229 p.

— Ocerki razvitiia energhetiki SSSR.

Trudî Moskovskogo ordena Lenina Energheticeskogo Instituta Vîp. XXXIII, 1960. 283 p.

— Prikladnaia Matematika i Mehanika, 1/1962.

— Avtomatika i telemehanika, 3/1962

— Prikladna Mehanika 6/1961, 1/1962, 2/1962.

— Vîcislitelnaia Matematika, T. 7, 1961.

— Injenerno-fiziceskii Jurnal 12/1961, 1, 2/1962.

— Prace Instytutu Lotnictwa, Warszawa, Nr. 13, 15/1961.

— Referativnîi Jurnal. Mehanika, 3/1962.

— Metallovedenie i termiceskaia obrabotka metallov, 1, 2, 3, 4/1962.

— Isotopentechnik Nr. 1/1962, 2, 3/1961.

— Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Maschinenbau, Bd. III, nr. 2, 4/1961.

— The Review of Polish Academy of Sciences, N. 4/1961.

— GEP Nr. 3/1962.

— Travaux et publications. 1961. Institut de Mécanique des Fluides. Toulouse. Memoria No. 154. 1960. Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

— Transactions. Nr. 256/1962. Chalmers Teknika Högskolas. Göteborg.

— Reports and Memoranda, Nr. 3 147—3 263 (1960—1961). Aeronautical Research Council, Teddington.

— Proceedings. March 1962. Institution of Civil Engineers. London.

— Proceedings of the Automobile Division, 1, 2, 3, 4/1960—1961.

— Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Vol. 175, Nr. 7, 8, 9, 10, 11, 12/1961.

— The Chartered Mechanical Engineer, March 1962.

— H. Werlé, Le laboratoire des analogies hydrauliques de la Direction Aérodynamique de l'ONÉRA. Publications ONÉRA, Nr. 103/1961.

— Pubblicazione della Facolta d'Engineria dell'Universita di Pisa — XIXe. Serie Nr. 930 — 950, 1960.
— World Aviation Electronics and Controls. Vol. 1, Nr. 2, 1961.
— Proceedings of the 4th Japan Congress on Testing Materials 1961. Tokyo. 389 p.
— Indian Institute of Science, Bangalore. Golden Jubilee Research Volume. 1959.
— Electronics Weekly, Nr. 80, 81/1962.
— Journal of Mathematics & Physics, XL, Nr. 4/1961.
— Materials Research & Standards, Vol. 2, 1961.
— Quarterly of Applied Mathematics, XIX, Nr. 4/1962.
— Tehnika Hronika, Nr. 6/1961.
— Bulletin Nr. 100/1961. Fédération Aéronautique Internationale.

R F 2557 BMue

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA“

5
ANUL XIII
1962

1963 MAR 7

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

- ACADEMICIAN N. PROFIRI ;
- A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
- GR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
- R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;
- N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti ;
- M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15. tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

5

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*
- Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*
- Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*
- *Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).*
- *Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).*
- *Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).*
- *Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcţii).*
- *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 Februarie".

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIII, nr. 5 1962

SUMAR

STUDII Pag.

E. CARAFOLI, Consideraţii teoretice asupra jeturilor fluide laterale 1061
GEORGE CONSTANTINESCU, O nouă metodă pentru calculul transmisiei de putere prin fluide 1073
N. TIPEI, Bătaia rachetelor balistice 1091
ŞERBAN SĂNDULESCU şi ADRIANA NĂSTASE-GHIA, Problema mixtă a aripii triunghiulare în mişcare conică de ordin superior 1099
DAN MATEESCU, Aripi cu suprafeţe de închidere în regim supersonic 1127
V. N. CONSTANTINESCU, Asupra lubrificaţiei cu gaze în regim turbulent 1157
D. MANGERON şi E. CROITORU, Contribuţii la teoria generală a acceleraţiilor reduse în coordonate punctuale şi tangenţiale 1177
GEORGE BĂRĂNESCU, O generalizare a formulelor de analiză armonică a momentului motor produs de forţele de inerţie şi de greutăţile pieselor mecanismelor bielă-manivelă la motoarele cu ardere internă 1193
OLGA BIŢĂ şi I. DINCĂ, Comportarea la sarcini ridicate a unor aditivi pe bază de fosfor 1221
P. P. TEODORESCU, Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în coordonate curbilinii oarecare. I. Introducere. Preliminarii matematice 1233
MARCEL TANNENBAUM, Calculul la starea limită de rezistenţă al elementelor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică . . . 1261
VALERIU PETCU, Metodele directă şi indirectă în calculul plastic al structurilor de beton armat 1273
MIRCEA SOARE, Contribuţii la studiul deformaţiilor plăcilor curbe subţiri 1279

NOTE

EDUARD NICOLAU, Torsiunea barelor cilindrice cu fisură diametrală de adîncime variabilă studiată cu ajutorul analogiei cu membrană 1301

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

V. MARCU, Metode moderne şi aplicaţii ale metalurgiei pulberilor şi metalizării prin pulverizare în construcţia de maşini şi instalaţii 1309
RECENZII 1333
PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 1345

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Журнал

„ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

- Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*
- Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*
- Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*
- Рецензии *на румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*
- *Астродинамика (оптимальные траектории, расчет орбит или отрезков орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа).*
- *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*
- *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).*
- *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*
- *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*
- *Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ).*
- *Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике.*

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район „16 Februarie".

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XIII, № 5 1962

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

Стр
Э. КАРАФОЛИ, Теоретические соображения о боковых жидкостных струях 1061
ДЖЕОРДЖЕ КОНСТАНТИНЕСКУ, Новый метод для расчета жидкостных силовых передач 1073
Н. ТИПЕЙ, О дальнобойности баллистических ракет 1091
ШЕРБАН СЭНДУЛЕСКУ и АДРИАНА НЭСТАСЕ-ГИА, Смешанная задача треугольного крыла в коническом движении высшего порядка 1099
ДАН МАТЕЕСКУ, Крылья с поверхностями замыкания в сверхзвуковом режиме 1127
В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, К вопросу о газовой смазке в вихревом режиме 1157
Д. МАНДЖЕРОН и Е. КРОИТОРУ, К общей теории приведенных ускорений в тангенциальных и точечных координатах 1177
ДЖЕОРДЖЕ БЭРЭНЕСКУ, Обобщение формул гармонического анализа движущего момента, произведенного силами инерции и весом деталей кривошипно-шатунного механизма у двигателей внутреннего сгорания 1193
ОЛЬГА БИЦЭ и И. ДИНКЭ, О поведении некоторых фосфорных присадок на повышенные нагрузки 1221
П. П. ТЕОДОРЕСКУ, К плоской задаче теории упругости в произвольных криволинейных координатах. I. Введение. Математические предпосылки 1233
МАРЧЕЛ ТАННЕНБАУМ, Расчет по предельному состоянию по прочности для деталей из предварительно-напряженного бетона, работающих на эксцентрическое сжатие с малым эксцентриситетом 1261
ВАЛЕРИУ ПЕТКУ, Прямой и косвенный методы в пластическом расчете железобетонных структур 1273
МИРЧА СОАРЕ, К изучению деформации мембран в пластинках 1279

ЗАМЕТКИ

ЭДУАРД НИКОЛАУ, Исследование кручения цилиндрических брусьев с диаметральной трещиной переменной глубины с помощью мембранной аналогии 1301

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

В. МАРКУ, Современные методы и применение порошковой металлургии и металлизации распылением в машиностроении 1309
РЕЦЕНЗИИ 1333
ПУБЛИКАЦИИ, ПОСТУПИВШИЕ В РЕДАКЦИЮ ПУТЕМ ОБМЕНА 1345

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Le périodique

« STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ »
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie:

- *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique*;
- *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question*;
- *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose : l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée*;
- *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants :

- *astrodynamique* (*réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique*).
- *aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*);
- *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*);
- *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*);
- *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*);
- *statique et dynamique des constructions* (*méthode de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*);
- *technique des mesures* (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques, on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée « Traian Vuia », 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XIII, nº 5 • 1962

SOMMAIRE

ÉTUDES

Page

E. CARAFOLI, Theoretical considerations on lateral fluid jets 1061
GEORGE CONSTANTINESCU, A new approach to fluid power transmission analysis 1073
N. TIPEI, Range of ballistic rockets 1091
ŞERBAN SĂNDULESCU und ADRIANA NĂSTASE-GHIA, Das gemischte Problem des Dreiecksflügels in konischer Strömung höherer Ordnung 1099
DAN MATEESCU, Wings with enclosing surfaces in supersonic flow 1127
V. N. CONSTANTINESCU, On gas lubrication in turbulent regime 1157
D. MANGERON et E. CROITORU, Sur la théorie des accélérations réduites exprimée en coordonnées ponctuelles et tangentielles 1177
GEORGE BĂRĂNESCU, Eine Verallgemeinerung der Formeln der harmonischen Analyse des durch die Massenkraft und die Schwere der Triebwerke bei Verbrennungsmotoren hervorgerufenen Momentes 1193
OLGA BIŢĂ and I. DINCĂ, Behaviour of some phosphorus compounds at heavy loads 1221
P. P. TEODORESCU, Sur le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes quelconques. I. Introduction. Préliminaires mathématiques 1233
MARCEL TANNENBAUM, Calcul, à l'état limite de résistance, des éléments de béton précontraint sollicités à la compression excentrique à faible excentricité . . . 1261
VALERIU PETCU, Direct and indirect methods in the plastic design of reinforced concrete structures 1273
MIRCEA SOARE, Contributions to the study of membrane deformations of shells . 1279

NOTES

EDUARD NICOLAU, Torsion of cylindrical bars with diametral crack of variable depth, examined with the aid of the membrane analogy 1301

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

V. MARCU, Méthodes modernes et applications de la métallurgie des poudres et de la métallisation par pulvérisation dans la construction des machines et des installations 1309
REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1333
PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION 1345

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

CONSIDERAȚII TEORETICE ASUPRA JETURILOR FLUIDE LATERALE

DE

ELIE CARAFOLI

În ultimul timp, mulți autori s-au ocupat de problema jeturilor longitudinale fluide (jet flap), obținîndu-se rezultate remarcabile asupra sustentației aripii de alungire infinită și a aripii de alungire finită [1], [2], [3], [4], [5]. În acest din urmă caz, dacă aripa este de mică alungire, sustentația scade în mod simțitor. Efectul acesta este și mai pronunțat pentru aripile de alungire foarte mică.

Pentru a remedia în parte acest inconvenient, ne-am propus să prelungim aripa printr-un jet fluid lateral în direcția anvergurii, realizînd astfel aripi fluide laterale, ale căror efecte aerodinamice vom încerca să le stabilim mai jos.

Fie o aripă dreptunghiulară de anvergură b și o coardă c, avînd deci alungirea

$$\lambda_0 = \frac{b}{c}. \tag{1}$$

Să considerăm mai departe un jet fluid de aceiași profunzime ca și coarda, avînd și aceiași incidență (fig. 1). În acest caz, jetul fluid se comportă ca o placă plană, pe suprafața căreia se dezvoltă presiunea corespunzătoare. Rezultă un coeficient de portanță C_z, care, pentru simplificare, vom admite că are o variație aproximativ triunghiulară cu vîrful la bordul de atac (fig. 2). Astfel, presupunînd că în punctul y de pe anvergură portanța unitară medie este C_z, corespunzător circulației Γ, adică

$$\rho_\infty U_\infty \Gamma \, dy = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 C_z c \, dy, \tag{2}$$

fiecare fîșie din coardă va avea o portanță

$$C_{zx} = \left(1 - 2\frac{x}{c}\right) C_z. \tag{3}$$

Dacă considerăm o fîşie oarecare dx (fig. 3), portanţa respectivă pe un element de arc ds va fi

$$dP = \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 C_{zx}\, dx\, ds. \tag{4}$$

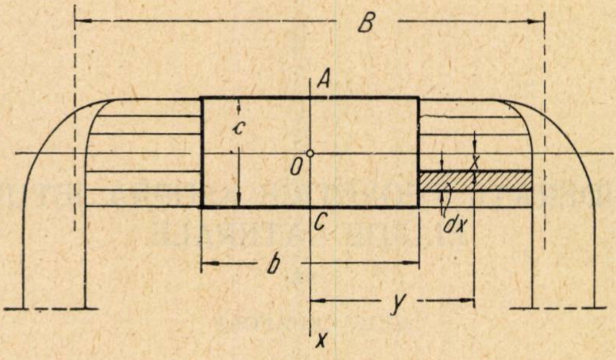


Fig. 1

În conformitate cu teorema impulsului, această fîşie se va curba, iar raza de curbură R va fi dată de relaţia

$$2\rho_j\, \delta_j\, U_j^2\, dx \frac{d\theta}{2} = dP = \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 C_{zx}\, dx\, ds = \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 C_{zx}\, R\, d\theta\, dx, \tag{5}$$

unde ρ_j este densitatea, δ_j grosimea, iar U_j viteza jetului fluid ; rezultă numai decît o rază de curbură invers proporţională cu C_{zx},

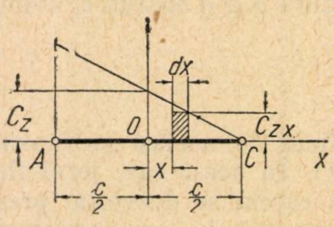


Fig. 2

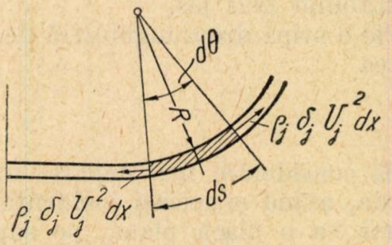


Fig. 3

$$R = \delta_j \frac{\rho_j}{\frac{\rho_\infty}{2}} \frac{U_j^2}{U_\infty^2} \frac{1}{C_{zx}} = \frac{R_0}{1 - 2\frac{x}{c}}, \quad R_0 = 2\delta_j \frac{\rho_j}{\rho_\infty} \frac{U_j^2}{U_\infty^2} \frac{1}{C_z}, \tag{6}$$

unde R_0 este raza de curbură a mijlocului plăcii.

Placa fluidă se torsionează, bordul de fugă rămînînd pe loc, iar bordul de atac şi mijlocul plăcii urmînd fiecare raza dată de (6).

Fiecare fîşie dx se găseşte pe un cerc tangent la y, în punctul $y = \frac{b}{2}$, avînd drept ecuaţie

$$(z - R)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = R^2 \tag{7}$$

de unde, într-un punct y al anvergurii (fig. 4) vom putea scrie aproximativ

$$z = R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{R^2}}\right) \approx \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{2R}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{R^2} + \ldots\right), \tag{8}$$

sau încă, dacă ne limităm la primul termen şi dacă înlocuim pe R prin valoarea sa din (6), găsim o variaţie liniară de-a lungul corzii :

$$z = \left(1 - 2\frac{x}{c}\right)\frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{2R_0}. \tag{9}$$

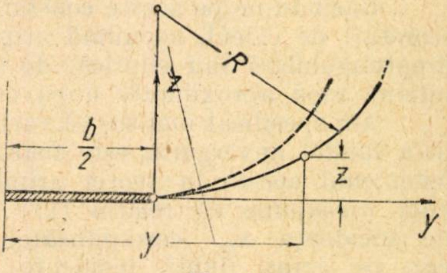


Fig. 4

Se vede astfel că fiecare secţiune se roteşte de un unghi ε.

Notînd cu z_a cota bordului de atac

$$z_a = \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{R_0} \tag{10}$$

unghiul suplimentar de incidenţă în punctul y, în plus de incidenţa α_0 a aripii reale, va fi

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_0 = \frac{\left(y - \frac{b}{2}\right)^2}{c\,R_0}, \tag{11}$$

unde am notat cu α unghiul de incidenţă într-un punct y al aripii fluide.

Se vede dar că această incidenţă creşte cu anvergura, iar aripa fluidă se curbează cu raza medie R_0 şi este orientată în acelaşi timp spre aval. Fenomenul este foarte complex, însă am căutat în cele de mai sus să-l schematizăm într-un mod simplu, spre a putea stabili cel puţin un rezultat teoretic calitativ.

În acest sens, vom mai presupune că incidenţa creşte mereu pînă la o valoare oarecare pe care o vom indica cu α_m şi care corespunde cu portanţa maximă C_{zm}, după care, ori care ar fi variaţia incidenţei, portanţa descreşte pînă la zero, după o lege foarte complicată. Într-adevăr, aripa fluidă capătă o torsiune din ce în ce mai mare, în acelaşi timp capătă şi o arcuire pînă cînd în cele din urmă întregul jet fluid este azvîrlit spre aval. Fenomenele de-a lungul jetului fluid lateral sînt foarte complicate şi greu de determinat. Trebuie însă reţinute aspectele principale şi anume :

a) Alungirea aripii complexe se măreşte în funcţie de jet, ceea ce are ca efect creşterea generală a circulaţiei în jurul aripii reale, aceasta formînd acum partea centrală a unei aripi de mare anvergură, unde circulaţia este mare şi prin urmare aripa reală devine mai eficientă;

b) Pe de altă parte, torsiunea jetului fluid (jet flap) produce în plus o nouă creştere a circulaţiei. Dacă se mai adaugă şi faptul că jeturile laterale produc şi o succiune a stratului limită de pe extrados, ceea ce îmbunătăţeşte scurgerea şi întîrzie fenomenul de desprindere [1], toate acestea au drept efect o creştere considerabilă a portanţei, aşa cum ne arată de altfel şi rezultatele experimentale, pe care le vom analiza mai jos.

Bazîndu-ne pe aceste constatări, vom încerca să construim o schemă teoretică de calcul, asimilînd aripa reală şi jetul plan fluid cu o aripă dreptunghiulară sau eliptică, de alungire B, pe care o vom determina într-un mod aproximativ după cum urmează.

Am specificat mai sus că variaţia portanţei, sau mai bine a circulaţiei de-a lungul anvergurii, este foarte complexă; totuşi, pentru a încadra fenomenul acesta în teoria aripilor de anvergură finită a lui Prandtl, vom presupune că relaţia (11) a incidenţei este valabilă şi dincolo de incidenţa α_m, corespunzătoare portanţei maxime C_{zm}. În acest caz, pe aripa fluidă incidenţa va varia mai departe după relaţia (11), atingînd noua sa valoare maximă α_M, la extremitatea aripii

$$\alpha_M = \alpha_m + \frac{1}{cR_m}\left(\frac{B_m}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 = \alpha_m + \frac{B_m^2}{4cR_m}\left(1 - \frac{b}{B_m}\right)^2, \qquad (12)$$

unde B_m reprezintă anvergura totală a aripii complexe, pe care o vom determina pe alte consideraţiuni practice.

Într-adevăr, cînd incidenţa aripii reale atinge valoarea sa maximă α_m, atunci presiunea este aproximativ uniform distribuită de-a lungul corzii şi întreaga placă fluidă se curbează după o rază normală pe suprafaţa sa şi egală cu

$$R_m = 2\delta_j \frac{\rho_j}{\rho_\infty} \frac{U_j^2}{U_\infty^2} \frac{1}{C_{nm}}, \qquad (13)$$

unde C_{nm} este coeficientul total al rezultantei aerodinamice

$$C_{nm} = \sqrt{C_{xm}^2 + C_{zm}^2} \approx C_{zm}, \qquad (14)$$

C_{xm} şi C_{zm} fiind respectiv coeficientul de rezistenţă (mult mai mic decît C_{zm}), şi cel de portanţă la unghiul de portanţă maximă α_m. Vom face ipoteza simplificatoare, de altfel foarte aproape de realitate că, pentru această poziţie, jumătate din anvergura aripii reale este prelungită în plus cu raza R_m.

---

[1] Putem cita în acest sens experienţele de vizualizare ale scurgerilor în stratul limită pe extrados, executate la O.N.E.R.A., Paris, de către Werlé.

Putem scrie astfel

$$B_m = b + 2R_m \tag{15}$$

de unde se va scoate α_M. Mergînd mai departe cu simplificarea, vom putea determina anvergura B pentru orice incidenţă α_0 a aripii reale, presupunînd că la extremitatea aripii complexe vom obţine aceeaşi incidenţă α_M dată de (12); vom avea deci

$$\alpha_M = \alpha_m + \frac{B_m^2}{4cR_m}\left(1 - \frac{b}{B_m}\right)^2 = \alpha_0 + \frac{B}{4cR_0}\left(1 - \frac{b}{B}\right)^2. \tag{16}$$

Acest fel de a pune problema ne dă posibilitatea de a găsi un rezultat teoretic, cel puţin calitativ, care să ţină seama totuşi de natura fenomenului real.

Astfel, sub această schemă simplificatoare, problema se reduce la o aripă dreptunghiulară sau eliptică eventual, de anvergură B şi deci de alungire

$$\lambda = \frac{B}{c}, \tag{17}$$

avînd incidenţa α_0 pe porţiunea aripii reale, deci pe anvergura b, apoi incidenţa α dată de (11) între $\frac{b}{2}$ şi $\frac{B}{2}$, de o parte şi de alta a anvergurii aripii complexe.

Pentru rezolvarea acestei probleme, vom aplica metoda obişnuită pe care am utilizat-o în lucrările noastre anterioare [6]. Vom pune mai întîi

$$y = -\frac{B}{2}\cos\theta, \tag{18}$$

iar circulaţia în jurul aripii va fi dezvoltată într-o serie Fourier în funcţie de θ

$$\Gamma = 2\,B\,U_\infty \sum_1^n A_n \sin n\,\theta. \tag{19}$$

Vom exprima apoi R_0 din formulele (6) şi (16) în funcţie de coeficientul de impuls, pe care-l vom nota cu C_μ, şi-l vom defini în modul obişnuit

$$C_\mu = \frac{c\,\delta_j\ \rho_j\,U_j^2}{c\frac{b}{2}\frac{\rho_\infty}{2}U_\infty^2} = 4\,\frac{\delta_j}{b}\,\frac{\rho_j}{\rho_\infty}\left(\frac{U_j}{U_\infty}\right)^2, \tag{20}$$

unde indicele j se referă la jet. Din (6) deducem

$$R_0 = \frac{b}{2} \frac{C_\mu}{C_{zb}}, \tag{21}$$

unde C_{zb} este portanța locală la extremitatea aripii reale, chiar la începutul jetului, circulația avînd valoarea Γ_b în același punct

$$C_{zb} = \frac{2\,\Gamma_b}{c\,U_\infty} = 4\,\frac{B}{c} \sum_1^n A_n \sin n\,\theta_b, \tag{22}$$

iar unghiul θ_b, reprezentînd punctul $y = \frac{b}{2}$ pe anvergură, este dedus din

$$\frac{b}{B} = |\cos \theta_b|. \tag{23}$$

Raza R_m este dată de formula (21), unde însă se înlocuiește C_{zb} prin portanța maximă C_{zm}

$$R_m = \frac{b}{2} \frac{C_\mu}{C_{zm}}. \tag{24}$$

În acest caz, incidența aripii fluide devine

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{2} \frac{C_{zb}}{C_\mu} \frac{B^2}{b^2} \frac{b}{c} \left(|\cos \theta| - \frac{b}{B} \right)^2. \tag{25}$$

Vom pune apoi, ținînd seama și de (23)

$$a_0 = \frac{1}{2} \frac{C_{zb}}{C_\mu} \frac{B^2}{b^2} \frac{b}{c} = \frac{1}{2} \frac{C_{zb}}{C_\mu} \frac{\lambda_0}{\cos^2 \theta_b}, \tag{26}$$

vom remarca însă că expresia lui a_0 a fost dedusă considerînd o schemă simplă de distribuție a portanței în profunzime și în anvergură. De aceea, vom afecta expresia de mai sus cu un coeficient ν și vom pune

$$a = \nu a_0 = \frac{\nu}{2} \frac{C_{zb}}{C_\mu} \frac{\lambda_0}{\cos^2 \theta_b}, \tag{27}$$

urmînd să apreciem valoarea lui ν după indicațiile experimentale.

În acest caz, incidența suplimentară $\varepsilon = \alpha - \alpha_0$ dată de (11) variază în modul următor:

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_0 = 0 \qquad \text{de la } 0 \text{ la } \frac{b}{2},$$

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_0 = a\,(\cos \theta - \cos \theta_b)^2 \text{ de la } \frac{b}{2} \text{ la } \frac{B}{2}.$$

Din dezvoltarea în serie Fourier a expresiei $\varepsilon \sin \theta$,

$$\varepsilon \sin\theta = \varepsilon_1 \sin\theta + \varepsilon_3 \sin 3\theta + \ldots + \varepsilon_n \sin n\theta \tag{28}$$

vom deduce

$$\begin{aligned}\varepsilon_n = \frac{2a}{\pi}\Bigg\{ & \frac{b^2}{B^2}\left[\frac{\sin(n-1)\,\theta_b}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\,\theta_b}{n+1}\right] - \\ & - \frac{b}{B}\left[\frac{\sin(n-2)\,\theta_b}{n-2} - \frac{\sin(n+2)\,\theta_b}{n+2}\right] + \\ & + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(n-1)\,\theta_b}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\,\theta_b}{n+1} + \frac{\sin(n-3)\,\theta_b}{n-3} - \frac{\sin(n+3)\,\theta_b}{n+3}\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{29}$$

unde n este impar ($n = 2p + 1$).

Vom remarca că problema se reduce la o aripă cvasidreptunghiulară, avînd incidența constantă α_0 pe toată anvergura, la care se adaugă torsiunea în lungul aripii producînd o incidență suplimentară variabilă ε pe întreaga porțiune de la $\frac{b}{2}$ pînă la $\frac{B}{2}$, pe o parte și pe alta a anvergurii. Pentru simplificare, acest din urmă efect poate fi stabilit ca pentru o aripă eliptică echivalentă.

Vom pune mai departe

$$\mu_0 = \frac{k}{2}\frac{c_0}{B}, \tag{30}$$

unde k este jumătate din panta $\frac{dC_z}{d\alpha}$ pentru aripa de anvergură infinită (teoretic $k \approx \pi$). Cum însă panta experimentală este mult mai mică, vom considera în mod aproximativ $k = 0{,}8\,\pi$.

Pentru primul efect, ținînd seama de faptul că spre extremitatea jetului nu se poate defini forma geometrică a aripii, dar se poate totuși admite o formă rotundă, vom considera o aripă cvasidreptunghiulară cu extremități rotunjite, care poate fi foarte bine reprezentată de următoarea relație :

$$\frac{c}{c_0}\sin\theta = \beta_0 + 2\beta_2\cos 2\theta, \tag{31}$$

unde θ este definit de (16), iar coeficienții β_0 și β_2 sînt

$$\beta_0 = 0{,}70, \qquad 2\beta_2 = 0{,}30. \tag{32}$$

Mai departe, vom remarca că această aripă echivalentă are o incidență α_0 pe toată anvergura, așa cum am presupus de la început.

În acest caz, aplicînd formulele obținute anterior [6] vom avea respectiv

$$\begin{aligned} \frac{A_1'}{\mu_0 \alpha_0} &= \frac{1}{\mu_0 + 0{,}85}, \\ \frac{A_3'}{\mu_0 \alpha_0} &= \frac{A_1'}{\mu_0 \alpha_0} \frac{0{,}15}{3\mu_0 + 0{,}85}, \\ \frac{A_5'}{\mu_0 \alpha_0} &= \frac{A_3'}{\mu_0 \alpha_0} \frac{0{,}15}{5\mu_0 + 0{,}85}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{33}$$

pentru coeficienții corespunzători incidenței constante α_0 pe aripa cvasidreptunghiulară, și

$$\frac{A_1''}{\mu_0'} = \frac{\varepsilon_1}{1 + \mu_0'}, \ldots, \frac{A_n''}{\mu_0'} = \frac{\varepsilon_n}{1 + n\mu_0'}, \tag{34}$$

unde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sînt dați de (29), pentru coeficienții suplimentari datoriți torsiunii aripii fluide, calculați în mod aproximativ ca pentru o aripă eliptică echivalentă, avînd coarda mediană c_0', dată de relația

$$c_0' = \frac{4}{\pi} c, \left(Bc = \pi \frac{B}{2} \frac{c_0'}{2} \right). \tag{35}$$

Rezultă prin urmare

$$\mu_0' = \frac{k}{2} \frac{c_0'}{B} = \frac{2k}{\pi} \frac{c}{B}. \tag{36}$$

În cele de mai sus am presupus că

$$\Gamma' = 2BU_\infty \sum_1^n A_n' \sin n\,\theta, \; \Gamma'' = 2BU_\infty \sum_1^n A_n'' \sin n\,\theta, \tag{37}$$

iar Γ definită de expresia (19), va fi în acest caz

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma''. \tag{38}$$

Vom remarca mai departe că putem considera și pentru efectul incidenței constante α_0, o aripă eliptică echivalentă, în care caz coeficienții dați de expresiile (33) se reduc la unul singur și anume

$$A_1' = \frac{\mu_0' \alpha_0}{1 + \mu_0'} \tag{39}$$

unde μ_0' este dat de (36).

Să trecem acum la calculul portanței aripii reale de anvergură b. Coeficientul corespunzător de portanță îl vom nota cu K_z, pe care-l vom considera compus din două părți

$$K_z = K_z' + K_z'', \tag{40}$$

unde K_z' este coeficientul mediu de portanță al aripii de anvergură b, presupusă ca fiind partea mediană a unei aripi dreptunghiulare de anvergură $B > b$ și de incidență constantă α_0, pentru care coeficienții A_n' ai circulației sînt dați de (33), iar K_z'' este coeficientul de portanță al aceleiași aripi de anvergură b, datorit torsiunii jetului, pentru care coeficienții A_n'' ai circulației sînt dați de (34).

Calculul lui K_z' și K_z'' este foarte simplu și rezultă din formulele generale următoare:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 \frac{b}{2} c K_z' &= \rho_\infty U_\infty \int_0^{\frac{b}{2}} \Gamma' \, dy, \\ \frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 \frac{b}{2} c K_z'' &= \rho_\infty U_\infty \int_0^{\frac{b}{2}} \Gamma'' \, dy. \end{aligned} \tag{41}$$

După cum se vede, coeficienții K_z' și K_z'' sînt funcții de B sau de raportul $\frac{b}{B} = |\cos \theta_b|$ și de C_μ. Pentru a putea duce mai departe calculul, trebuie să determinăm pe C_{zb} de la extremitatea aripii reale (22), pentru a putea apoi găsi pe a (27).

Întrucît este vorba de a găsi o valoare aproximativă, vom simplifica problema, considerînd o aripă eliptică echivalentă atît pentru efectul incidenței constante α_0, cît și pentru incidența variabilă ε, datorită torsiunii jetului.

În acest caz, coeficientul local C_{zb} de la capătul aripii reale dat de (22) se va scrie, în această ipoteză simplificatoare,

$$C_{zb} = \frac{8 k \sin \theta_b}{\pi (1 + \mu_0')} \alpha_0 + 2a \frac{B}{c} A(\theta_b), \tag{42}$$

unde $A(\theta_b)$ este dat de expresia

$$A(\theta_b) = \sum \frac{\mu_0'}{1 + n\mu_0'} \alpha_n \sin n \theta_b, \tag{43}$$

coeficienții α_n fiind legați de coeficienții ε_n (29) prin formula

$$\varepsilon_n = a \alpha_n. \tag{44}$$

Înlocuind C_{zb} dat de (42), în expresia (27) obținem

$$a = \frac{4 k \sin \theta_b}{\pi (1 + \mu_0) \left[\frac{c}{b} \frac{C_\mu}{\nu} \cos^2 \theta_b - \frac{B}{c} A(\theta_b) \right]} \alpha_0 = P \alpha_0. \tag{45}$$

Expresia finală a lui K_z se obține folosind coeficienții circulației dați de (33) și (34)

$$\begin{aligned} K_z &= \frac{2\,B^2}{bc}\sum_n (A_n' + A_n'')\int_{\theta_b}^{\frac{\pi}{2}}[\cos(n-1)\,\theta - \cos(n+1)\,\theta]\,d\theta = \\ &= \frac{2B^2}{bc}\Bigg[(A_1' + A_1'')\left(\frac{\pi}{2} - \theta_b + \frac{\sin 2\theta_b}{2}\right) + \\ &+ \sum_{n\geqslant 3}(A_n' + A_n'')\left(\frac{\sin(n+1)\,\theta_b}{n+1} - \frac{\sin(n-1)\,\theta_b}{n-1}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{46}$$

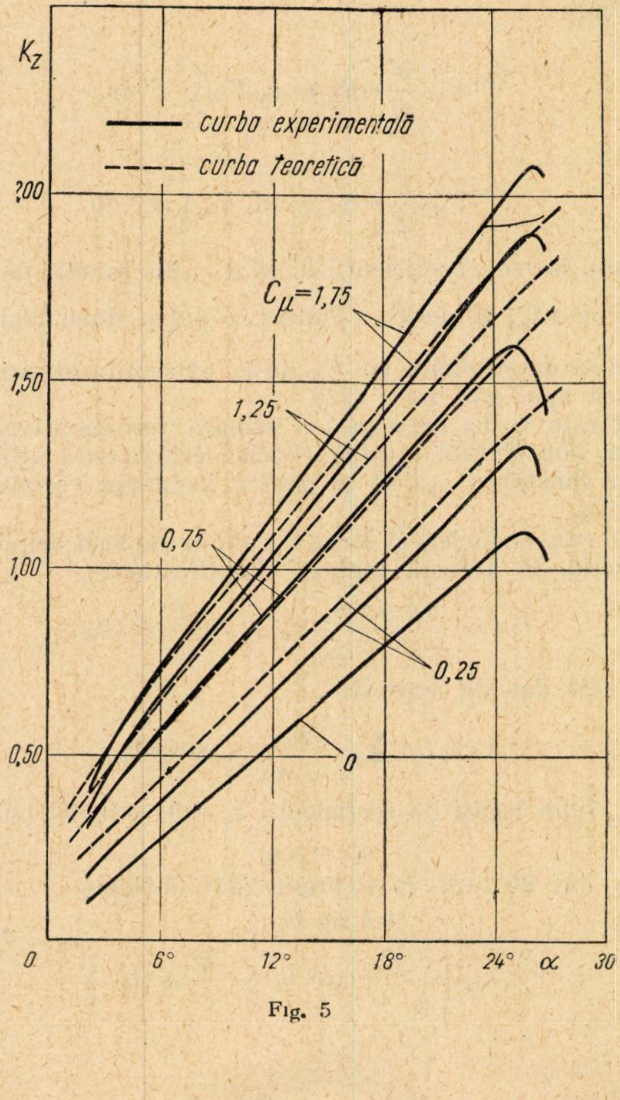


Fig. 5

Deoarece în calcule θ_b și C_μ s-au considerat variabile independente, este necesar a găsi o relație între aceste variabile și incidența α_0.

În acest sens am presupus că la extremitatea aripii, adică în punctul $y = \frac{B}{2}$, incidența ia valoarea sa maximă α_M, aceeași pentru fiecare jet și egală cu valoarea corespunzătoare cazului cînd aripa reală are incidența α_m, jetul lungimea R_m dat de expresia (24), iar incidența maximă la extremitate este α_M.

Aplicăm relația (25) în $y = \frac{B}{2}$ $(\cos\theta = 1)$, unde $\alpha = \alpha_M$ și obținem succesiv

$$\alpha_M = \alpha_0 + P\,(\theta_b)\,\alpha_0\,(1 - \cos\theta_b)^2 = \alpha_0\,[1 + P\,(\theta_b)\,(1 - \cos\,\theta_b)^2], \quad (47)$$

valabilă pentru orice incidență α_0 și deci și pentru α_m, adică

$$\alpha_M = \alpha_m + P\,(\theta_{bm})\,\alpha_m\,(1 - \cos\,\theta_{bm})^2 = \alpha_m\,[1 + P\,(\theta_{bm})\,(1 - \cos\,\theta_{bm})^2], \quad (48)$$

unde valoarea lui θ_{bm}, ținînd seama și de (24), va fi exprimată prin relația simplă

$$\cos\,\theta_{bm} = \frac{b}{B_m} = \frac{b}{b + 2R_m} = \frac{C_{zm}}{C_\mu + C_{zm}}. \quad (49)$$

Împărțind (47) la (48), obținem în cele din urmă relația căutată

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_m} = \frac{1 + P\,(\theta_{bm})\,(1 - \cos\,\theta_{bm})^2}{1 + P\,(\theta_b)\,(1 - \cos\theta_b)^2}. \quad (50)$$

Cu ajutorul formulelor (46) și (50) au fost trasate diagramele coeficientului de portanță în funcție de incidență, pentru diferite valori ale coeficientului de jet C_μ. În figura 5, aceste curbe teoretice sînt comparate cu rezultatele experimentale. Avînd în vedere complexitatea fenomenului de interacțiune a jetului cu curentul principal, care a impus o oarecare schematizare în tratarea teoretică a problemei, acordul poate fi considerat satisfăcător.

Primită la redacție la 29 iunie 1962

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ О БОКОВЫХ ЖИДКОСТНЫХ СТРУЯХ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор рассматривает крыло с малым размахом, продолженное в направлении размаха боковой жидкостной струей, которая своим воздействием увеличивает поддерживающую силу крыла.

Делая некоторые упрощающие предположения, автор дает теоретическую схему сложного явления взаимодействия струи с основным потоком.

Определяются как теоретически, так и экспериментально аэродинамические эффекты боковых жидкостных струй. Результаты экспериментов подтверждают рассмотренную теоретическую схему.

THEORETICAL CONSIDERATIONS ON LATERAL FLUID JETS

ABSTRACT

This paper considers a wing of low aspect ratio, prolonged spanwise by a lateral fluid jet, which, by its effects, contributes to the increasing of the wing lift.

Making certain simplifying assumptions, the author gives a theoretical scheme of the complex phenomenon of the jet-main stream interaction.

The aerodynamic effects of the lateral fluid jets are determined both theoretically and experimentally. The experimental results agree with the considered theoretical scheme.

BIBLIOGRAFIE

1. I. N. Davidson, *The Jet Flap.* I.R.Ae.S, **60**, 25—50 (1956)
2. L. Malavard, Ph. Poisson-Quinton, P. Jousserandot, *Recherches théoriques et expérimentales sur le contrôle de circulation par soufflage appliqué aux ailes d'avions.* O.N.E.R.A., Tech. Note, *37* (1956).
3. D. A. Spence, *The lift coefficient of a thin, jet flapped wing.* Proceedings of the Royal Society, London, 1956 Series A, 1212; *Jet augmented flap.* Aeronautical Quarterly, May, 1958.
4. N. N. Patraulea, *Profile aerodinamice cu voleți fluizi.* Bul. de șt. mat. și fiz., *2*, p. 451—455 (1957); *Aripi de anvergură finită cu jeturi de bord de fugă.* Com. Acad. R.P.R., **VII**, *1* (1957) 57—63.
5. J. Williams, *British research on the jet-flap scheme.* Z.F.W. (Germany), **6**, 170—176 (1958).
6. E. Carafoli, *Tragflügeltheorie.* Verlag Technik, Berlin, 1954.

STUDII

O NOUĂ METODĂ PENTRU CALCULUL TRANSMISIEI DE PUTERE PRIN FLUIDE[1]

DE

GEORGE CONSTANTINESCU[2]

DEFINIȚII ȘI CONFUZII

Definiția cea mai largă a unui fluid este ,,ceva ce nu este solid''. O asemenea definiție cu ajutorul negației nu este potrivită; ea se îndepărtează de lumea mecanicii, intrînd în metafizică. Cuvîntul *fluid* implică noțiunea de ceva care curge, ca apa sau aerul, corpuri care nu au coeziune. Se vorbește, de asemenea, de monedă lichidă, vorbire fluentă etc. și astfel se ivesc din nou dificultățile definirii prin negație.

Totuși, întorcîndu-ne la realități, întîlnim conceptul de hidraulică, disciplină care se ocupă de lichidele perfecte, corpuri care nu au rezistență de forfecare și nici compresibilitate, pentru a le diferenția de alte fluide ca aerul și gazele care sînt compresibile.

Împărțirea mecanicii raționale în statică și dinamică a separat, de asemenea, hidraulica în hidrostatică și hidrodinamică. Deosebirea analitică se referă în cele din urmă la numărul de coordonate de referință necesare. Problemele de statică pot fi rezolvate fără ca elementul de timp să apară în calcule, în timp ce în problemele de dinamică, variabila de timp este esențială.

Lagrange a definit mecanica ca fiind ,, o geometrie în patru dimensiuni'' și pînă astăzi nu s-a putut da o definiție mai bună și mai profetică. Împărțirea mecanicii în două părți, una care urmează geometria lui Euclid, iar cealaltă dinamica newtoniană în patru dimensiuni, a fost concepută pentru a simplifica primele faze ale învățămîntului mecanicii raționale. Cu toate acestea, avantajele obținute par a fi fost diminuate de saltul intelectual, necesar pentru a umple golul confuz dintre statică și dinamică. Acest gol este de asemenea evident în relațiile dintre hidrostatică și hidrodinamică și a dus la confuzii în înțelegerea transmisiei de putere cu ajutorul lichidelor.

---

[1] Laboratory, Oxen House, Tower, Coniston, Lancs.

[2] Redacția revistei dorește să exprime mulțumirile sale, ,,Instituției inginerilor mecanici'', Londra, pentru permisiunea de a reproduce în limba romînă această lucrare apărută în limba engleză sub titlul: ,,A new Approach to Fluid Power Transmission Analysis'' în publicația ,,*Conference on Oil Hydraulic Power Transmission and Control*'', conferință ce a avut loc la Instituția inginerilor mecanici — Londra — în zilele de 29 și 30 noiembrie 1961.

În conformitate cu cele cunoscute, o pompă care trimite lichid unui motor hidraulic este o instalație hidrostatică, dacă utilizează pistoane, și hidrodinamică dacă folosește turbine. În ambele cazuri, lichidul și piesele sînt în mișcare și nu există nimic static în ele. Armonicele și scăpările în transmisiile hidrostatice sînt în mod esențial probleme de hidrodinamică la care hidrostatica nu poate da nici o soluție, putînd în schimb confunda foarte ușor chestiunile. Modelul geometriei idealizate a lui Euclid, care tratează numai obiecte ideale, lipsite de toate proprietățile, cu excepția formei și a poziției, are ca echivalent în hidraulică idealul lichidelor perfecte, dotate cu proprietăți de fluiditate și incompresibilitate.

Fluiditatea poate fi înțeleasă, în timp ce compresibilitatea nu poate fi. Așa-numitul principiu al *incompresibilității apei* nu este de loc un principiu. Apa este de o sută de ori mai compresibilă decît oțelul. Există structuri de oțel de tipul *static nedeterminat* la care forțele pot fi determinate fără referire la compresibilitatea oțelului, dar aceasta nu constituie un motiv pentru a spune că *oțelul este incompresibil*. Forțele dintr-o presă hidraulică cu mișcare lentă pot fi de asemenea determinate fără referire la compresibilitatea apei, aceasta însă nu pentru motivul că apa este incompresibilă, ci fiindcă instalația este static determinată. Din nefericire, mitul potrivit căruia ,,apa și lichidele sînt incompresibile'', a dus la confuzii și absurdități. De exemplu, să considerăm următoarea problemă simplă de pompare :

Un piston este acționat de un arbore care funcționează cu 1 000 turații pe minut, într-un cilindru avînd același diametru ca și pistonul și continuat printr-o conductă cu același diametru și cu lungimea de 1 km. Celălalt capăt este conectat la un dispozitiv de absorbție a puterii, iar țeava este menținută plină cu apă. Apa de la capătul pompei este pusă în mișcare cu o cursă de 6 cm. În conformitate cu ideea ,,incompresibilității'', inerția apei va provoca ridicarea presiunii pînă la o medie de 3 000 atm. În conformitate cu ideea ,,compresibilității'', presiunea va atinge o medie de aproximativ 40 atm. Este evident că neglijînd așa-numita compresibilitate ,,neglijabilă'' a apei, se ajunge la o eroare de peste 70 de ori în evaluarea presiunii. Întîmplător, acest exemplu ilustrează saltul intelectual necesar pentru a umple golul confuz dintre statică și dinamică menționat mai sus.

NOTAŢII

C — compresibilitate,
e — jocul pistonului,
e_1 — jocul datorit uzurii cilindrului,
h — diferența de presiune,

I — amplitudinea curentului fundamental,
i — curent,
k — factor de corecţie,
L — coeficient de inerţie,
l — lungimea pistonului,
N — numărul de rotaţii pe secundă,
n, s — caracteristici numerice,
P — numărul de cilindri,
R — rezistenţa de frecare,
S — factorul de scăpări,
t — timpul,
u — $= e_1/e$,
W — forţa totală disponibilă,
w — pierdere de putere,
X — viteza unghiulară rezultantă,
x — $= \alpha t$
x, y, z — variabile,
Y — curentul rezultant,
α — viteza unghiulară,
ε — procentajul de pierdere,
η — randament,
λ — numeral,
ρ — amplitudinea faţă de curentul fundamental.

HIDRAULICA ŞI HIDROSONICA

Sîntem nevoiţi să aruncăm o nouă privire asupra transmisiilor hidraulice într-un mod complet deosebit de acel obişnuit. Atacarea vechilor perspective provine din ivirea unei noi denumiri ce cuprinde cuvîntul ,,hidro'', anume hidrosonica. Bazele acestor noi perspective în hidraulică au fost dezvăluite în brevetul autorului Nr. 9029 [1]) şi dezvoltate în teoria sa asupra sonicităţii [2]). Calculul hidrosonic urmează linii foarte asemănătoare acelora adoptate în transmisia energiei electrice cu curent alternativ, în timp ce transmisiile hidrostatice sînt puse în paralel cu tehnica referitoare la curentul electric continuu. Starea actuală în dezvoltarea transmisiilor hidraulice este aproximativ aceeaşi ca aceea care exista pe vremea cînd tînărul Tesla a conceput în 1888 motorul de inducţie cu curent alternativ. Opoziţia faţă de curentul alternativ în vremea aceea a fost bine ilustrată cînd Werner von Siemens a declarat în 1886 că ,,nu există nimic în curentul alternativ''.

Cu asemenea aprecieri în cele mai înalte cercuri de experţi, dinamurile şi motoarele cu curent continuu şi-au menţinut poziţiile cu tenacitate, pînă cînd, printr-o mai bună înţelegere a tehnicii curentului alternativ, a fost posibil să se exploateze noile posibilităţi ale alternatoarelor, motoarelor cu curent alternativ și transformatoarelor. Putem reflecta la situația de astăzi cînd transmisiile cu sisteme hidraulice cu curent continuu, fie hidrostatice sau hidrodinamice, sînt favorizate de industrie în timp ce transmisiile hidrosonice cu curent alternativ sînt ignorate.

---

[1]) G. Constantinescu, 1913 Patent No. 9029.

[2]) G. Constantinescu, 1918 Theory of Sonics (British Admirality, London).

Cu toate acestea, trebuie să admitem că acei care nu sînt familiarizați cu teoriile înaintate asupra curentului alternativ, pot să înțeleagă cu greutate tehnica și comportarea transmisiilor pe baze hidrosonice. De la început, aceștia nu vor accepta faptul că puterea nu poate fi calculată înmulțind curgerea medie pe secundă cu presiunea medie, așa cum s-ar face pentru un circuit hidraulic cu curent continuu. Produsul trebuie de asemenea înmulțit cu cosinusul unghiului de fază, factorul de putere, expresii care nu există în vocabularul transmisiilor hidraulice, unde se folosesc curgeri de lichid cu curent continuu. Astfel, într-un generator hidrosonic, puterea poate fi nulă, în timp ce curgerea de curent alternativ a lichidului poate fi foarte mare sub presiunea de curent alternativ de sute de atmosfere, întocmai cum se poate întîmpla cu o instalație de curent alternativ care generează curent de mare amperaj sub tensiune înaltă.

Pare a fi paradoxal, dar un inginer electrician ar putea înțelege tehnica hidrosonică, însă aceasta s-ar putea să nu-l intereseze, în timp ce un inginer mecanic care poate fi legitim interesat în hidrosonică nu ar putea-o înțelege. Pentru acest motiv, autorul a dezvoltat teoria hidrosonică, independent de orice analogie cu exemplificări din domeniul electricității, astfel încît cei interesați să o poată urmări, fără o pregătire prealabilă asupra transmisiilor electrice cu curent alternativ.

INVARIANȚI ȘI ADIMENSIONALE

Vom da aici un rezumat al factorilor analitici care guvernează hidrosonica pentru a arăta poziția pe care aceasta o ocupă în domeniul mecanicii fluidelor. Metoda notațiilor constă din a reține în mod explicit numai variabilele, toate constantele fiind lăsate nedeterminate și reprezentate doar printr-un punct. De exemplu, în loc să scriem $Ax + By + Cz + D = 0$, vom exprima aceasta simplu prin

$$.x + .y + .z + .1 = 0.$$

În cele din urmă, nedeterminarea este îndepărtată dînd variabilelor valori critice ca zero, unitate, infinit, maxime, sau orice alt invariant convenabil ales. Cu aceste notații, principalele legi ale hidrosonicii sînt :

Scăderea de presiune $h_1 - h_2$ între două secțiuni într-un circuit prin care curge un curent i este reprezentată de

$$\Delta h = h_1 - h_2 = .i + .\frac{di}{dt}, \tag{1}$$

în care componentele reprezintă scăderea de presiune datorită rezistenței și respectiv inerției, t fiind timpul.

O scădere a curentului $i_1 - i_2$ este reprezentată prin

$$\Delta i = i_1 - i_2 = .\, h + .\, \frac{dh}{dt} \qquad (2)$$

componentele fiind scăderea datorită scăpărilor sau pierderilor şi respectiv compresibilităţii.

Se poate vedea imediat că dacă curenţii i şi presiunile sînt invariabile, relaţiile de mai sus devin

$$h_1 - h_2 = .\, i \qquad \text{şi} \qquad i_1 - i_2 = .\, h \qquad (3)$$

ecuaţii ale circuitului hidraulic de tipul curent continuu. Pentru curgere vîscoasă sau laminară, constantele sînt practic invariabile, dar dacă curgerea este turbulentă, ele variază şi cu i şi h.

Relaţiile de mai sus, aplicate unui element ∂x al circuitului, iau forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= .\, i + \frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= .\, h + .\, \frac{\partial h}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

exprimînd mişcările de undă în circuit.

Ipotezele simplificatoare obişnuite făcute în calculul transmisiilor hidraulice duc la neglijarea în aceste ecuaţii a termenilor care conţin pe t, şi exprimă efectele combinate datorite inerţiei şi compresibilităţii lichidului. Asemenea ipoteze nu sînt admisibile cînd sînt aplicate transmisiilor în care condiţiile impuse de construcţie fac imposibilă o curgere continuă sau cînd regimul permanent este tulburat de fluctuaţiile sarcinii transmise sau de variaţiile în curentul generat sau primit. În asemenea cazuri, orice transmisie cu fluid va trebui tratată printr-un calcul hidrosonic complet, fără nicio ipoteză simplificatoare. Concluziile necesare pentru metoda simplificată sînt rareori realizate în practică. De aceea ar fi preferabil să se aplice în primul rînd calculul hidrosonic mai general şi numai ulterior să se neglijeze factorii despre care se poate dovedi că au o influenţă neglijabilă.

Din relaţiile de mai sus pot fi calculate în mare măsură pierderile de putere în transmisii, fără referinţă la o anumită instalaţie sau maşină. Scăderea de presiune (Δh) exprimată în ecuaţia (1) produce o pierdere de putere $w_1 = i\,(\Delta h) = i\,(.\, i + .\, di/dt)$ şi scăderea de curent (Δi) exprimată în ecuaţia (2) o pierdere $w_2 = h\,(\Delta i) = h\,(.\, h + .\, dh/dt)$. Totalul este astfel:

$$w_1 + w_2 = .\, i^2 + .\, h^2 + .\, \frac{d\,(i^2)}{dt} + .\, \frac{d\,(h^2)}{dt}. \qquad (5)$$

Dacă i și h sînt invariabile, ca în instalația cu curent continuu, sau sînt periodice ca în transmisia hidrosonică cu curent alternativ, pierderea medie totală devine

$$w =.\, i^2 +.\, h^2.$$

În cazurile curgerii vîscoase, cele două constante din această expresie sînt invariabile, iar cînd curgerea este turbulentă, și în conformitate cu natura problemei noastre, expresia ia forma :

$$w =.\, i^s +.\, h^n, \tag{6}$$

s și n fiind caracteristicile numerice ale problemei de față. Pentru probleme de curent alternativ, i și h reprezintă amplitudini. Puterea totală disponibilă este exprimată prin $W = hi$, pierderea în procente prin $\varepsilon = w/W$, iar randamentul prin $\eta = 1 - \varepsilon$.

Pentru exemplificare, să considerăm o pompă hidraulică cu deplasare variabilă, care poate fi reglată după voie. Pompa este acționată de un motor cu cuplu constant, să spunem un motor Diesel. Operatorul motorului acționează asupra excentricității pompei astfel încît viteza motorului să fie menținută constantă la schimbarea sarcinii. Fiind astfel asigurați că motorul va furniza întreaga sa putere, trebuie să cunoaștem randamentul pompei la diferite valori ale sarcinii. Deoarece puterea este invariabilă $W = hi =.\, 1$, pierderea de putere în procente devine

$$\varepsilon = \frac{w}{W} =.\, (h^{-s} +.\, h^n). \tag{7}$$

În toate proiectele posibile de instalații, anumiți invarianți pot fi aleși ca referințe pentru determinarea relațiilor dintre variabile. De exemplu, se poate alege ca invariant randamentul maxim care corespunde pierderii minime în procente cînd $\varepsilon = \varepsilon_0$. Tot astfel se pot alege valorile critice i_0 și h_0 ale curentului și presiunii care corespund condițiilor de pierdere minimă în procente. Dacă se măsoară variabilele ε, i, h în termenii unităților respective ε_0, i_0, h_0, relația (7) rămîne aceeași și variabilele devin adimensionale. Minimumul lui ε în ecuația (7.7) se obține scriind $d\varepsilon/dh = 0$ și aceasta dă imediat

$$.\, h^{n+s} = \frac{s}{n}. \tag{8}$$

Cînd ε este minim, $h = h_0 = 1$ și luînd în considerație (7) și (8)

$$\varepsilon =.\, \left(h^{-s} + \frac{s}{n} h^n \right)$$

și în cele din urmă

$$\varepsilon = \frac{n\, i^s + s h^n}{n + s}. \tag{9}$$

Această relație, cu expresia puterii constante $hi =.\, 1$, dă posibilitatea să se traseze un grafic care arată cum se schimbă toate variabilele ε, η, i, și h cînd se schimba una din ele.

Cu aceste formule adimensionale, comportarea probabilă a oricărei probleme de transmisie poate fi urmărită cu foarte puține informații cu privire la instalația considerată. Numerele s și n sînt de asemenea invariante pentru toți generatorii sau elementele de consum la care felul de pierderi este același.

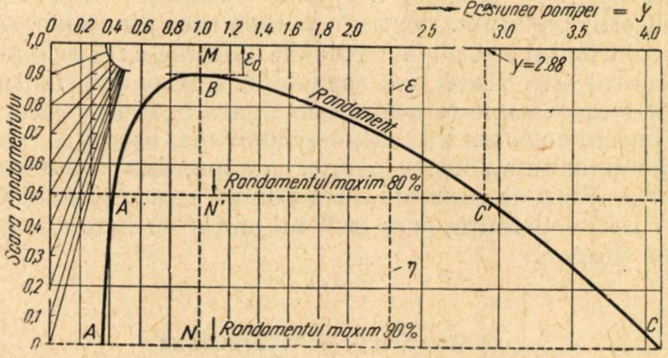


Fig. 1

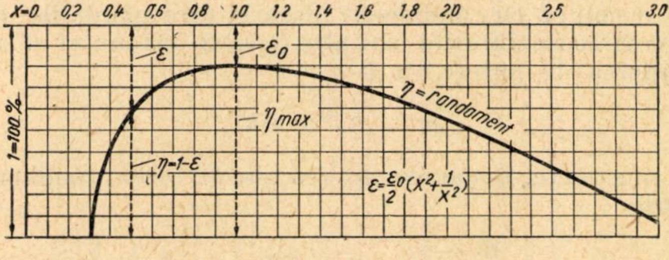


Fig. 2

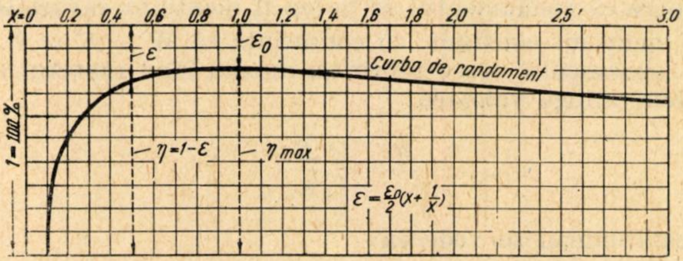


Fig. 3

Curba de randament arătată în figura 1 a fost trasată în conformitate cu formula (9) în care $s = 3$ și $n = 2$, corespunzînd curgerii turbulente și scăpărilor vîscoase. Pentru o curgere vîscoasă și pentru scăpări sau pentru o instalație hidrosonică cu curgere și scăpări vîscoase sau turbulente, exponenții trebuie să fie mai aproape de $s = n = 2$, graficul corespunzător fiind arătat în figura 2. Se poate remarca din figura 1 că folosind scările de randament corespunzătoare, nu este necesar să se traseze separat curba reală de randament pentru diferite valori maxime. Graficele din figurile 1 și 2 pot fi aplicate oricăror pompe comandate în condițiile puterii constante. Pentru o pompă care funcționează cu curgere constantă, valorile lui s și n sînt egale cu unitatea dacă scăpările sînt vîscoase și curentul este vîscos sau turbulent. Curba invariantului de randament pentru acest caz este arătată în figura 3. Reiese că o pompă care lucrează cu curent constant va arăta o scădere mai ușoară a randamentului față de valoarea maximă, decît o pompă care lucrează cu putere constantă. Figura 3 se va aplica de exemplu dacă pompa este acționată de un motor electric cu viteză constantă, cum ar fi un motor cu inducție cu curent alternativ sau sincron.

VARIAȚIILE DE RANDAMENT

O schimbare a viscozității sau a jocurilor prin uzură are ca efect schimbarea condițiilor inițiale care corespund randamentului maxim dar nu schimbă în mod necesar valoarea lui. Pentru a ilustra aceasta, să considerăm o pompă cu randament mare la care pierderile de curent și presiune sînt vîscoase datorită mai ales frecării pistonului și scăpărilor la piston. Pierderea de putere va fi

$$w = Ri^2 + Sh^2$$

R și S fiind constante., Deoarece puterea este $W = hi$, randamentul va fi exprimat prin

$$\eta = \frac{W - w}{W} = 1 - \left(R\frac{i}{h} + S\frac{i}{h}. \right) \tag{10}$$

De aici se pare că randamentul ar putea fi menținut invariabil dacă h/i ar putea fi menținut constant, cu consecința că $W = .h^2 = .i^2$. Totuși, în general, randamentul trece printr-un maxim cînd raportul dintre presiune și curent atinge valoarea

$$\frac{h}{i} = \sqrt{\frac{R}{S}}.$$

În asemenea condiții, se vede că

$$\eta_{max} = 1 - 2\sqrt{RS}. \tag{11}$$

O consecință interesantă a acestei relații este că dacă produsul RS este invariabil, randamentul maxim nu poate fi îmbunătățit. De exemplu, factorul de scăpări S poate fi luat ca fiind proporțional cu jocul e dintre piston și cilindru și invers proporțional cu lungimea l a pistonului. De aceea se poate scrie

$$S =. \frac{e}{l}.$$

Pe de altă parte, rezistența la frecare R poate fi luată ca fiind proporțională cu lungimea pistonului l și invers proporțională cu jocul e. Prin urmare

$$R =. \frac{l}{e}.$$

Dacă aceste expresii sînt înmulțite, rezultatul este

$$RS =. 1 = \text{const.},$$

și de aceea, randamentul maxim posibil nu poate fi schimbat dacă jocul sau lungimea pistonului sînt schimbate după voie; dacă s-a calculat raportul

$$x = \frac{h}{i} = \sqrt{\frac{R}{S}} =. \frac{l}{e} \tag{12}$$

urmează că raportul dintre presiune și curent care va da randamentul maxim depinde foarte mult de lungimea și jocul pistoanelor. De aceea, dacă se preferă jocuri mari, trebuie să se folosească pistoane mai lungi sau presiuni mai mici. Deoarece jocurile se măresc prin uzură, nu este posibil să se mențină un timp nedefinit condițiile randamentului maxim. Chiar o mică creștere a jocului ar putea schimba considerabil condițiile care dau randamentul maxim, cu rezultatul că dacă sînt menținute aceleași condiții, randamentul scade substanțial. Această concluzie nu este în contradicție cu cele arătate mai sus, după care o schimbare a jocului nu are nici un efect asupra randamentului maxim posibil așa cum este dat de formula (11). Această relație dă maximul posibil și acesta nu se poate atinge decît dacă presiunea h și curentul i satisfac formula (12).

Să presupunem acum că transmisia a fost proiectată cu un asemenea joc, încît h și i satisfac această relație. Nimic nu se schimbă după ce are loc uzura, afară de valoarea lui $\sqrt{R/S}$. Va fi necesar acum să schimbăm raportul dintre h și i pentru a menține randamentul maxim; aceasta însă nu se poate face fără a schimba puterea pentru care a fost proiectată transmisia. Fie

$$u = \frac{e_1}{e},$$

adică raportul jocului datorit uzurii e_1 față de acela inițial e. Noile constante S_1 și R_1 pentru pistonul și cilindrul uzat vor fi

$$S_1 = \frac{e_1}{e} S = uS \text{ și } R_1 = \frac{e}{e_1} R \frac{R}{u},$$

în conformitate cu (11) şi (12) randamentul devine

$$\eta = 1 - \varepsilon = 1 - \sqrt{RS}\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

şi pierderea în procente ε pentru mecanismul uzat

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) \tag{13}$$

în care

$$\varepsilon_0 = 2\sqrt{RS}$$

este pierderea în procente pentru ,,noul'' mecanism.

De exemplu, dacă noul mecanism are pistoane cu un joc de $\frac{1}{1\,000}$ dintr-un ţol, scăderea minimă în procente devine în conformitate cu ecuaţia (13):

$$\varepsilon = \frac{0.2}{2}(4 + 0.25) = 0.425$$

şi randamentul maxim de 80 la sută al ,,noului'' mecanism a fost redus la numai aproximativ 57 la sută dacă jocul datorit uzurii a ajuns de patru ori mai mare decît acel iniţial.

Ceea ce s-a spus cu privire la pierderea serioasă de randament datorită unei creşteri a jocurilor, poate fi repetat dacă se consideră că efectul unei diminuări a viscozităţii are acelaşi efect ca o creştere a jocurilor. Aceasta înseamnă că la transmisiile hidraulice care folosesc pistoane, palete sau orificii, randamentul maxim va apare la diferite valori ale sarcinii, în conformitate cu viscozitatea lichidului folosit. Deoarece în cele mai multe din asemenea instalaţii se foloseşte uleiul, reiese că uleiul nu este în mod necesar cel mai bun lichid.

Viscozitatea uleiurilor se schimbă considerabil cu temperatura şi pare necesar să se menţină o temperatură scăzută cu ajutorul unor mijloace artificiale, nu numai în scopul unei lubrificaţii bune, dar, ceea ce este mai important, pentru a se menţine randamentul maxim la aceeaşi sarcină transmisă. Transmisiile cu fluid care folosesc apa sînt preferabile din acest punct de vedere, deoarece viscozitatea se schimbă puţin cu temperatura şi capacitatea de răcire este mult mai mare decît la uleiuri. Transmisiile hidrodinamice care folosesc curgeri lichide de curent continuu, la pompe sau turbine centrifuge şi motoare, dau posibilitatea să se folosească transmisiile cu apă cu presiune mică şi curenţi mari. Pentru presiuni mari, transmisiile hidrosonice oferă de asemenea posibilitatea folosirii apei fie direct sau indirect prin separatori-transformatori, astfel încît piesele de lucru funcţionează în ulei, în timp ce conductele conţin apă.

HIDROSTATICA ŞI ARMONICELE

În afară de aplicaţiile specifice, metoda hidrosonică de analiză devine din ce în ce mai necesară pentru înţelegerea comportării transmisiilor hidraulice în general.

Să considerăm, de exemplu, un generator cu P pistoane, acţionate de un arbore care se roteşte cu o viteză unghiulară $\alpha = 2\pi N$, N fiind numărul de turaţii pe secundă. Fiecare cilindru generează un curent periodic care poate fi reprezentat prin

$$i = I \sin \alpha t = I \sin x, \tag{14}$$

în care $x = \alpha t$, t fiind timpul şi I amplitudinea. Într-un generator hidrosonic, acest lucru este valabil pentru fiecare din fazele P şi singura frecvenţă ce urmează a fi considerată este fundamentala $N = (\alpha/2\pi)$. Totuşi, dacă fiecare cilindru este prevăzut cu supape de aspiraţie şi evacuare, curentul pulsatoriu i este transformat într-un curent unidirecţional intermitent, care colectează numai partea pozitivă a curentului i, astfel încît curentul generat trebuie exprimat printr-o serie de armonici începînd de la fiecare cilindru.

Dacă toţi aceşti curenţi complecşi sînt evacuaţi într-un circuit comun, avem ceea ce se numeşte astăzi o pompă hidrostatică; dar de fapt este hidrostatică? În conformitate cu calculele autorului, curentul rezultant poate fi exprimat prin formula

$$Y = \frac{PI}{\pi}\left\{1 - 2\sum \frac{\cos P\lambda x}{(P\lambda)^2 - 1}\right\}, \tag{15}$$

în care $\lambda = 1,2,3,4 \ldots$ pentru orice număr de cilindri P dacă P este par şi $\lambda = 2,4,6,8 \ldots$ dacă P este impar. Aşadar, ceea ce rezultă este o curgere de curent continuu constant egal cu

$$Y_0 = \frac{PI}{\pi}, \tag{16}$$

plus o serie de componente hidrosonice cu amplitudinile

$$Y_n = \frac{2PI}{\pi} \frac{1}{(P\lambda)^2 - 1} \tag{17}$$

şi multiplul de frecvenţă

$$N_n = P\lambda \tag{18}$$

ori fundamentala N.

Raportul acestor amplitudini faţă de curentul fundamental I este egal cu

$$\rho_n = \frac{2P}{\pi((P\lambda)^2 - 1)}. \tag{19}$$

De exemplu, la o pompă cu P = trei cilindri, prima armonică corespunde la λ = doi şi multiplul de frecvenţă N_1 este egal cu de şase ori numărul de turații al pompei. Dacă pompa se rotește, să spunem cu 1 500 turații pe minut, prima armonică are o frecvență de 150 pe secundă iar raportul amplitudinii sale față de curentul fundamental I este

$$\rho_1 = \frac{2 \times 3}{\pi(6^2 - 1)} = 0{,}055.$$

Este interesant de remarcat că dacă pompa ar fi avut patru cilindri în loc de trei, prima armonică ar fi corespuns lui $\lambda = 1$ și multiplul de frecvență $N_1 = P\lambda =$ de patru ori turația pompei. De asemenea, raportul amplitudinii față de curentul fundamental I va fi $\rho_1 = 0{,}17$, de peste trei ori mai mare decît pentru pompa cu trei cilindri. În această privință, pompele cu un număr par de cilindri produc armonici mult mai mari decît acelea cu cel mai apropiat număr impar de cilindri.

Din această cauză, se pare că alternarea a două pompe avînd fiecare un număr P impar de faze, la semiunghiuri de fază, va avea efectul unei pompe cu $2P$ faze și, deoarece $2P$ este un număr par, nu se va obține nici un avantaj. Formula (16) arată că vom avea aceeași curgere medie Y_0 pentru cele două pompe împreună, fie că sînt alternate sau nu sînt, dar ecuația (17) arată că amplitudinea armonicilor pentru cele două pompe care lucrează împreună fără a fi alternate va fi de două ori Y_n dacă P este impar cu $\lambda = 2$, sau

$$Y' = 2\,Y_1 = \frac{4PI}{\pi}\,\frac{1}{4P^2 - 1}.$$

Dacă cele două pompe sînt alternate, ele reprezintă o pompă cu un număr par de cilindri egal cu $2P$ iar formula (19) dă pentru prima armonică $(\lambda = 1)$

$$Y'' = \frac{2\,(2P)\,I}{\pi\,((2P)^2 - 1)} = Y'.$$

De aceea, amplitudinile armonicilor sînt aceleași iar multiplii de frecvență $N_n = P\lambda$ sînt de asemenea aceiași.

Componentele hidrosonice exprimate în ecuația (15) pot genera presiuni sonice mari în orice circuit care conține inerție între pompă și motorul hidraulic. Asemenea presiuni sînt egale cu

$$H = L\frac{dy}{dt} = \frac{2\,La\,P^2 I\,\lambda}{\pi}\sum\frac{\sin P\lambda x}{(P\lambda)^2 - 1} \sim \frac{2\,L\,a\,I}{\pi}\sum\frac{\sin P\lambda x}{\lambda},$$

în care L este „coeficientul de inerție” în circuit iar $x = \alpha t$, ca mai sus.

Este interesant de remarcat că amplitudinile presiunii datorite inerției

$$H = \sim\frac{2\,L\,\alpha I}{\pi\lambda}$$

sînt practic independente de numărul de pistoane mai mare decît $P = 3$. Chiar pentru armonica cea mai inferioară ($\lambda = 2$) și pentru $P = 3$, factorul de corecție este dat de

$$\frac{(P\lambda)^2}{(P\lambda)^2 - 1} = \text{numai } 1{,}03.$$

Asemenea circuite de inerție pot apare ușor la masele care lucrează în serie cu coloanele de lichid, pistoane, volane, cuplaje rigide la arbori etc. și pot duce la dificultăți serioase. Cuplul pulsator hidrosonic generat nu poate fi absorbit de circuitul de inerție și apare un cuplaj elastic, pentru a rezolva la prima vedere dificultatea. Dar aceasta nu este atît de simplu ; amplitudinile armonicilor acționează ca generatori de frecvență mare, capabili să excite circuite de rezonanță în instalație. De exemplu, într-o pompă hidrostatică cu P = nouă cilindri, care se rotește cu 1 500 turații pe minut, armonicile corespunzătoare au frecvențele :

$$N_n \; 450,\ 900,\ 1350,\ 1800 \ldots \text{ pe secundă}$$

Dacă se folosește uleiul în circuit, lungimile de jumătate de undă care pot avea rezonanță cu aceste armonici sînt, pentru o viteză de undă de aproximativ 1 250 m/s, respectiv

$$l_n = 1{,}4\,;\ 0{,}9\,;\ 0{,}7\,;\ 0{,}35 \ldots \text{ m}.$$

De aceea, orice conexiuni între pompă și receptorul unor asemenea lungimi critice sau multiplilor lor, ar putea să aibă rezonanță și să mărească amplitudinile în mod indefinit.

Deoarece aceste presiuni sonice acționează prin conexiunile pistonului cu masele în rotație, inerțiile lor iau parte în circuit și, în condiții critice, construiesc propriile lor efecte rezonante.

În această privință, generatorii hidrosonici produc în mod normal doar frecvența fundamentală, fără armonicile superioare datorite supapelor rectificatoare sau colectoarelor. Un generator cu trei faze produce 25 c/s la 1 500 turații pe minut și lungimea jumătății de undă corespunzătoare în fiecare fază este 25 m, de 18 ori mai mare decît pentru o pompă cu nouă cilindri. Mai mult, generatorul hidrosonic nu necesită mai mult de o fază. Sînt necesare numai trei faze pentru alimentarea motoarelor rotative de tipul sincron sau asincron.

Prin introducerea cuplajelor elastice în transmisiile hidrostatice, se realizează un circuit mecanic sonic între elasticitatea din cuplaj și inerția maselor în rotație. Aceasta ar putea de asemenea forma un circuit de torsiune rezonant capabil să amplifice într-o măsură mare armonicile considerate mai sus și care poate produce frecvențe fundamentale și armonici de torsiune. Pentru amortizarea lor, trebuie să se adauge la cuplajele elastice frecarea și histerezisul. Totuși, în general, va fi greu să se introducă o suficientă amortizare în spațiul restrîns al cuplajelor. Masele izolate de volan prin cuplaje, acționează ca inerții în circuitul lichid prin pistoane și pot de asemenea produce un circuit armonic rezonant, datorită compresibilității lichidului din circuit.

EFECTE DE PERCUSIUNE

Pînă acum, analiza de mai sus a tratat curgerea care poate fi exprimată printr-o serie de armonice cu multipli regulat crescători. Cu toate acestea, la pompele hidrostatice, sînt de așteptat alte feluri de efecte sonice care ar putea fi mai bine descrise ca fiind „de percusiune”. Acestea sînt datorite discontinuităților bruște ale presiunii sau cavitației, sau unei combinații a acestora. De exemplu, în timpul trecerii de la zona de presiune la sucțiune, există o pierdere de putere $C\,i\,h^2$, C fiind compresibilitatea lichidului, i curentul și h presiunea. Deoarece puterea transmisă este $W = hi$ proporția pierderii este egală cu Ch. Această pierdere nu este continuă, ci este împărțită în lovituri separate, în ritmul de o lovitură pe cilindru, lovind lichidul cu impulsuri compresive puternice și cu același număr de impulsuri decompresive puternice, dînd astfel totalul pierderii de putere în procente :

$$\varepsilon = 2Ch.$$

De exemplu, dacă se folosește uleiul cu $C = 7{,}5 \times 10^{-5}$ într-o pompă care lucrează sub presiunea de $h = 200$ atm., se obține astfel $\varepsilon = 0{,}030$ sau aproximativ 3 la sută din puterea disponibilă. O pompă proiectată pentru 50 cai putere la ieșire va pierde aproximativ 1,5 cai putere în zgomot potențial datorită numai acestei cauze. Această pierdere de putere în procente este independentă de numărul de cilindri, dar frecvența va fi de $2P$ ori frecvența fundamentală. Pentru o pompă cu $P = 9$ care funcționează cu 1 500 turații pe minut, frecvența va fi de 450 pe secundă, mult în domeniul auzibil.

Un efect percusiv poate fi căutat în transmisiile cu colectoare rotative de tip cu orificiu. La asemenea mașini, cilindrii sînt închiși în timpul unui unghi mic de rotație în perioada în care se trece de la presiune la sucțiune. Autorul a calculat că pot rezulta presiuni foarte mari în cilindru în perioada de închidere a orificiilor. Efectul va apare ca o ridicare bruscă de presiune, urmată imediat de o ruptură bruscă a continuității în lichid, cu o cavitație bruscă pentru un timp foarte scurt. Aceasta are ca rezultat o discontinuitate dublă care produce lovituri brușe la o frecvență de P ori aceea fundamentală la timpul închiderii, cînd cilindrul trece de la sucțiune la presiune. Există de asemenea o lovitură similară datorită acestei cauze cînd cilindrul este închis între presiune și sucțiune. Intensitățile acestor două feluri de lovituri (compresivă și decompresivă) nu sînt în mod necesar egale ; este probabil că șocurile de compresiune sînt cele mai intense.

Efectul acesta este foarte asemănător cu ceea ce se întîmplă la periile dinamurilor și motoarelor electrice cu curent continuu, la care scurtcircuitarea barelor colectorului produce scîntei, efect care poate fi redus răsucind periile cu anumită deplasare unghiulară față de stator.

Datorită numărului relativ mic de orificii în pompele și motoarele hidrostatice, efectul de închidere este comparativ mai important. Pentru a dezvolta aceste idei, să considerăm o pompă la care unghiul de închidere la orificiul cilindrului este $\pi/10$, diametrul pistonului 4,5 cm și cursa 2 cm. Volumul deplasat de piston în decursul jumătății timpului de închidere ajunge la aproximativ 0,200 cm^3. Pentru o pompă care lucrează cu 1 500 turații pe minut, acest volum de lichid va trebui să se scurgă în decursul unui interval de timp de $\frac{1}{1\,000}$ s. Să presupunem că orificiul din cilindru are diametrul de 1 cm și jocul este de $\frac{1}{1\,000}$ cm. Făcînd calculele, se găsește că în timpul închiderii, lichidul scurs datorită jocului va atinge o viteză de 620 m/s cu o presiune corespunzătoare de mai mult de 1 800 atm. Dacă jocul se dublează presiunea maximă ce se poate aștepta este încă foarte mare, de peste 450 atm. Mărind jocul de 10 ori, presiunea maximă scade la 18 atm. Aceste șocuri de presiune ar putea fi reduse prin deplasarea închiderii cu un unghi mic. O deplasare într-o direcție va mări șocul de presiune și va micșora șocul de cavitație, dacă este nevoie pînă la zero; o deplasare în cealaltă direcție va micșora șocul de presiune, dacă este nevoie pînă la zero, dar cu o creștere corespunzătoare a șocului de cavitație. Această reglare posibilă trebuie judecată în lumina experienței pentru a se stabili ce fel de șoc — acela datorit presiunii sau acela asociat cavitației — urmează a fi eliminat. Jocurile mai mari, deși reduc șocul de presiune, au un efect mic asupra șocului de cavitație, exceptînd cazul în care se dă lichidului o supraîncărcare mare. Trebuie să remarcăm că aceste șocuri de închidere sînt independente de sarcină și pot fi tot atît de intense cînd instalația funcționează ușor ca și atunci cînd funcționează la întreaga sarcină. Un punct care merită a fi cercetat este acela de a ști dacă aceste discontinuități de cavitație cu frecvență mare în lichid cauzează zgomot, liberarea gazelor din lichid, emulsionarea lichidului, pierderi care afectează structura uleiului etc. Ar fi interesant să se determine experimental dacă există o limită a frecvențelor deasupra căreia cavitația nu are loc. Aceasta este puțin probabil deoarece efectele cavitației sonice au fost observate cu unde supersonice în lichide, cu formarea unor bășici mici de gaz care se produc prin presiuni extrem de mari de ,,implozie'' pe suprafețele dure, avînd ca rezultat avarii importante.

Șocurile de închidere nu apar la pompe care folosesc supape cu declic și din acest punct de vedere, supapele hidraulice ,,de modă veche'' par a fi superioare colectoarelor rotative. În comparație cu metodele electrice, supapele cu declic sînt înrudite cu redresoarele de la scurgerile de curent alternativ, la acelea de curent continuu dar pînă acum sînt încă în faza folosirii pieselor mobile, mici în comparație cu dimensiunea instalației, iar atunci cînd se consideră frecvențe înalte, apar dificultăți serioase. Există o categorie posibilă în domeniul redresoarelor cu fluid, fără intervenția colectorului sau supapei cu declic. Acesta însă este un subiect care nu intră în cadrul acestui articol, ci aparține mai mult dezvoltării specializate a hidrosonicei. Pînă acum s-au obținut progrese satisfăcătoare și autorul socotește că o soluție care să arate randamentul mare al transformării este practic posibilă.

MODELE ABSTRACTE

Pentru analizarea sistematică a comportării complexe a transmisiilor cu fluid, considerațiile matematice pe liniile indicate mai sus pot fi de mult folos, dar foarte folositoare pot fi și modelele care din lipsa unui cuvînt mai adecvat pot fi numite modele analitice sau „abstracte”, spre deosebire de modelele obișnuite „la scară”. Un model pentru o problemă hidraulică poate fi executat într-un alt domeniu fără fluide, un asemenea model fiind o imagine a comportării fenomenului principal. Un asemenea model trebuie să se comporte în conformitate cu aceleași relații matematice ca cele care guvernează fenomenul real.

De exemplu, acțiunea unei supape de evacuare într-un circuit de pompă poate fi transferată analitic la un clichet oscilant sau la o roată cu clichet, la care factorii de compresibilitate, frecare și scăpări sînt ignorați, presupunînd că efectul lor este neglijabil. Variabilele de curent și presiune sînt reținute ca proporționale cu viteza și eforturile, cu funcțiile corespunzătoare de putere, cuplu etc.

Folosind metoda notației nedeterminate, schițată mai sus, formula (15) va lua aceeași formă pentru model și pentru obiectul real.

$$X = .\alpha P\left\{1 - 2\sum\frac{\cos P\lambda x}{(P\lambda)^2 - 1}\right\}, \qquad (20)$$

în care P este numărul clicheților polifazici ce acționează asupra roții, același ca și numărul de cilindri din pompă. De asemenea, $x = \alpha t$, α fiind viteza unghiulară a arborelui care face să oscileze clichetul modelului, iar X reprezentînd viteza unghiulară rezultantă a roții cu clichet. Putem fi surprinși de constatarea că încercînd modelul la orice viteză unghiulară dorită α, condițiile de viteză de rotație constantă la arborele de acționare și roată sînt incompatibile. Modelul va fi distrus, oricît de mică ar fi sarcina care s-ar încerca asupra acestei transmisii abstracte. Dacă se folosesc volane grele pentru a face mișcarea mai lină, situația devine și mai rea, indiferent de numărul de clicheți folosit. Modelul poate funcționa succesiv numai cînd cuplul transmis este nul; dacă se impune o sarcină, tensiunile în instalație devin infinite, dispozitivele de prindere dintre volane și arborii lor vor fi forfecate, bielele, clicheții, arborii etc., vor fi tensionați dincolo de orice limită. Aceasta ilustrează incompatibilitatea introdusă prin faptul că pentru model s-a făcut abstracție de factorii de compresibilitate și scăpări. Introducerea cuplajelor elastice înseamnă un nou model care va arăta la încercare că pentru viteze mici incompatibilitatea este îndepărtată, dar că apar noi efecte cînd viteza de rotație este mărită către anumite stări critice la care masele în rotație dintre volane intră în rezonanță cu elasticitatea introdusă în cuplaje. Aceasta cere un nou model prevăzut cu dispozitive de amortizare a frecării și histerezei, pînă cînd se ajunge la o funcționare satisfăcătoare. În cele din urmă, aceste îmbunătățiri pot fi transpuse din domeniul mecanic al modelului la obiectul hidraulic și se va constata că tratamentul analitic complet al problemei implică mult mai mult decît hidrostatica așa cum se exprimă prin relația (3) și trebuie să cuprindă în întregime ecuațiile (1), (2), (4), care constituie baza hidrosonicei, fără nici un fel de ipoteze simplificatoare. În general, aceste ecuații sînt rezolvabile, dar în cazuri speciale rezolvarea poate fi grea sau imposibilă. Într-o asemenea eventualitate, devine necesar un model abstract, așa cum poate fi făcut cu metoda mișcării lente. În locul armonicilor de frecvențe superioare, de sute pe secundă, modelul poate fi conceput, dacă este necesar, cu cîteva pe minut, permițînd astfel cercetarea vizuală directă a efectelor care altfel sînt eclipsate pe modelul principal, fiind confundate cu alte efecte. Perturbațiile față de starea permanentă, datorită schimbărilor bruște de sarcină sau instabilităților pot fi de asemenea studiate mai bine.

CONCLUZII

Pentru a rezuma ideile expuse mai sus, se poate spune că cu toate avantajele și simplicitatea evidentă a transmisiilor care lucrează cu scurgeri de fluid cu curent continuu, de mare presiune, pentru aplicații specifice, există multe cazuri pentru care utilajul hidrosonic de mare presiune, cu curent alternativ, ar fi mai corespunzător. Acesta ar putea să alimenteze motoare rotative de tip sincron sau asincron, fără a folosi supape sau orificii, fiind astfel libere de armonici și putînd alimenta și redresoare care produc curent continuu pentru acționarea motoarelor hidrostatice rotative sau liniare cu cuplu variabil. Mai mult încă, transmisiile „tăcute" cu putere hidrosonică cu frecvență „infrasonică" pot fi folosite și pentru încălzire, fierbere, vaporizare etc., în clădiri sau pe bordul vaselor. Cu ajutorul transformatoarelor, se pot obține presiuni foarte mari pentru presare, suflare etc. Un aspect unic al transmisiilor hidrosonice este acela că se poate folosi o singură conductă pentru acționarea motoarelor la distanță, în timp ce minimum două sînt necesare pentru transmisiile hidraulice.

Autorul nu crede că acest articol este complet, dar speră că a putut sugera idei care privesc unele aspecte ale calculului transmisiei de putere, ce ar putea fi folositoare în „țara nimănui" dintre hidraulică și hidrosonică. El nu se amăgește cu iluzia că vor fi mulți aceia care vor fi de acord cu el, dar acesta este un motiv excelent pentru a încuraja discuțiile ce pot deschide o cale de cooperare între studenții în mecanica fluidelor, în vederea unor viitoare cercetări, atît de necesare în vremea noastră, pentru ca în acest fel să se poată ține pasul cu progresele făcute de electromecanică în multe aplicații industriale care în mod logic și legitim aparțin domeniului hidromecanicii.

Primită la redacție la 6 aprilie 1962

НОВЫЙ МЕТОД ДЛЯ РАСЧЕТА ЖИДКОСТНЫХ СИЛОВЫХ ПЕРЕДАЧ

РЕЗЮМЕ

В работе показываются преимущества силовых гидрозвуковых передач перед обычными гидравлическими передачами. Выводы сделаны на основе соображений о факторах, влияющих на протекание гидро-

звуковых явлений. Устанавливаются безразмерные соотношения для исследования поведения передач. Особо рассматривается изменение к.п.д., выявляются параметры, влияние на его величину. В работе также показывается, что гидрозвуковой метод полезен для понимания поведения гидропередач в целом. Даются указания о возможности моделирования жидкостных передач.

A NEW APPROACH TO FLUID POWER TRANSMISSION ANALYSIS

ABSTRACT

This paper shows the advantages of the hydrosonic power transmissions as compared to those of the usual hydraulic transmissions. The analysis is made by considering the factors which govern the hydrosonic phenomena and the dimensionless relations necessary for studying the behaviour of transmissions are established. The variation of efficiency is particularly discussed, the parameters influencing its value being emphasized. It is also shown that the hydrosonic method becomes useful for understanding the behaviour of hydraulic transmissions in general. Finally, indications are given on the possibility of studying fluid transmissions by using "abstract models".

BĂTAIA RACHETELOR BALISTICE

DE

N. TIPEI

Dacă se face abstracție, în primă aproximație, de variația lucrului mecanic al rezistenței la înaintare pe diferite traiectorii de urcare, se poate considera că energia totală și deci cantitatea de propelant consumată depinde de viteza finală și de altitudinea rachetei la sfîrșitul combustiei. Mai departe, din cauza înălțimii mari la care are loc mișcarea, traiectoria corespunde unei porțiuni de orbită executată sub acțiunea forței centrale și limitată la punctul de intersecție cu solul. Acest punct definește și bătaia rachetei, dacă se neglijează influența rezistenței la reintrarea în păturile dense ale atmosferei. Această influență se face simțită mai ales asupra temperaturii dezvoltată prin frecare, asupra fenomenelor de transmisie a emisiunilor radioelectrice etc. și într-o mică măsură asupra bătăii, de aceea va fi neglijată în cele ce urmează.

Axa mare a elipsei descrisă de mobil depinde numai de viteza finală și de înălțimea atinsă la sfîrșitul arderii, în timp ce excentricitatea, respectiv axa mică, sînt funcții și de unghiul de lansare θ_0, dintre orizontala locului și traiectorie, în punctul în care încetează propulsia. Problema care se pune deci este de a determina unghiul optim de lansare și în funcție de acesta, bătaia, pentru o viteză finală V_0 și o altitudine z_0. Dacă f este constanta gravitației, M masa pămîntului și R raza acestuia, rezultă semiaxa mare [1]

$$a = \frac{fM}{\dfrac{2fM}{R + z_0} - V_0^2}. \tag{1}$$

Fie F_1, F_2 focarele elipsei descrise de rachetă, după arderea propelantului,

F_1 coincizînd cu centrul pămîntului (fig. 1). Patrulaterul F_1MF_2N (M fiind punctul de plecare iar N punctul de contact cu solul) are laturile

$$\begin{aligned} MF_1 &= R + z_0, \\ MF_2 &= 2a - R - z_0, \\ NF_1 &= R, \\ NF_2 &= 2a - R, \end{aligned} \tag{2}$$

funcții de R și z_0, iar unghiurile dintre orizontala locului și tangenta la traiectorie în M și N sînt egale cu jumătățile unghiurilor formate de razele vectoare în punctele respective. Din triunghiurile MF_1N și MF_2N se deduce

$$\cos \nu = \frac{2aR - (2a - R - z_0)\,[\,2a - (2a - R)\cos \chi\,]}{R\,(R + z_0)}. \tag{3}$$

Din această expresie rezultă că valoarea minimă a lui $\cos \nu$ se obține pentru $\chi = \pi$, adică în cazul cînd M, F_2 și N sînt coliniare. În această situație, dacă $\nu < \pi$ (fig. 2) rezultă că unghiul la centru ν va avea valoarea maximă și, o dată cu acesta, și bătaia rachetei este maximă. Acest rezultat, enunțat pentru prima oară de Reece, Joseph și Shaffer [2], este adevărat numai dacă se îndeplinește condiția

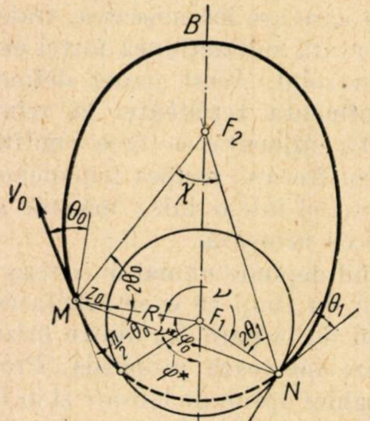

B
F_2
χ
V_0
θ_0
$2\theta_0$
M
z_0
R
ν
F_1
$2\theta_1$
θ_1
θ_0
φ_0
φ^*
N
A

Fig. 1

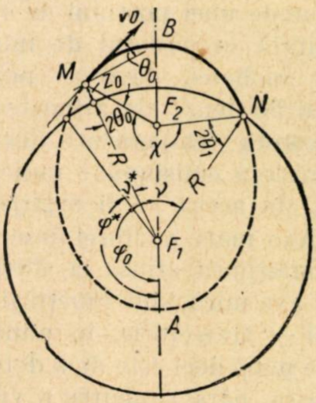

v_0
B
M
θ_0
z_0
F_2
N
$2\theta_0$
χ
$2\theta_1$
R
R^*
ν
φ^*
F_1
φ_0
A

Fig. 2

$$2\,R - 2a + z_0 \geqslant 0, \tag{4}$$

obținută din (3), dacă se consideră $\chi = \pi$ și $\nu \leqslant \pi$ ($\cos \nu \geqslant -1$). Unghiul optim de lansare, θ_0, este, în acest caz, dat de ecuația

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \text{arc cos} \frac{z_0 (2R + z_0) + (4a - 2R - z_0)^2}{2 (R + z_0)(4a - 2R - z_0)}. \quad (5$$

În cazul limită $2a = 2R + z_0$ punctele M, F_1, F_2 și N sînt situate pe o linie dreaptă, distanța focarelor $F_1F_2 = z_0$, iar $\theta_0 = \theta_1 = 0$, $\nu = \chi = \pi$. Viteza inițială, V_0, este deci orizontală ca și viteza în punctul N de contact. Dincolo de acest caz limită, adică pentru $\nu > \pi$, $\chi < \pi$, rezultatul precedent privitor la bătaia maximă nu mai este adevărat. În noile condiții inegalitatea (4) se inversează (fig. 1)

$$2a > 2R + z_0 \quad (6)$$

iar bătaia maximă se obține cînd punctele A și N se confundă (fig. 1), adică elipsa descrisă de mobil ajunge tangentă la suprafața pămîntului. În acest caz, între z_0, V_0 și θ_0 există condiția [1]

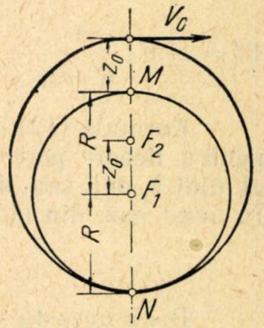


Fig. 3

$$\left[\frac{(R + z_0)^2 \cos^2 \theta_0}{R^2} - 1\right] V_0^2 = 2fM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + z_0}\right), \quad (7)$$

din care rezultă θ_0, dacă V_0 și z_0 sînt dați, o dată cu axa mare a elipsei. Distanța $\overline{F_1F_2}$ este

$$\overline{F_1F_2}^2 = (R + z_0)^2 + (2a - R - z_0)^2 - 2(R + z_0)(2a - R - z_0)\cos 2\theta_0, \quad (8)$$

iar unghiul la centru, ν, care definește bătaia maximă va fi

$$\nu = \pi + \text{arc sin}\left(\frac{2a - R - z_0}{F_1F_2} \sin 2\,\theta_0\right). \quad (9)$$

Fie, în general, θ_1 unghiul traectoriei cu orizontala în punctul de impact. Unghiul θ_0 este o funcție de θ_1 dată de relația

$$\cos 2\theta_0 = \frac{R(2a - R)\cos 2\theta_1 - z_0(2a - 2R - z_0)}{(R + z_0)(2a - R - z_0)}, \quad (10)$$

sau, pentru $\theta_1 = 0$ rezultă

$$\cos 2\theta_0 = \frac{1}{R + z_0}\left[R - z_0\left(1 - \frac{2R}{2a - R - z_0}\right)\right], \quad (11)$$

care este echivalentă cu (7) dacă se ține seama de (1).

Dacă unghiul θ_1 este impus, lucru care poate să apară curent în tehnica lansării rachetelor, condiția de colinearitate a punctelor MF_2N, în cazul inegalității (4), permite determinarea a încă unui parametru de lansare z_0 sau V_0. Din triunghiul MNF_1 (fig. 2) se obține

$$z_0 = 2\,(2a - R)\frac{2a - R(1 + \cos 2\,\theta_1)}{4a - R(1 + \cos 2\,\theta_1)}, \tag{12}$$

relație care, împreună cu (1), impune o legătură între z_0 și V_0

$$V_0^2 = 2fM\left(\frac{1}{R + z_0} - \frac{2}{z_0 + R(2 + \cos 2\,\theta_1) + \sqrt{z_0^2 + R^2\cos^2 2\,\theta_1 + 2Rz_0}}\right). \tag{13}$$

Formula (12) arată legătura dintre a și z_0 astfel ca bătaia maximă, pentru fiecare pereche de valori a acestor parametri, să corespundă unghiului θ_1 dat, sau, dacă a este dat, V_0 rezultă o dată cu z_0, din (12) și (13). În acest caz, din (12) se obține condiția

$$2a \geqslant R(1 + \cos 2\,\theta_1). \tag{14}$$

Dacă aceasta nu este satisfăcută, înseamnă că cu datele problemei nu se poate obține colinearitatea punctelor MF_2N iar bătaia maximă se va obține înlocuind relația (12) prin $z_0 = 0$. Practic acest lucru nu este posibil, dar rezultă concluzia că viteza V_0 care satisface ecuația (1) trebuie atinsă la o altitudine cît mai redusă.

Din (3) se deduce apoi unghiul la centru ν ($\chi = \pi$) care dă bătaia rachetei.

Dacă inegalitatea (4) nu este satisfăcută, nici relația (12) nu mai este utilizabilă. Observînd că există legătura dintre unghiuri

$$\nu + \chi + 2\,\theta_0 + 2\,\theta_1 = 2\pi, \tag{15}$$

relația (3) se poate pune sub forma următoare

$$\begin{gathered} - R(R + z_0)\cos\nu - 4a^2 + 2a\,(R + z_0) + 2aR + \\ + (2a - R - z_0)\,(2a - R)\cos\,[\nu + 2\,(\theta_0 + \theta_1)] = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

unde θ_0 este o funcție cunoscută de θ_1, z_0 și a (10).

Energia totală necesară pentru a aduce unitatea de masă a rachetei în punctul M (z_0) este, notînd cu g accelerația gravitației la sol

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,V_0^2 + \int_0^{z_0} g\frac{R^2}{(R+z_0)^2}\,dz = \frac{1}{2}\,V_0^2 + gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + z_0}\right). \tag{17}$$

Deoarece $g = \dfrac{fM}{R^2}$, axa mare a elipsei va fi (1)

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{1}{R} - \dfrac{\mathcal{E}}{fM}}. \tag{18}$$

Din aceasta rezultă că a depinde numai de energia consumată spre a aduce mobilul în punctul de plecare pe arcul de elipsă. Presupunînd această energie constantă, respectiv raportul dintre cantitatea de propelant și masa finală a rachetei, rezultă a de asemenea constantă. În aceste condiții, formula (16) dă unghiul ν ca funcție de z_0.

Acest unghi se poate pune sub forma (fig. 1 și 2)

$$\nu = 2 \text{ arc tg} \frac{(2a - R) \sin 2\theta_1}{R - (2a - R) \cos 2\theta_1} - \nu^\star \tag{19}$$

Ecuația elipsei este

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \tag{20}$$

în care excentricitatea ε este dată de expresia

$$\begin{gathered} \varepsilon = \sqrt{\frac{R^2}{4a^2} \cos^2 \varphi^\star - \frac{R}{a} + 1} - \frac{R}{2a} \cos \varphi^\star, \\ \varphi^\star = \pi - \text{arc tg} \frac{(2a - R) \sin 2\theta_1}{R - (2a - R) \cos 2\theta_1}. \end{gathered} \tag{21}$$

Din (20) se deduce apoi imediat valoarea unghiului $\nu^\star$

$$\nu^\star = \text{arc cos} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{a(1 - \varepsilon^2)}{R + z_0} - 1 \right] - \text{arc cos} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{a(1 - \varepsilon^2)}{R} - 1 \right]. \tag{22}$$

cu ajutorul căruia se determină ν, dat de (19).

Dacă θ_1 este prescris, iar a variabil, formula (19), împreună cu (21) și (22) definește bătaia rachetei, exprimată prin unghiul la centru ν. Se observă apoi că există relațiile

$$\begin{gathered} \varphi^\star = \pi - \frac{\nu + \nu^\star}{2} \\ \frac{d(\nu + \nu^\star)}{da} = -\frac{1}{2} \frac{d\varphi^\star}{da} = \frac{4R \sin 2\theta_1}{R^2 + (2a - R)^2 - 2R(2a - R) \cos 2\theta_1} = \\ = \frac{4R \sin 2\theta_1}{\overline{F_1 F_2}^2} > 0, \\ \frac{d\nu^\star}{da} = \frac{d\varphi_0}{da} - \frac{d\varphi^\star}{da}. \end{gathered} \tag{23}$$

Din (21) rezultă

$$\frac{d\varepsilon}{da}=\frac{R}{2a}\left[\frac{\cos\ \varphi^\star}{a}+\sin\varphi^\star\frac{da^\star}{da}+\frac{1-\frac{R\cos\varphi^\star}{2}\left(\frac{\cos{}'\varphi^\star}{a}+\frac{\sin\ \varphi^\star}{2}\frac{d\varphi^\star}{da}\right)}{a\sqrt{\frac{R^2}{4a^2}\cos^2\varphi^\star-\frac{R}{a}+1}}\right],$$

$$\frac{d\varphi_0}{da}=\frac{\left[\left(\frac{a}{R+z_0}-1\right)\frac{1}{\varepsilon}+\frac{a}{R+z_0}\right]\frac{d\varepsilon}{da}-\frac{\frac{1}{\varepsilon}-\varepsilon}{R+z_0}}{\sin\varphi_0}\tag{24}$$

Relațiile (23) și (24) permit astfel calculul derivatei

$$\frac{d\nu}{da}=\frac{d(\nu'+\nu^\star)}{da}-\frac{d\nu^\star}{da}=f\,(a,z_0).\tag{25}$$

Anulînd această expresie, $f\,(a, z_0) = 0$ se găsește o relație între axa a și z_0, necesară pentru ca bătaia să fie maximă. Dacă z_0 este cunoscut, rezultă a și ν, apoi viteza V_0 dată de (1) și θ_0 de (10). Cînd z_0 este neglijabil, $\nu^\star \cong 0$ se poate vedea ușor că bătaia maximă corespunde condiției ($\theta_0 \cong \theta_2$)

$$\nu = 2\pi - 4\theta_1\tag{26}$$

pentru care $a \to \infty$, iar elipsa devine o parabolă. Acesta este evident un caz limită, care arată valoarea teoretică la care poate ajunge ν. Formulele (23) indică de altfel că, deoarece $\frac{d\nu}{da} > 0$ tot timpul, ν va crește continuu cu a.

Durata evoluției de la M la N (fig. 1 și 2) este dată de legea ariilor

$$T=\frac{1}{C}\int_{\pi-\frac{\nu-3\nu^\star}{2}}^{\pi+\frac{\nu+\nu^\star}{2}}r^2\,d\varphi=\frac{1}{C}\int_{\pi-\frac{\nu-3\nu^\star}{2}}^{\pi+\frac{\nu+\nu^\star}{2}}a^2(1-\varepsilon^2)^2\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=$$

$$=\frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{(R+z_0)\,V\cos\theta_0}\left\{\varepsilon\left(\frac{\sin\frac{\nu+\nu^\star}{2}}{1-\varepsilon\cos\frac{\nu+\nu^\star}{2}}+\frac{\sin\frac{\nu-3\nu^\star}{2}}{1-\varepsilon\cos\frac{\nu-3\nu^\star}{2}}\right)-\right.\tag{27}$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\nu+\nu^\star}{2}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\nu-3\nu^\star}{2}\right)\right]\right\}.$$

Apogeul este atins cînd $\varphi = \pi$, sau după parcurgerea unei distanțe corespunzătoare unghiului la centru $\frac{\nu - \nu^{\star}}{2}$ şi are valoarea

$$z_{max} = a + \frac{1}{2}\overline{F_1 F_2} - R, \tag{28}$$

în care $\overline{F_1 F_2}$ are valoarea dată de (8) sau de (23).

Primită la redacție la 21 iunie 1962

О ДАЛЬНОБОЙНОСТИ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается движение ракеты после сгорания топлива в гипотезе, что энергия, затраченная во время сгорания, остается постоянной.

Для получения максимальной дальнобойности имеются два случая, в зависимости от того, является ли главная ось эллипса, описанного движущимся предметом, меньше или больше, чем диаметр земли плюс высота, при которой прекращается движение. В первом случае находят известный результат, а именно условие, чтобы точка запуска, точка удара и один из фокусов находились на одной прямой. Во втором случае траектории должны быть касательными к земле в точке контакта.

В дальнейшем, угол между траекторией и горизонталью считается заданным в точке удара. Для максимальной дальнобойности получается высота, на которой кончается сгорание, а также соотношение между высотой и скоростью соответствующей точки. Затем выводится для ракет большой дальности полета условие максимума, определяющее высоту, на которой прекращается продвижение.

RANGE OF BALLISTIC ROCKETS

ABSTRACT

The paper considers the rocket motion after the burning of the propellant, assuming that the energy consumed during combustion remains constant. For obtaining the maximum range, two situations occur, according as the great axis of the ellipse described by the body is smaller or greater than the earth diameter plus the altitude at which the propulsion ceases. In the first case, a known result is re-found, that is the condition

that the starting and impact points as well as one of the focal points be colinear. For the second case, the trajectories must be tangent to the earth at the contact point.

Further, the angle between the trajectory and the horizontal line at the impact point is considered as given. For the maximum range, the altitude beginning from which the combustion ceases as well as a relationship between this one and the velocity at the respective point are obtained. The maximum condition which determines the altitude beginning from which the propulsion ceases is then deduced for long range rockets.

BIBLIOGRAFIE

1. Caius Iacob, Gazeta matematică, *5*, 192 (1949).
2. J. W. Reece, R. G. Joseph, D. Shaffer, *Ballistic Missile Performance*. Jet. Propulsion, *4*, 26 (1956).

PROBLEMA MIXTĂ A ARIPII TRIUNGHIULARE ÎN MIŞCARE CONICĂ DE ORDIN SUPERIOR

DE

ŞERBAN SĂNDULESCU şi ADRIANA NĂSTASE-GHIA

1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Problema scurgerilor conice de ordin superior a făcut obiectul a numeroase cercetări [1]—[12] care au condus la rezultate interesante privind aplicaţiile lor la aripile triunghiulare, trapezoidale etc.

În această lucrare ne propunem să studiem problema mixtă a aripilor triunghiulare, adică problema care apare cînd pe o porţiune de aripă se dă distribuţia de presiuni, iar pe cealaltă se dă distribuţia de incidenţă sau pantă.

Pentru aceasta vom utiliza metoda unitară bazată pe analiza condiţiilor scurgerii în vecinătatea muchiilor şi a bordurilor de atac, şi respectiv a singularităţilor care le corespund, prezentată în lucrările anterioare [7] – [12] în care a fost studiată aripa la care se dă distribuţia de incidenţă sau pantă şi se caută distribuţia de presiuni (problema directă) şi aripa la care se dă distribuţia de presiuni şi se caută forma aripii (problema indirectă), metodă pe care noi o vom extinde la studiul problemei mixte, aşa cum a fost definită mai sus.

Vom presupune că perturbaţiile scurgerii sînt mici, situaţie în care potenţialul vitezelor satisface ecuaţia

$$-B^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=0 \qquad (1)$$

şi se demonstrează că potenţialul $\Phi(x_1, x_2\ x_3)$ este o funcţie omogenă de ordinul n dacă vitezele de perturbaţie sînt funcţii omogene de ordinul $(n-1)$ [2].

În planul lui Busemann orice funcţie $\Phi_{pqr}(p+q+r=n$, p fiind ordinul de derivare în raport cu x_1, q în raport cu x_2, r în raport cu $x_3)$

omogenă de ordinul zero este funcţie armonică şi i se poate asocia o altă funcţie armonică $\Phi'_{p,qr}$ astfel încît

$$F_{pqr} = \Phi_{p,q,r} + i\,\Phi'_{pqr}, \tag{2}$$

este o funcţie analitică care reprezintă un potenţial fictiv.

Diversele derivate de ordin n ale potenţialului sînt legate între ele prin relaţiile de compatibilitate care sînt exprimate de identitatea tuturor expresiilor de forma

$$(-1)^q x^q \left(\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r dF_{n-q-r,q,r} \tag{3}$$

în care $0 \leqslant q + r \leqslant n$.

Dacă în formulele lui Euler pentru funcţiile omogene de ordin $n-1$ se introduc notaţiile făcute mai sus, se găseşte pentru viteza axială de perturbaţie pe aripă şi respectiv pentru viteza verticală pe aripă, expresiile

$$(n-1)!\,u = x_1^{n-1}\,\mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, x^q F_{n-q,q,0}, \tag{4a}$$

$$(n-1)!\,w = x_1^{n-1}\,\mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, x^q F_{n-q-1,q,1}, \tag{4b}$$

de unde se vede că determinarea lui u şi w revine la determinarea funcţiilor $F_{n-q,q,0}$ şi respectiv $F_{n-q-1,q,1}$.

În lucrările anterioare, în care s-a studiat problema directă [8], şi problema indirectă [9], a aripilor triunghiulare s-a arătat că aceste funcţii se pot determina pe baza analizei condiţiilor de scurgere în vecinătatea bordurilor de atac şi a muchiilor. Cunoscînd că viteza axială de perturbaţie tinde la infinit pe bordul de atac al aripii subţiri ca $\dfrac{1}{(l_1-y)^{\frac{1}{2}}}$ şi ca $\ln(s-y)$ de-a lungul unei muchii, rezultă că funcţiile $F_{n-q,q,0}$ vor conţine singularităţile

$$\frac{1}{(l-x)^{\frac{1}{2}}},\ \frac{1}{(l-x)^{\frac{3}{2}}},\ \ldots,\ \frac{1}{(l-x)^{\frac{2n-1}{2}}}, \tag{5a}$$

pentru bordul de atac respectiv şi

$$\ln|s-x|,\ \frac{1}{s-x}\ \ldots\ \frac{1}{(s-x)^{n-1}} \tag{5b}$$

pentru muchia a cărei urmă în planul $x = y + iz$ este situată în punctul $x = s$.

În această situaţie, funcţiile $F_{n-q-1,q,1}$ sînt cunoscute, deoarece în cazul problemei directe este dată distribuţia de incidenţă sau pantă pe aripă, care în baza relației $w = U_\infty \tau(x_1, x_2)$ este echivalentă cu distribuția vitezei verticale de perturbație.

La problema indirectă se determină funcțiunile $F_{n-q-1,q,1}$ care conțin aceleași singularități (5 *a*), (5 *b*) iar $F_{n-q,q,0}$ sînt cunoscute.

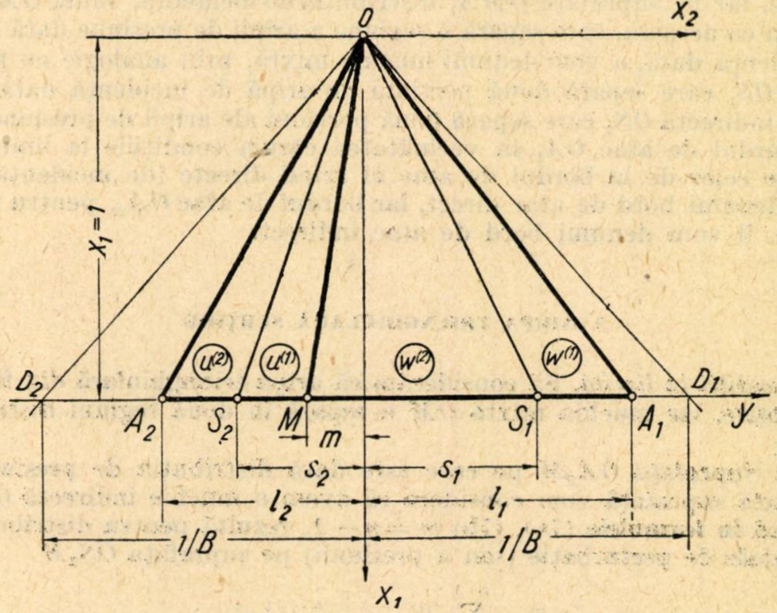


Fig. 1

În cazul problemei mixte pe care o vom studia acum, aripa va fi definită pe porțiuni prin distribuțiile de incidență la fel ca la problema directă [8]

$$w^{(i)} = \sum_{m=0}^{n-1} w_m^{(i)}(x_1, x_2), \tag{6a}$$

unde am notat

$$w_m^{(i)}(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^{m} w_{m-q,q}^{(i)}\, x_1^{m-q} x_2^q, \tag{6b}$$

cît și de distribuții de presiune de aceeași formă ca la problema indirectă [9] și anume

$$u^{(i)} = \sum_{m=0}^{n-1} u_m^{(i)}(x_1, x_2) \tag{7a}$$

unde

$$u_m^{(i)}(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^{m-1} u_{m-q,q}^{(i)}\, x_1^{m-q} x_2^q \tag{7b}$$

indicele superior (i) din aceste formule fiind pus pentru a arăta care este porțiunea de aripă căreia i se atașează dezvoltarea respectivă.

Vom introduce acum cîteva denumiri specifice problemei mixte, pe care le vom utiliza în paragrafele următoare.

În acest scop, vom considera o aripă triunghiulară subţire sau de grosime simetrică (fig. 1) avînd dată pe porţiunea OA_2M distribuţia de presiune, iar pe suprafaţa OMA_1 distribuţia de incidenţă. Linia OM şi ori care alta ca aceasta, care separă o regiune a aripii de presiune dată de una de incidenţă dată, o vom denumi muchie mixtă, prin analogie cu muchia directă OS_1 care separă două porţiuni de aripă de incidenţă dată sau o muchie indirectă OS_2 care separă două porţiuni ale aripii de presiune dată.

Bordul de atac OA_1 în vecinătatea căruia condiţiile la limită sînt analoage celor de la bordul de atac al aripii directe (de incidenţă dată) îl vom denumi bord de atac direct, iar bordul de atac OA_2, pentru motive similare, îl vom denumi bord de atac indirect.

2. ARIPA TRIUNGHIULARĂ SUBŢIRE

Condiţii la limită. Să considerăm că aripa triunghiulară din figura 1 este subţire, iar muchia mixtă OM o separă în două regiuni distincte şi anume ;

a) Suprafaţa OA_2M pe care este dată distribuţia de presiune, iar pe această suprafaţă vom considera că avem o muchie indirectă OS_2 aşa că făcînd în formulele (7a), (7b) $m = n - 1$, rezultă pentru distribuţia vitezei axiale de perturbaţie (sau a presiunii) pe suprafaţa OS_2M

$$u^{(1)} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(1)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q , \tag{8a}$$

şi respectiv pe suprafaţa OS_2A_2

$$u^{(2)} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(2)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q , \tag{8b}$$

b) Suprafaţa OA_1M pe care este dată distribuţia de incidenţă. Pe această suprafaţă vom considera că avem o muchie directă OS_1, astfel că distribuţia vitezei verticale de perturbaţie pe suprafaţa OS_1M va fi

$$w^{(2)} = \sum_{q=0}^{n-1} w^{(1)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q , \tag{9a}$$

şi respectiv pe suprafaţa OS_1A_1

$$w^{(1)} = \sum_{q=0}^{n-1} w^{(2)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q . \tag{9b}$$

Din relaţiile de compatibilitate (3) se deduce următoarea legătură între funcţiile $F_{n-q,q,0}$ şi $F_{n-q-1,q,1}$

$$d(\Phi_{n-q,q,0} + i\,\Phi'_{n-q,q,0}) = \frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\, d(\Phi_{n-q-1,q,1} + i\,\Phi'_{n-q-1,q,1}), \tag{10}$$

în baza căreia putem scrie imediat condițiile la limită în planul auxiliar $x = y + i\mathfrak{z}$.

Pentru simplificarea expunerii ulterioare, vom indica (în fig. 2*a*) numai condițiile la limită pentru aripa cu borduri de atac subsonice, iar pentru celelalte cazuri cînd bordurile de atac sau muchiile sînt supersonice, vom arăta că se extind concluziile de la aripa cu bordurile de atac subsonice.

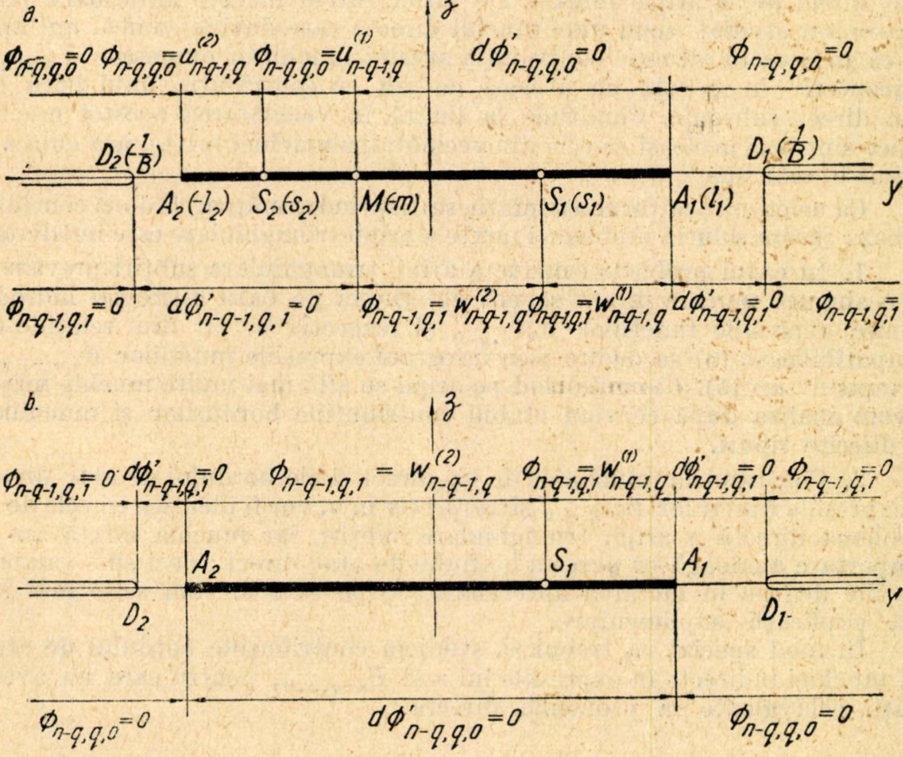

a.
$\mathfrak{z}$
$\phi_{n-\bar{q},q,\bar{0}}=0$
$\phi_{n-q,q,\bar{0}}=u^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\phi_{n-q,q,\bar{0}}=u^{(1)}_{n-q-1,q}$
$d\phi'_{n-q,q,\bar{0}}=0$
$\phi_{n-q,q,0}=0$
$D_2(-\frac{1}{B})$
$D_1(\frac{1}{B})$
$A_2(-l_2)$
$S_2(s_2)$
$M(m)$
$S_1(s_1)$
$A_1(l_1)$
y
$\phi_{n-q-1,q,\bar{1}}=0$
$d\phi'_{n-q-1,q,\bar{1}}=0$
$\phi_{n-q-1,q,\bar{1}}=w^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\phi_{n-q-1,q,\bar{1}}=w^{(1)}_{n-q-1,q}$
$d\phi'_{n-q-1,q,\bar{1}}=0$
$\phi_{n-q-1,q,\bar{1}}=0$
b.
$\mathfrak{z}$
$\phi_{n-q-1,q,\bar{1}}=0$
$d\phi'_{n-q-1,q,\bar{1}}=0$
$\phi_{n-q-1,q,\bar{1}}=w^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\phi_{n-q-1,q,\bar{1}}=w^{(1)}_{n-q-1,q}$
$d\phi'_{n-q-1,q,\bar{1}}=0$
$\phi_{n-q-1,q,\bar{1}}=0$
A_2
S_1
A_1
D_2
D_1
y
$\phi_{n-q,q,0}=0$
$d\phi'_{n-q,q,0}=0$
$\phi_{n-q,q,0}=0$

Fig. 2 *a* și *b*

Analizînd aceste condiții la limită (fig. 2*a*) se vede că tăietura MA_1 pe care este dată viteza verticală (9a, b) este linie de curent pentru funcțiile $F_{n-q,q,0}$, iar restul axei absciselor, inclusiv porțiunea aripii A_2M pe care este dată presiunea este linie de egal potențial. Comparînd aceste condiții la limită cu cele de la aripa subțire cu borduri de atac subsonice, pe care este dată numai distribuția de incidență (problema directă) (fig. 2*b*) este evidentă analogia condițiilor la limită.

Dacă bordul de atac direct OA_1 sau muchia mixtă OM sînt supersonice $\left(|l_1| > \frac{1}{B}, |m| > \frac{1}{B}\right)$ urma porțiunii supersonice a aripii $\left(\frac{1}{B} < |x| < l_1 \text{ sau } m\right)$

este linie de egal potenţial (10) (deoarece fiind dat $\Phi_{n-q-1,q,1} = \mathrm{ct}$ rezultă $d\,\Phi_{n-q,q,0} = 0$ şi invers) deci şi în această situaţie condiţiile la limită sînt analoage cu cele de la o aripă triunghiulară subţire [8].

Din cele spuse mai sus rezultă că muchia mixtă OM are o comportare identică cu aceea a unui bord de atac direct de la aripa subţire, atît în cazul cînd este subsonică cît şi cînd este supersonică, deci şi contribuţia ei în $F_{n-q,q,0}$ şi respectiv în u va fi identică cu contribuţia unui bord de atac direct de la aripa subţire. De altfel, într-o lucrare anterioară [13] în care s-a studiat cazul unei muchii directe care devine sonică, am arătat că în această situaţie contribuţia acestei muchii în expresiile $F_{n-q,q,0}$ şi respectiv în u este de aceeaşi natură cu contribuţia unui bord de atac direct subsonic. Condiţiile la limită în vecinătatea acestei muchii sonice sînt însă aceleaşi ca cele din vecinătatea muchiei mixte, aşa cum am definit-o mai sus.

Ca urmare a acestor consideraţii, se desprind următoarele două concluzii pe baza cărora soluţia problemei mixte a aripii triunghiulare este imediată :

1. În cazul problemei mixte a aripii triunghiulare subţiri prevăzute cu o singură muchie mixtă se pot determina pe baza analogiei hidrodinamice expresiile funcţiilor $F_{n-q,q,0}$ şi respectiv u, iar din relaţiile de compatibilitate (3) se deduc prin integrare expresiile funcţiilor $F_{n-q-1,q,1}$ şi respectiv w (4b). Cazurile cînd pe aripă se află mai multe muchii mixte le vom analiza după ce vom stabili contribuţiile bordurilor şi muchiilor de diferite tipuri.

2. Contribuţiile muchiilor de tip direct şi ale bordului de atac direct în expresiile funcţiilor $F_{n-q,q,0}$ şi respectiv în u, vor fi identice cu cele de la problema directă a aripii triunghiulare subţiri, iar muchia mixtă are o comportare analoagă cu aceea a bordului de atac direct ; deci sînt valabile relaţiile deduse în lucrarea anterioară [8] pe care le vom scrie mai jos fără explicaţii suplimentare.

În mod special va trebui să studiem contribuţiile bordului de atac şi a muchiei indirecte în expresiile lui u şi $F_{n-q,q,0}$, pentru care nu avem relaţii echivalente la problema directă.

3. DETERMINAREA CONTRIBUŢIILOR BORDURILOR ŞI MUCHIILOR ÎN EXPRESIA FUNCŢIILOR $F_{n-q,q,0}$ ŞI u

Contribuţia bordului de atac indirect şi a muchiei mixte. Ca şi în cazul problemei directe [8] pentru a simplifica realizarea condiţiilor la limită din planul $x = y + i\mathfrak{z}$ (fig. 2) vom face transformarea

$$X^2 = \frac{m + x}{l_1 - x} \tag{11}$$

şi obţinem configuraţia din figura 3, în care segmentul MA_1 este reprezentat pe axa reală şi anume partea corespunzătoare extradosului pe semiaxa $(0, +\infty)$ iar cea corespunzătoare intradosului pe semiaxa $(-\infty, 0)$.

Restul axei reale din planul x va fi reprezentat de axa imaginară din planul X. Punctul $X = iH_2$ este corespondentul bordului de atac indirect unde am notat

$$H_2 = \sqrt{\frac{l_2 - m}{l_1 + l_2}}. \tag{12}$$

În cazul mişcării conice propriu-zise, contribuţia bordului de atac indirect la viteza axială de perturbaţie se obţine punînd în punctul

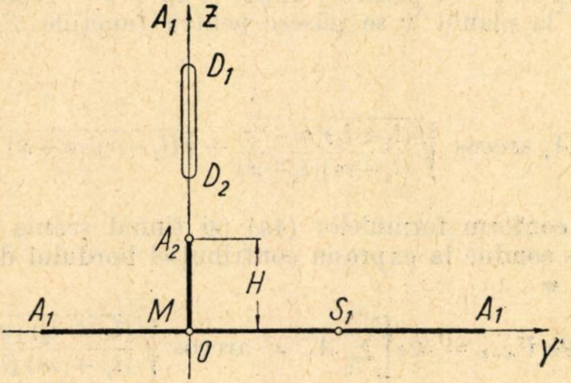


Fig. 3

$X = iH_2$ vîrtejul A_0' ln $(X - iH_2)$ iar în punctul $X = - iH_2$ vîrtejul $- A_0' \ln (X + iH_2)$, care împreună satisfac condiţiile la limită ale problemei. Constanta A_0' este imaginară. Rezultă deci că funcţiile $F_{n-q,\,q,\,0}$ vor conţine în această situaţie singularităţile

$$\ln(X - iH_2), \frac{1}{X - iH_2}, \frac{1}{(X - iH_2)^2} \dots, \frac{1}{(X - iH_2)^{n-1}}. \tag{13}$$

Condiţiile la limită, aşa cum le-am indicat (pe fig. 2) vor fi satisfăcute în planul X asociind vîrtejului A_0' ln $(X - iH_2)$ vîrtejul $- A_0'$ ln $(X + iH_2)$ şi la fiecare din multipolii $\frac{(i)^j\ A_j}{(X - iH_2)^j}$ multipolii $\frac{(-i)^j A_j'}{(X + iH_2)^j}$ constantele A_j' fiind de asemenea imaginare. Se observă imediat că axele multipolilor de ordin impar sînt perpendiculare pe axele multipolilor de ordin par.

Expresia lui $F_{n-q,\,q,\,0}$ se obţine prin însumarea acestor singularităţi

$$F_{n-q,\,q,\,0} = A_0' \ln \frac{X - iH_2}{X + iH_2} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j' \left[\frac{(i)^j}{(X - iH_2)^j} - \frac{(-i)^j}{(X + iH_2)^j} \right] \tag{14}$$

şi efectuînd calculele în cel de al doilea termen din membrul drept, găsim

$$\frac{(i)^j}{(X-iH_2)^j}-\frac{(-i)^j}{(X-iH_2)^j}=\frac{(i)^j\left[(X+iH_2)^j-(iH_2-X)^j\right]}{(X^2+iH_2^2)^j}=$$
$$=i\,\frac{X(C_0+C_2X^2+\ldots+C_{2p}X^{2p})}{(X^2+H_2^2)^j} \tag{15}$$

unde vom lua $2p=j-1$ pentru j impar şi $2p=j-2$ pentru j par.

Revenind la planul x se găsesc pentru funcţiile $F_{n-q\,.\,q\,.\,0}$ expresii de forma

$$F_{n-q\,.\,q\,.\,0}=A_0\arccos\sqrt{\frac{(l_1+l_2)(m+x)}{(l_1+m)(l_2+x)}}+\sqrt{(l_1-x)(m+x)}\,\frac{\sum\limits_{q=0}^{n-2}a_q\,x^q}{(x+l_2)^{n-1}}, \tag{16}$$

care însumate conform formulelor (4a) (şi ţinînd seama că $U\to\infty$ ca $i\ln(l_2+x)$) ne conduc la expresia contribuţiei bordului de atac indirect în expresia lui u

$$\frac{u}{x_1^{n-1}}=\mathcal{Re}\,U_{n-1}=\mathcal{Re}\left[\sum_{q=0}^{n-1}A_q^{(2)}\,x^q\arccos\sqrt{\frac{(l_1+l_2)(m+x)}{(l_1+m)(l_2+x)}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{q=0}^{n-2}D_q\,x^q\sqrt{(l_1-x)(m+x)}\right], \tag{17}$$

valabilă pentru orice poziţie a bordului de atac indirect în raport cu conul Mach.

Indicele superior (2) de la constante a fost pus pentru a face deosebirea dintre constantele din contribuţia bordului de atac indirect în expresia lui u şi constantele contribuţiilor celorlalte singularităţi.

În cazul cînd muchia mixtă sau bordul de atac direct devin supersonice, rezultă necesitatea efectuării următoarelor înlocuiri în relaţiile (11) (16) şi (17)

$m=\dfrac{1}{B}$ — dacă muchia mixtă este supersonică;

$l_1=\dfrac{1}{B}$ — dacă bordul de atac direct este supersonic;

$m=\dfrac{1}{B},\ l_1=\dfrac{1}{B}$ — dacă muchia mixtă şi bordul de atac direct sînt supersonice în acelaşi timp.

Deoarece condiţiile la limită în vecinătatea unei muchii indirecte de pe suprafaţa OA_2M, situată de exemplu la distanţa $-s_2$ de origină ($|s_2|>|m|$), sînt identice cu cele din vecinătatea unui bord de atac indirect, se poate demonstra că aceasta va avea aceeaşi contribuţie în

$F_{n-q,q,0}$ şi respectiv U_{n-1} ca şi bordul de atac indirect, deci sînt valabile tot formulele (16,17) în care se înlocuieşte l_2 cu s_2 (muchia indirectă fiind tot la stînga originii).

Contribuţia muchiei directe. În cazul cînd muchia directă este subsonică bordul de atac direct şi muchia mixtă fiind de asemenea subsonice, contribuţia ei în expresia lui u va fi [8]

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\,U_{n-1} = \mathcal{R}e\left[\sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(1)} x^q \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(l_1 - s_1)(x+m)}{(l_1+m)(x-s_1)}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_q x^q \sqrt{(m+x)(l_1-x)}\right], \tag{18}$$

unde s-a presupus că muchia directă se află la dreapta originii ($s_1 > 0$) (fig. 2*a*), dar care sînt valabile şi în cazul cînd muchia se află la stînga originii (în acest caz se înlocuieşte s_1 cu $-s_1$). Dacă bordul de atac direct este supersonic se înlocuieşte în formula de mai sus l_1 cu $\frac{1}{B}$.

În situaţia cînd fie bordul de atac direct, fie muchia mixtă, sînt supersonice, muchia directă poate fi şi ea supersonică şi se foloseşte tot formula (18) în care înlocuim „argch” cu „arccos”.

Contribuţia bordului de atac direct şi a muchiei mixte. **Pe baza analizei condiţiilor la limită în cazul problemei mixte, s-a tras concluzia că comportarea muchiei mixte este identică cu aceea a unui bord de atac subsonic de la aripa triunghiulară subţire, deci vom putea folosi relaţiile deduse în lucrările anterioare [8], [11] şi vom considera că urma muchiei mixte în planul $x = y + iz$ se află în punctul $x = -m$ iar bordul de atac direct în $x = l_1$.**

a) Contribuţia bordului de atac direct subsonic $\left(l_1 < \frac{1}{B}\right)$

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\,U_{n-1} = \mathcal{R}e\sqrt{\frac{m+x}{l_1-x}}\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q . \tag{19}$$

b) Contribuţia muchiei mixte subsonice

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\,U_{n-1} = \mathcal{R}e\sqrt{\frac{l_1-x}{m+x}}\sum_{q=0}^{n-1} C_q\, x^q . \tag{20}$$

c) Contribuţia bordului de atac direct supersonic $\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\,U_{n-1} = \mathcal{R}e\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q \arccos\sqrt{\frac{(m+l_1)(1-Bx)}{(1+Bm)(l_1-x)}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\, x^q \sqrt{(m+x)(1-Bx)}\right]. \tag{21}$$

d) Contribuţia muchiei mixte supersonice $\left(|m| > \frac{1}{B}\right)$

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\, U_{n-1} = \mathcal{R}e\left[\sum_{q=0}^{n-1} C_q\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(m+l_1)\,(1+Bx)}{(1+Bl_1)\,(m+x)}} + \right. \qquad (22)$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\, x^q \sqrt{(1+Bx)\,(l_1-x)}\right].$$

Trebuie să precizăm că aceste formule au fost scrise considerînd că bordul de atac direct se află la dreapta originii iar muchia mixtă la stînga originii, aşa ca în figura 2*a*. Dacă însă bordul de atac direct s-ar afla la stînga originii şi muchia mixtă la dreapta, se schimbă între ele formulele care dau contribuţia lor în expresia lui u.

Formulele de mai sus sînt de asemenea valabile dacă muchia mixtă este supersonică. În acest caz, se înlocuieşte în formulele (19) şi (21) m cu $\frac{1}{B}$ şi respectiv dacă bordul de atac direct este supersonic, atunci înlocuim în formulele (20) şi (22) l_1 cu $\frac{1}{B}$.

Observaţie importantă. La studiul problemei directe a aripii triunghiulare [8] s-a arătat că în cazul cînd bordul de atac devine bord de fugă, acesta nu mai are nici o contribuţie în expresia vitezei axiale de perturbaţie. Acest lucru este justificat de faptul că în vecinătatea bordului de fugă fenomenul este subsonic, deci conform ipotezei lui Jukovski viteza trebuie să fie nulă de-a lungul bordului de fugă respectiv.

Deoarece, după cum am văzut, muchia mixtă are o comportare identică cu cea a unui bord de atac direct, rezultă că dacă muchia mixtă subsonică se află de aceeaşi parte a originii cu un bord de atac direct şi deci în umbra aerodinamică a acestuia, contribuţia ei la viteza axială de perturbaţie va fi de asemenea nulă. Dacă însă, muchia mixtă şi bordul de atac direct se află de aceeaşi parte a originii şi sînt ambele supersonice, contribuţiile fiecăreia în parte sînt de natura unor vîrtejuri de ordin superior.

4. APLICAŢII

În cazul cînd considerăm o aripă definită din punct de vedere geometric (fig. 1) în care dezvoltările lui u (8a, b) pe porţiunea de presiune dată şi respectiv w (9a, b) pe porţiunea de incidenţă dată, sînt de acelaşi grad, este util să indicăm expresiile vitezei axiale de perturbaţie valabile pe întreaga aripă. Acestea se obţin prin însumarea tuturor contribuţiilor bordurilor şi muchiilor aripii;

a) Pentru aripa subţire avînd bordul de atac direct şi muchia mixtă subsonice, o muchie directă, una indirectă şi un bord de atac indirect, se însumează contribuţiile respective şi obţinem

$$u = x_1^{n-1} \mathcal{R}e \left\{ \frac{\sum\limits_{q=0}^{n} C_q x^q}{\sqrt{(l_1 - x)\,(m + x)}} + \sum_{q=0}^{n-1} \left(C_q^{(1)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1 - s_1)(x + m)}{(l_1 + m)(x - s_1)}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + C_q^{(2)} x^q \arccos \sqrt{\frac{(l_1 + s_2)(m + x)}{(l_1 + m)(x + s_2)}} + A_q^{(2)} x^q \arccos \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)(m + x)}{(l_1 + m)(x + l_2)}} \right) \right\}. \tag{23}$$

b) Pentru aripa subţire avînd spre exemplu bordul de atac direct supersonic, muchia mixtă subsonică, o muchie directă, o muchie indirectă şi un bord de atac indirect, se găseşte după însumarea contribuţiilor respective,

$$u = x_1^{n-1} \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} \left[C_q x^q \sqrt{\frac{1 - Bx}{m + x}} + A_q^{(2)} x^q \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)\,(m + x)}{(1 + Bm)\,(l_2 + x)}} + \right.$$
$$+ C_q^{(1)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - Bs)\,(x + m)}{(1 + Bm)\,(x - l_1)}} + C_q^{(2)} x^q \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bs_2)\,(m + x)}{(1 + Bm)(s_2 + x)}} + \tag{24}$$
$$\left. + A_q^{(1)} x^q \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{(m + l_1)\,(1 - Bx)}{(1 + Bm)\,(l_1 - x)}} \right].$$

c) Pentru aripa subţire avînd bordul de atac direct şi muchia mixtă supersonice, o muchie directă şi un bord de atac indirect, rezultă în mod similar

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} \left(A_q^{(2)} x^q \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl_2)(1 + Bx)}{2B\,(l_2 + x)}} + \right.\right.$$
$$+ C_q^{(2)} x^q \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bs_2)(1 + Bx)}{2B\,(s_2 + x)}} + C_q x^q \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bm)(1 + Bx)}{2B\,(m + x)}} + \tag{25}$$
$$\left. + C_q^{(1)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - Bs_1)(1 + Bx)}{2B\,(x - s_1)}} + A_q^{(1)} x^q \arccos \sqrt{\frac{(1 + Bl_1)(1 - Bx)}{2B\,(l_1 - x)}} \right) +$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} D_q x^q \sqrt{1 - B^2 x^2} \right\}.$$

Tot ca aplicaţie este interesant de arătat că din expresiile deduse pentru problema mixtă a aripii triunghiulare, se pot deduce expresiile corespunzătoare pentru problema directă sau pentru problema indirectă.

Astfel, dacă în formula (23) facem $s_2 = l_2 = m$ atunci se observă că se anulează termenii corespunzători bordului de atac indirect OA_2 şi a muchiei indirecte OS_2, iar expresia rămasă este cea care defineşte viteza axială de perturbaţie a unei aripi triunghiulare cu distribuţie de incidenţă dată, prevăzută cu o muchie de tip direct.

Dacă în aceeaşi formulă facem $s_1 = l_1 = -m$ primii doi termeni dau pe aripă $(-l_2 < x < -m)$ valori imaginare, iar funcţia arccos $\sqrt{\frac{(l_1+s_2)(m+x)}{(l_1+m)(x+s_2)}}$ din cel de-al treilea termen şi arccos $\sqrt{\frac{(l_1+l_2)(m+x)}{(l_1+m)(x+l_2)}}$ din cel de-al patrulea iau valoarea $\frac{\pi}{2}$ pe aripă, deci rezultă pentru u o expresie polinomială, aşa cum de altfel a fost dată prin condiţiile iniţiale ale problemei pe porţiunea OA_2M.

5. DETERMINAREA CONTRIBUŢIILOR BORDURILOR ŞI MUCHIILOR ÎN EXPRESIA LUI *w*

Să revenim la problema determinării expresiei vitezei verticale de perturbaţie valabilă pe întreaga aripă, pe care am schiţat-o mai sus. Am văzut că expresia lui w este definită de relaţia (4b), în care apar funcţiile $F_{n-q-1.\,q.\,1}$ pe care am spus că nu le putem determina pe baza analogiei hidrodinamice.

Din relaţiile de compatibilitate (3) se găseşte următoarea legătură între funcţiile $F_{n-q-1.\,q.\,1}$ şi funcţia $F_{1.\,n-1.\,0}$

$$dF_{n-q-1.\,q.\,1} = (-1)^{n-q} i x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, dF_{1.\,n-1.\,0} \tag{26}$$

care introdusă în formula (4b) dă

$$w = \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q} x^{q} (-1)^{n-q} i \int_{\text{cerc Mach}}^{\text{aripă}} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, dF_{1.\,n-1.\,0}. \tag{27}$$

Ştiind, de asemenea, că există relaţia

$$dF_{1.\,n-1.\,0} = \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx, \tag{28}$$

formula precedentă devine

$$\frac{w}{x_1^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q} x^{q} (-1)^{n-1} i \int_{\text{cerc Mach}}^{\text{aripă}} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx \tag{29}$$

de unde se vede că expresia lui w pe aripă poate fi obţinută prin integrare îndată ce expresia lui u este cunoscută.

6. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Pentru ca expresiile deduse mai sus pentru viteza axială de perturbaţie u să fie complet determinate, mai este necesar să indicăm şi modul de calcul al constantelor ce apar în această formulă. Ca exemplificare să considerăm cazul aripii care are un bord de atac direct, unul indirect şi cîte o muchie directă, indirectă şi mixtă (fig. 1).

Vom presupune că pe porţiunea aripii de presiune dată viteza axială de perturbaţie este definită de formulele (8*a*, *b*), iar pentru vitezele verticale pe porţiunea de incidenţă dată, sînt valabile dezvoltările (9*a*, *b*).

În această situaţie, în funcţie de poziţiile bordurilor şi muchiilor în raport cu conul Mach, am văzut că u este definit de formulele (23), (24) sau (25) de unde se vede că numărul constantelor care trebuie determinate este $(4n + 1)$, $(5n)$ şi respectiv $(6n - 1)$.

Pentru determinarea acestor constante vom utiliza următoarele formule care se deduc pornind de la relaţiile de compatibilitate

$$\Phi_{n-q-1,q,1} = \mathcal{Re}\,(-1)^{n-q}\, i \int x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx\,, \tag{30}$$

$$\Phi_{n-q;q,0} = \mathcal{Re}\,(-1)^{n-q-1} \int x^{n-q-1} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx \tag{31}$$

şi care stabilesc legătura între viteza axială de perturbaţie şi funcţiile $\Phi_{n-q,q,0}$ şi $\Phi_{n-q-1\ q,1}$.

În baza acestor formule o parte din relaţiile de determinare a constantelor rezultă din condiţia ca funcţiile $\Phi_{n-q,q,0}$ şi $\Phi_{n-q-1,q,1}$, să ia valorile impuse prin condiţiile iniţiale, atît pe porţiunea aripii de presiune dată (8a, b), cît şi pe porţiunea aripii de incidenţă dată (9a, b),

$$\Phi^{(2)}_{n-q,q,0} = \mathcal{Re}\,(-1)^{n-q-1} \int_{x_0}^{x_2} x^{n-q-1} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx\,, \tag{32a}$$

$$\Phi^{(1)}_{n-q,q,0} = \mathcal{Re}\,(-1)^{n-q-1} \int_{x_0}^{x_1} x^{n-q-1} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx\,, \tag{32b}$$

$$\Phi^{(2)}_{n-q-1,q,1} = \mathcal{Re}\,(-1)^{n-q}\, i \int_{x_0}^{x_2'} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx\,, \tag{32c}$$

$$\Phi^{(1)}_{n-q-1,q,1} = \mathcal{Re}\,(-1)^{n-q}\, i \int_{x_0}^{x_1'} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{d_1^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx\,, \tag{32d}$$

iar o altă serie de relaţii se obţin punînd condiţia ca derivatele de ordin n, $\Phi_{n-q,q,0}$ şi $\Phi_{n-q-1,q,1}$, să nu-şi schimbe valoarea în vecinătatea originii şi a punctelor $x = \pm \frac{1}{B}$ de unde rezultă

$$\left(\frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\right)_{x=0} = 0, \tag{33a}$$

$$\left|(1 + Bx)^{\frac{2p-1}{2}} \frac{d^p U_{n-1}}{dx^p}\right|_{x=-\frac{1}{B}} = 0\ [p = 1, 2 \ldots, (n-1)], \tag{33b}$$

$$\left|(1 - Bx)^{\frac{2p-1}{2}} \frac{d^p U_{n-1}}{dx^p}\right|_{x=\frac{1}{B}} = 0\ [p = 1, 2 \ldots (n-1)], \tag{33c}$$

aceste ultime două condiţii fiind utilizate numai cînd o porţiune a aripii este supersonică, în celelalte cazuri ele fiind identic satisfăcute. Vom preciza că în formulele de mai sus am indicat cu x_0 un punct în care scurgerea este neperturbată ($u = v = w = 0$); cu x_2 un punct de pe suprafaţa OA_2S_2, cu x_1 un punct de pe suprafaţa OS_2M, cu x_1' un punct de pe suprafaţa OMS_1 şi cu x_2' un punct de pe suprafaţa OS_1A_1 (fig. 1). Cele 2 constante aferente termenului transcendent din contribuţia în expresia lui u a unei muchii sau a unui bord de atac de tip direct sau indirect, se pot obţine mai simplu, pornind de la relaţiile (32a, b) şi (32c) calculînd semireziduul în punctul $x = -l_2$ sau respectiv $x = s_1$ $x = -s_2$, de unde rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{Re}\,(-1)^{M-q}\, i \int_{\Gamma_{s_1}} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx = \\ = \frac{(n-1)!}{C_{n-1}^q} \left(w_{n-q-1,q}^{(2)} - w_{n-q-1,q}^{(1)}\right), \end{aligned} \tag{34a}$$

$$\mathcal{Re}\,(-1)^{n-q-1} \int_{\Gamma_{l_2}} x^{n-q-1} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx = \frac{(n-1)!\ u_{n-2-1,q}^{(1)}}{C_{n-1}^q}, \tag{34b}$$

$$\mathcal{Re}\,(-1)^{n-q-1} \int_{\Gamma_{s_2}} x^{n-q-1} \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx = \frac{(n-1)!\,(u_{n-q-1,q}^{(2)} - u_{n-q-1,q}^{(1)})}{C_{n-1}^q}, \tag{34c}$$

Γ_{s_1} Γ_{s_2} şi Γ_{l_2} fiind semicercuri cu raza infinit mică descrise în jurul punctelor $y = s_1$, $y = -s_2$ şi respectiv $y = -l_2$.

Pentru aripa avînd bordul de atac direct şi muchia mixtă subsonice, vom folosi pentru determinarea celor $n + 1$ constante ale termenului algebric relaţiile (32c) şi (33a) iar restul de $3n$ constante se determină din sistemul de ecuaţii obţinut pe baza relaţiilor (34a, b, c).

În cazul aripii avînd bordul de atac direct supersonic şi muchia mixtă subsonică (24), cele n constante ale termenului algebric se determină folosind cele n ecuații care rezultă din (32c) restul de $4n$ constante putînd fi determinat din sistemele de ecuații definite de formule analoage cu (34a) şi (34b).

În expresia vitezei axiale de perturbație a aripii, avînd muchia mixtă şi bordul de atac direct supersonic, apar, după cum am văzut (25), $6n - 1$ constante, pentru cele $5n$ constante aferente termenilor transcendenți, vom utiliza formule analoage cu (34 a, b), iar restul de $n-1$ constante se obține rezolvînd un sistem de $(n - 1)$ ecuații ce rezultă utilizînd o parte din formulele (33a, b, c), restul relațiilor fiind identic satisfăcute.

7. CAZUL ARIPII TRIUNGHIULARE SUBȚIRI, PREVĂZUTĂ CU DOUĂ MUCHII MIXTE SUBSONICE

Pînă acum ne-am ocupat de problema mixtă a aripii triunghiulare subțiri, în ipoteza că pe aripă există o singură muchie mixtă, subsonică. Prin metoda expusă mai sus, se pot studia şi aripile triunghiulare subțiri prevăzute cu două muchii mixte subsonice, în cazul cînd porțiunea pe care este dată distribuția de incidență este cuprinsă între cele două muchii (fig. 4). Într-adevăr, în această situație condițiile la limită sînt analoage cu cele din (fig. 2a) şi deci sînt valabile relațiile deduse mai sus.

Cazul aripii prevăzute cu două muchii mixte subsonice, între care este cuprinsă porțiunea aripii de presiune dată (fig. 5) se poate studia tot pe baza analogiei hidrodinamice, numai dacă bordurile de atac ale aripii sînt supersonice. În această situație, scurgerea de pe extrados este independentă de scurgerea de pe intrados, iar condițiile la limită sînt analoage cu cele de la aripa de grosime simetrică, deci se pot determina pe baza analogiei hidrodinamice, expresiile lui w iar u va rezulta prin integrare. Pentru acest caz, urmează deci să aplicăm rezultatele obținute în continuare la studiul aripii de grosime simetrică.

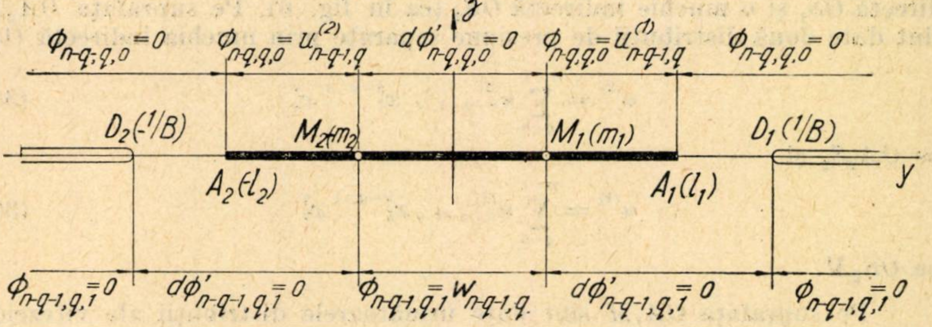


Fig. 4

Asupra numărului de muchii mixte supersonice nu este necesar să facem nici o restricţie, deoarece ca şi muchiile de tip direct sau indirect supersonice, ele separă numai porţiuni ale aripii care sînt linii de egal potenţial în planul $x = y + i\mathfrak{z}$.

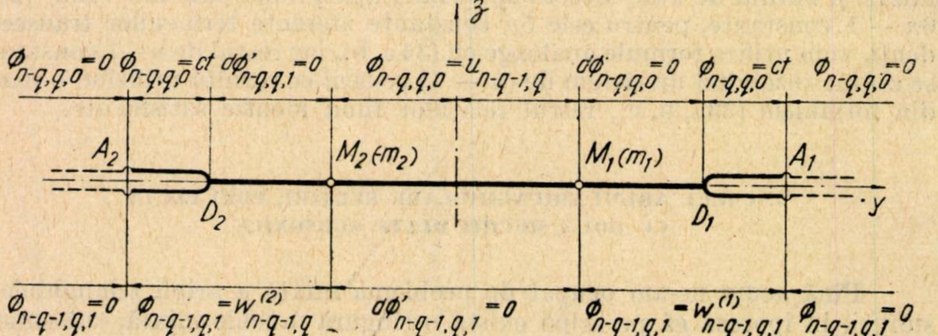

$\mathfrak{z}$
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=ct$
$d\Phi'_{n-q,q,1}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=u_{n-q-1,q}$
$d\Phi'_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=ct$
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
A_2
$M_2(-m_2)$
$M_1(m_1)$
A_1
D_2
D_1
y
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=w^{(2)}_{n-q-1,q}$
$d\Phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=w^{(1)}_{n-q-1,q,1}$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$

Fig. 5

8. ARIPA DE GROSIME SIMETRICĂ

Condiţii la limită. Ca şi în cazul aripii subţiri, pentru simplificarea expunerii vom trata cazul aripii de grosime simetrică cu ambele borduri de atac subsonice şi vom face apoi particularizările necesare pentru cazul aripii cu unul sau ambele borduri de atac supersonice. Vom presupune că pe aripa de grosime simetrică există o muchie mixtă OM, o muchie directă OS_1 şi o muchie indirectă OS_2 (ca în fig. 6). Pe suprafaţa OA_2M sînt date două distribuţii de presiune separate prin muchia indirectă OS_2

$$u^{(2)} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(2)}_{n-q-1,\,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q \tag{35}$$

pe OA_2S_2 şi

$$u^{(1)} = \sum_{q=0}^{n-1} u^{(1)}_{n-q-1,\,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q \tag{36}$$

pe OS_2M.

Pe suprafaţa OA_1M sînt date următoarele distribuţii ale vitezelor verticale de perturbaţie, separate prin muchia directă OS_1 :

$$w^{(1)} = \sum_{q=0}^{n-1} w^{(1)}_{n-q-1,\,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q, \tag{37}$$

pe OA_1S_2 şi

$$w^{(2)} = \sum_{q=0}^{n-1} w^{(2)}_{n-q-1,\,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q \tag{38}$$

pe OS_1M.

Funcțiile $F_{n-q,q,0}$ și $F_{n-q-1,q,1}$ care intervin în expresiile (4a) și (4b) ale lui u și respectiv w pe aripă sînt legate prin relațiile de compatibilitate scrise sub forma (10). Ținînd seama și de (35—38) obținem condițiile la limită în planul $x = y + i\mathfrak{z}$ reprezentate în (fig. 7*a*). În consecință, pentru mișcarea definită de potențialul fictiv $F_{n-q-1,q,1}$, porțiunea de aripă definită prin tăietura A_2M este o linie de curent, iar restul axei Oy este o echipotențială. Deci, în cazul problemei mixte a aripii de grosime simetrică vom putea determina pe baza analogiei hidrodinamice pe $F_{n-q-1,q,1}$. Conform cu (4b) vom obține pe w pe aripă.

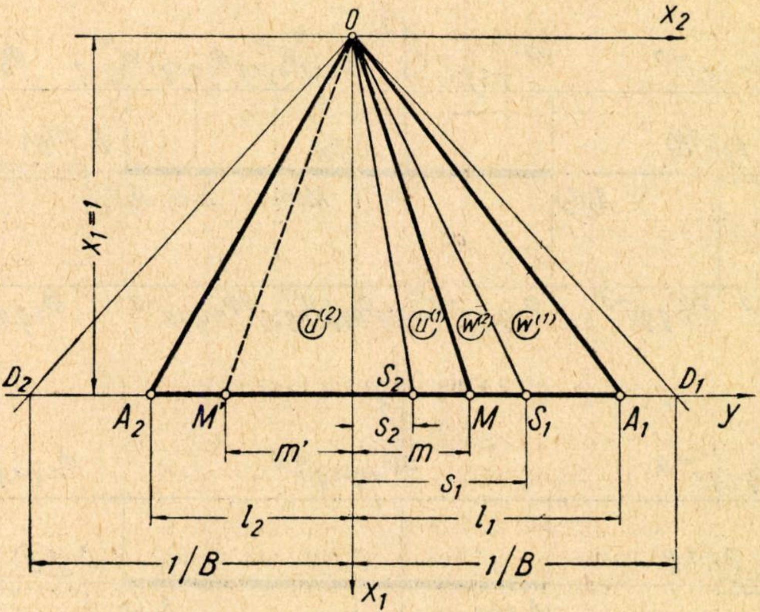


Fig. 6

Dacă comparăm condițiile la limită ale problemei mixte cu acelea ale problemei indirecte de la aripa de grosime simetrică (fig. 7*b*), vom constata analogia dintre condițiile la limită pe care trebuie să le îndeplinească funcția $F_{n-q-1,q,1}$ într-un caz și în celălalt, cu singura excepție că pe porțiunea MA_2 a axei Oy, care este o echipotențială în ambele probleme, trebuie să avem $\Phi_{n-q-1,q,1} = 0$ în cazul problemei indirecte și respectiv în cazul problemei mixte

$$\Phi_{n-q-1,q,1} = a\, w^{(1)}_{n-q-1,q} \text{ pe } OA_1S_1 \tag{39a}$$

și

$$\Phi_{n-q-1,q,1} = a\, w^{(2)}_{n-q-1,q} \text{ pe } OS_1M \quad \left(a = \frac{(n-1)\,!}{C^q_{n-1}}\right). \tag{39b}$$

În baza analogiei hidrodinamice [7] expresia lui $F_{n-q-1,q,1}$ şi respectiv w se obţin prin însumarea contribuţiilor bordului de atac OA_1 (direct) şi OA_2 (indirect) şi a muchiilor OS_1 (directă), OS_2 (indirectă) şi OM (mixtă).

Analizînd aceste condiţii, constatăm că bordul de atac indirect OA_2 şi muchia mixtă OM au contribuţii identice în expresia lui w cu bordurile de atac ale aripii de grosime simetrică în problema indirectă. În consecinţă, w va tinde la infinit pe OA_2 şi OM ca $(l_2 + x)^{-\frac{1}{2}}$ şi respectiv $(m - x)^{-\frac{1}{2}}$. Analog muchia mixtă indirectă OS_2 se comportă ca o muchie de pe o aripă de grosime simetrică în problema indirectă. În consecinţă, w va tinde la infinit pe această muchie la ln $(s_2 - x)$.

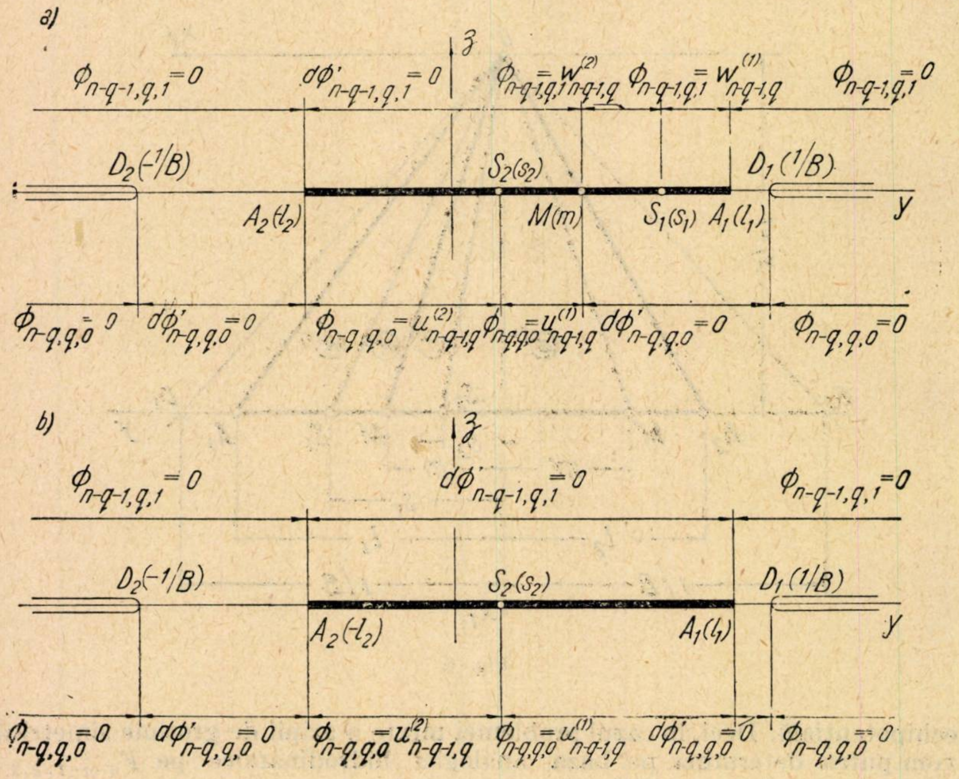

a)
z
$\phi_{n-q-1,q,1}=0$
$d\phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\phi_{n-q-1,q,1}=w^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\phi_{n-q-1,q,1}=w^{(1)}_{n-q-1,q}$
$\phi_{n-q-1,q,1}=0$
$D_2(-1/B)$
$S_2(s_2)$
$D_1(1/B)$
$A_2(l_2)$
$M(m)$
$S_1(s_1)$
$A_1(l_1)$
y
$\phi_{n-q,q,0}=0$
$d\phi'_{n-q,q,0}=0$
$\phi_{n-q,q,0}=u^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\phi_{n-q,q,0}=u^{(1)}_{n-q-1,q}$
$d\phi'_{n-q,q,0}=0$
$\phi_{n-q,q,0}=0$
b)
z
$\phi_{n-q-1,q,1}=0$
$d\phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\phi_{n-q-1,q,1}=0$
$D_2(-1/B)$
$S_2(s_2)$
$D_1(1/B)$
$A_2(-l_2)$
$A_1(l_1)$
y
$\phi_{n-q,q,0}=0$
$d\phi'_{n-q,q,0}=0$
$\phi_{n-q,q,0}=u^{(2)}_{n-q-1,q}$
$\phi_{n-q,q,0}=u^{(1)}_{n-q-1,q}$
$d\phi'_{n-q,q,0}=0$
$\phi_{n-q,q,0}=0$

Fig. 7

Reamintim de asemenea că, aşa cum s-a mai arătat [9], în problema indirectă apare cu necesitate o singularitate logaritmică suplimentară plasată în originea axelor de coordonate. În cele ce urmează vom utiliza pentru contribuţiile bordului de atac indirect OA_2, a muchiei mixte OM şi a muchiei indirecte OS_2 relaţiile deduse în lucrarea anterioară [9] şi pe care le vom da mai jos fără explicaţii suplimentare. În mod special va trebui să ne ocupăm de contribuţiile bordului de atac direct OA_1 şi a muchiei directe OS_1 în expresiile lui w.

Înainte de a trece la acest calcul vom face însă observaţia că problema mixtă a aripii de grosime simetrică este un fel de *problemă inversă* a problemei mixte a aripii subţiri, fapt care reiese din compararea condiţiilor la limită ale celor două probleme. Aceste condiţii fiind inverse una faţă de cealaltă, aşa cum s-a arătat mai sus, la aripa de grosime simetrică putem determina prin analogie hidrodinamică pe w în loc de u.

9. DETERMINAREA CONTRIBUŢIEI BORDULUI DE ATAC DIRECT OA_1 ŞI A MUCHIEI DIRECTE OS_1 ÎN EXPRESIA VITEZEI VERTICALE DE PERTURBAŢIE

Vom face de la început observaţia că este suficient să studiem contribuţia bordului de atac direct OA_1 în expresia vitezei verticale de perturbaţie w deoarece condiţiile la limită în vecinătatea muchiei directe OS_1 sînt identice cu cele din vecinătatea bordului de atac direct OA_1. Deci contribuţiile muchiei directe vor rezulta automat din cele ale bordului de atac direct, înlocuind în expresiile acestei contribuţii l_1 cu s_1.

După cum s-a mai arătat în mişcarea conică [9] pentru ca în punctul $y = s_1$ să avem asigurat saltul vitezei verticale de perturbaţie de la o valoare $w = w^{(1)}$ la o altă valoare $w = w^{(2)}$, w va trebui să tindă la infinit pe bordul OA_1 ca

$$W_{y\to l_1} = i K_0 \ln (l_1 - y). \tag{40}$$

Ca şi în lucrările anterioare [8], [9] vom admite că şi în cazul mişcărilor conice de ordin superior w tinde la infinit ca w de la mişcarea conică propriu-zisă. În consecinţă, funcţiile $F_{n-q-1\,.\,q\,.\,1}$ vor conţine în afara acestei singularităţi toate derivatele ei, pînă la ordinul $n - 1$ adică

$$i \ln (l_1 - y), \frac{i}{l_1 - y}, \frac{i}{(l_1 - y)^2} \cdots \frac{i}{(l_1 - y)^{n-1}}. \tag{41}$$

Pentru ca să putem realiza mai uşor condiţiile la limită pe care trebuie să le satisfacă funcţiile $F_{n-q-1\,.\,q}$ vom transforma planul $x = y + iz$ într-un plan auxiliar $X = Y + iZ$ definit prin transformarea

$$X^2 = \frac{m - x}{l_2 + x}. \tag{42}$$

Obţinem astfel configuraţia (din fig. 8) în care extradosul şi intradosul porţiunii A_2M a aripii sînt reprezentate pe axa reală, iar cealaltă porţiune A_1M a aripii prin tăietura corespunzătoare de pe axa imaginară. Tot pe axa imaginară este reprezentat şi conul Mach prin tăietura D_1D_2.

În acest plan condiţiile la limită se realizează uşor, asociind fiecărui vîrtej de forma $iA_0 \ln (iH - X)$ vîrtejul $-i\,A_0 \ln (iH + X)$ şi fiecărei singularităţi de forma $\frac{(i)^j A_j}{(iH - X)^j}$ o singularitate de forma $-\frac{(i)^j A_j}{(iH + X)^j}$.

Axele multipolilor pari sînt perpendiculare pe axele multipolilor de ordin impar. În expresiile de mai sus $Z = iH$ din planul X este omologul punctului $y = l_1$ din planul x

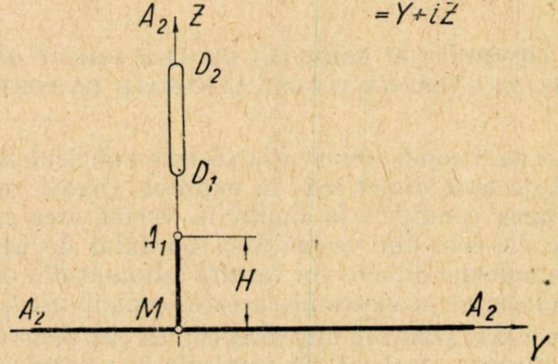


Fig. 8

$$H = \sqrt{\frac{l_1 - m}{l_1 + l_2}}. \tag{43}$$

Expresia lui $F_{n-q-1,\,q,\,1}$ va fi deci de forma

$$F_{n-q-1,\,q,\,1} = i\,A_0 \ln \frac{i\,H - X}{i\,H + X} + \sum_{j=1}^{n} A_j \left[\frac{i^j}{(iH - X)^j} - \frac{i^j}{(iH + X)^j} \right]. \tag{44}$$

Efectuînd sumarea din paranteză obţinem

$$\begin{aligned} \frac{i^j}{(iH - X)^j} - \frac{i^j}{(iH + X)^j} &= \frac{(-i)^j\,[(iH + X)^j - (iH - X)^j]}{(X^2 + H^2)^j} = \\ &= \frac{iX\,(\alpha_0 + \alpha_2 X^2 + \ldots + \alpha_{2p} X^{2p})}{(X^2 + H^2)^j}, \end{aligned} \tag{45}$$

unde $2p = j - 2$ pentru j par şi $2p = j - 1$ pentru j impar. Revenind la planul x obţinem deci

$$\begin{aligned} F_{n-q-1,\,q,\,1} &= A_0 \arccos \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)(m - x)}{(m + l_2)(l_1 - x)}} + \\ &+ \sqrt{(x - m)(l_2 + x)}\,\frac{\sum\limits_{q=0}^{n-2} \alpha_q x^q}{(l_1 - x)^{n-1}}. \end{aligned} \tag{46}$$

Ținînd seama de principiul singularității minime, utilizînd formulele (4b) și (46) și incluzînd și efectul singularității din origine, a cărei expresie este similară cu cea dată în [9] obținem următoarea contribuție a bordului de atac direct OA_1 în expresia vitezei verticale de perturbație

$$\begin{aligned} \frac{w^{(l_1)}}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)}\, x^q \arccos \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(m-x)}{(m+l_2)(l_1-x)}} + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\, x^q \sqrt{(m-x)(l_2+x)} + A_0\, x^{n-1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{m(x+l_2)}{(l_2+m)\,x}} \right\}. \end{aligned} \tag{47}$$

În cazul cînd bordul OA_2 devine supersonic, atunci contribuția sa în expresia lui w se obține tot cu formula de mai sus înlocuind l_2 cu $\frac{1}{B}\cdot$ În cazul în care muchia mixtă OM devine supersonică, vom face și înlocuirea $m = \frac{1}{B}\cdot$

Contribuția muchiei directe $y = s_1$ în expresia lui w este tot de forma (47) în care însă înlocuim l_1 cu s_1 (muchia directă este tot la dreapta originii). Obținem astfel

$$\begin{aligned} \frac{w^{(s_1)}}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(1)}\, x^q \arccos \sqrt{\frac{(s_1+l_2)(m-x)}{(m+l_2)(s_1-x)}} + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\, x^q \sqrt{(m-x)(l_2+x)} + A^{(0)}\, x^{n-1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{m(x+l_2)}{(l_2+m)\,x}} \right\}. \end{aligned} \tag{48}$$

10. CONTRIBUȚIILE MUCHIEI INDIRECTE, BORDULUI DE ATAC INDIRECT ȘI ALE MUCHIEI MIXTE ÎN EXPRESIILE VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE

Ținînd seama de [9] obținem

a) Contribuția muchiei indirecte OS_2

$$\begin{aligned} \frac{w^{(s_2)}}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \left\{ \sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(2)}\, x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(s_2+l_2)(m-x)}{(m+l_2)(s_2-x)}} + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\, x^q \sqrt{(l_2+x)(m-x)} + A^{(0)}\, x^{n-1} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{m(x+l_2)}{(m+l_2)\,x}} \right\}. \end{aligned} \tag{49}$$

În cazul în care bordul OA_2 sau muchia mixtă OM devin supersonice, înlocuim în această formulă $l_2 = \frac{1}{B}$ și respectiv $m = \frac{1}{B}\cdot$

Dacă muchia indirectă OS_2 este la stînga originii, contribuţia sa este de forma

$$\frac{w^{(-s_2)}}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\left\{\sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(2)}\, x^q \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(m+s_2)(x+l_2)}{(m+l_2)(x+s_2)}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\, x^q \sqrt{(l_2+x)(m-x)} + A^{(0)}\, x^{n-1} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{m(x+l_2)}{(m+l_2)\,x}}\right\}. \qquad (50)$$

Menţionăm că în cazul cînd bordul de atac indirect OA_2 este supersonic, contribuţia sa se obţine tot cu ajutorul formulei (50) în care facem înlocuirile $l_2 = \frac{1}{B}$, $s_2 = l_2$ şi $C_q^{(2)}\, x^q \operatorname{argch} = A_q^{(2)}\, x^q \arccos$. Analog, contribuţia muchiei mixte supersonice se obţine tot cu formula de mai sus în care facem înlocuirile $m = \frac{1}{B}$, $s_2 = m$ şi $C_q^{(2)}\, x^q \operatorname{argch} = C_q\, x^q \arccos$ iar dacă şi bordul de atac OA_2 este supersonic, facem în formula precedentă şi $l_2 = \frac{1}{B}$.

b) Contribuţia bordului de atac indirect subsonic OA_2

$$\frac{w^{(l_2)}}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\left\{\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(2)}\, x^q \sqrt{\frac{m-x}{l_2+x}} + A^{(0)}\, x^{n-1} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{m(x+l_2)}{(m+l_2)\,x}}\right\}. \qquad (51)$$

În cazul cînd muchia mixtă OM este subsonică facem $m = \frac{1}{B}$. Dacă bordul indirect l_2 devine supersonic utilizăm pentru contribuţia sa formula (50) cu înlocuirile indicate la punctul *a*).

c) Contribuţia muchiei mixte OM subsonice

$$\frac{w^{(m)}}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\left\{\sum_{q=0}^{n-1} C_q\, x^q \sqrt{\frac{l_2+x}{m-x}} + A^{(0)}\, x^{n-1} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{m(x+l_2)}{(m+l_2)\,x}}\right\}. \qquad (52)$$

Dacă bordul de atac OA_2 devine supersonic facem în această formulă $l_2 = \frac{1}{B}$. Dacă muchia mixtă este supersonică utilizăm pentru contribuţia sa formula (50) cu înlocuirile indicate la punctul *a*).

11. APLICAŢII

În cazul în care considerăm o aripă definită din punct de vedere geometric viteza verticală de perturbaţie w pe aripă va fi obţinută prin însumarea contribuţiilor bordurilor şi muchiilor aripii. Obţinem astfel :

a) Pentru aripa de grosime simetrică cu ambele borduri de atac subsonice

$$\begin{aligned}
\frac{w}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\Bigg\{\sum_{q=0}^{n-1}\Bigg[A_q^{(1)}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(l_1+l_2)\,(m-x)}{(m+l_2)\,(l_1-x)}}\, + \\
+\, C_q^{(1)}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(s_1+l_2)\,(m-x)}{(m+l_2)\,(s_1-x)}} + C_q^{(2)}\, x^q \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(s_2+l_2)\,(m-x)}{(m+l_2)\,(s_2-x)}}\Bigg] + \\
+ \sum_{q=0}^{n} \frac{A_q\, x^q}{\sqrt{(l_2+x)\,(m-x)}} + A^{(0)}\, x^{n-1} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{m\,(x+l_2)}{(m+l_2)\,x}}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{53}$$

b) Pentru aripa cu bordul de atac direct OA_1 subsonic şi cu cel indirect OA_2 supersonic

$$\begin{aligned}
\frac{w}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\Bigg\{\sum_{q=0}^{n-1}\Bigg[A_q^{(1)}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_1)(m-x)}{(1+Bm)(l_1-x)}}\, + \\
+\, C_q^{(1)}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(1+Bs_1)(m-x)}{(1+Bm)(s_1-x)}} + C_q^{(2)}\, x^q \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bs_2)\,(m-x)}{(1+Bm)\,(s_2-x)}} + \\
+\, C_q\, x^q \sqrt{\frac{1+Bx}{m-x}} + A_q^{(2)}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(l_2+m)\,(1+Bx)}{(1+Bm)\,(l_2+x)}}\Bigg] + \\
+\, A^{(0)}\, x^{n-1} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{m\,(1+Bx)}{(1+Bm)\,x}}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{54}$$

c) Cazul aripii cu ambele borduri de atac supersonice. Dacă muchia mixtă OM este subsonică, formula de mai sus (54) se aplică fără nici o modificare. Dacă însă şi muchia mixtă OM devine supersonică, atunci w are următoarea expresie :

$$\begin{aligned}
\frac{w}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\Bigg\{\sum_{q=0}^{n-1}\Bigg[A_q^{(1)}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_1)\,(1-Bx)}{2B\,(l_1-x)}}\, + \\
+\, A_q^{(2)}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(1+Bl_2)\,(1+Bx)}{2B\,(l_2+x)}} + C_q^{(1)}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(1+Bs_1)\,(1-Bx)}{2B\,(s_1-x)}} + \\
+\, C_q^{(2)}\, x^q \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bs_2)\,(1-Bx)}{2B\,(s_2-x)}} + C_a\, x^q \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+Bm)(1-Bx)}{2B\,(m-x)}}\Bigg] + \\
+\, A^{(0)}\, x^{n-1} \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\, x^q \sqrt{1-B^2\, x^2}\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{55}$$

12. DETERMINAREA EXPRESIEI VITEZEI AXIALE DE PERTURBAŢIE *u*

Expresia vitezei axiale de perturbaţie u pe aripă este definită cu ajutorul funcţiilor $F_{n-q,q,0}$. Funcţiile $F_{n-q,q,0}$ satisfac însă relaţiile de compatibilitate (3) care se pot pune şi sub forma particulară

$$dF_{n-q,q,0} = (-1)^{n-q-1}\, i \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n} dx, \qquad \left(\frac{d^n W_{n-1}}{dx^n} dx = dF_{0,n-1,1} \text{ iar } \frac{w}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\, W_{n-1}\right). \tag{56}$$

Introducînd aceste expresii ale funcţiilor $F_{n-q,q,0}$ în formulele (4a) obţinem următoarea expresie pentru viteza axială de perturbaţie u

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!}\mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q x^q (-1)^{n-q-1} i \int \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n} dx. \tag{57}$$

În consecinţă, expresia lui u poate fi obţinută din expresia lui W prin integrare conform relaţiei de mai sus.

13. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Pentru ca să determinăm constantele pornim tot de la relaţiile de compatibilitate (3) care se mai pot pune şi sub forma integrată

$$F_{n-q,q,0} = (-1)^{n-q-1}\, i \int \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n} dx. \tag{58}$$

Impunînd acum condiţia să ia la stînga şi la dreapta muchiei indirecte OS_2 valorile indicate de formulele (35), (36) şi ţinînd seama şi de (58) şi de (4a) obţinem imediat că

$$\Phi^{(2)}_{n-q,q,0} = \frac{(n-1)!\, u^{(2)}_{n-q-1,q}}{C^q_{n-1}} = \mathcal{R}e\, (-1)^{n-q-1}\, i \int_{x_0}^{x_2} \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n} dx \tag{59}$$

şi

$$\Phi^{(1)}_{n-q,q,0} = \frac{(n-1)!\, u^{(1)}_{n-q-1,q}}{C^q_{n-1}} = \mathcal{R}e\, (-1)^{n-q-1}\, i \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n} dx$$

$$(q = 0, 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{60}$$

În aceste formule x_0 este un punct de viteză axială nulă (de exemplu pe conul Mach) şi x_1 şi x_2 două puncte pe aripă, la stînga şi la dreapta muchiei indirecte OS_2. Putem înlocui relaţia ultimă (60) prin relaţia

$$\Phi^{(2)}_{n-q,q,0} - \Phi^{(1)}_{n-q,q,0} \equiv \frac{(n-1)!\, (u^{(2)}_{n-q-1,q} - u^{(1)}_{n-q-1,q})}{C^q_{n-1}} = \tag{61}$$

$$\mathcal{R}e\, (-1)^{n-q-1}\, i \int_{P_{s_2}} \frac{x^{n-q}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \frac{d^n W_{n-1}}{dx^n} dx \; (q = 0, 1, 2, \ldots (n-1).$$

Analog, trebuie să impunem condițiile ca w să ia valorile indicate de formulele (37) și (38) la stînga și la dreapta muchiei directe OS_1. În acest scop, pornim tot de la relațiile de compatibilitate (3) scrise însă sub forma

$$\Phi^{(2)}_{n-q-1,q,1} = \mathcal{R}e\,(-1)^{n-q-1}\int_{\Gamma_{l_1}} x^{n-q-1}\frac{d^n W_{n-1}}{dx^n}\,dx = \frac{(n-1)!\,w^{(2)}_{n-q-1,q}}{C^q_{n-1}} \tag{62}$$

$$\Phi^{(2)}_{n-q-1,q,1} - \Phi^{(1)}_{n-q-1,q,1} = \mathcal{R}e\,(-1)^{n-q-1}\int_{\Gamma_{s_1}} x^{n-q-1}\frac{d^n W_{n-1}}{dx^n}\,dx =$$
$$= \frac{(n-1)!\;w^{(2)}_{n-q-1,q} - w^{(1)}_{n-q-1,q}}{C^q_{n-1}} \quad (q = 0, 1, 2 \ldots (n-1) \tag{63}$$

În aceste formule Γ_{l_1} și Γ_{s_1} reprezintă semireziduurile în jurul punctelor $y = l_1$ și $y = s_1$.

De asemenea, trebuie să impunem condițiile ca derivatele $\Phi_{n-q,q,0}$ să nu varieze la trecerea liniilor Mach, adică

$$\left(\frac{d^p\,W_{n-1}}{dx^p}\right)_{x=-\frac{1}{B}-\varepsilon} = \left(\frac{d^p\,W_{n-1}}{dx^p}\right)_{x=-\frac{1}{B}+\varepsilon} \tag{64}$$

$$\left(\frac{d^p\,W_{n-1}}{dx^p}\right)_{x=\frac{1}{B}-\varepsilon} = \left(\frac{d^p\,W_{n-1}}{dx^p}\right)_{x=\frac{1}{B}+\varepsilon}. \tag{65}$$

Obținem astfel un sistem de $6n$ relații (59), (60), (62), (63), (64), (65) pentru determinarea coeficienților ce intervin în expresia lui W.

a) În cazul aripii de grosime simetrică cu ambele borduri de atac subsonice avem (53) $4n + 2$ constante și $4n$ relații (59), (60), (62), (63) deoarece relațiile (64), (65) sînt automat satisfăcute în acest caz. În consecință, problema oferă o dublă nedeterminare.

b) În cazul aripii de grosime simetrică, cu un bord de atac indirect supersonic OA_2 și cu muchia mixtă OC subsonică (bordul OA_1 poate fi subsonic sau supersonic) numărul constantelor ce intervin în formula (54) este $5n + 1$ iar numărul relațiilor de legătură între coeficienți este $5n$ deoarece relațiile (64) sînt automat satisfăcute în acest caz. Deci această problemă comportă o nedeterminare simplă.

c) Pentru aripa cu bordul de atac indirect și cu muchia mixtă OC supersonică numărul constantelor ce intervin în formula (55) este $6n$ iar numărul relațiilor este $6n$. Soluția este deci în acest caz unic determinată.

14. ARIPA DE GROSIME SIMETRICĂ CU MUCHIA MIXTĂ PLASATĂ ÎN UMBRA AERODINAMICĂ A BORDULUI DE ATAC INDIRECT

Dacă muchia este de aceeași parte a originii cu bordul de atac indirect, condițiile de scurgere pe muchia mixtă sînt în acest caz similare cu acelea de pe un bord de fugă în problemă indirectă. În consecință, singularitatea introdusă de muchia mixtă va dispare, iar în singularitățile introduse de celelalte elemente geometrice ale aripii (borduri și muchii) trebuie să înlocuim m prin $-m'$. De asemenea, singularitatea din origine va dispare în acest caz.

Dacă muchia mixtă devine supersonică contribuţiile ei în expresia vitezei verticale de perturbaţie sînt de forma unui vîrtej de ordin superior.

15. PROBLEMELE DIRECTE ŞI INDIRECTE, CAZURI LIMITĂ ALE ARIPII DE GROSIME SIMETRICĂ

Vom face acest raţionament pe formula (53) corespunzătoare aripii de grosime simetrică cu bordurile de atac subsonice. Viteza verticală w în cazul problemei directe se obţine ducînd muchia mixtă şi cea indirectă în bordul de atac indirect ($m = -l_2$ şi $s_2 = -l_2$). Vom constata că în formula (53) primul şi al doilea termen din paranteză (care reprezintă contribuţiile bordului de atac, respectiv ale muchiei directe) au partea reală pe aripă constantă, iar ceilalţi termeni au partea reală nulă. În consecinţă, viteza verticală pe aripă se reduce la o formă polinomială, aşa cum era şi de aşteptat.

Viteza verticală de perturbaţie w la problema indirectă se obţine deplasînd muchia directă şi muchia mixtă în bordul de atac direct ($m = l_1$ şi $s_1 = l_1$). Obţinem expresia cunoscută [9] a vitezei verticale de perturbaţie pentru aripa de grosime simetrică cu ambele borduri de atac subsonice.

16. PROBLEMA MIXTĂ A ARIPII TRIUNGHIULARE DE GROSIME SIMETRICĂ, PREVĂZUTĂ CU DOUĂ MUCHII MIXTE

În paragraful precedent am studiat problema mixtă a aripii de grosime simetrică, prevăzută cu o singură muchie mixtă şi am putut determina, prin metoda analogiei hidrodinamice, expresia lui w. Dacă aripa este prevăzută cu două muchii mixte între care este dată distribuţia de presiune (fig. 9), se poate determina prin metoda analogiei hidrodinamice,

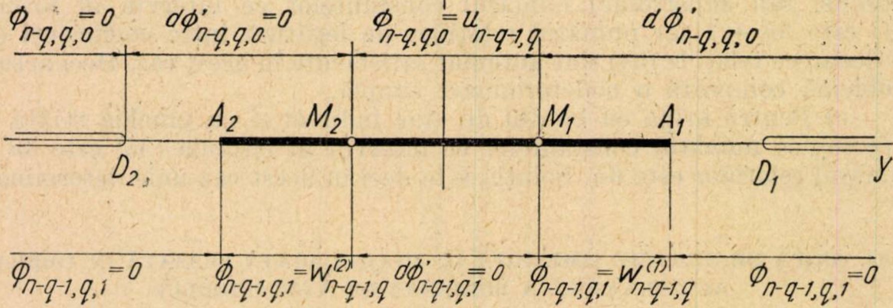


Fig. 9

expresia lui w indiferent de poziţia bordurilor sau muchiilor mixte în raport cu conul Mach. În cazul în care pe porţiunea centrală a aripii este dată distribuţia de incidenţă, se poate aplica metoda analogiei hidrodinamice expresiei lui u, numai dacă bordurile de atac sînt supersonice (fig. 10).

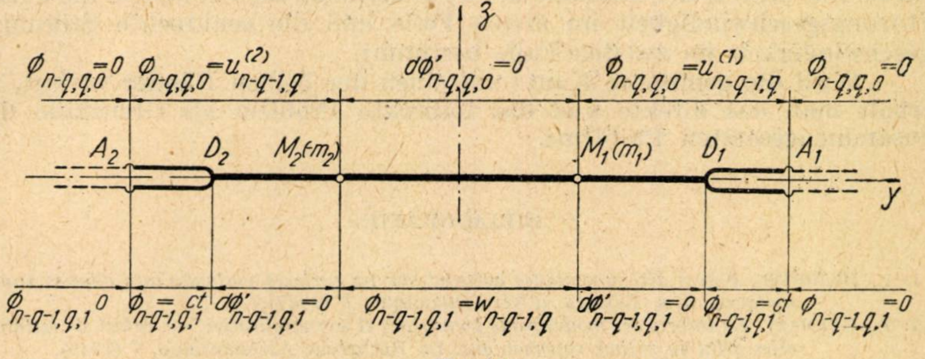

z
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=u^{(2)}_{n-q-1,q}$
$d\Phi'_{n-q,q,0}=0$
$\Phi_{n-q,q,0}=u^{(1)}_{n-q-1,q}$
$\Phi_{n-q,q,0}=0$
A_2
D_2
$M_2(-m_2)$
$M_1(m_1)$
D_1
A_1
y
$\Phi_{n-q-1,q,1}0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=ct$
$d\Phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=w_{n-q-1,q}$
$d\Phi'_{n-q-1,q,1}=0$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=ct$
$\Phi_{n-q-1,q,1}=0$

Fig. 10

Primită la redacţie la 30 iunie 1962

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА В КОНИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

В этой работе даются распределения углов атаки и давлений на участках (в виде однородных многочленов высших порядков) и требуются эти распределения на всем крыле.

Проекцией линии раздела этих двух участков будет прямая, проходящая через вершину крыла и называемая смешанным ребром.

Произведено исследование треугольного крыла — тонкого и симметричной толщины — и получены методом гидродинамической аналогии осевая скорость возмущения в первом случае и вертикальная скорость возмущения во втором случае.

Смещая смешанное ребро в одну из кромок, получаем прямую и обратную задачи как предельные случаи смешанной задачи.

DAS GEMISCHTE PROBLEM DES DREIECKFLÜGELS IN KONISCHER STRÖMUNG HÖHERER ORDNUNG

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Verteilung der Anstellung und des Druckes auf Teilabschnitten (in Form von homogenen Polynomen höherer Ordnung) gegeben und deren Verteilung auf dem ganzen Flügel bestimmt.

Die Projektion der Separationslinie der beiden Zonen ist eine Gerade, die durch die Spitze des Tragflügels geht und als gemischte Kante bezeichnet wird.

Es wird der dünne und der symmetrisch dicke Dreieckflügel untersucht und mittels der Methode der hydrodynamischen Analogie die axiale Störungsgeschwindigkeit im ersten Falle und die senkrechte Störungsgeschwindigkeit im zweiten Falle bestimmt.

Wird die gemischte Kante auf einen der beiden Ränder verlegt, so erhält man das direkte und das indirekte Problem als Grenzfälle des zusammengesetzten Problems.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Beshkine, *Forces aérodynamiques agissant sur les surfaces portantes aux vitesses supersoniques.* Les Cahiers d'Aérodynamique, *6* (1947).
2. P. Germain, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes délta en régime supersonique.* La Recherche Aéronautique, *7* (1949).
3. H. Multhopp, *A Unified Theory of Supersonic Wing Flow Employing Conical Fields.* R.A.F. Report No. Aero, *2415* (1951).
4. H. Lomax, M. H. Heaslet, *Generalized Conical Flow-Fields in Supersonic Wing Theory.* N.A.C.A. TN No. *2497* (1951).
5. G. N. Lance, *The Delta Wing in a Non-Uniform Supersonic Stream.* Aeronautical Quarterly, London, **I**, *5* (1954).
6. E. A. Красильщикова, *Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке.* Растехстройиздат, Москва, 1952.
7. E. Carafoli, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., **2**, *9/10* (1952).
8. E. Carafoli, M. Ionescu, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur simétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **2**, *1* (1957).
9. — *Théorie générale de l'aile triangulaire, à distribution de pressions donnée.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **III**, *2* (1958).
10. E. Carafoli şi colab., *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour d'une aile triangulaire à plaque normale.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **II**, *2* (1957).
11. — *Problèmes mixtes des ailes triangulaires pourvues d'une plaque normale, en courant supersonique (ailes cruciformes).* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **III**, *3* (1958).
    Revue de mecanique appliquée, Acad. R.P.R., **VI**, *1* (1961).
12. Э. Карафоли, *Теория треугольных простых или крестообразных крыльев в сверхзвуковом потоке.* Инженерный сборник, **XXVII**, 1960.
13. Ш. Сэндулеску, *Аэродинамические характеристики многоугольных элеронов со звуковым шарниром, имеющим колебательное движение.* Revue de mécanique appliquée, Acad R.P.R., **VI**, 1 (1961)
14. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
15. M. A. Heaslet, H. Lomax, *Supersonic and Transonic Small Perturbation Theory.* W.R. Sears Editor Princeton, 1954.

ARIPI CU SUPRAFEȚE DE ÎNCHIDERE ÎN REGIM SUPERSONIC

DE

DAN MATEESCU

NOTAȚII

U_∞ — viteza curentului neperturbat,

a_∞ — viteza sunetului în condițiile curentului neperturbat,

$M_\infty = \frac{U_8}{a_\infty}$ — numărul Mach,

$B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$,

u, v, w — vitezele de perturbație după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3,

ρ_∞ — densitatea aerului în condițiile curentului neperturbat,

P — portanța unei aripi,

R — rezistența de undă a unei arpi,

$C_z = \frac{P}{\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 S}$ — coeficientul de portanță,

$C_x = \frac{R}{\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 S}$ — coeficientul de rezistență de undă,

S — suprafața aripii.

I. DEFINIREA ARIPILOR CU SUPRAFAȚĂ DE ÎNCHIDERE

Prezenta lucrare are ca obiect studiul aerodinamic, în regim supersonic, al aripilor cu suprafață de închidere, clasă de aripi care reprezintă de fapt o extindere a aripilor delta dublu-conice care au fost definite și studiate pentru prima dată de acad. E. Carafoli în lucrările [1], [2], [3], [4].

Această clasă de aripi, care va fi definită în cele ce urmează, prezintă avantajul unei mici rezistențe la înaintare, deoarece, pentru toate aripile de acest tip, poate fi satisfăcută condiția ca grosimea aripii să fie nulă pe bordurile sale. Datorită acestui important avantaj, combinat cu o formă constructivă relativ simplă, numeroase aripi din această clasă sînt mult utilizate în construcția avioanelor de mare viteză, ca de exemplu aripile triunghiulare, trapezoidale și dreptunghiulare cu profil rombic, la care grosimea maximă a profilului variază în lungul anvergurii după o anumită funcție.

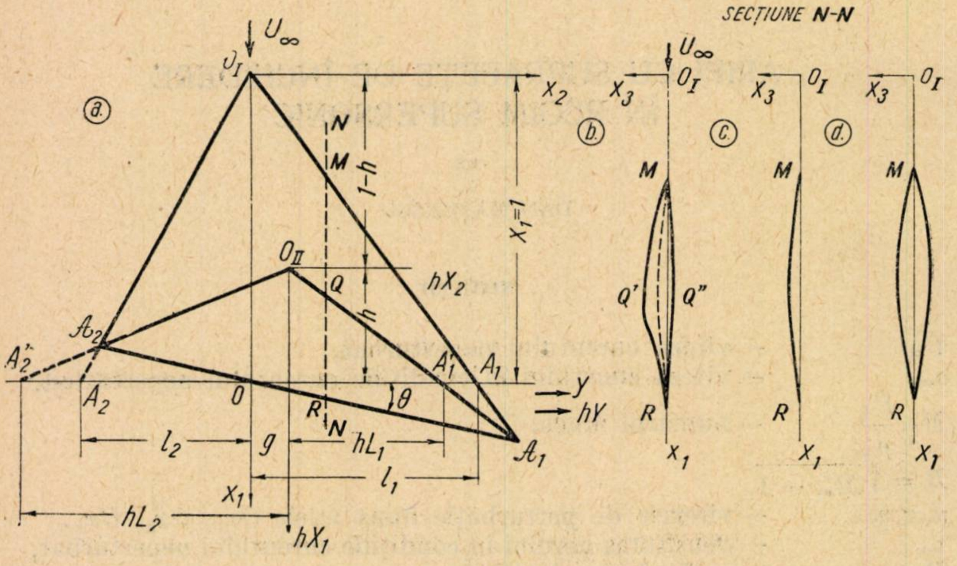


Fig. 1

Pentru a defini această clasă de aripi vom indica modul de generare al extradosului și intradosului unei aripi cu suprafață de închidere.

Să considerăm în acest scop, o astfel de aripă avînd forma în plan triunghiulară, ca în figura 1, și să raportăm scurgerea în jurul acestei aripi la un sistem de coordonate $O_I x_1 x_2 x_3$, axa $O_I x_1$ fiind paralelă cu viteza curentului neperturbat U_∞. Atît extradosul cît și intradosul acestei aripi vor fi considerate ca fiind constituite din două suprafețe distincte și anume suprafața anterioară $O_I A_1 O_{II} A_2$ și suprafața posterioară, de închidere, $O_{II} A_1 A_2$.

Pentru suprafața anterioară vom considera că, în cel mai general caz, cota x_3 poate fi exprimată în ipoteza perturbațiilor mici sub forma unei sume de polinoame sau funcții omogene de diferite ordine, adică

$$x_3 = \sum_{n=1}^{m} x_1^n Z_n(y), \tag{1}$$

unde funcțiile $Z_n\,(y)$ pot fi în general diferite la extrados față de intrados; în numeroase cazuri uzuale, $Z_n\,(y)$ sînt polinoame de forma

$$Z_n\,(y) = \sum_{q=0}^{n} a_{nq}\, y^q, \tag{2}$$

în care coeficienții a_{nq} au în general valori diferite pentru extrados și intrados.

În ceea ce privește suprafața de închidere, care de fapt caracterizează aceste aripi, și permite satisfacerea condiției de grosime nulă pe borduri, aceasta va fi considerată ca fiind obținută prin însumarea a două suprafețe de tipul celei anterioare, și va fi definită prin relația

$$x_3 = \sum_{n=1}^{m} x_1^n Z_n\,(y) - \sum_{n=1}^{m} X_1^{n-1}\, \mathcal{Z}\,(Y), \qquad Y = \frac{X_2}{X_1}, \tag{3}$$

în care X_1, X_2 și x_3 formează un alt sistem de coordonate definit prin relațiile

$$X_1 = \frac{x_1 - (1 - h)}{h}, X_2 = \frac{x_2 - g}{h}, x_3 = x_3, \left(Y = \frac{X_2}{X_1} = \frac{x_2 - g}{x_1 - (1 - h)}\right), \tag{4}$$

iar funcțiile $Z_n\,(y)$ și $\mathcal{Z}_n\,(Y)$ sînt în general diferite la extrados față de intrados; în numeroase cazuri uzuale $Z_n\,(y)$ și $\mathcal{Z}_n\,(Y)$ sînt polinoame de forma (2) și respectiv

$$\mathcal{Z}_n\,(Y) = \sum_{q=0}^{n} A_{n.q}\, Y^q, \tag{5}$$

în care coeficienții $a_{n.q}$ și $A_{n.q}$ au în general valori diferite pentru extrados și intrados.

În ipoteza perturbațiilor mici, aripa groasă portantă cu suprafață de închidere definită mai sus poate fi descompusă, din punct de vedere aerodinamic, într-o aripă subțire (scheletul) generată în același mod ca mai sus (fig. 1*c*) și o aripă cu suprafață de închidere avînd grosimea distribuită simetric față de un plan paralel cu curentul U_∞ (fig. 1*d*); în cele ce urmează, fiecare din aceste aripi va fi tratată separat.

După cum a fost anunțat mai sus, principalul avantaj al aripilor cu suprafață de închidere este posibilitatea satisfacerii condiției de grosime nulă pe borduri, pentru toate aripile făcînd parte din această clasă.

Este evident că condițiile de grosime nulă a aripii pe borduri afectează numai cotele aripii de grosime simetrică rezultată din descompunerea enunțată mai sus, aceste condiții putînd fi exprimate pentru o aripă de grosime simetrică avînd forma în plan triunghiulară, ca în figura 1, sub forma

$$[x_3]_{x_2=l_1 x_1} = 0, \tag{6a}$$

$$[x_3]_{x_2=-l_2 x_1} = 0, \tag{6b}$$

$$[x_3]_{x_2=\frac{x_1-1}{\operatorname{tg}\theta}} = 0, \tag{6c}$$

în care x_3 reprezintă cota extradosului, care pentru această aripă este de altfel simetric cu intradosul față de planul $O_I x_1 x_2$.

Însă, în afară de aceste condiții, de asemenea pentru o rezistență la înaintare cît mai mică, trebuie impusă și condiția ca pe muchiile $O_{II}A_1$ și $O_{II}A_1$ cota x_3 să nu aibă un salt brusc de valoare, condiție care este exprimată prin relațiile

$$[\mathscr{Z}_n(Y)]_{Y=L_1} = 0, \text{ unde } L_1 = \frac{l_1 - g(1 - l_1 \operatorname{tg}\theta)}{h + l_1(1-h)\operatorname{tg}\theta}, \tag{7a}$$

$$[\mathscr{Z}_n(Y)]_{Y=-L_2} = 0, \text{ unde } L_2 = \frac{l_2 + g(1 + l_2 \operatorname{tg}\theta)}{h - l_2(1-h)\operatorname{tg}\theta}. \tag{7b}$$

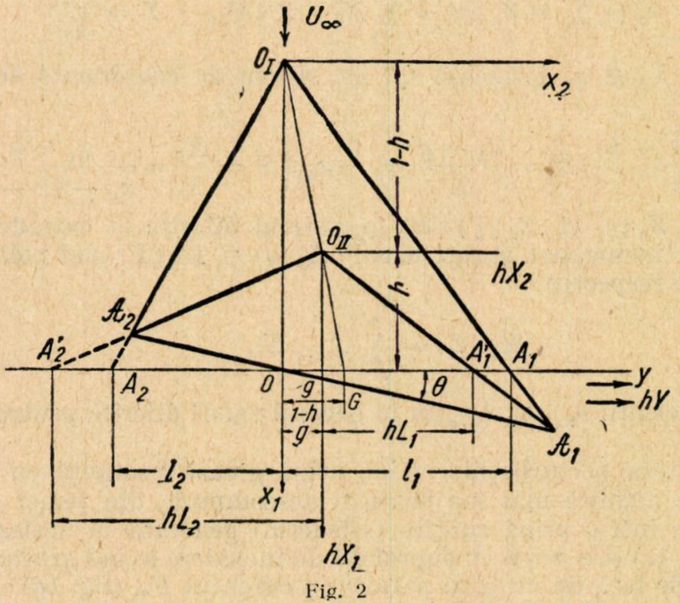


Fig. 2

Este evident că în cazurile uzuale, cînd $Z_n(y)$ și $\mathscr{Z}_n(Y)$ sînt polinoame de forma (2) și (5), în care coeficienții $a_{n,q}$ și $A_{n,q}$ au pentru extrados și intrados aceleași valori însă de semne contrare, condițiile (6) și (7) reprezintă de fapt un sistem de $(5m - 1)$ ecuații distincte cu $m(m + 3)$ necunoscute care sînt coeficienții $a_{n,q}$ și $A_{n,q}$. Rezultă deci că $[m(m - 2) + 1]$ dintre acești coeficienți pot fi luați independenți, ceea ce arată că prin acest mod de generare se pot obține aripi închise pentru $m \geqslant 2$, spre deosebire de aripile fără suprafață de închidere, a căror suprafață este definită numai printr-o relație de forma (1), la care numai $\left[\frac{m(m-3)}{2} + 1\right]$ dintre coeficienți pot fi luați independenți, putînd fi deci obținute aripi închise numai pentru $m \geqslant 3$.

Vom mai menționa în plus că aripile cu suprafață de închidere, spre deosebire de cele fără suprafață de închidere pot îndeplini condițiile de grosime nulă pe borduri (și în același timp și cele de continuitate a cotei de-a lungul muchiilor $O_{II} A_1$ și $O_{II} A_2$) și în cazul cînd cota aripii este distribuită după un singur polinom omogen de ordin n și nu după o sumă de asemenea polinoame, cum a fost considerat mai sus; este ușor de văzut că în acest caz condițiile (6) și (7) reprezintă un sistem de $(n + 3)$ ecuații distincte cu $2\,(n + 1)$ necunoscute — coeficienții $a_{n.q}$ și $A_{n.q}$ — dintre care $(n - 1)$ pot fi luați independenți, ceea ce arată că se pot obține aripi închise de asemenea pentru $n \geqslant 2$.

Dar în cazul aripilor cu suprafață de închidere, pot fi obținute aripi închise și pentru $n = 1$ dacă se admit valori distincte pentru coeficienții $a_{n.q}$ și $A_{n.q}$ pe două porțiuni distincte ale aripii separate de o rază vectoare.

Să considerăm în acest sens că suprafața anterioară a unei aripi avînd forma în plan triunghiulară ca în figura 2 este definită prin relația

$$x_3 = x_1^n Z_n(y), \text{ unde } Z_n(y) = \sum_{q=0}^{n} a_{n.q}^{(i)} y^q, \; (i = 1, 2) \tag{8}$$

iar suprafața posterioară, de închidere, prin relația

$$x_3 = x_1^n Z_n(y) - X_1^n \mathscr{Z}_n(Y), \text{ unde } \mathscr{Z}_n(Y) = \sum_{q=0}^{n} A_{n.q}^{(i)} Y^q, \; (i=1, 2) \tag{9}$$

relații în care coeficienții $a_{n.q}^{(i)}$ au valorile $a_{n.q}^{(1)}$ și $a_{n.q}^{(2)}$ pe porțiunile $O_I A_1 G$ și respectiv $O_I A_2 G$ ale aripii, iar coeficienții $A_{n.q}^{(i)}$ valorile $A_{n.q}^{(1)}$ și $A_{n.q}^{(2)}$ pe porțiunile $O_{II} A_1 G$ și respectiv $O_{II} A_2 G$.

În acest caz, coeficienții $a_{n.q}^{(1)}$ și $A_{n.q}^{(1)}$ trebuie să satisfacă condițiile (6a), (6c) și (7a), iar coeficienții $a_{n.q}^{(2)}$ și $A_{n.q}^{(2)}$ condițiile (6b), (6c) și (7b), rezultînd în acest mod două sisteme de ecuații, fiecare din acestea avînd $(n + 2)$ ecuații distincte cu $2\,(n + 1)$ necunoscute, care sînt coeficienții $a_{n.q}^{(1)}$ și $A_{n.q}^{(1)}$ $(q=0, 1, \ldots, n)$ sau respectiv $a_{n.q}^{(2)}$ și $A_{n.q}^{(2)}$; însă în afara acestor condiții, dar tot în vederea unei rezistențe cît mai mici la înaintare, în acest caz trebuie impusă și condiția ca de-a lungul muchiei $O_I G$ cota aripii să nu prezinte un salt brusc de valoare, această condiție fiind exprimată prin relația

$$[x_3^{(1)}]_{x_2 = \frac{g}{1-h} x_1} = [x_3^{(2)}]_{x_2 = \frac{g}{1-h} x_1} \tag{10}$$

în care $x_3^{(1)}$ și $x_3^{(2)}$ reprezintă cotele aripii pe porțiunile $O_I A_1 G$ și respectiv $O_I A_2 G$. Această condiție formează împreună cu cele arătate mai sus un sistem de $(2n + 5)$ ecuații distincte cu $4\,(n + 1)$ necunoscute — coeficienții $a_{n.q}^{(i)}$ și $A_{n.q}^{(i)}$, $(q = 0, 1, \ldots, n,\ i = 1, 2)$, dintre care $(2n - 1)$ coeficienți pot fi luați independent (de exemplu coeficienții $a_{n.q}^{(1)}$, $q = 0, 1, \ldots, n - 1$ și $a_{n.q}^{(2)}$, $q = 0, 1, \ldots, n - 2$). Este evident deci că în acest mod se obțin și pentru $n = 1$, aripi cu grosimea nulă pe toate bordurile.

Vom menționa că pentru $n \geqslant 2$, în afara condițiilor de mai sus, vom mai putea impune și condiția de continuitate a pantei $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ la traversarea muchiilor $O_{II} A_1$ și $O_{II} A_2$, adică

$$\left[\frac{\partial}{\partial X_1}\left(X_1^n \sum_{q=0}^{n} A_{n,q}^{(i)} Y^q\right)\right]_{Y=(-1)^{i+1} L_i} = 0, \text{ pentru } i = 1 \text{ și } i = 2, \quad (11)$$

ceea ce reprezintă încă două condiții în plus și deci, în acest caz, numai $(2n - 3)$ coeficienți pot fi luați independenți.

Pentru fixarea ideilor, să exemplificăm cele de mai sus pentru cazurile $n = 1$ și $n = 2$.

Fie o aripă de grosime simetrică cu suprafață de închidere, avînd forma în plan triunghiulară, ca în figura 2, la care cota suprafeței anterioare $O_I A_1 O_{II} A_2$ este dată sub forma

$$x_3 = x_1 \left(a_{10}^{(i)} + a_{11}^{(i)} y\right), \; i = 1, 2 \quad (12)$$

iar cota suprafeței posterioare $O_{II} A_1 A_2$, de închidere, sub forma

$$x_3 = x_1 \left(a_{10}^{(i)} + a_{11}^{(i)} y\right) - X_1 \left(A_{10}^{(i)} + A_{11}^{(i)} Y\right), \; i = 1, 2, \quad (13)$$

în care $i = 1$ pentru suprafața $O_I A_1 G \left(y \geqslant \frac{g}{1-h}, \; Y \geqslant \frac{g}{1-h}\right)$ și $i = 2$ pentru suprafața $O_I A_2 G \left(y \leqslant \frac{g}{1-h}, Y \leqslant \frac{g}{1-h}\right)$.

Este ușor de văzut că dacă pentru $i = 1$ vom impune condițiile (6a), (6c) și (7a), iar pentru $i = 2$ condițiile (6b), (6c) și (7b), vor rezulta următoarele relații între coeficienții $a_{1,q}^{(i)}$ și $A_{1,q}^{(i)}$,

$$a_{11}^{(i)} = (-1)^i \frac{a_{10}^{(i)}}{l_i}, \; i = 1, 2, \quad (14a)$$

$$A_{1,0}^{(i)} = (-1)^i A_{11}^{(i)} L_i = a_{10}^{(i)} h \frac{l_i (1 + g \operatorname{tg} \theta) + (-1)^i g}{l_i (h + g \operatorname{tg} \theta)} ; \; i = 1,2 \quad (14b)$$

unde L_1 și L_2 au valorile date în (7a, b).

Impunînd și condiția (10), se mai obține încă o relație și anume

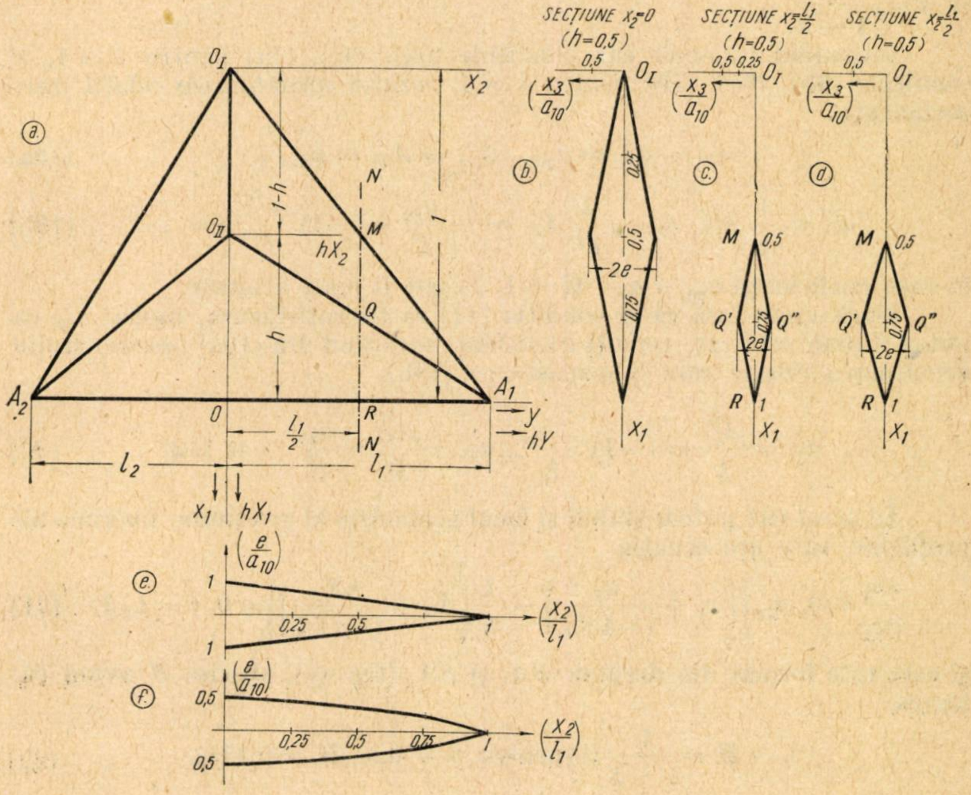
$$a_{10}^{(1)} \left[1 - \frac{g}{l_1 (1 - h)}\right] = a_{10}^{(2)} \left[1 + \frac{g}{l_2 (1 - h)}\right]. \quad (15)$$

Dacă aripa considerată are forma în plan triunghiulară ca în figura 3*a*, adică $\theta = 0$ și $g = 0$, relațiile de mai sus se simplifică considerabil, rezultînd în cele din urmă

$$a_{10}^{(1)} = a_{10}^{(2)} = a_{10} \quad (16a)$$

$$a_{11}^{(i)} = (-1)^i \frac{a_{10}}{l_i}, \; i = 1, 2 \tag{16b}$$

$$A_{1,0}^{(i)} = (-1)^i A_{11}^{(i)} L_i = a_{i0}, \text{ unde } L_i = \frac{l_i}{h}, \; i = 1, 2, \tag{16c}$$



SECȚIUNE $x_2=0$ ($h=0{,}5$)
SECȚIUNE $x_2=\frac{l_1}{2}$ ($h=0{,}5$)
SECȚIUNE $x_2=\frac{l_1}{2}$ ($h=0{,}5$)
ⓐ
ⓑ
ⓒ
ⓓ
ⓔ
ⓕ
O_I
O_{II}
x_2
hX_2
N
M
Q
R
N
A_1
A_2
0
$1-h$
h
1
y
hY
$\frac{l_1}{2}$
l_1
l_2
x_1
hX_1
$\left(\frac{x_3}{a_{10}}\right)$
0,5
0,25
0,75
$2e$
Q'
Q''
$\left(\frac{e}{a_{10}}\right)$
$\left(\frac{x_2}{l_1}\right)$
1
0,5

Fig. 3

în care coeficientul a_{10} ($a_{10}^{(1)} = a_{10}^{(2)} = a_{10}$) poate fi luat arbitrar. Această aripă are în fiecare secțiune $x_2 =$ const. un profil rombic a cărui grosime maximă $2e$ variază liniar în anvergură, ca în figura 3*e*. În figurile 3*a* și 3*c* sînt reprezentate la scară profilele din secțiunile $x_2 = 0$ și $x_2 = \frac{l_1}{2}$ ale acestei aripi, pentru $h = 0{,}5$.

Să luăm acum ca exemplu, o aripă de grosime simetrică, avînd forma în plan ca în figura 4*a*, cota suprafeței anterioare a acestei aripi fiind dată de relația

$$x_3 = x_1^2 \left[a_{20}^{(i)} + a_{21}^{(i)} y + a_{22}^{(i)} y^2\right], \; i = 1, 2, \tag{17}$$

iar cota suprafeței de închidere fiind dată de relația

$$x_3 = x_1^2 [a_{20}^{(i)} + a_{21}^{(i)} y + a_{22}^{(i)} y^2] - X_1^2 [A_{20}^{(i)} + A_{21}^{(i)} Y + A_{22}^{(i)} Y^2], i=1,2 \qquad (18)$$

în care $i = 1$ pentru $y \geqslant \frac{g}{1-h}$ și $Y \geqslant \frac{g}{1-h}$ și $i = 2$ pentru $y \leqslant \frac{g}{1-h}$ și $Y \leqslant \frac{g}{1-h}$.

Impunînd în acest caz condițiile (6a), (6c), (7a) pentru $i = 1$, și condițiile (6b), (6c), (7b) pentru $i = 2$, rezultă următoarele relații între coeficienți :

$$a_{20}^{(1)} = a_{20}^{(2)} = a_{20}, \quad A_{20}^{(1)} = A_{20}^{(2)} = a_{20}, \qquad (19a)$$

$$a_{21}^{(i)} = \frac{1}{h} A_{21}^{(i)}, \quad a_{22}^{(i)} = \frac{1}{h^2} A_{22}^{(i)} = -\frac{a_{20}}{l_i^2} + (-1)^i \frac{a_{21}^{(i)}}{l_i}, \quad i = 1, 2 \qquad (19b)$$

în care coeficienții a_{20} și $a_{21}^{(i)}$, $(i = 1, 2)$ pot fi luați arbitrar.

Dacă vrem însă ca și condiția (11) să fie satisfăcută, numai a_{20} va putea fi luat arbitrar, ceilalți coeficienți rezultînd din (19a) precum și din următoarea relație care înlocuiește pe (19b),

$$a_{21}^{(i)} = \frac{A_{21}^{(i)}}{h} = (-1)^i \frac{2a_{20}}{l_i}, \quad a_{22}^{(i)} = \frac{A_{22}^{(i)}}{h^2} = \frac{a_{20}}{l_i^2}, \quad i = 1, 2. \qquad (20)$$

În acest caz putem stabili și locul geometric al grosimilor maxime ale profilelor, care are ecuația

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \quad a_{20}\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{(-1)^i l_i}\right) - \frac{1}{h}\left(X_1 + \frac{hX_2}{(-1)^i l_i}\right)\right] = 0, \quad i = 1, 2 \qquad (21)$$

și care este format din dreptele SA_1 și SA_2 (fig. 4*a*), abscisa H avînd valoarea

$$1 - H = \frac{1}{1+h}; \quad (\text{pentru } h = 0{,}6, \ H = 0{,}375). \qquad (22)$$

În figurile 4*b* și 4*c* sînt reprezentate, pentru $h = 0{,}6$, profilele acestei aripi în secțiunile $x_2 = 0$ și $x_2 = \frac{l_1}{2}$.

Însă tipuri deosebite de aripi se obțin și prin însumarea algebrică a cotelor aripilor din exemplele precedente pentru $n = 1$ și $n = 2$. Astfel, în cazul cînd coeficienții $a_{nq}^{(i)}$ și $A_{nq}^{(i)}$ sînt definiți prin relațiile (16), (19a) și (20), dacă se consideră pentru cota aripii relația

$$x_3 = x_3^{(n=1)} - x_3^{(n=2)}, \quad \text{unde } 1{,}8 a_{10} = a_{20}, \qquad (23)$$

se obține o aripă ale cărei profile în secțiunile $x_2 = 0$ și $x_2 = \frac{l_1}{2}$ sînt reproduse la scară, pentru $h = 0{,}5$, în figurile 4*d* și 4*e*.

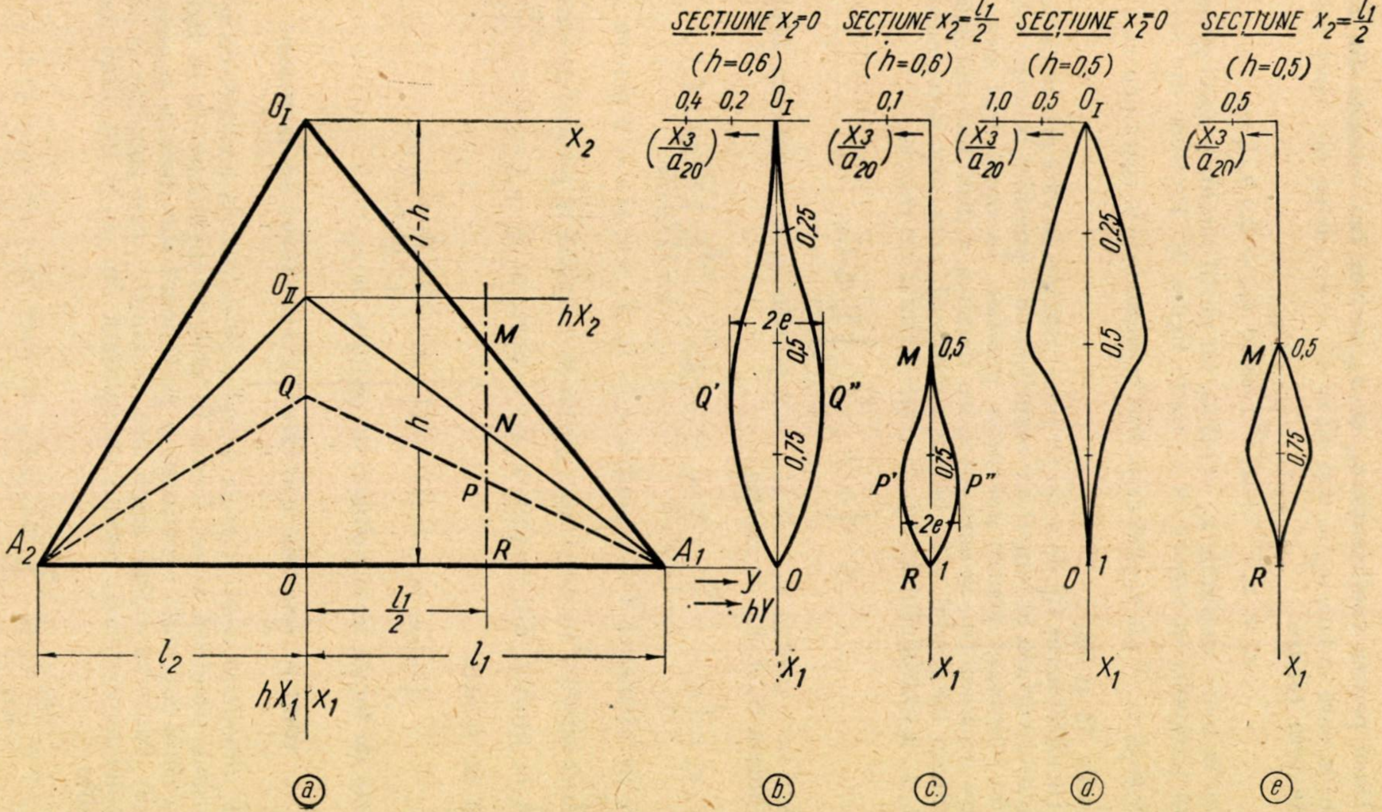

SECTIUNE $x_2=0$ ($h=0,6$)
SECTIUNE $x_2=\frac{l_1}{2}$ ($h=0,6$)
SECTIUNE $x_2=0$ ($h=0,5$)
SECTIUNE $x_2=\frac{l_1}{2}$ ($h=0,5$)
O_I
O_{II}
x_2
hX_2
$1-h$
h
M
N
Q
P
R
A_1
A_2
0
$\frac{l_1}{2}$
l_1
l_2
hX_1
x_1
y
hY
$\left(\frac{X_3}{a_{20}}\right)$
0,4
0,2
0,1
1,0
0,5
0,25
0,75
1
2e
Q'
Q"
P'
P"
X_1
a.
b.
c.
d.
e

Fig. 4

Dacă pentru coeficienții a_{2q} și A_{2q} se vor lua valorile din relațiile (19a, b) în care se face $a_{20} = 0$ și $a_{21}^{(1)} = a_{21}^{(2)} = a_{21}$, aripa ale cărei cote sînt definite prin relația

$$x_3 = x_3^{(n=1)} + x_3^{(n=2)}, \text{ unde } a_{10} = 2{,}5\, a_{21} l_1 \tag{24}$$

va avea în toate secțiunile $x_2 =$ const. un profil rombic a cărei grosime $2e$ variază parabolic în raport cu x_2 ca în figura 3*f*. Profilele din secțiunile $x_2 = 0$ și $x_2 = \frac{l_1}{2}$ ale acestei aripi sînt reprezentate la scară pentru $h = 0{,}5$ în figurile 3*b* și 3*d*.

De altfel acest tip de aripi cu profil rombic, la care grosimea maximă a profilului variază în lungul anvergurii după o anumită funcție, este deosebit de interesant pentru aplicațiile practice. În cazul unei aripi triunghiulare de acest tip, la care grosimea maximă a profilului variază după un polinom de gradul n în lungul anvergurii, cota suprafeței anterioare $O_{\text{I}}A_1O_{\text{II}}A_2$ a extradosului (fig. 3a) este definită de relația

$$x_3 = \left(x_1 + \frac{x_2}{(-1)^i l_i}\right) \sum_{q=0}^{n-1} a_q x_2^q, \tag{25}$$

în care $i = 1$ pentru $x_2 > 0$ și $i = 2$ pentru $x_2 < 0$, iar cota suprafeței de închidere $O_{\text{II}}A_1A_2$, de relația

$$x_3 = \left(x_1 + \frac{x_2}{(-1)^i l_i}\right) \sum_{q=0}^{n-1} a_q x_2^q - \left(X_1 + \frac{hX_2}{(-1)^i l_i}\right) \sum_{q=0}^{n-1} a_q (hX_2)^q, \tag{26}$$

în care de asemenea $i = 1$ pentru $x_2 > 0$, $X_2 > 0$, și $i = 2$ pentru $x_2 < 0$, $X_2 < 0$.

Într-adevăr, în acest caz grosimea maximă a profilului, care este situată la profilul din secțiunea $x_2 =$ const. la $x_1 = 1 - h - \frac{hx_2}{(-1)^i l_i}$, va fi dată de relația

$$[x_3]_{\max} = e = (1 - h) \left(1 + \frac{x_2}{(-1)^i l_i}\right) \sum_{q=0}^{n-1} a_q x_2^q, \tag{27}$$

deci este de forma unui polinom de ordin n în x_2.

II. ARIPI DE GROSIME SIMETRICĂ CU SUPRAFEȚE DE ÎNCHIDERE

1. *Stabilirea condițiilor de scurgere pe aripă.* Să considerăm o aripă de grosime simetrică avînd forma în plan triunghiulară ca în figura 2, aripă a cărei suprafață anterioară și posterioară sînt definite prin relațiile (8) și (9). Panta suprafeței aripii față de axa Ox_1, care coincide cu direcția curentului neperturbat, rezultă cu ușurință din (8) și (9), fiind dată de expresiile

$$\gamma = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \gamma_{n-1,q}^{(i)} y^q, \quad \text{în care } \gamma_{n-1,q}^{(i)} = (n - q)\, a_{nq}^{(i)}, \tag{28}$$

pe porțiunile $O_I O_{II} A_1$ $(i = 1)$ și $O_I O_{II} A_2$ $(i = 2)$, și

$$\begin{gathered}\gamma = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \gamma^{(i)}_{n-1,q} y^q - \frac{1}{h} X_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \Gamma^{(i)}_{n-1,q} Y^q, \\ \Gamma_{n-1,q} = (n - q) A^{(i)}_{n,q} \end{gathered} \tag{29}$$

pe porțiunile $O_{II} A_1 G$ $(i = 1)$ și $O_{II} A_2 G$ $(i = 2)$.

Ținînd seama de condițiile de scurgere pe aripă și în afara ei ($w = \pm \gamma U_\infty$ pe aripă, unde semnul + (plus) se referă la extrados și semnul — (minus) la intrados, și $w = 0$ în afara aripii pe planul $x_3 = 0$), scurgerea supersonică în jurul aripii considerate poate fi descompusă, în ipoteza perturbațiilor mici, în diferența scurgerilor în jurul a două aripi mai simple, ceea ce permite să se scrie

$$u = u^{(I)} - u^{(II)}, \quad v = v^{I} - v^{(II)}, \quad w = w^{(I)} - w^{(II)} \tag{30}$$

și

$$\gamma = \gamma^{(I)} - \gamma^{(II)} \tag{31}$$

în care

a) $u^{(I)}$, $v^{(I)}$ sînt vitezele de perturbație dirijate după axele Ox_1, Ox_2 și Ox_3 din scurgerea supersonică în jurul aripii triunghiulare $O_I A_1 A_2$ (fig. 2), de grosime simetrică, a cărei pantă este dată sub forma

$$\gamma^{(I)} = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \gamma^{(i)}_{n-1,q} y^q, \quad i = 1, 2 \tag{32}$$

în care $i = 1$ pentru $y \geqslant \frac{g}{1-h}$ și $i = 2$ pentru $y \leqslant \frac{g}{1-h}$.

Condițiile de scurgere vor fi în acest caz

$$w^{I} = \pm \gamma^{(I)} U_\infty, \tag{33}$$

pe aripă, și

$$w^{(I)} = 0 \tag{34}$$

în planul $x_3 = 0$, în afara aripii.

b) $u^{(II)}$, $v^{(II)}$, $w^{(II)}$ sînt vitezele de perturbație din scurgerea supersonică în jurul aripii de grosime simetrică $O_{II} A_1 A_2$, (fig. 2), a cărei pantă este dată sub forma

$$\gamma^{(II)} = \frac{1}{h} X_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \Gamma^{(i)}_{n-1,q} Y^q, \quad i = 1, 2 \tag{35}$$

în care $i = 1$ pentru $Y \geqslant \frac{g}{1-h}$ și $i = 2$ pentru $Y \leqslant \frac{g}{1-h}$. Condițiile de scurgere vor fi în acest caz

$$w^{(II)} = \pm \gamma^{(II)} U_\infty \tag{36}$$

pe aripă şi

$$w^{(\mathrm{II})} = 0 \tag{37}$$

pe planul $x_3 = 0$ în afara aripii.

Prin această descompunere, problema complexă a scurgerii în jurul aripii de grosime simetrică cu suprafaţă de închidere a fost redusă la studiul a două mişcări conice de ordin n în jurul unor aripi triunghiulare fără suprafaţă de închidere, care au fost tratate în alte lucrări, ca de exemplu în [5] şi [6].

Remarcă. Efectuînd descompunerea sus menţionată, s-a presupus că, în ipoteza perturbaţiilor mici, viteza axială de perturbaţie $u^{(\mathrm{I})}$ din scurgerea în jurul suprafeţei anterioare $O_{\mathrm{I}}A_1O_{\mathrm{II}}A_2$ este destul de mică faţă de U_∞ pentru a se putea considera că suprafaţa de închidere $O_{\mathrm{II}}A_1A_2$ este plasată într-un curent supersonic uniform de viteză U_∞. Acest lucru este valabil atîta timp cît h nu este prea apropiat faţă de 1, adică aproximativ pentru $h < 0{,}9$; dacă h este foarte apropiat faţă de 1, valorile vitezelor de perturbaţie $u^{(\mathrm{I})}$, $v^{(\mathrm{I})}$, $w^{(\mathrm{I})}$ din apropierea bordurilor de atac $O_{\mathrm{I}}A_1$ şi $O_{\mathrm{I}}A_2$, care sînt mari, afectează parţial scurgerea în jurul suprafeţei de închidere $O_{\mathrm{II}}A_1A_2$ şi astfel aceasta nu mai poate fi presupusă plasată într-un curent supersonic uniform de viteză U_∞.

2. *Determinarea expresiei vitezei axiale de perturbaţie u pe aripă.* După cum am arătat mai sus, pentru a determina expresia vitezei axiale de perturbaţie u pe aripă, va trebui să determinăm pe $u^{(\mathrm{I})}$ şi $u^{(\mathrm{II})}$ din mişcările amintite mai sus, deoarece

$$u = u^{(\mathrm{I})} - u^{(\mathrm{II})}. \tag{38}$$

În ceea ce priveşte pe $u^{(\mathrm{I})}$, acesta este viteza axială de perturbaţie din mişcarea conică de ordin n în jurul unei aripi de grosime simetrică avînd bordurile plasate în A_1 $(y = l_1)$ şi A_2 $(y = -l_2)$ şi prezentînd o muchie în $G\left(y = \dfrac{g}{1-h}\right)$. Utilizînd rezultatele obţinute prin metoda analogiei hidrodinamice în [5] şi [6], se obţine cu uşurinţă următoarea expresie pentru $u^{(\mathrm{I})}$ pe aripă, în cazul cînd bordurile aripii sînt subsonice $\left(l_1 < \dfrac{1}{B}, l_2 < \dfrac{1}{B}\right)$,

$$\begin{aligned} u^{(\mathrm{I})} = x_1^{\,n-1}\,\mathcal{R}e \Bigg[\sum_{q=0}^{n-1} K_q^{(1)} y^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-By)(1+Bl_1)}{2B(l_1-y)}} + {} \\ + \sum_{q=0}^{n-1} K_q^{(2)} y^g \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+By)(1+Bl_2)}{2B(l_2+y)}} + {} \\ + \sum_{q=0}^{n-1} K_q^{(G)} y^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-By)\left(1+B\dfrac{g}{1-h}\right)}{2B\left(\dfrac{g}{1-h}-y\right)}} + \sqrt{1-B^2y^2}\sum_{q=0}^{n-2} C_q\,y^q \Bigg]. \end{aligned} \tag{39}$$

Constantele K_q și C_q care apar în această expresie se pot determina cu ușurință, în modul indicat în lucrările menționate, în funcție de coeficienții $\gamma_{n-1,q}$ și de parametrii geometrici ai formei în plan a aripii.

În cazul cînd unul din bordurile A_1, A_2 și muchia din G sînt supersonice, adică dacă $l_1 > \frac{1}{B}$, $l_2 > \frac{1}{B}$ sau $\frac{g}{1-h} > \frac{1}{B}$, expresia lui $u^{(\mathrm{I})}$ se obține înlocuind pe argch prin arccos în termenii care conțin abscisa bordului sau muchiei supersonice.

Procedînd într-un mod asemănător se poate determina cu ușurință și expresia lui $u^{(\mathrm{II})}$, care reprezintă de fapt viteza axială de perturbație din mișcarea conică în jurul unei aripi de grosime simetrică, avînd bordurile plasate în

$$A_1\left(Y = L_1 = \frac{l_1 - g\,(1 - l_1 \operatorname{tg}\theta)}{h + l_1\,(1-h)\operatorname{tg}\theta}\right) \text{ și } A_2\left(Y = -L_2 = -\frac{l_2 + g\,(1 + l_2 \operatorname{tg}\theta)}{h - l_2\,(1-h)\operatorname{tg}\theta}\right)$$

și prezentînd o muchie în $G\left(Y = \frac{g}{1-h}\right)$. În cazul cînd bordurile sînt subsonice $\left(L_1 < \frac{1}{B} \text{ și } L_2 < \frac{1}{B}\right)$, pentru $u^{(\mathrm{II})}$ pe aripă va rezulta următoarea expresie:

$$u^{(\mathrm{II})} = X_1^{n-1}\,\mathcal{R}e\left[\sum_{q=0}^{n-1} Q_q^{(1)}\,Y^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-BY)(1+BL_1)}{2B\,(L_1 - Y)}} + \right.$$

$$+ \sum_{q=0}^{n-1} Q_q^{(2)}\,Y^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+BY)(1+BL_2)}{2B\,(L_2+Y)}} +$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-1} Q_q^{(G)}\,Y^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-BY)\left(1+B\,\frac{g}{1-h}\right)}{2B\left(\frac{g}{1-h} - Y\right)}} + \sqrt{1-B^2Y^2}\sum_{q=0}^{n-2} D_q Y^q\right]. \quad (40)$$

Constantele Q_q și D_q care apar în această expresie pot fi determinate cu ușurință, ținînd seama de condițiile de scurgere pe aripă și în afara ei, în funcție de coeficienții $\Gamma_{n-1,q}$ și de parametrii geometrici ai formei în plan a aripii.

În cazul cînd unul din bordurile aripii sau muchia din G sînt supersonice, adică $L_1 > \frac{1}{B}$, $L_2 > \frac{1}{B}$ sau $\frac{g}{1-h} > \frac{1}{B}$, în expresia termenilor care conțin pe L_1, L_2 sau respectiv pe $\frac{g}{1-h}$ va trebui să înlocuim pe argch prin arc cos.

3. *Determinarea coeficientului de rezistență la înaintare al aripii de grosime simetrică cu suprafață de închidere.* În cazul unei aripi de grosime

simetrică, coeficientul rezistenței de undă C_x are, în ipoteza perturbațiilor mici, expresia

$$SC_x = 2\int_S C_p \sin \gamma dS \simeq \frac{-4}{U_\infty}\int_S u\gamma dS, \tag{41}$$

unde S este aria suprafeței aripii $(O_{\mathrm{I}}A_1A_2)$ și are valoarea

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{l_1 + l_2}{(1 - l_1 \operatorname{tg} \theta)(1 + l_2 \operatorname{tg} \theta)}. \tag{42}$$

Ținînd seama de relațiile (38) și (31), expresia de mai sus se poate scrie, în cazul cînd $L_1 < \frac{1}{B}$ și $L_2 < \frac{1}{B}$ (fig. 5), sub forma

$$C_x = C_x^{(1)} - C_x^{(2)} + C_x^{(3)} - C_x^{(4)} - C_x^{(5)} - C_x^{(6)} \tag{43}$$

în care

$$C_x^{(1)} = \frac{-4}{SU_\infty}\int_{O_{\mathrm{I}}A_1A_2} u^{(\mathrm{I})}\,\gamma^{(\mathrm{I})}\,dS_1, \tag{44a}$$

$$C_x^{(2)} = \frac{-4}{SU_\infty}\int_{O_{\mathrm{II}}A_1A_2} u^{(\mathrm{I})}\,\gamma^{(\mathrm{II})}\,dS_2, \tag{44b}$$

$$C_x^{(3)} = \frac{-4}{SU_\infty}\int_{O_{\mathrm{II}}A_1A_2} u^{(\mathrm{II})}\,\gamma^{(\mathrm{II})}\,dS_3, \tag{44c}$$

$$C_x^{(4)} = \frac{-4}{SU_\infty}\int_{O_{\mathrm{II}}A_1A_2} u^{(\mathrm{II})}\,\gamma^{(\mathrm{I})}\,dS_2, \tag{44d}$$

$$C_x^{(5)} = \frac{-4}{SU_\infty}\int_{O_{\mathrm{II}}A_1\mathcal{D}_1} u^{(\mathrm{II})}\gamma^{(\mathrm{I})}\,dS_3 \tag{44e}$$

$$C_x^{(6)} = \frac{-4}{SU_\infty}\int_{O_{\mathrm{II}}A_2\mathcal{D}_2} u^{(\mathrm{II})}\gamma^{(\mathrm{I})}\,dS_4 \tag{44f}$$

Dacă $L_1 > \frac{1}{B}$ sau $L_2 > \frac{1}{B}$, atunci în expresia (43) $C_x^{(5)} = 0$ sau respectiv $C_x^{(6)} = 0$, deoarece în aceste cazuri suprafețele $O_{\mathrm{II}}A_1\mathcal{D}_1$ și respectiv $O_{\mathrm{II}}A_2\mathcal{D}_2$ nu există.

Pentru a putea fi calculate expresiile de mai sus, trebuie calculate mai întîi elementele de suprafață dS_i $(i = 1, \ldots, 4)$.

Elementul de suprafață dS_1 poate fi ușor calculat ținînd seama de cele indicate în figura 5*a*, din care rezultă pentru dS_1 următoarea expresie :

$$dS_1 = x_1 dx_1 dy. \tag{45}$$

Din figura 5*b*, rezultă de asemenea cu ușurință expresia elementului de suprafață

$$dS_2 = h^2 X_1 dX_1 dY, \tag{46}$$

care, dacă se ține seama de schimbarea de variabile indicată în (4), se mai poate scrie sub forma

$$dS_2 = x_1 dx_1 dy. \tag{47}$$

Pentru elementele de suprafață dS_3 și dS_4 este ușor de văzut din figura 5*c* că rezultă aceiași expresie ca și pentru dS_2, adică

$$dS_3 = dS_4 = h^2 X_1 dX_1 dY\,. \tag{48}$$

Ținînd seama de aceste relații, precum și de faptul că $\gamma^{(I)}$ și $\gamma^{(II)}$ care au fost definite prin (32) și (35), pot fi exprimate și sub forma

$$\gamma^{(1)} = (hX_1)^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \gamma^{(i)}_{n-1,\,q}\left(Y + \frac{g}{hX_1}\right)^q \left(1 + \frac{1-h}{hX_1}\right)^{n-q-1} \tag{49}$$

și

$$\gamma^{(II)} = \frac{x_1^{\,n-1}}{h^{n-1}} \sum_{q=0}^{n-1} \Gamma^{(i)}_{n-1,\,q}\left(y - \frac{g}{x_1}\right)^q \left(1 - \frac{1-h}{x_1}\right)^{n-q-1}, \tag{50}$$

expresiile (44) pot fi scrise sub forma

$$C_x^{(1)} = \frac{-4}{SU_\infty}\int_{-l_2}^{l_1} \frac{u^{(I)}}{x_1^{n-1}}\cdot\frac{\gamma^{(I)}}{x_1^{n-1}}\,dy \int_0^{q_1} x_1^{2n-1}\,dx_1 = \frac{-4}{SU_\infty}\int_{-l_2}^{l_1} \frac{q_1^{2u}}{2n}\,\frac{u^{(I)}}{x_1^{n-1}}\cdot\frac{\gamma^{(1)}}{x_1^{n-1}}\,dy, \tag{51}$$

în care limita de integrare q_1 are expresia

$$q_1 = \frac{1}{1 - y \operatorname{tg} \theta}\,; \tag{52}$$

$$C_x^{(2)} = \frac{-4}{SU_\infty}\int_{\frac{g}{1-h}}^{l_1} \frac{u^{(I)}}{x_1^{n-1}}\,dy \int_{q_2}^{q_1} x_1^n \gamma^{(II)}\,dx_1 - \frac{-4}{SU_\infty}\int_{l_2}^{\frac{g}{1-h}} \frac{u^{(I)}}{x_1^{n-1}}\,dy \int_{q_3}^{q_1} x_1^n \gamma^{(II)}\,dx_1, \tag{53}$$

în care pentru $\gamma^{(II)}$ va trebui luată expresia (50), pentru q_1 aceeași expresie (52), iar pentru q_2 și q_3 expresiile

$$q_2 = \frac{(1-h)\,L_1 - g}{L_1 - y},\; q_3 = \frac{(1-h)\,L_2 + g}{L_2 + y}\,; \tag{54}$$

$$\begin{aligned} C_x^{(3)} &= \frac{-4h^2}{SU_\infty}\int_{-L_2}^{L_1} \frac{u^{(II)}}{X_1^{n-1}}\cdot\frac{\gamma^{(II)}}{X_1^{n-1}}\,dY \int_0^{q_4} X_1^{2n-1}\,dX_1 = \\ &= \frac{-4h^2}{SU_\infty}\int_{-L_2}^{L_1} \frac{q_4^{2n}}{2n}\cdot\frac{u^{(II)}}{X_1^{n-1}}\cdot\frac{\gamma^{(II)}}{X_1^{n-1}}\,dY, \end{aligned} \tag{55}$$

în care

$$q_4 = \frac{1 + \frac{g}{h}\operatorname{tg}\theta}{1 - Y\operatorname{tg}\theta}\,; \tag{56}$$

$$C_x^{(4)} = \frac{-4h^2}{SU_\infty}\int_{-L_2}^{L_1} \frac{u^{(II)}}{X_1^{n-1}}\, dY \int_0^{q_4} X_1^n \gamma^{(I)} dX_1, \tag{57}$$

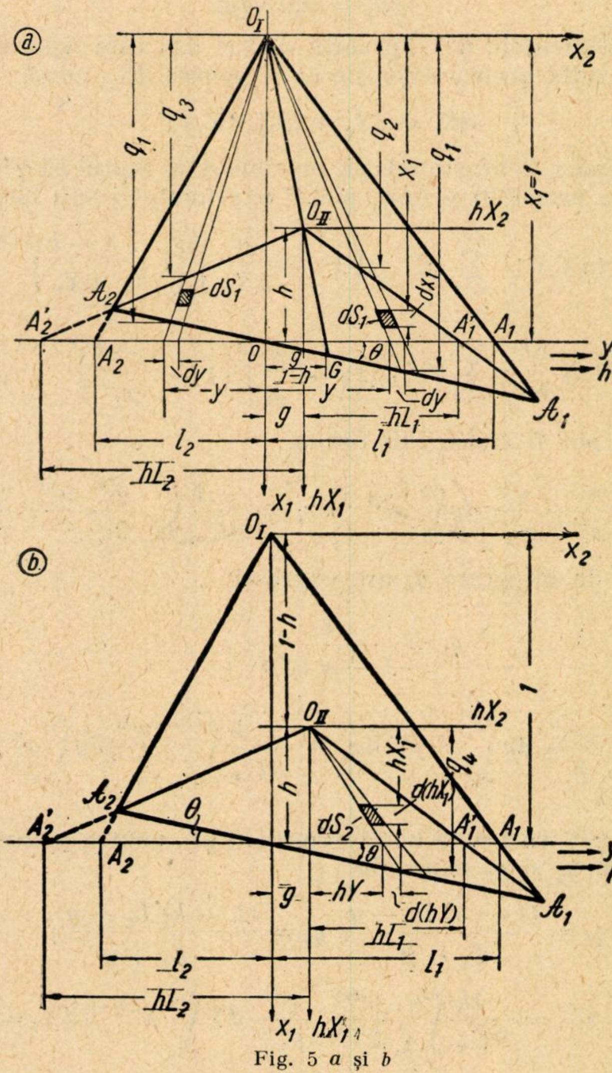

ⓐ
O_I
x_2
q_1
q_3
q_2
x_1
q_1
$x_1=1$
O_{II}
hX_2
h
$\mathcal{A}_2$
A_2'
dS_1
dx_1
dS_1
A_1'
A_1
y
hY
θ
A_2
0
g
G
$1-h$
dy
$-y$
y
dy
g
hL_1
$\mathcal{A}_1$
l_2
l_1
hL_2
x_1
hX_1
ⓑ
O_I
x_2
$1-h$
1
O_{II}
hX_2
hX_1
q_4
$d(hX_1)$
h
$\mathcal{A}_2$
θ_1
dS_2
A_2'
A_1'
A_1
y
hY
θ
A_2
g
hY
$d(hY)$
$\mathcal{A}_1$
hL_1
l_2
l_1
hL_2
x_1
hX_1

Fig. 5 *a* şi *b*

în care pentru $\gamma^{(I)}$ va fi luată expresia (49), iar pentru q_4 expresia (56)

$$C_x^{(5)} = \frac{-4h^2}{SU_\infty}\int_{L_1}^{\frac{1}{B}} \frac{u^{(II)}}{X_1^{n-1}}\, dY \int_0^{q_5} X_1^n \gamma^{(I)} dX_1, \tag{58}$$

$$C_X^{(6)} = \frac{-4h^2}{SU_\infty}\int_{-\frac{1}{B}}^{-L_2} \frac{u^{(II)}}{X_1^{n-1}}\, dY \int_0^{q_6} X_1^n \gamma^{(I)} dX_1 \tag{59}$$

în care pentru γ^{I} va fi luată expresia (49), iar pentru q_5 și q_6 expresiile

$$q_5 = \frac{1}{h}\,\frac{(1-h)\,l_1 - g}{Y - l_1}, \tag{60a}$$

$$q_6 = \frac{1}{h}\,\frac{(1-h)\,l_2 + g}{-Y - l_2}. \tag{60b}$$

4. *Exemple de aplicație*. Pentru fixarea ideilor să considerăm cazul aripii triunghiulare $O_{\mathrm{I}}A_1A_2$ (fig. 3*a*, *b*, *c*), avînd un profil rombic a cărei grosime variază linear în anvergură ca în figura 3*e*; această aripă are pe porțiunea anterioară $O_{\mathrm{I}}A_1O_{\mathrm{II}}A_2$ panta γ_0, iar pe porțiunea de închidere $O_{\mathrm{II}}A_1A_2$ panta $\left(\gamma_0 - \frac{\gamma_0}{h}\right)$, după cum rezultă din condiția de închidere a aripii pe bordul A_1A_2.

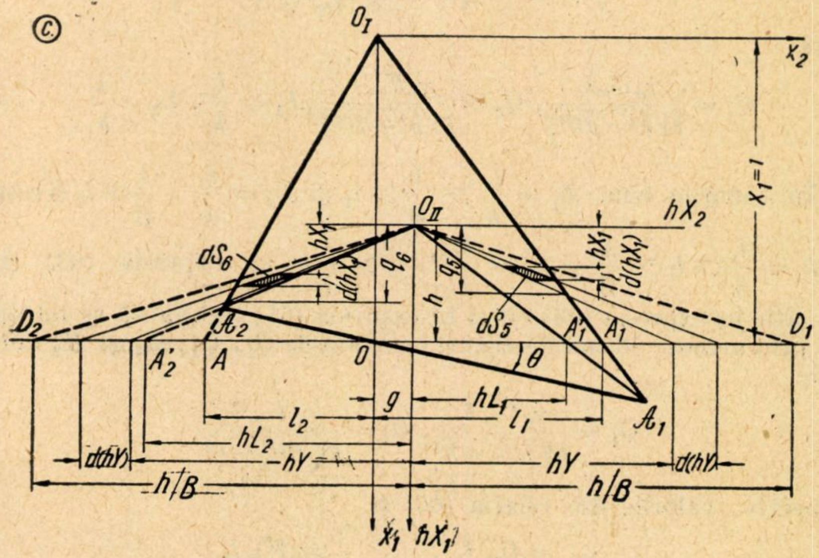


Fig. 5c

Ținînd seama de cele stabilite mai sus la punctul 2, în cazul cînd $L_1 = \frac{l_1}{h} < \frac{1}{B}$ și $L_2 = \frac{l_2}{h} < \frac{1}{B}$ vor rezulta cu ușurință următoarele expresii pentru vitezele axiale de perturbație $u^{(\mathrm{I})}$ și $u^{(\mathrm{II})}$,

$$\begin{aligned} u^{(\mathrm{I})} = \mathcal{R}e\Bigg[&-\frac{2K_1}{\pi}\,\mathrm{argch}\sqrt{\frac{(1-By)(1+Bl_1)}{2B\,(l_1-y)}} - \\ &-\frac{2K_2}{\pi}\,\mathrm{argch}\sqrt{\frac{(1+By)(1+Bl_2)}{2B\,(l_2+y)}}\Bigg], \end{aligned} \tag{61}$$

în care

$$K_1 = \frac{\gamma_0 \, U_\infty \, l_1}{\sqrt{1 - B^2 l_1^2}}, \; K_2 = \frac{\gamma_0 U_\infty \, l_2}{\sqrt{1 - B^2 l_2^2}}, \tag{62}$$

şi

$$u^{\mathrm{II}} = \mathcal{R}e \left[-\frac{2Q_1}{\pi} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - BY)(1 + BL_1)}{2B(\lambda_1 - Y)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2\,Q_2}{\pi} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + BY)\;(1 + BL_2)}{2B\,(L_2 + Y)}} \right], \tag{63}$$

în care

$$Q_1 = \frac{\gamma_0 U_\infty l_1}{h\sqrt{h^2 - B^2 l_1^2}}, \; Q_2 = \frac{\gamma_0 U_\infty \, l_2}{h\sqrt{h^2 - B^2 l_2^2}}, L_1 = \frac{l_1}{h}, \; L_2 = \frac{l_2}{h}. \tag{64}$$

În cazurile cînd $L_1 = \frac{l_1}{h} > \frac{1}{B} > l_1$ şi $L_2 = \frac{l_2}{h} > \frac{1}{B} > l_2$ şi respectiv cînd $L_1 = \frac{l_1}{h} > l_1 > \frac{1}{B}$ şi $L_2 = \frac{l_2}{h} > l_2 > \frac{1}{B}$, în expresia (63) şi respectiv atît în expresia (63) cît şi în expresia (61) trebuie să se înlocuiască argch prin arccos; în aceste cazuri constantele Q_1, Q_2, K_1 şi K_2 vor avea valorile

$$Q_1 = \frac{\gamma_0 U_\infty \, l_1}{h\sqrt{B^2 l_1^2 - h^2}}, \; Q_2 = \frac{\gamma_0 \, U_\infty \, l_2}{h\sqrt{B^2 l_2^2 - h^2}}, \tag{65}$$

şi respectiv, valorile din relaţia (65) şi

$$K_1 = \frac{\gamma_0 U_\infty \, l_1}{\sqrt{B^2 l_1^2 - 1}}, \; K_2 = \frac{\gamma_0 U_\infty \, l_2}{\sqrt{B^2 l_2^2 - 1}}. \tag{66}$$

Coeficientul de rezistenţă la înaintare se va obţine în acest caz introducînd în relaţia (43) următoarele expresii:

$$C_X^{(1)} - C_X^{(2)} = \frac{-4\,\gamma_0}{(l_1 + l_2)\,U_\infty} \frac{1 - h}{h} \left[-\int_{-l_2}^{l_1} u^{(\mathrm{I})}\, dy + \frac{1 - h}{h} l_1^2 \int_0^{l_1} u^{(\mathrm{I})} \frac{dy}{\left(\frac{l_1}{h} - y\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - h}{h} l_2^2 \int_{-l_2}^{0} u^{(\mathrm{I})} \frac{dy}{\left(\frac{l_2}{h} + y\right)^2} \right], \tag{67}$$

$$C_X^{(3)} - C_X^{(4)} = \frac{-4\,\gamma_0}{(l_1 + l_2)\,U_\infty} (1 - h)\, h \int_{-\frac{l_2}{h}}^{\frac{l_1}{h}} u^{(\mathrm{II})}\, dY, \tag{68}$$

$$C_X^{(5)} + C_X^{(6)} = \frac{-4\,\gamma_0}{(l_1+l_2)\,U_\infty}(1-h)^2\left[l_1^2\int_{\frac{l_1}{h}}^{\frac{1}{B}} u^{(\mathrm{II})}\frac{dY}{(Y-l_1)^2} + \right. \tag{69}$$

$$\left. + l_2^2\int_{-\frac{1}{B}}^{-\frac{l_2}{h}} u^{(\mathrm{II})}\frac{dY}{(Y+l_2)^2}\right].$$

Efectuînd calculele pentru cazul particular $l_1 = l_2 = l < \frac{1}{B}$, expresiile de mai sus vor avea valorile

$$C_X^{(1)} - C_X^{(2)} = \frac{8\,\gamma_0^2}{\pi B}\frac{1-h}{1+h}\left\{\frac{2\,Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}}\left[\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+Bl}{2\,Bl}} - \operatorname{argch}\frac{1+Bl}{2\sqrt{Bl}}\right] + \right.$$

$$+ \frac{2\,Bl}{h\sqrt{h^2-B^2l^2}}\left[\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1-Bl)\,(h+Bl)}{2\,Bl\,(1-h)}} - \operatorname{argch}\sqrt{\frac{h+Bl}{2\,Bl}}\right] - \tag{70a}$$

$$\left. - \frac{1+h}{h}\arcsin BC\right\}$$

$$C_X^{(3)} - C_X^{(4)} = \frac{8\,\gamma_0^2}{\pi B}\left[\frac{2\,Bl}{\sqrt{h^2-B^2l^2}}\operatorname{argch}\frac{h+Bl}{2\sqrt{Blh}} + \arcsin\frac{Bl}{h}\right], \tag{70b}$$

$$C_X^{(5)} + C_X^{(6)} = \frac{8\,\gamma_0^2}{\pi B}\frac{1-h}{1+h}\left[\frac{2\,Bl}{\sqrt{h^2-B^2l^2}}\operatorname{argch}\frac{4+Bl}{2\sqrt{Blh}} - \right. \tag{70c}$$

$$\left. - \frac{2\,Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}}\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1-Bl)\,(h+Bl)}{2\,Bl\,(1-h)}}\right].$$

Să considerăm acum ca un alt exemplu, cazul aripii triunghiulare $O_I\,A_1A_2$ (fig. *3a*, *b*, *d*, *f*) avînd un profil rombic a cărei grosime maximă variază parabolic în anvergură. În acest caz, dacă se ține seama de relațiile (25) și (26) particularizate pentru cazul $n = 2$, se va obține pentru panta γ a aripii expresia

$$\gamma = \gamma^{(\mathrm{I})} = \gamma_0 \pm \gamma_{11}\,x_2, \tag{71}$$

pentru suprafața anterioară $O_I A_1 O_{II} A_2$, și

$$\gamma = \gamma^{(\mathrm{I})} - \gamma^{(\mathrm{II})} = \gamma_0 \pm \gamma_{11}x_2 - \frac{1}{h}(\gamma_0 \pm \gamma_{11}hX_2), \tag{72}$$

pentru suprafața de închidere $O_{II}A_1A_2$, unde semnul + (plus) se referă la $x_2 > 0$, iar semnul − (minus) la $x_2 < 0$.

În acest caz scurgerea în jurul aripii considerate poate fi descompusă într-o scurgere de ordin $n = 1$ în jurul unei aripi avînd pantele $\gamma_{n=1}^{(\mathrm{I})} = \gamma_0$ și respectiv $\gamma_{n=1}^{(\mathrm{I})} - \gamma_{n=1}^{(\mathrm{II})} = \gamma_0 - \frac{\gamma_0}{h}$, și într-o scurgere de ordin $n = 2$ în jurul unei aripi avînd pantele $\gamma^{(I)}_{n=2} = \gamma_{11} x_2$ şi respectiv $\gamma^{(I)}_{n=2} - \gamma^{(II)}_{n=2} = \gamma_{11} x_2 - \gamma_{11} X_2$. Prima din aceste scurgeri a fost tratată în exemplul precedent, expresiile vitezelor axiale $u^{(I)}_{n=1}$ şi $u^{(II)}_{n=1}$ din acest caz fiind cele din relaţiile (61) şi (63).

Într-un mod asemănător, ţinînd seama de relaţiile (39), (40), vor putea fi deduse şi expresiile vitezelor axiale $u^{(I)}_{n=2}$ şi $u^{(II)}_{n=2}$ din cea de-a doua scurgere, care pentru $l_1 = l_2 = l < L = \frac{l}{h} < \frac{1}{B}$, sînt de forma

$$\frac{u^{(I)}_{n=2}}{x_1} = -\frac{2K_1}{\pi}\left[(l - B^2 l^2 y) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - By)(1 + Bl)}{2B(l - g)}} + \right.$$
$$\left. + (l + B^2 l^2 y) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + By)(1 + Bl)}{2B(l + y)}} - D\sqrt{1 - B^2 y^2}\right] \tag{73}$$

şi

$$\frac{u^{(II)}_{n=2}}{X_1} = -\frac{2Q_1}{\pi}\left[(L - B^2 L^2 Y) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - BY)(1 + BL)}{2B(L - Y)}} + \right.$$
$$\left. + (L + B^2 L^2 Y) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + BY)(1 + BL)}{2B(L + Y)}} - C\sqrt{1 - B^2 Y^2}\right] \tag{74}$$

în care

$$K_1 = \frac{\gamma_{11} U_\infty l}{(1 - B^2 l^2)^{3/2}}, \quad D = l\sqrt{1 - B^2 l^2}, \tag{75a}$$

$$Q_1 = \frac{\gamma_{11} U_\infty L}{(1 - B^2 L^2)^{3/2}}, \quad C = L\sqrt{1 - B^2 L^2}, \quad L = \frac{l}{h}. \tag{75b}$$

În acest caz, coeficientul de rezistenţă C_X va fi dat de relaţia (43), în care însă

$$C_X^{(j)} = C_{X_1}^{(j)} + C_{X_2}^{(j)} + C_{X_{12}}^{(j)} + C_{X_{21}}^{(j)}, \qquad (j = 1,2\ldots,6) \tag{76}$$

unde $C_{X_1}^{(j)}$ şi $C_{X_2}^{(j)}$ sînt date de relaţiile (51), (53), (55), (57), (58), (59) în care se va înlocui $n = 1$ şi respectiv $n = 2$, iar $C_{X_{12}}^{(j)}$ şi $C_{X_{21}}^{(j)}$ vor fi date de aceleaşi relaţii de mai sus, în care însă pentru u se va lua $n = 1$, iar pentru γ, $n = 2$, şi respectiv pentru u, $n = 2$ iar pentru γ, $n = 1$.

Efectuînd calculele pentru cazul considerat mai sus, $l_1 = l_2 = l < L = \frac{l}{h} < \frac{1}{B}$, vor rezulta următoarele expresii care intră în componenţa coeficientului de rezistenţă

$$C_{X_2}^{(1)} = \frac{8\gamma_{11}^2}{3\pi B^3} \frac{B^3 l^3}{(1 - B^2 l^2)^{3/2}}\left[B^2 l^2 \operatorname{argch} \frac{1 + Bl}{2\sqrt{Bl}} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3}{2} - B^2 l^2\right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1 + Bl}{2Bl}} - \frac{2 - B^2 l^2}{B^2 l^2}\sqrt{1 - B^2 l^2} + \frac{2(1 - B^2 l^2)}{B^2 l^2} + \frac{B^2 l^2}{2}\right], \tag{77a}$$

$$\begin{aligned}
C_{X_2}^{(2)} = {} & \frac{1}{h} C_{X_2}^{(1)} - \frac{4\gamma_{11}^2}{3\pi B^3} \frac{(1-h)^4}{h^4} \frac{B^3 l^3}{(1-B^2 l^2)^{3/2}} \Bigg\{ h \frac{h(3+5h^2)+2B^2l^2(3-2h^2+3h^4)}{(1-h^2)^3} \times \\
& \times \operatorname{argch} \frac{1+Bl}{2\sqrt{Bl}} + h^3 \frac{9-2h^2+h^4-2B^2l^2(3-2h^2+4h^4)}{(1-h^2)^3} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1+Bl}{2Bl}} - \\
& - \frac{\sqrt{1-B^2l^2}}{h} \Bigg| \frac{h^2(2-6h^2-3h^4)+2B^2l^2(3-6h^2+7h^4+h^6}{2(1-h^2)^3} \mathbf{I}_1 + \\
& + \frac{l}{h} \frac{(1-5h^2)h^2-2B^2l^2(6-10h^2+3h^4)}{2(1-h^2)^2} \mathbf{I}_2 - \frac{l^2}{h^2} \frac{2h^2-B^2l^2(9+h^2)}{1-h^2} \mathbf{I}_3 + \\
& + 3(h^2 - B^2l^2 \frac{l^3}{h^3} \mathbf{I}_4 \Bigg] \Bigg\}, \qquad (77\,\text{b})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{X_2}^{(3)} - C_{X_2}^{(4)} = {} & \frac{8\gamma_{11}^2}{\pi B^3} \frac{1-h}{h} \frac{B^3 l^3}{(h^2-B^2l^2)^{3/2}} \Bigg[B^2 l^2 \operatorname{argch} \frac{h+Bl}{2\sqrt{Blh}} + \\
& + \left(\frac{3}{2} h^2 - B^2 l^2 \right) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{h+Bl}{2Bl}} - h \frac{2h^2-B^2l^2}{B^2l^2} \sqrt{h^2-B^2l^2} + \qquad (77\,\text{c}) \\
& + \frac{2(h^2-B^2l^2)}{B^2l^2} + \frac{B^2l^2}{2} \Bigg],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{X_2}^{(5)} + C_{X_2}^{(6)} = {} & \frac{8\gamma_{11}^2}{3\pi B^3} (1-h)^4 \frac{B^3 l^3}{(h^2-B^2l^2)^{3/2}} \Bigg\{ \frac{h^4(5+3h^2)+2B^2l^2(3-2h^2+3h^4)}{(1-h^2)^3} \times \\
& \times \operatorname{argch} \frac{h+Bl}{2\sqrt{Blh}} + h\sqrt{h^2-B^2l^2} \Bigg[\frac{3+6h^2-2h^4-2B^2l^2(7+6h^2-3h^4)}{2(1-h^2)^3} \mathbf{J}_1 - \qquad (77\,\text{d}) \\
& - l \frac{5-h^2+2B^2l^2(3-10h^2+6h^4)}{2(1-h^2)^2} \mathbf{J}_2 - \frac{l^2}{h^2} \frac{3(1-h^2)-h^4-B^2l^2(3-2h^2)}{1-h^2} \mathbf{J}_3 + \\
& + 3 \frac{l^3}{h^2} (1-B^2l^2) \mathbf{J}_4 \Bigg] \Bigg\},
\end{aligned}$$

$$C_{X_{12}}^{(1)} = \frac{8\gamma_0\gamma_{11}}{3\pi B^2} \left[\frac{2B^2l^2}{\sqrt{1-B^2l^2}} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1+Bl}{2Bl}} + 1 - \sqrt{1-B^2l^2} \right], \qquad (77\,\text{e})$$

$$\begin{aligned}
C_{X_{12}}^{(2)} = {} & \frac{1}{h} C_{X_{12}}^{(1)} - \frac{8\gamma_0\gamma_{11}}{3\pi B^2} \frac{(1-h)^3}{h^3} \Bigg\{ \frac{2B^2l^2}{\sqrt{1-B^2l^2}} \Bigg[\frac{h^2(1+h^2)}{(1-h^2)^2} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1+Bl}{2Bl}} - \\
& - \frac{h(1-2h^2)}{(1-h^2)^2} \operatorname{argch} \frac{1+Bl}{2\sqrt{Bl}} \Bigg] + B^2l^2 \Bigg[\frac{3h^2-1}{(1-h^2)^2} \mathbf{I}_1 + \frac{1}{1-h^2} \frac{l}{h} \mathbf{I}_2 \Bigg] \Bigg\}, \qquad (77\,\text{f})
\end{aligned}$$

$$C_{X_{12}}^{(3)} - C_{X_{12}}^{(4)} = \frac{8\gamma_0\gamma_{11}}{3\pi B^2} (1-h) \left[\frac{2B^2l^2}{\sqrt{h^2-B^2l^2}} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{h+Bl}{2Bl}} + h - \sqrt{h^2-B^2l^2} \right], \qquad (77\,\text{g})$$

$$C^{(5)}_{X_{12}} + C^{(6)}_{X_{12}} = \frac{8\gamma_0\gamma_{11}}{3\,\pi B^2}\frac{(1-h)^3}{h}\Bigg\{\frac{2B^2l^2}{\sqrt{h^2-B^2l^2}}\,\frac{h\,(2-h^2)}{(1-h^2)^2}\,\operatorname{argch}\frac{h+Bl}{2\sqrt{Blh}} + \tag{77 h}$$

$$+B^2l^2\left[\frac{h^2\,(3-h^2)}{(1-h^2)^2}\mathbf{J}_1 - \frac{1}{1-h^2}\,\frac{l}{h}\,\mathbf{J}_2\right]\Bigg\},$$

$$C^{(1)}_{X_{21}} = \frac{8\gamma_0\gamma_{11}}{3\,\pi B^2}\left[\frac{4\,B^2l^2}{(1-B^2l^2)^{3/2}}\,\operatorname{argch}\frac{1+Bl}{2\sqrt{Bl}} + \operatorname{arc\ sin} Bl - \frac{Bl}{\sqrt{1-B^2l^2}}\right], \tag{77 i}$$

$$C^{(2)}_{X_{21}} = \frac{1}{h}\,C^{(1)}_{X_{21}} - \frac{8\gamma_0\gamma_{11}}{\pi B^2}\,\frac{(1-h)^3}{h^2}\Bigg\{\frac{2B^2l^2}{(1-B^2l^2)^{3/2}}\Bigg[\frac{h+B^2l^2\,(1-h^2)}{(1-h^2)^2}\,\operatorname{argch}\frac{1+Bl}{2\sqrt{Bl}} +$$

$$+\frac{h^2(3-h^2)+B^2l^2(1-2h^2)}{(1-h^2)^2}\,\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+Bl}{2\,Bl}}\,\Bigg] +$$

$$+\,B^2l^2\Bigg[\frac{1+h^2+B^2l^2(2-4h^2+h^4)}{(1-h^2)^2}\,\mathbf{I}_1 + \frac{h^2-B^2l^2(2-h^2)}{1-h^2}\,\frac{l}{h}\,\mathbf{I}_2 -$$

$$-\frac{h^2-B^2l^2}{h^2}\,\frac{l^2}{h^2}\,\mathbf{I}_3\Bigg]\Bigg\}, \tag{77 j}$$

$$C^{(3)}_{X_{21}} - C^{(4)}_{X_{21}} = \frac{8\gamma_0\gamma_{11}}{3\,\pi B^2}\,\frac{1-h}{h}\,Bl\left[\frac{4Blh^2}{(h^2-B^2l^2)^{3/2}}\,\operatorname{argch}\frac{h+Bl}{2\sqrt{Blh}} + \operatorname{arc\ sin}\frac{Bl}{h} - \right. \tag{77k}$$

$$\left. - \frac{Bl}{\sqrt{h^2-B^2l^2}}\right],$$

$$C^{(5)}_{X_{21}} + C^{(6)}_{X_{21}} = \frac{8\gamma_0\gamma_{11}}{3\,\pi B^2}\,(1-h)^3\,\frac{2B^2l^2h}{(h^2-B^2l^2)^{3/2}}\Bigg\{\frac{h^2\,1+B^2l^2(2-h^2)}{(1-h^2)^2}\times$$

$$\times\ \operatorname{argh}\frac{h+Bl}{2\sqrt{Blh}} + \sqrt{h^2-B^2l^2}\Bigg[\frac{1+h^2-B^2l^2(1+h^2-h^4)}{(1-h^2)^2}\,\mathbf{J}_1 - \tag{77 l}$$

$$-\frac{h^2+B^2l^2\,(1-2h^2)}{1-h^2}\,l\mathbf{J}_2 - \frac{1-B^2l^3}{h^2}\,l^2\mathbf{J}_3\Bigg]\Bigg\},$$

în care

$$\mathbf{I}_1 = \frac{2\,h}{\sqrt{h^2B^2l^2}}\left[\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1-Bl)\,(4+Bl)}{2\,Bl\,(1-h)}} - \operatorname{argch}\sqrt{\frac{h+Bl}{2\,Bl}}\right], \tag{78 a}$$

$$\mathbf{J}_1 = \frac{2}{\sqrt{1-B^2l^2}}\,\operatorname{argch}\sqrt{\frac{(h+Bl)\,(1-Bl)}{2\,Bl\,(1-h)}}, \tag{78 b}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{h^2}{h^2-B^2l^2}\,\frac{h}{l}\left[1 - \frac{\sqrt{1-B^2l^2}}{1-h} - \frac{B^2l^2}{h^2}\mathbf{I}_1\right],$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{-1}{1-B^2l^2}\,\frac{1}{l}\left[\frac{\sqrt{h^2-B^2l^2}}{1-h} + B^2\,l^2\,\mathbf{J}_1\right], \tag{78 c}$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{h^2}{h^2-B^2l^2}\,\frac{h}{l}\left[\frac{h}{l}\left(1-\frac{\sqrt{1-B^2l^2}}{(1-h)^2}\right)-3\,\frac{B^2l^2}{h^2}\,\mathbf{I}_2+B^2\,\mathbf{I}_1\right],$$

$$\mathbf{J}_3 = \frac{-1}{1-B^2l^2}\,\frac{1}{l}\left[\frac{\sqrt{h^2-B^2l^2}}{1-h}+3B^2l^2\,\mathbf{J}_2\,B^2\,\mathbf{J}_1\right], \tag{78 d}$$

$$\mathbf{I}_4 = \frac{h^2}{h^2-B^2l^2}\,\frac{h}{l}\left[\frac{h^2}{l^2}\left(1-\frac{\sqrt{1-B^2l^2}}{(1-h)^3}\right)-5\,\frac{B^2l^2}{h^2}\,\mathbf{I}_3+2B^2\,\mathbf{I}_2\right],$$

$$\mathbf{J}_4 = \frac{-1}{1-B^2l^2}\,\frac{1}{l}\left[\frac{h^2}{l^2}\,\frac{\sqrt{h^2-B^2l^2}}{(1-h)^3}+5\,B^2\,l^2\,\mathbf{J}_3-2B^2\,\mathbf{J}_2\right]. \tag{78 e}$$

În ceea ce privește coeficienții $C_{x_1}^{(j)}$, aceștia vor avea expresiile indicate în relațiile (70 a, b, c).

5. *Extindere la cazul cînd panta aripii este distribuită după o funcție omogenă.* Am anunțat mai sus că în cazul cel mai general, panta aripii, atît pe suprafața anterioară cît și pe cea de închidere, este dată sub forma unei sume de funcții omogene de diferite ordine, după cum rezultă din relațiile (1) și (3).

Să considerăm în acest sens că panta suprafeței anterioare $O_{\mathrm{I}}A_1O_{\mathrm{II}}A_2$, a aripii (fig. 3) este distribuită după o funcție omogenă de ordin $(n-1)$, care poate fi scrisă sub forma

$$\gamma = x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} y^q f_q(y), \tag{79}$$

în timp ce panta suprafeței de închidere $O_{\mathrm{II}}A_1A_2$ este dată sub forma

$$\gamma = x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} y^q f_q(y) - \frac{1}{h} X_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} Y^q F_q(Y), \tag{80}$$

în care funcțiile $F_q(Y)$ depind de funcțiile $f_q(y)$ prin intermediul condiției (6c) de închidere a aripii pe bordul A_1A_2.

Și în acest caz poate fi făcută descompunerea definită prin relațiile (21) și (22), în care însă

$$\gamma^{(\mathrm{I})} = x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} y^q f_q(y), \tag{81}$$

și

$$\gamma^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{h} X_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} Y^q F_q(Y). \tag{82}$$

În acest mod, problema a fost redusă la studiul scurgerii supersonice în jurul a două aripi a căror pantă însă este distribuită după o funcție omogenă și nu după un polinom omogen ca mai sus.

Această problemă poate fi tratată destul de simplu dacă se presupune că pantele $\gamma^{(\mathrm{I})}$ și $\gamma^{(\mathrm{II})}$ sînt date sub forma unor polinoame omogene de ordin $(n-1)$, ai căror coeficienți sînt însă variabili; în fiecare punct

$y = \eta$, sau respectiv $Y = \eta$, aceşti coeficienţi, care mai sus au fost notaţi prin $\gamma_{n-1,q}$ şi respectiv $\Gamma_{n-1,q}$, trebuie să prezinte salturile elementare de valoare

$$\Delta\gamma_{n-1,q} = \left[\frac{df_q}{dy}\right]_{y=\eta} d\eta \tag{83}$$

şi respectiv

$$\Delta\Gamma_{n-1,q} = \left[\frac{dF_q}{dY}\right]_{Y=\eta} d\eta. \tag{84}$$

Ţinînd seama de cele de mai sus, rezultă că pentru determinarea vitezelor axiale de perturbaţie $u^{(\mathrm{I})}$ şi $u^{(\mathrm{II})}$, va trebui să se considere două aripi de grosime simetrică, avînd o distribuţie continuă pe muchii, fiecare din aceste muchii trebuind să asigure saltul elementar $\Delta\gamma_{n-1,q}$ sau respectiv $\Delta\Gamma_{n-1,q}$.

Utilizînd pentru soluţionarea scurgerii în jurul acestor aripi metoda analogiei hidrodinamice, [5], [6], se va obţine în cele din urmă pentru $u^{(\mathrm{I})}$, în cazul cînd $l_1 > \dfrac{1}{B}$ şi $l_2 > \dfrac{1}{B}$, expresia

$$\begin{aligned}\frac{u^{(\mathrm{I})}}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\Bigg[&\sum_{k=0}^{n-1} K_k^{(1)} y^k \arccos\sqrt{\frac{(1-By)(1+Bl_1)}{2B(l_1-y)}} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} K_q^{(2)} y^k \arccos\sqrt{\frac{(1+By)(1+Bl_2)}{2B(l_2+y)}} + \sqrt{1-B^2y^2}\sum_{k=0}^{n-2} C_k y^k + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} y^k \int_0^{\frac{1}{B}} P_k^{(1)}(\eta)\, \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1-By)(1+B\eta)}{2B(\eta-y)}}\, d\eta + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} y^k \int_0^{\frac{1}{B}} R_k^{(1)}(\eta)\, \operatorname{argch}\sqrt{\frac{(1+By)(1+B\eta)}{2B(\eta+y)}}\, d\eta + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} y^k \int_{\frac{1}{B}}^{l_1} P_k^{(2)}(\eta) \arccos\sqrt{\frac{(1-By)(1+B\eta)}{2B(\eta-y)}}\, d\eta + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} y^k \int_{\frac{1}{B}}^{l_2} R_k^{(2)}(\eta) \arccos\sqrt{\frac{(1+By)(1+B\eta)}{2B(\eta+y)}}\, d\eta\Bigg],\end{aligned} \tag{85}$$

în care ultimii patru termeni reprezintă contribuţia în $u^{(\mathrm{I})}$ a distribuţiei continue de muchii caracterizate prin salturile elementare (83) şi (84); dacă $l_1 < \dfrac{1}{B}$ şi $l_2 < \dfrac{1}{B}$ ultimii doi termeni dispar, la precedenţii limita superioară de integrare se înlocuieşte prin l_1 şi respectiv l_2, iar la primii doi termeni arc cos se înlocuieşte prin argch. Expresiile coeficienţilor $P_{(k)}^{(i)}(\eta)$

şi $R_k^{(i)}(\eta)$, $(i = 1,2)$, din relația de mai sus, care sînt funcție de η, se determină din relațiile

$$\lim_{\varepsilon - 0}\left\{ \mathcal{R}e\, i \int_{\eta-\varepsilon}^{\eta+\varepsilon} (-x)^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} P_k^{(i)}(\eta)\, x^k \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\operatorname{argch} \times \sqrt{\frac{(1-Bx)(1+B\eta)}{2B(\eta-x)}}\right] dx \right\}_{x=y} = \left[\frac{d f_q(y)}{dy}\right]_{q=\eta} U_\infty, \text{ unde } \mathcal{R}e\; x = y, \quad (86)$$

$$\lim_{\varepsilon = 0}\left\{ \mathcal{R}e\, i \int_{\eta-\varepsilon}^{\eta+\varepsilon} (-x)^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} R_k^{(i)}(\eta)\, x^k \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-Bx)(1+B\eta)}{2B(\eta-xl}}\right] dx \right\}_{x=y} = -\left[\frac{d f_q(y)}{dy}\right]_{q=-\eta} U_\infty, \text{ unde } \mathcal{R}e\; x = y, \quad (87)$$

în care pentru $i = 2$ se va înlocui argch prin arc cos, în timp ce coeficienții $K_k^{(1)}$, $K_k^{(2)}$ şi C_k se vor determina în modul indicat în lucrările citate mai sus.

Într-un mod asemănător pentru $u^{(\mathrm{II})}$, în cazul cînd $\frac{l_1}{h} > \frac{1}{h}$ şi $\frac{l_2}{h} > \frac{1}{B}$, se va deduce expresia

$$\frac{u^{(\mathrm{II})}}{x_1^{u-1}} = \mathcal{R}e\left[\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^{(1)}\, Y^k \arccos \sqrt{\frac{(1 - BY)\left(1 + B\frac{l_1}{h}\right)}{2B\left(\frac{l_1}{h} - Y\right)}} + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^{(2)}\, Y^k \arccos \sqrt{\frac{(1 + BY)\left(1 + B\frac{l_2}{h}\right)}{2B\left(\frac{l_2}{h} + Y\right)}} + \sqrt{1 - B^2Y^2}\sum_{k=0}^{n-2} D_k Y^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} Y^k \int_0^{\frac{1}{B}} P_k^{(1)}(\eta) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 - BY)(1 + B\eta)}{2B(\eta - Y)}}\, d\eta +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} Y^k \int_0^{\frac{1}{B}} R_k^{(1)}(\eta) \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1 + BY)(1 + B\eta)}{2B(\eta + Y)}}\, d\eta +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} Y^k \int_{\frac{1}{B}}^{\frac{l_1}{h}} P_k^{(2)}(\eta) \arccos \sqrt{\frac{(1 - BY)(1 + B\eta)}{2B(\eta - Y)}}\, d\eta +$$

$$\left.+ \sum_{k=0}^{n-1} Y^k \int_{\frac{1}{B}}^{\frac{l_2}{h}} R_k^{(2)}(\eta) \arccos \sqrt{\frac{(1 + BY)(1 + B\eta)}{2B(\eta + Y)}}\, d\eta \right], \quad (88)$$

unde pentru determinarea coeficienților $P_k^{(i)}(\eta)$ și $R_k^{(i)}(\eta)$, se vor utiliza aceleași (relații (86) și (87), în care însă se va înlocui $f_q(Y)$ prin $\frac{1}{h}F_q(Y)$, y prin Y și x prin X, unde $\mathcal{R}e\, X = Y$.

Pentru exemplificare să considerăm în cazul $n = 1$ că $f_1(y) = ay$. În acest caz, pentru coeficienții $P_0^{(i)}$ și $R_0^{(i)}$ rezultă expresiile

$$P_0^{(1)}(\eta) = \frac{2}{\pi} a U_\infty \frac{\eta}{\sqrt{1 - B^2\eta^2}}, \quad P_0^{(2)}(\eta) = \frac{2}{\pi} a U_\infty \frac{\eta}{\sqrt{B^2\eta^2 - 1}} \tag{89}$$

și

$$R_0^{(1)}(\eta) = \frac{2}{\pi} a U_\infty \frac{-\eta}{\sqrt{1 - B^2\eta^2}}, \quad R_0^{(2)}(\eta) = \frac{2}{\pi} a U_\infty \frac{\eta}{\sqrt{B^2\eta^2 - 1}}. \tag{90}$$

În acest caz, pentru prima integrală din relația (85) se poate scrie succesiv

$$\int_0^{\frac{1}{B}} P_k^{(1)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-By)(1+B\eta)}{2B(\eta - y)}}\, d\eta = \frac{-aU_\infty}{\pi B^2} \int_0^{\frac{1}{B}} d\left(\sqrt{1-B^2\eta^2}\right) \operatorname{agrch} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(1-By)(1+B\eta)}{2B(\eta - y)}} = \frac{-aU_\infty}{\pi B^2} \left\{ \sqrt{(1-B^2\eta^2)} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-By)(1+B\eta)}{2B(\eta-y)}} - \right.$$

$$\left. - \int \sqrt{1 - B^2\eta^2}\, d\left[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-By)(1+B\eta)}{2B(\eta-y)}} \right] \right\} =$$

$$= \frac{-aU_\infty}{\pi B^2} \left[\sqrt{1 - B^2\eta^2} \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1-By)(1+B\eta)}{2B(\eta-y)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sqrt{1 - B^2x^2} \ln(\eta - x) \right|_0^{\frac{1}{B}}, \tag{91}$$

toate celelalte integrale care intervin în această problemă putînd fi efectuate într-un mod asemănător.

III. ARIPI SUBȚIRI CU SUPRAFAȚĂ DE ÎNCHIDERE

1. *Condițiile de scurgere pe aripă.* Să considerăm o aripă subțire de formă triunghiulară (fig. 2) obținută prin descompunerea menționată la începutul lucrării dintr-o aripă groasă portantă cu suprafață de închidere. În cazul cînd cotele extradosului (care pentru aripa subțire sînt egale cu cele ale intradosului) sînt date sub forma generală (8) sau (10), incidența în fiecare punct al acestei aripi este în general dată de expresiile

$$\alpha = -\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{n-1,q}^{(i)} y^q \tag{92}$$

și

$$\alpha = -\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{n-1,q}^{(i)} y^q - \frac{1}{h} X_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \nu_{n-1,q}^{(i)} Y^{(q)}, \tag{93}$$

în care coeficienții $\alpha_{n-1,q}^{(i)}$ și $\nu_{n-1,q}^{(i)}$ pot avea valorile $\alpha_{n-1,q}^{(1)}$, $\nu_{n-1,q}^{(1)}$ și $\alpha_{n-1,q}^{(i)}$, $\nu_{n-1,q}^{(i)}$ respectiv pe porțiunile $O_{\mathrm{I}} GA_1$ și $O_{\mathrm{I}}\, GA_2$.

În ipoteza perturbațiilor mici, și în acest caz vom putea descompune scurgerea în jurul aripii considerate în diferența a două mișcări

$$u = u^{(\mathrm{I})} - u^{(\mathrm{II})},\ v = v^{(\mathrm{I})} - v^{(\mathrm{II})},\ w = w^{(\mathrm{I})} - w^{(\mathrm{II})}, \tag{94}$$

și

$$\alpha = \alpha^{(\mathrm{I})} - \alpha^{(\mathrm{II})} \tag{95}$$

în care:

a) $u^{(\mathrm{I})}$, $v^{(\mathrm{I})}$, $w^{(\mathrm{I})}$ sînt vitezele de perturbație din jurul aripii subțiri $O_{\mathrm{I}} A_1 A_2$ caracterizată prin următoarele condiții de scurgere,

$$w^{(\mathrm{I})} = \alpha^{(\mathrm{I})} U_\infty, \text{ unde } \alpha^{(\mathrm{I})} = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{n-1,q}^{(i)} y^q, \tag{96}$$

pe aripă $\left(i = 1 \text{ pentru } y > \dfrac{g}{1-h} \text{ și } i = 2 \text{ pentru } y < \dfrac{g}{1-h}\right)$ și

$$u = v = 0, \tag{97}$$

pe planul $x_3 = 0$ în afara aripii;

b) $u^{(\mathrm{II})}$, $v^{(\mathrm{II})}$, $w^{(\mathrm{II})}$ sînt vitezele de perturbație din jurul unei aripi subțiri de anvergură indefinită, caracterizată prin condițiile

$$w^{(\mathrm{II})} = \alpha^{(\mathrm{II})} U_\infty, \text{ unde } \alpha^{(\mathrm{II})} = \frac{1}{h} \sum_{q=0}^{n-1} \nu_{n-1,q}^{(i)} Y^q, \tag{98}$$

pe porțiunea $O_{\mathrm{II}} A_1 A_2$ a acestei aripi, și

$$w^{(\mathrm{II})} = 0, \tag{99}$$

pe restul aripii în planul $x_3 = 0$.

Trebuie însă menționat că în cazul cînd $L_1 < \dfrac{1}{B}$ și $L_2 < \dfrac{1}{B}$, prin această descompunere am neglijat efectul reflexiilor undelor Mach care apar în punctele $\mathcal{D}_1$ și $\mathcal{D}_2$ (fig. 5*a*). Neglijarea acestui efect se datorește atît dificultăților de calcul care ar fi apărut, cît și datorită faptului că pentru o valoare a lui h nu prea apropiată de unitate, acest efect are valori destul de mici față de cele luate în considerație.

2. *Determinarea vitezei axiale de perturbație u pe aripă.* După cum rezultă din cele de mai sus, pentru determinarea vitezei axiale de perturbație u pe aripă, trebuie determinat mai întîi $u^{(\mathrm{I})}$ și $u^{(\mathrm{II})}$ din mișcările definite mai sus, deoarece $u = u^{(\mathrm{I})} - u^{(\mathrm{II})}$.

În ceea ce privește pe $u^{(\mathrm{II})}$, acesta va avea pe extradosul aripii aceeași expresie (40) ca și în cazul aripii de grosime simetrică, în care va trebui nsă să se țină seama că coeficienții $\Gamma_{n-1,q}$ trebuie înlocuiți prin $-\nu_{n-1,q}$.

Pentru viteza axială u^{I} din jurul aripii definite mai sus, utilizînd rezultatele obținute prin metoda analogiei hidrodinamice, [5], [6], se va obține în cazul cînd $l_1 < \frac{1}{B}$ și $l_2 < \frac{1}{B}$, expresia

$$\frac{u^{(\mathrm{I})}}{x_1^{n-1}} = \mathcal{Re}\left[\sqrt{\frac{l_2+y}{l_1-y}}\sum_{q=0}^{n-1} D_q^{(1)}\, y^q + \sqrt{\frac{l_1-y}{l_2+y}}\sum_{q=0}^{n-2} D_q^{(2)}\, y^q + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{n-1} K_q^{(G)}\, y^q \ \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1-y)\left(l_2+\frac{g}{1-h}\right)}{(l_1+l_2)\left(\frac{g}{1-h}-y\right)}}\right], \tag{100}$$

iar în cazul cînd $l_1 < \frac{1}{B}$ și $l_2 > \frac{1}{B}$, expresia

$$\frac{u^{(\mathrm{I})}}{x_1^{n-1}} = \mathcal{Re}\left[\sqrt{\frac{\frac{1}{B}+y}{l_1-y}}\sum_{q=0}^{n-1} D_q^{(1)}\, y^q + \sum_{q=0}^{n-1} K_q^{(2)}\, y^q \arccos \sqrt{\frac{(1+By)\,(l_1+l_2)}{(1+Bl_1)\,(l_2+y)}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{n-1} K_q^{(G)} \ \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1-y)\left(1+B\frac{g}{1-h}\right)}{(1+Bl_1)\left(\frac{g}{1-h}-y\right)}}\right]. \tag{101}$$

Dacă $l_1 > \frac{1}{B}$ și $l_2 > \frac{1}{B}$ atunci expresia lui $u^{(\mathrm{I})}$ se obține înlocuind pe argch prin arccos în primii doi termeni ai expresiei (39), iar dacă și $\frac{g}{1-h} > \frac{1}{B}$, trebuie făcută această operație în toată expresia (39).

În ceea ce privește constantele care apar în aceste expresii, ele se vor determina utilizînd metoda indicată în lucrările menționate.

3. *Determinarea coeficienților de portanță și rezistență.* În cazul unei aripi subțiri, coeficientul de portanță are expresia

$$SC_z = -2\int_S c_p\, dS = \frac{4}{SU_\infty}\int u dS, \tag{102}$$

în care S are valoarea indicată în (42).

Ținînd seama $u = u^{(\mathrm{I})} - u^{(\mathrm{II})}$, această expresie se mai poate scrie sub forma

$$C_z = \frac{4}{SU_\infty}\left[\int_{O_{\mathrm{I}}A_1A_2} u^{(\mathrm{I})}\, dS_1 - \int_{\mathrm{II}\mathscr{D}A_1A_2\mathscr{D}_1} u^{(\mathrm{II})}\, dS_2\right], \tag{103}$$

care, dacă se ținea seama de figura 5 şi de relațiile (45) şi (46), se mai poate scrie sub forma

$$C_z = \frac{4}{SU_\infty}\left[\int_{-l_2}^{l_1} \frac{q_1^{n+1}}{n+1}\frac{u^{(\mathrm{I})}}{x_1^{n-1}}\,dy - h^2\int_{-L_2}^{L_1}\frac{q_4^{n+1}}{n+1}\frac{u^{(\mathrm{II})}}{X_1^{n-1}}\,dY - \right.$$
$$\left. - h^2\int_{L_1}^{\frac{1}{B}}\frac{q_5^{n+1}}{n+1}\frac{u^{(\mathrm{II})}}{X_1^{n-1}}\,dY - h^2\int_{-\frac{1}{B}}^{-L_2}\frac{q_6^{n+1}}{n+1}\frac{u^{(11)}}{X_1^{n-1}}\,dY\right], \tag{104}$$

în care q_1, q_4, q_5, q_6 au expresiile din (52), (56), (60), iar L_1 şi L_2 au valorile din (7a, b).

În ceea ce priveşte coeficientul de rezistență de undă C_x, acesta are aceeaşi expresie (43) ca şi în cazul aripii de grosime simetrică, numai că în expresiile (51), (53), (54), (57), (58), şi (59), $\gamma^{(\mathrm{I})}$ şi $\gamma^{(\mathrm{II})}$ trebuie înlocuite prin $-\alpha^{(\mathrm{I})}$, şi respectiv $-\alpha^{(\mathrm{II})}$, iar pentru $u^{(\mathrm{I})}$ şi $u^{(\mathrm{II})}$ se vor lua expresiile determinate în cazul aripii subțiri.

Primită la redacție la 30 iunie 1962

КРЫЛЬЯ С ПОВЕРХНОСТЯМИ ЗАМЫКАНИЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ

РЕЗЮМЕ

В первой части настоящей работы определяется с геометрической точки зрения специальный класс крыльев, крылья с поверхностями замыкания, характеризующиеся тем, что толщина крыла на всех кромках равна нулю. Благодаря этой характеристике, этот класс крыльев имеет преимущество небольших лобовых сопротивлений, поэтому многие виды крыльев из этого класса могут быть использованы при конструировании скоростных самолетов, например крылья с ромбическим профилем, у которых толщина изменяется вдоль размаха в некотором направлении.

Далее рассматривается сверхзвуковое обтекание вокруг треугольного крыла симметричной толщины с поверхностью замыкания, которое в гипотезе малых возмущений можно разложить на сумму двух конических истечений n-ого порядка вокруг двух треугольных крыльев симметричной толщины с разными вершинами.

Суммированием решений этих двух конических движений, получается выражение осевой скорости возмущения на крыле с заданной поверхностью замыкания, а с ее помощью определяется выражение коэффициента лобового сопротивления у этого крыла. В качестве примера определяется выражение осевой скорости возмущения и значение коэффициента лобового сопротивления в случае треугольных крыльев с ромбическим профилем, максимальная толщина которых изменяется линейно ($n = 1$) и параболически ($n = 1$ и $n = 2$) вдоль размаха.

В последней части работы исследуется сверхзвуковое обтекание вокруг тонких крыльев, образованных так же как в случае крыльев симметричной толщины. И в этом случае определяется выражение осевой скорости возмущения, а также расчетные формулы для коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления.

WINGS WITH ENCLOSING SURFACES IN SUPERSONIC FLOW

ABSTRACT

The first part of this paper defines from the geometrical viewpoint a special class of wings, i.e., the wing enclosing surfaces, characterized by the fact that all their edges are of zero thickness. Owing to this characteristic, this class of wings presents the advantage of a reduced drag, reason for which several wings belonging to this class may be used in the construction of high-speed aircrafts, such as, for instance, wings with diamond shaped profiles whose thickness varies spanwise upon any direction.

Further, paper treats the problem of the supersonic flow around a triangular wing of symmetrical thickness with enclosing surface, which, under the assumption of small disturbances may be decomposed into the sum of two n order conical flows around a triangular wing of symmetrical thicknesses, having different vertices. By the summation of the solutions of these two conical motions, the expression of the axial disturbance velocity is obtained for the wing with enclosing surface, and with its aid, the expression of the drag coefficient is determined for the considered wing. As an example of application, the expression of the axial disturbance velocity and the value of the drag coefficient are determined for the triangular wings with diamond shaped profile, whose thickness varies spanwise linearly ($n = 1$) and parabolically ($n = 1$ and $n = 2$).

The final part of the paper discusses the supersonic flow around a thin wing generated in a manner similar to that in the case of the wings of symmetrical thickness. In this case also, the expresssion of the axial disturbance velocity as well as calculation relations for the lift and drag coefficients are determined.

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, *Asupra portanței și rezistenței aripii triunghiulare la viteze supersonice*. Comunicările Acad. R.P.R., **IV**, *5—6* (1954).
2. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Traînée d'ailes delta doublement-coniques à pente variable, en régime supersonique*. Revue de Mécanique Appliquée, **I**, *1* (1956).
3. E. CARAFOLI, L. DUMITRESCU, *Asupra aripii delta subțiri dublu-conice cu incidență variabilă, în curent supersonic*. St. cerc. mec. apl., **VI**, *3—4* (1955).
4. — *Rezistența de undă a unei clase de aripi delta subțiri dublu-conice, cu incidența variabilă, în curent supersonic*. St. cerc. mec. apl., **VII**, *3* (1956).
5. E. CARAFOLI, M. IONESCU, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique*. Revue de Mécanique Appliquée, **II**, *1* (1957).
6. E. CARAFOLI, High Speed Aerodynamics. Ed. tehnică, București, 1956.

STUDII

ASUPRA LUBRIFICAȚIEI CU GAZE ÎN REGIM TURBULENT

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Tendința de creștere continuă a turațiilor în unele mașini moderne impune considerarea unor cazuri speciale de mișcare în stratul de lubrifiant atît pentru lubrificația cu lichide cît și pentru lubrificația cu gaze. În acest sens trebuie reexaminat în primul rînd caracterul mișcării care poate degenera într-una turbulentă la numere Reynolds mari. În unele lucrări anterioare [1] — [3] am examinat unele aspecte ale lubrificației cu gaze în regim turbulent; în cele ce urmează dorim să obținem o imagine mai cuprinzătoare asupra influenței calitative și cantitative a turbulenței asupra caracteristicilor funcționale ale lagărelor lubrificate cu gaze. În acest scop vom urma aceleași metode ca și pentru lubrificația cu lichide [4], [5].

1. EVALUAREA CONDIȚIILOR DE TRANZIȚIE DE LA REGIMUL LAMINAR LA CEL TURBULENT

Ca și pentru lubrificația cu lichide [5] prima problemă care se pune este determinarea condițiilor de tranziție de la regimul de scurgere laminar la cel turbulent. Pentru fluide compresibile determinarea condițiilor de tranziție este mai dificilă din cauza faptului că intervin în plus fluctuațiile densității. Totuși, ca și în unele probleme de strat limită, se poate considera într-o primă aproximație că compresibilitatea nu are o influență determinantă asupra condițiilor de tranziție. Astfel după cum au arătat și experiențele efectuate de J. Kaye și E.C. Elgar [6], deși pot apare unele particularități în cazul gazelor, fenomenul rămîne în linii generale calitativ același.

Astfel pentru lagăre circulare neîncărcate ($\varepsilon \cong 0$) se poate utiliza pentru determinarea numărului Reynolds critic cunoscuta formulă a lui G. I. Taylor [7]

$$\mathcal{R}e_c = \frac{\rho V_c c}{\mu} = \frac{41{,}1}{\sqrt{\psi}}; \quad \mathcal{R}e_c \leqslant 1\,900. \tag{1}$$

Este de remarcat că formula lui Taylor nu poate fi aplicată decît pentru jocuri relative $\psi > 0{,}5^0/_{00}$. Într-adevăr formula (1) este dedusă în ipoteza că curbura profilului vitezelor are o influență determinantă asupra stabilității mișcării laminare, curbură care la rîndul ei se datorește razei de curbură r_1 a fusului și diferenței $c = r_2 - r_1$ între razele fusului și cuzinetului. Dacă $\psi = \frac{c}{r_1}$ are valori foarte mici, această curbură este neglijabilă [8] iar mișcarea devine identică cu o mișcare de tip Couette cu un profil de viteze liniar pentru care studiul stabilității mișcării laminare nu permite relevarea condițiilor de tranziție. De altfel din formula (1) dacă $\psi \to 0$ rezultă $\mathcal{R}e_c \to \infty$ ceea ce evident nu este posibil. De aceea numărul Reynolds critic nu trebuie să depășească numărul Reynolds critic determinat experimental pentru o mișcare Couette care este $\mathcal{R}e_c = 1\,900$ [9]. De aceea formula (1) este aplicabilă atît timp cît $\mathcal{R}e_c \leqslant 1\,900$ după care trebuie să se considere pentru numărul Reynolds critic această din urmă valoare.

Ca și pentru lubrificația cu lichide din (1) se deduce pentru turația critică valoarea

$$n_c = 392{,}7 \frac{\mu}{\rho r_1^2 \psi^{3/2}}. \tag{2}$$

De exemplu pentru aer cu $\mu = 2 \cdot 10^{-6}$ kg s/m², $\rho = 0{,}125$ kg s²/m⁴, $r_1 = 2$ cm și $\psi = 1^0/_{00}$, rezultă $n_c = 500\,000$ rot/min. Dacă însă $\psi = 3^0/_{00}$, atunci $n_c = 95\,000$ rot/min. În sfîrșit, dacă $r_1 = 4$ cm și $\psi = 3^0/_{00}$ turația critică scade la $n_c = 24\,000$ rot/min. Rezultă deci că regimul turbulent nu poate apare la lagărele lubrificate cu gaze decît la turații foarte mari, de peste 100 000 rot/min, dar că în unele condiții (diametre și jocuri mari) se poate atinge turbulența și la turații mai joase.

Este apoi de menționat că numărul Reynolds trebuie să depășească o valoare și mai mare decît cea dată de formula (1) pentru ca turbulența în stratul de lubrifiant să fie complet dezvoltată. La creșterea numărului Reynolds, există o zonă de tranziție astfel încît numai după depășirea unui număr Reynolds

$$\mathcal{R}e_c' = (1{,}4 \div 2)\, \mathcal{R}e_c \tag{3}$$

se poate considera mișcarea ca fiind efectiv turbulentă.

Influența excentricității asupra condițiilor de tranziție se poate determina aproximativ de o manieră analoagă lagărelor lubrificate cu lichide [5], respectiv comparînd valoarea (1) cu numărul Reynolds local definit față de viteza medie $U_m = \frac{1}{h}\int_0^h u\, dy$

$$\mathcal{R}e_m = \frac{2\rho U_m h}{\mu}, \tag{4}$$

unde dacă $\varepsilon = 0$, $U_m = \frac{V}{2}$ şi $\mathcal{R}e_m = \mathcal{R}e$ (1). Deoarece se poate presupune $\mu \cong$ const. numărul $\mathcal{R}e_m$ variază proporţional cu

$$\rho U_m h = -\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho V h}{2}, \tag{5}$$

respectiv cu debitul de lubrifiant în direcţia x (în regim laminar). Dacă se neglijează scurgerea laterală (lagăre infinit de lungi)

$$\rho U_m h = \frac{\rho_m V h_0}{2} = \text{const.}$$

unde ρ_m, h_0 sînt valorile corespunzătoare maximului presiunilor $\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0\right)$. Rezultă deci că

$$\mathcal{R}e_m = \frac{\rho_m}{\rho_0}\frac{h_0}{c}\mathcal{R}e \cong \left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{h_0}{c}\mathcal{R}e^* = \text{const}\,; \quad \mathcal{R}e^* = \frac{\rho_0 V c}{\mu}. \tag{6}$$

Dacă ε creşte, $\frac{p_m}{p_0}$ creşte iar $\frac{h_0}{c}$ scade. Deoarece regimul de tranziţie apare la viteze mari se poate considera că se atinge soluţia asimptotică $V \rightarrow \infty$ care are forma cunoscută $\rho h = \text{const}$. În consecinţă, spre deosebire de lagărele lubrificate cu lichide [5], la lagărele lubrificate cu gaze efectul excentricităţii asupra numărului Reynolds critic este neglijabil deoarece peste tot profilul vitezelor este cvasiliniar iar $U_m \cong \frac{V}{2}$ şi $\rho h = \text{const}$. În schimb, $\rho_m h_0 = \rho_0 c$ numai dacă masa de gaz conţinută în lagăr este constantă şi egală cu cea din repaus. Dacă se pune condiţia mai corectă ca debitul lateral să fie nul [10] atunci

$$\frac{\rho h}{\rho_0 c} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2}\,; \quad \mathcal{R}e_m \cong \sqrt{1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2}\,\mathcal{R}e^*. \tag{7}$$

Cu alte cuvinte numărul Reynolds creşte cu excentricitatea, dar această creştere este redusă, mai ales dacă $\varepsilon < 0{,}6$. În consecinţă formulele (1) (2) pot fi aplicate direct şi pentru lagărele circulare cu $\varepsilon > 0$, corectînd rezultatele cu factorul $\sqrt{1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2}$.

Pentru lagărele axiale, în lipsa unor date experimentale mai concludente, se poate adopta pentru numărul Reynolds critic valoarea [5]

$$\mathcal{R}e_c^* = \frac{\rho_0 V h_m}{\mu} \cong 1\,000. \tag{8}$$

De exemplu un lagăr axial avînd raza exterioară $r_0 = 6$ cm şi cea interioară $r_1 = 3$ cm (raza medie $r_m = 4{,}5$ cm) şi o grosime medie $h_m \cong 0{,}1$ mm va atinge numărul Reynolds critic pentru o turaţie de aproximativ 35 000 rot/min.

În sfîrşit, pentru lagărele alimentate sub presiune, experimental se constată că [11]

$$\mathcal{R}_e'' = \frac{\mathcal{R}_{e_{mc}}}{2} = 550\,;\ \mathcal{R}_e'' = \frac{\rho\, U_m\, h}{\mu} \tag{9}$$

unde viteza medie U_m este datorită gradientului de presiune.

În concluzie, turbulenţa apare în lagărele lubrificate cu gaze numai la grosimi h mari sau turaţii mari, care se situează la limita superioară a turaţiilor şi dimensiunilor de lagăre utilizate în momentul de faţă. Totuşi într-un viitor apropiat, o dată cu creşterea continuă a turaţiilor, regimul turbulent poate apare ca o problemă importantă, mai ales pentru lagăre funcţionînd la temperaturi şi presiuni mari.

2. LAGĂRE FUNCŢIONÎND ÎN REGIM HIDRODINAMIC ŞI ÎN REGIM TURBULENT

Dacă se neglijează într-o primă aproximaţie efectul fluctuaţiei densităţii după normala la stratul de lubrifiant [2], [4] ecuaţiile de mişcare se scriu

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\bar{\rho}\, \overline{u' v'}\right),\\
\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\bar{\rho}\, \overline{v'^2}\right),\\
\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\bar{\rho}'\, \overline{v' w'}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

la care se asociază ecuaţiile de continuitate şi de stare scrise sub formă aproximativă

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}\, \overline{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho}\, \overline{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{\rho}\, \overline{w})}{\partial t} = 0\,;\ \frac{\overline{p}}{\bar{\rho}^{\varkappa}} = \text{const}\,;\ (1 \leqslant \varkappa \leqslant 1{,}4), \tag{11}$$

unde u, v, w sînt componentele vitezelor după axele x, y, z (axa y este dirijată după normala la stratul de lubrifiant). Notaţia supraliniată indică valori medii în timp; în cele ce urmează, deoarece se lucrează numai cu asemenea mărimi, se va renunţa la notarea supraliniată pentru indicarea operaţiei de mediere în timp. În schimb, se va utiliza această notaţie pentru a indica mărimi adimensionale.

Ecuaţiile (10) care guvernează distribuţia vitezelor au aceeaşi formă ca şi pentru lubrificaţia cu lichide [4]. În consecinţă, exact ca şi în regim laminar compresibilitatea nu influenţează direct distribuţia vitezelor ci numai prin intermediul ecuaţiei de continuitate (11).

Prin utilizarea ipotezei lungimii de amestec a lui Prandtl se pot construi distribuţiile vitezelor u, w folosind direct formulele date în lucrările [1], [4] care sînt valabile şi pentru lubrificaţia cu gaze. Aceste rezultate concordă bine cu datele experimentale existente. Astfel în afara verificărilor indicate în lucrarea [4] în figura 1 se arată distribuţia vitezelor obţinute experimental de H. Reichart şi J. M. Robertson [13], [14], [12] împreună cu rezultatele teoretice deduse. Pentru cazul mişcării în stratul de lubrifiant este însă de aşteptat ca să existe unele particularităţi datorite grosimii h foarte reduse. În particular, constanta k^* de care depinde lungimea de amestec [5] este probabil că va avea valori mai reduse decît valoarea $k^* = 0{,}4$ considerată în mod obişnuit în mecanica fluidelor.

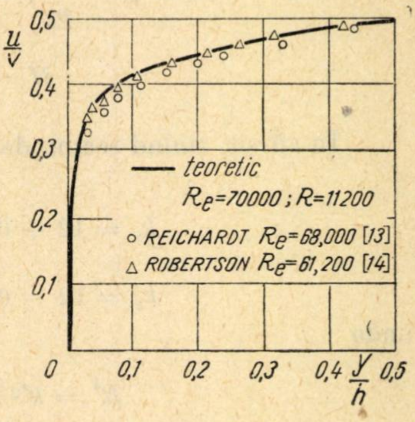


Fig. 1

În sfîrşit, între vitezele medii U_m şi W_m şi derivatele $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ se pot considera că rămîn în continuare valabile relaţiile deduse în lucrarea [5]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu k_x}{h^2}\left(U_m - \frac{V}{2}\right); \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\mu k_z}{h^2} W_m \tag{12}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} k_x &= 12 + 0{,}53 \ R^{0725} \\ k_z &= 12 + 0{,}296 \ R^{065} \end{aligned}\right\}; \quad R = k^{*2}\frac{\rho V h}{\mu}. \tag{13}$$

Cu aceste date din relaţiile (2) se deduce imediat ecuaţia presiunilor. Astfel scriind ecuaţia de continuitate în funcţie de vitezele medii

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U_m h) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W_m h) = 0, \tag{14}$$

se deduce

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu k_x}\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu k_z}\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{V}{2}\frac{\partial(\rho h)}{\partial x}, \tag{15}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu k_x}p^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu k_z}p^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{V}{2}\frac{\partial\left(p^{\frac{1}{\varkappa}}h\right)}{\partial x}, \tag{16}$$

sau în sfîrşit, sub formă adimensională

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{12\,\bar h^3}{k_x}\,\bar p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\frac{\partial \bar p}{\partial \bar x}\right)+\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{12\,\bar h^3}{k_z}\,\bar p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\frac{\partial \bar p}{\partial \bar z}\right)=6H\,\frac{\partial}{\partial \bar x}\left(\bar p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\bar h\right) \tag{17}$$

$$\text{unde } \bar p=\frac{p}{p_0};\ \bar x=\frac{x}{l} \text{ sau } \bar x=\frac{x}{r_1} \text{ etc. iar}$$

$$H=\frac{\mu\,Vl}{p_0 h_m^2}=\frac{\mu\omega}{p_0\,\psi^2}. \tag{18}$$

În sfîrşit, ţinînd seama de (13) coeficienţii k_x, k_z se mai scriu

$$\left.\begin{aligned} k_x &= 12+0{,}53\ R^{*0725}\left(\bar p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\bar h\right)^{0725}\\ k_z &= 12+0{,}296\ R^{*065}\left(\bar p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\bar h\right)^{065}\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

unde

$$R^*=k^{*2}\,\frac{\rho_0\,V\,h_m}{\mu}=k^{*2}\,\frac{\rho_0\,Vc}{\mu}. \tag{20}$$

Pentru mişcări bidimensionale ecuaţia (17) se scrie sub o formă ceva mai simplă

$$\frac{d\bar p}{d\bar x}=\frac{6H}{\bar h^2}\left\{1+0{,}0442\ \ R^{*0725}\left(\bar p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\bar h\right)^{0725}\right\}\left(1-\frac{K_1}{\bar p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\bar h}\right), \tag{21}$$

unde $K_1=\bar p_m^{\frac{1}{\varkappa}}\bar h_0$ este o constantă de integrare.

Ecuaţia presiunilor păstrează ca şi pentru lubrificaţia cu lichide [4] [5] o frapantă analogie cu ecuaţia presiunilor în regim laminar, singura deosebire constînd în faptul că în regim laminar în primul membru al ecuaţiei (17) de exemplu, rapoartele $\frac{12}{k_x}$, $\frac{12}{k_z}$ sînt egale cu unitatea (rezultat ce se poate deduce şi din (19) dacă $R^*=0$).

Coeficienţii k_x, k_z variază cu x şi z deoarece conţin termenul $(\bar p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\bar h)$ (19). Totuşi forma ecuaţiei presiunilor sugerează că distribuţia presiunilor va prezenta de asemenea o analogie cu distribuţia presiunilor în regim laminar. De altfel, dacă se aproximează $(\bar p^{\frac{1}{\varkappa}}\,\bar h)^{0725}$ cu o variaţie liniară de forma $a+b\,(p^{\frac{1}{\varkappa}}\,h)$ ecuaţia (21) poate fi integrată cu uşurinţă pentru lagăre bidimensionale compuse din suprafeţe plane regăsindu-se rezultate analoage cazului laminar [15]. Astfel de exemplu soluția pentru lagăre plane este dată în lucrarea [3], sub o formă absolut analoagă regimului laminar.

De altfel, direct din analiza ecuației presiunilor se poate deduce sub o formă aproximativă dar extrem de simplă soluție generală a problemei, dacă funcționarea are loc la numere H suficient de mari.

Astfel să observăm mai întîi că soluția asimptotică pentru $V \to \infty$, $H \to \infty$

$$p^{\frac{1}{\varkappa}} h = \text{const} ; \; p = \frac{\text{const}}{h^{\varkappa}} \tag{22}$$

nu este alterată de apariția turbulentei. Într-adevăr membrul secund al ecuației presiunilor (16) sau (17) are aceeași formă ca și în regim laminar. De aceea dacă în continuare presiunile rămîn finite cînd $V \to \infty$ este necesar ca

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}} \bar{h}) \to 0, \tag{23}$$

de unde rezultă imediat soluția (22).

Apoi, dacă regimul turbulent nu apare decît la numere H mari (de obicei $H > 1$), rezultă că presiunile au valori apropiate de cele date de situația limită (22). Dar atunci k_x și k_z au în primă aproximație valorile

$$\left.\begin{aligned} k_x &= 12 + 0{,}53\, R^{*0725}\, K_1^{0725} = \text{const.} \\ k_z &= 12 + 0{,}296\, R^{*065}\, K_1^{065} = \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

unde, pentru lagăre axiale

$$K_1 \cong \frac{h_1}{h_m} \tag{25}$$

h_1 fiind grosimea stratului de lubrifiant la intrare ($x = 0$) iar pentru lagăre circulare

$$K_1 \cong \sqrt{1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2}. \tag{26}$$

În aceste condiții ecuația (17) se poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{h}^3 \bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{k_x}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{h}^3 \bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = 6\, H \frac{k_x}{12} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}} \bar{h} \right), \tag{27}$$

și care devine identică cu ecuația presiunilor în regim laminar dacă se pune

$$\frac{\tilde{z}}{z} = \frac{\tilde{b}}{b} = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}, \tag{28}$$

unde b este lățimea lagărului, iar λ alungirea și

$$\tilde{H} = \frac{k_x}{12} H = \{1 + 0{,}0442\ R^{*0725}\, K_1^{0725}\}\, H. \tag{29}$$

Într-adevăr, introducînd $\tilde{z}$ şi $\widetilde{H}$ în ecuaţia (27) se obţine

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{h}^3\,\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial \tilde{\bar{z}}}\left(\bar{h}^3\,\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tilde{\bar{z}}}\right)=6\,\widetilde{H}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{p}^{\frac{1}{\varkappa}}\,\bar{h}\right). \tag{30}$$

În acest mod efectul turbulenţei asupra presiunilor, în comparaţie cu cazul laminar corespunzător rezidă în mărirea aparentă a numărului H în raportul (29) şi reducerea alungirii în raportul (28). Calculul presiunilor şi încărcării lagărului se efectuează deci fără dificultăţi, fiind echivalent cu calculul unui lagăr în regim laminar cu corecţiile (28) (29).

Pentru lagăre circulare de exemplu, valoarea rapoartelor (28) (29) pentru diferite numere Reynolds R^* şi excentricităţi ε sînt reprezentate în figurile 2 şi 3. Se constată că dacă de exemplu $R^* = 200$ şi $\varepsilon = 0{,}6$, numărul $\widetilde{H}$ aparent este de 3,4 ori mai mare decît numărul H real iar alungirea λ scade în raportul 0,75. Considerînd pentru regimul laminar datele numerice obţinute de A. A. Raimondi [16] în figurile 4—6 s-au reprezentat curbele $\frac{P}{2\,p_0\,r_1\,b} = \zeta\,(\varepsilon, H)$ pentru $\lambda = \infty$; 2 ; 1, în regim laminar şi în regim turbulent la diferite numere Reynolds R^*. Curbele corespunzătoare la numere H mari ($H > 0{,}4$) au fost deduse modificînd parametrii H, λ în modul arătat. Pentru $H \rightarrow 0$ metoda simplificată prezentată nu mai este evident valabilă ; de aceea în zonele corespunzătoare curbele ζ (4) au fost prelungite prin extrapolare şi reprezentate în figurile 4—6 cu linie întreruptă. În figurile 4—7 s-a notat cu : 0 — $R^* = 0$ (laminar) : 1 — $R^* = 100$; 2 — $R^* = 200$; 3 — $R^* = 500$; 4 — $R^* = 1000$.

Faţă de cazul lubrificaţiei cu lichide se constată un fapt deosebit de interesant şi anume că în timp ce în primul caz [5] turbulenţa sporea de cîteva ori capacitatea de încărcare a lagărelor, în cazul lubrificaţiei cu gaze creşterea capacităţii portante există în continuare dar este redusă şi chiar neglijabilă dacă $H > 1$. În plus, efectul turbulenţei este cu atît mai redus cu cît alungirea λ este mai mare.

Totuşi, pentru lagăre cu jocuri relative ψ mari turbulenţa poate apare la numere H reduse, la care se obţine o sporire sensibilă a presiunilor. Astfel pentru exemplul numeric considerat anterior : $r_1 = 4$ cm, $\psi = 3^0/_{00}$, $n_e = 24\,000$ rot/min, pentru $R^* = 100$ (cu $k^* = 0{,}3$) corespunde $n = 35\,000$ rot/min şi $H = 0{,}082$. Dacă în plus $\lambda = 2$, din figura 5 se constată că coeficientul ζ creşte aproximativ 100%. La jocuri relative mai reduse, numerele H corespunzătoare sînt mult mai mari iar efectul turbulenţei devine repede neglijabil.

Efectul turbulenţei asupra poziţiei liniei centrelor este datorit în special creşterii numărului $\widetilde{H}$. Astfel plecînd de la aceleaşi date numerice, în figura 7, s-au reprezentat curbele $\theta^*(\varepsilon)$ pentru $\lambda = \infty$ şi $H = 0{,}2$; 0,4 la diferite numere Reynolds R^*. Forţele şi momentele de frecare pot fi evaluate utilizînd în continuare formulele corespunzătoare lubrificaţiei cu lichide [5].

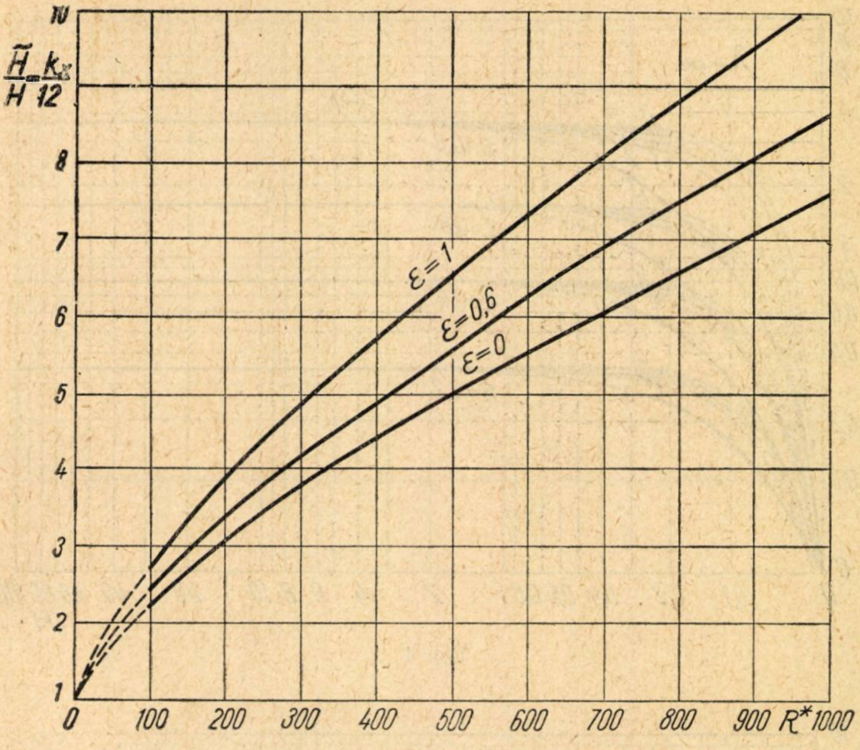

$\frac{\tilde{H}}{H} = \frac{k_x}{12}$
10
8
7
6
5
4
3
2
1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
R^*
1000
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon = 0,6$
$\varepsilon = 0$

Fig. 2

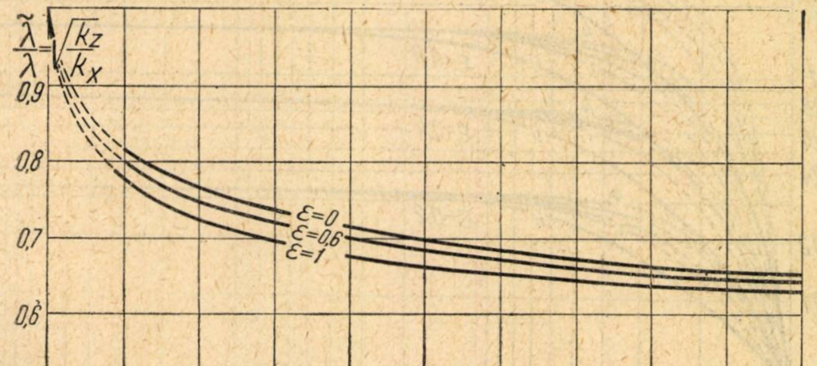

$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0
100
200
300
400
R^*
500
$\varepsilon = 0$
$\varepsilon = 0,6$
$\varepsilon = 1$

Fig. 3

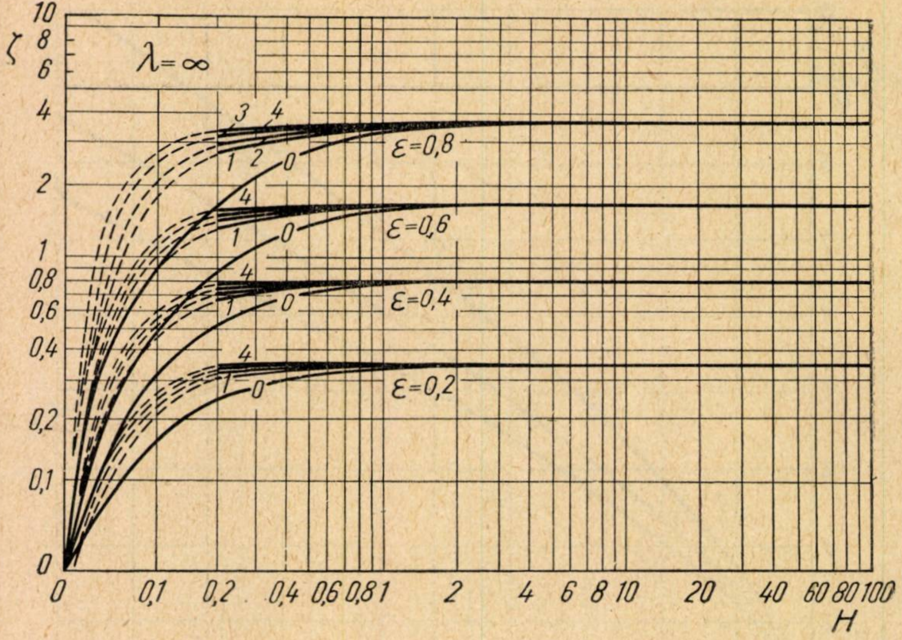

ζ
λ=∞
10
8
6
4
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0,1
0
3
4
1
2
0
ε=0,8
ε=0,6
ε=0,4
ε=0,2
0
0,1
0,2
0,4
0,6
0,8
1
2
4
6
8
10
20
40
60
80
100
H

Fig. 4

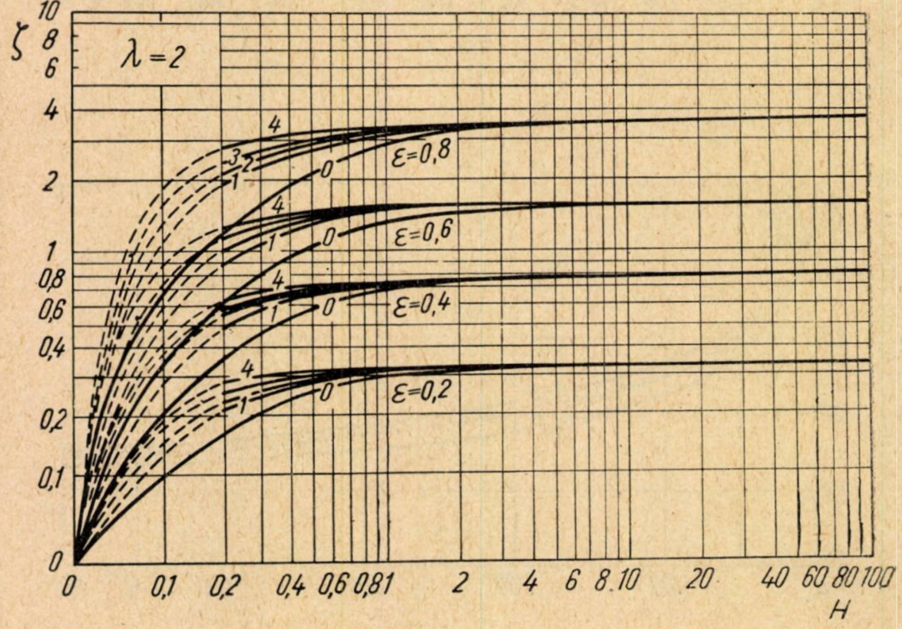

ζ
λ=2
10
8
6
4
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0,1
0
4
3
2
1
0
ε=0,8
ε=0,6
ε=0,4
ε=0,2
0
0,1
0,2
0,4
0,6
0,8
1
2
4
6
8
10
20
40
60
80
100
H

Fig. 5

Pentru lagărele axiale este mai comodă definirea numărului H în funcție de grosimea minimă h_2 a stratului de lubrifiant : fie

$$\overline{H} = \frac{\mu V l}{p_0 h_2^2} \cdot \tag{31}$$

Coeficienții k_x, k_z se pot scrie (24)

$$\left.\begin{aligned} k_x &= 12 + 0{,}53\, \overline{R}^{*0725} \left(\overline{p}^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{h}{h_2}\right)^{0{,}725} \cong 12 + 0{,}53\, \overline{R}^{*0725} \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{0{,}725} \\ k_z &= 12 + 0{,}296\, \overline{R}^{*065} \left(\overline{p}^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{h}{h_2}\right)^{0{,}65} \cong 12 + 0{,}296\, \overline{R}^{*065} \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{0{,}65} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

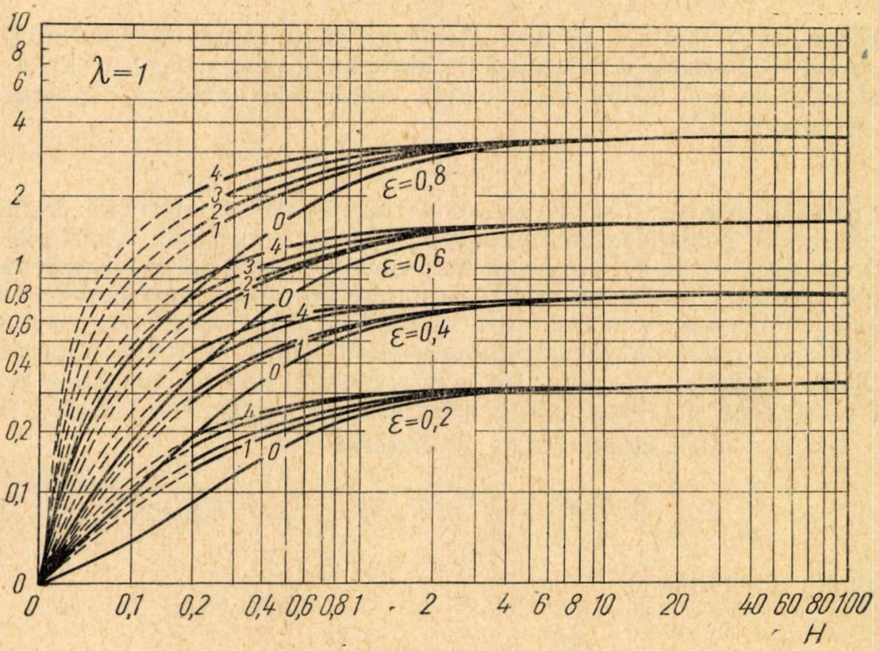


Fig. 6

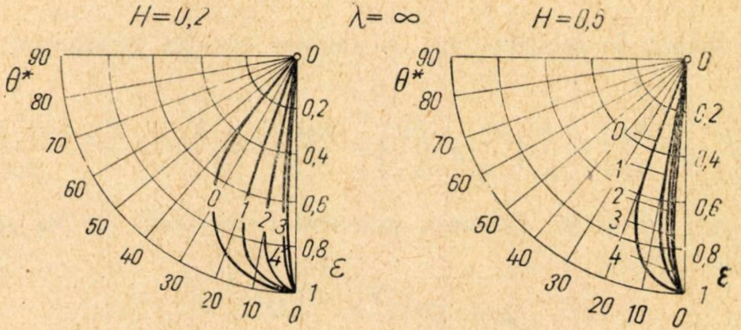


Fig. 7

unde

$$\overline{R}^* = \frac{h_m}{h_2} R^* = k^{*2} \frac{\rho_0 V h_2}{\mu}. \tag{33}$$

De asemenea, în locul formulei de transformare (29) se poate scrie

$$\tilde{\overline{\overline{H}}} = \left\{ 1 + 0{,}0442\ \overline{R}^{*0{,}725} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{0{,}725} \right\} \overline{\overline{H}}, \tag{34}$$

formula (28) rămînînd în continuare valabilă. Variația factorilor de corecție (28) și (34) cu $\overline{R}^*$ și $\frac{h_1}{h_2}$ este redată în figurile 8—9; urmînd același procedeu ca și pentru lagărele circulare; cu ajutorul acestor valori se poate apoi determina coeficientul de încărcare τ pentru lagăre axiale. În acest scop se pot utiliza de exemplu rezultatele numerice obținute de W. A. Gross [17].

★

Rezultatele de mai sus pot fi extinse și pentru regimuri nestaționare respectiv pentru lagăre supuse la forțe și viteze variabile. Astfel plecînd de la ecuația (16) sau (17) se poate scrie ecuația presiunilor în cazul general, considerînd că vitezele celor două suprafețe lubrificate au valori oarecare V_1 și V_2. Pentru a evita însă unele confuzii care pot apare este preferabil să se scrie direct ecuația presiunilor pentru cele două tipuri importante de lagăre: axiale și circulare. Deducerea ecuației de continuitate se poate face urmînd un procedeu analog celui utilizat în obținerea ecuației (14).

Astfel pentru lagăre axiale se deduce

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho\, U_m h) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho\, W_m h) + V_{1y} - V_{2y} = 0, \tag{35}$$

de unde, observînd că

$$V_{2y} - V_{1y} = \dot{h} = \frac{dh}{dt}, \tag{36}$$

și ținînd seama de relațiile (12), se deduce ecuația presiunilor

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu k_x} p^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu k_z} p^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial (p^{\frac{1}{\varkappa}} h)}{\partial t} - \frac{V_{2x} - V_{1x}}{2} \frac{\partial (p^{\frac{1}{\varkappa}} h)}{\partial x}, \tag{37}$$

unde în (12) ca și în definirea numărului Reynolds se va înlocui V cu $-(V_{2x} - V_{1x})$

$$R = k^{*2} \frac{\rho (V_{1x} - V_{2x}) h}{\mu}. \tag{38}$$

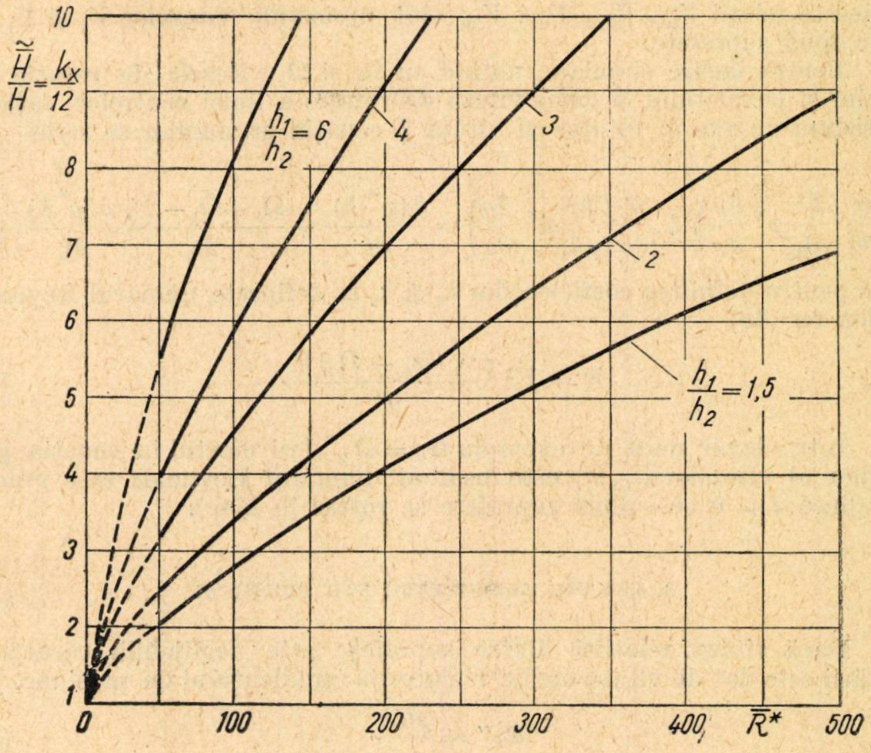

$\frac{\tilde{\bar{H}}}{\bar{H}}=\frac{k_x}{12}$
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
100
200
300
400
500
$\bar{R}^*$
$\frac{h_1}{h_2}=6$
4
3
2
$\frac{h_1}{h_2}=1{,}5$

Fig. 8

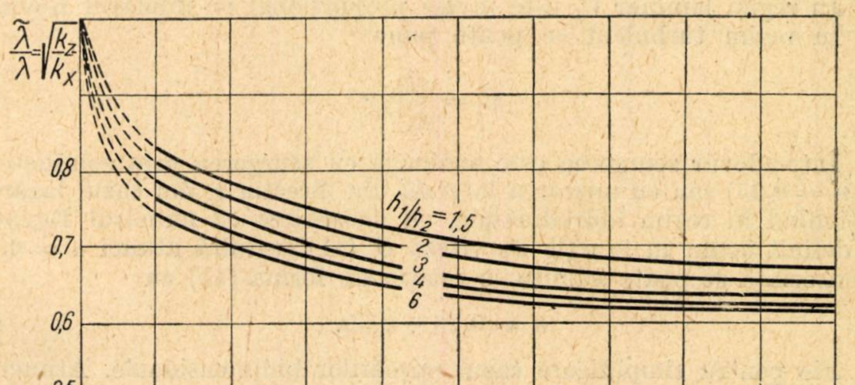

$\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}=\sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$
0,8
0,7
0,6
0,5
0
100
200
300
400
500
$\bar{R}^*$
$h_1/h_2=1{,}5$
2
3
4
6

Fig. 9

În aceste relații V_{1x}, V_{1y}, V_{2x}, V_{2y} sînt proiecțiile vitezelor V_1 și V_2 ale celor două suprafețe.

Pentru lagăre circulare, notînd cu Ω_1 și Ω_2 vitezele de rotație ale fusului și cuzinetului și cu $\dot{\varphi}$ viteza de rotație a liniei centrelor, față de un sistem de axe în rotație cu viteza $\dot{\varphi}$ ecuația presiunilor se scrie

$$\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h^3}{\mu k_x}p^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu k_z}p^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{\partial\left(p^{\frac{1}{\varkappa}}h\right)}{\partial t}+\frac{\Omega_1+\Omega_2-2\dot{\varphi}}{2r_1}\frac{\partial\left(p^{\frac{1}{\varkappa}}h\right)}{\partial\theta}, \quad (39)$$

unde pentru definirea coeficienților k_x și k_z se definește numărul Reynolds analog cu (38)

$$R = k^{*2}\frac{\rho r_1(\Omega_1-\Omega_2)h}{\mu}. \quad (40)$$

Într-adevăr dacă de exemplu $\Omega_1 = \Omega_2$, deși efectul în ecuația presiunilor al vitezelor Ω_1, Ω_2 este însumat, numărul Reynolds este practic nul (dacă $\varepsilon = 0$ cele două suprafețe se rotesc în bloc).

3. LAGĂRE ALIMENTATE SUB PRESIUNE

Dacă viteza relativă dintre suprafețe este neglijabilă caracterul mișcării este dat de viteza medie U datorită gradientului de presiune. Fie

$$\mathcal{R}e'' = \frac{\rho U h}{\mu} \quad (41)$$

și

$$\tau = \frac{\rho}{2}U^2 C_f. \quad (42)$$

În regim laminar C_f este invers proporțional cu numărul Reynolds $\mathcal{R}e''$. În regim turbulent se poate pune

$$C_f = \frac{k_x}{\mathcal{R}e''^{\,n}}. \quad (43)$$

Într-adevăr scurgerea este analoagă cu scurgerea prin conducte (la care $n = 0{,}25$) sau cu mișcarea laterală din direcția z, din cazul lagărelor funcționînd în regim hidrodinamic, cu deosebirea că numărul Reynolds este definit acum în funcție de viteza U (41) (rezultă atunci $n = 0{,}35$). În consecință se poate admite o relație de forma (43) cu

$$n = 0{,}25 \div 0{,}35. \quad (44)$$

Fie pentru simplificare cazul mișcărilor bidimensionale. Atunci

$$\mathcal{R}e'' = \frac{\mathcal{M}_x}{\mu} = \text{const.} \quad (45)$$

unde $\mathscr{M}_x$ este debitul masic, iar ecuația de continuitate se scrie

$$\frac{d}{dx}\left(p^{\frac{1}{\varkappa}} h^3 \frac{dp}{dx}\right) = 0, \tag{46}$$

În consecință, distribuția presiunilor satisface aceeași ecuație diferențială ca și în regim laminar. În realitate, presiunile în stratul de lubrifiant vor crește în regim turbulent datorită faptului că debitul de lubrifiant scade. De exemplu dacă h = const.

$$\mathscr{M}_x = \left\{ \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{\rho_1 h^3 \left(p_1^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}} - p_0^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)}{p_1^{\frac{1}{\varkappa}} C_f l} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{47}$$

4. INFLUENȚA FORȚELOR DE INERȚIE

Introducînd în continuare vitezele medii U_m și W_m se poate arăta că apariția turbulenței nu alterează efectul calitativ al forțelor de inerție (bineînțeles exceptînd tensiunile turbulente care au fost luate deja în considerare). Astfel pentru mișcări bidimensionale ecuația de mișcare pe direcția x poate fi scrisă sub forma

$$\rho\, U_m\, dU_m + \frac{dp}{\rho} + \frac{U_m^2}{2h} C_f\, dx = 0, \tag{48}$$

sau, ținînd seama de ecuațiile de stare și de mișcare

$$\frac{dp}{p} = \varkappa \frac{d\rho}{\rho}\,;\ \rho\, U_m\, h = \text{const.}\,;\ \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU_m}{U_m} + \frac{dh}{h} = 0 \tag{49}$$

ecuația (48) se poate pune sub forma

$$(1 - H_*^2)\, \frac{dU_m}{U_m} = \left(\frac{M_*^2}{2} C_f - \frac{dh}{dx}\right) \frac{dh}{h}, \tag{50}$$

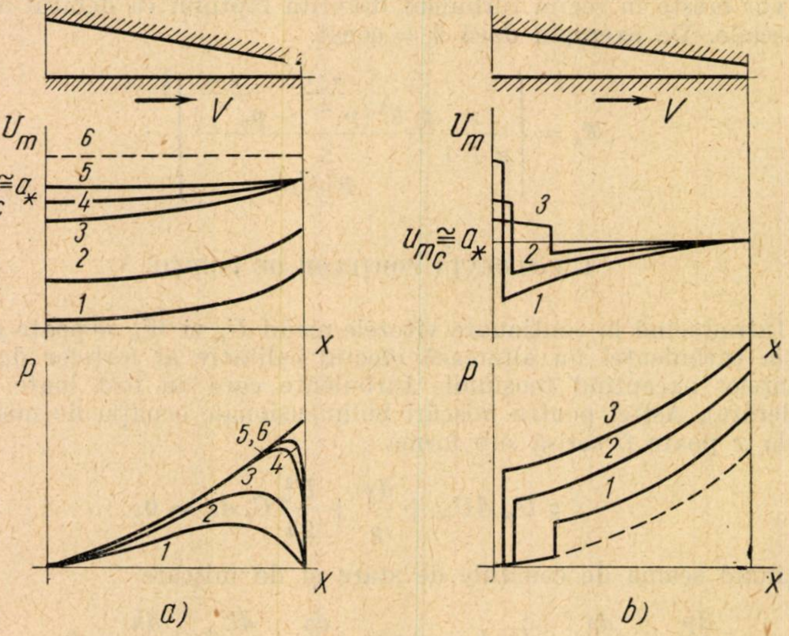
unde

$$M_* = \frac{U_m}{a_*}\,;\ a_x^2 = \frac{dp}{d\rho} = \varkappa \frac{p}{\rho}\cdot \tag{51}$$

Ecuația de mai sus este similară cu ecuația care se obține în regim laminar [18]. Singura deosebire constă în expresia deosebită pentru coeficientul C_f, care însă este constant pentru scurgeri bidimensionale.

În consecință, toate concluziile deduse pentru regimul laminar [18] sînt calitativ valabile și în regim turbulent. Astfel ecuația (50) prezintă în plus o pronunțată analogie cu mișcările cvasi-unidimensionale prin orificii și ajutaje. Din primul membru se constată că scurgerea este calitativ diferită pentru $M_* < 1$ respectiv pentru $M_* > 1$.

În particular, condițiile de trecere de la $M_* < 1$ la $M_* > 1$ sînt analoge cazului scurgerii prin ajutaje. Analogia este aproape completă pentru lagărele hidrostatice, la care pot apare zone supersonice și unde de șoc [11]. Pentru lagăre funcționînd în regim hidrodinamic comportarea scurgerii pare a fi diferită [18]. Să considerăm de exemplu un lagăr plan (fig. 11). La acestea se verifică ușor că atît în regim laminar cît



a) b)

Fig. 10

și în regim turbulent viteza U_m crește continuu cu x dacă $M_* < 1$, atingînd valoarea maximă în secțiunea de ieșire. În aceste condiții viteza critică (51) poate apare cel mult în secțiunea de ieșire $x = l$, dar nu poate fi depășită dacă la intrare $M_* < 1$. În aceste condiții, pentru diferite viteze V crescătoare distribuțiile vitezelor și presiunilor au aspectul din figura 11 *a* (curbele *1—6*). La un moment dat (curba *3*) se atinge viteza critică în secțiunea de ieșire; pentru o viteză și mai mare viteza în secțiunea de ieșire rămîne constantă (curba *4*) dar atunci presiunea din această secțiune va crește, devenind diferită de cea a mediului înconjurător. Dacă viteza V crește mai departe, viteza la intrare crește în continuare, în timp ce viteza de ieșire rămîne constantă, astfel încît în cele din urmă, cînd viteza la intrare atinge valoarea critică (curba *5*)

$$U_m \cong \frac{V}{2} \cong a_* = \text{const}\,;\quad \rho h = \text{const}\,;\quad p^{\frac{1}{\varkappa}} h = \text{const}. \qquad (52)$$

În consecință, soluția asimptotică $p^{\frac{1}{\varkappa}} h = \text{const.}$ care în ipoteza absenței forțelor de inerție are loc numai pentru $V \to \infty$ se stabilește în realitate pentru o viteză mare, dar finită : $V \cong 2a_*$.

Mai departe, dacă viteza V crește , $M_* > 1$ în secțiunea de intrare. Comportarea probabilă a mărimilor U_m, p este dată de curbele *6* din figura 11 *a*. Este însă de remarcat că cel puțin teoretic mai apare posibilitatea apariției unei unde de șoc după care $M_* < 1$ (curbele *1–3*, fig. 11 *b*). O asemenea comportare este însă puțin probabilă datorită necesității ca profilul de viteze să fie astfel încît $U_m \ll V$ în zona din avalul undei de șoc. Pentru elucidarea acestei probleme sînt însă necesare cercetări experimentale la viteze V foarte mari. Într-adevăr deoarece a_* (51) are ordinul de mărime 300 m/s, fenomenele de mai sus pot apare numai la viteze foarte mari $V \sim 600$ m/s (de exemplu la un lagăr circular cu $r_1 = 2$ cm, rezultă o turație corespunzătoare de cca 600 000 rot/min). Ori la viteze mult mai reduse se stabilește practic soluția asimptotică (52) astfel încît variația vitezei U_m cu x este neglijabilă la vitezele amintite iar scurgerea poate avea loc fără unde de șoc.

Pentru cazurile obișnuite, $M_* < 1$, ca și în regim laminar [18] influența forțelor de inerție este neglijabilă.

CONCLUZII

Din cele de mai sus rezultă că pentru lagărele lubrificate cu gaze în regim hidrodinamic, turbulența nu apare decît la turații mari, la limita superioară a vitezelor actuale, dar care totuși se pot atinge în anumite situații speciale. Concluzia cea mai interesantă care se deduce din rezultatele prezentate este faptul că, spre deosebire de lubrificația cu lichide, la lagărele lubrificate cu gaze efectul turbulenței asupra presiunilor este redus și chiar neglijabil, dacă numărul H are valori suficient de mari. Frecările cresc însă sensibil cu numărul Reynolds. În rest, turbulența nu afectează sensibil caracteristicile de funcționare ale lagărelor. Pentru lagărele hidrostatice apare o creștere a capacității portante datorite însă scăderii comparative a debitului de lubrifiant. Influența forțelor de inerție este de aceeași natură ca și în regim laminar, fiind neglijabilă atîta timp cît viteza medie din stratul de lubrifiant rămîne inferioară unei anumite valori critice (viteza sunetului în primă aproximație).

Primită la redacție la 26 martie 1962

К ВОПРОСУ О ГАЗОВОЙ СМАЗКЕ В ВИХРЕВОМ РЕЖИМЕ

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются условия перехода от ламинарного режима к турбулентному и возможности появления турбулентности в современных воздушных подшипниках. Далее, на основании использования гипотезы длины смещения Прандтля, ранее развитой автором для подшипников с жидкостями, исследуется распределение давления в гидростатических и гидродинамических подшипниках. Для гидродинамических подшипников устанавливается, что появление турбулентности оказывает незначительное влияние на несущую способность воздушных подшипников; эффектом турбулентности является увеличение сил и моментов трения.

ON GAS LUBRICATION IN TURBULENT REGIME

ABSTRACT

This paper analyses the conditions of transition from the laminar flow to the turbulent one in the gas lubricant layer, as well as the possibilities of the occurrence of turbulence in actual gas bearings. Further, by employing the Prandtl's mixing length theory, previously used by the author for liquid film bearings, an analysis is made on the pressure distribution in both externally pressurized and self acting gas bearings. For self acting bearings it is found that the turbulence has usually a negligible influence on the load carrying capacity, while its effect on the friction forces is integrally maintained under the known usual form.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Influența turbulenței asupra mișcării în stratul de lubrifian* (Influence of Turbulence on the Motion in the Lubricant Layer). St. cerc. mec apl., **IX**, *1*, 139–162 (1958).
2. — *Considerații asupra lubrificației cu gaze în regim turbulent.* St. cerc. mec. apl., **IX**, *2*, 369–376 (1958); Considerations on Gas Lubrication in Turbulent Flow. Revue de Mécanique Appliquée, **III**, *3*, 313–321 (1958).
3. N. Tipei, V. N. Constantinescu, *On High-Speed Self-Acting Gas-Bearings.* Proc. of the 1st International Symposium on Gas Lubricated Bearings. Washington, Oct. 1959, U.S. Government Printing Office, 1961.
4. V. N. Constantinescu, *On Turbulent Lubrication.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, London, **173**, *38*, 881–900 (1959).
5. — *Analysis of Bearings Operating in Turbulent Regime.* Trans. of the ASME, series D, Journal of Basic Engineering, **84**, march (1962).
6. J. Kaye, E. C. Elgar, *Modes of Adiabatic and Diabatic Fluid Flow in an Annulus with an Inner Rotating Cylinder.* Trans. of the ASME, **80**, april (1958).
7. G. I. Taylor, *Stability of a Viscous Liquid Contained Between Two Rotating Cylinders.* Phil. Trans. Series A, **223**, 289 (1923).
8. V. N. Constantinescu, *Lubrificația cu gaze.* Editura Academiei R.P.R., 1962.
9. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory.* G. Braun-Verlag, Karlsruhe, Pergamon Press, London, 1955.
10. H. G. Elrod, A. Burgdorfer, *Refinements of the Theory of Gas Lubricated Journal Bearings of Infinite Length.* Proc. of the 1st International Symposium on Gas Lubrificated Bearings, Washington, Oct. 1959.
11. W. A. Gross, *Film Lubrication.* Part. IX: Externally Pressurized Bearings, I B M Research Report R J 117–9, Sept. *1* (1960).

12. W. SQUIRE, *A Unified Theory of Turbulent flow*. Appl. Sci. Res. Section A, **8**, 158–168 (1959); **9**, 393–40 (1960); **10**, 23–44 (1961).

13. H. REICHART, *On the Velocity Distribution in a Rectiliniar Turbulent Couette Flow*. Z A M M, Special Suplement, 26–29 (1956).

14. J. M. ROBERTSON, *On Turbulent Plane Couette Flow*. Proc. 6th Midwestern Conference on Fluid Mechanics, Univ. of Texas, 169–182 (1959).

15. V. N. CONSTANTINESCU, *Calculul lagărelor de alungire infinită lubrificate cu gaze, compuse din suprafețe plane*. St. cerc. mec. apl., **VII**, *3*, 741–771 (1956).

16. A. A. RAIMONDI, *A Numerical Solution for the Gas Lubricated Journal Bearings of Finite Length*. A S L E Trans. Academic Press Inc., **4**, 131–155 (1961).

17. W. A. GROSS, *Numerical Analysis of Gas Lubricated Films*. Proc. of the 1st International Symposium on Gas Lubricated Bearings, Washington, oct. 1959.

18. V. N. CONSTANTINESCU, *Asupra scurgerii gazelor cu viteze mari în ajutaje de dimensiuni transversale reduse*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *2* (1962).

CONTRIBUȚII LA TEORIA GENERALĂ A ACCELERAȚIILOR REDUSE ÎN COORDONATE PUNCTUALE ȘI TANGENȚIALE

DE

D. MANGERON [1]) și E. CROITORU [2])

INTRODUCERE

1. În cadrul desfășurării celei de-a treia conferințe generale poloneze de teoria mecanismelor și mașinilor [1] acad. I. I. Artobolevski a expus o lucrare [2] consacrată studiului punctual al curbelor de înfășurare liniară, generate prin înfășurare de o dreaptă invariabil legată de un organ solid rigid aparținînd unor mecanisme ce interesează îndeaproape tehnica modernă.

Într-un șir de lucrări cu totul recente [3]—[6] acad. I. I. Artobolevski a stabilit ecuațiile carteziene parametrice ale curbelor de bielă precum și ale curbelor cicloidale de înfășurare liniară. În [7] unul dintre autori a expus pe scurt avantajele care decurg din folosirea sistematică a metodelor geometriei tangențiale în studii ce se referă la : 1) înfășurătoarele din planul batiului a unor drepte invariabil legate de organele mobile ale mecanismelor plane ; 2) înfășurătoarele din planul unui organ oarecare mobil aparținînd mecanismelor plane ale unor drepte invariabil legate de planul batiului ; 3) înfășurătoarele corespunzătoare punctelor 1) și 2) ale unor plane invariabil legate de organele fixe sau mobile ale mecanismelor în mișcare spațială generală ; 4) problemele duale problemelor de la punctul 3), adică la mulțimile de riglate generate de drepte invariabil legate de organele mecanismelor în mișcare spațială generală ; 5) cinematica și dinamica sistemelor materiale în diferite spații cu un număr oarecare de dimensiuni [8], [9], legate de problema gravitației [10].

În cele ce urmează se expun, conservînd ordinea de idei a unor lucrări proprii [11], [12], premisele unei teorii generale a accelerațiilor reduse în coordonate punctuale sau tangențiale, care constituie o continuare naturală a *metodei accelerațiilor reduse* [13] — [15], inaugurată de unul dintre autori în [16] şi cristalizată apoi într-un şir de articole elaborate în colaborare cu mai mulți oameni de știință din țară şi din străinătate [17] – [21].

---

[1]) [2]) Institutul politehnic, Iași.

Articolul se încheie cu un număr de aplicații relative la curbe ciclіodale de înfășurare liniară, pe cînd problema referitoare la curbe de bielă de înfăşurare liniară interesînd mecanisme patrulatere plane precum şi la algoritmul de formare a ecuațiilor tangențiale şi punctuale a curbelor de înfăşurare liniară aparținînd mecanismelor plane complexe, expusă pe fondul general al teoriei accelerațiilor reduse într-o lucrare a autorilor, urmează să constituie subiectul unui articol de proximă apariție.

NOI TEOREME RELATIVE LA TEORIA ACCELERAŢIILOR REDUSE ÎN COORDONATE PUNCTUALE

2. Fie

$$(P):\ \vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2,\ (\vec{u}_1 \vec{u}_2) = 0,\ \vec{u}_1^2 = \vec{u}_2^2 = 1, \tag{1}$$

ecuația vectorială punctuală a unui plan mobil (P) invariabil legat de un organ oarecare mobil al unui mecanism în mișcare spațială generală și

$$(P_m):\ \vec{r}_{M_m^*} = \vec{r}_{M_0} + \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2 + \lambda \vec{a}_M^{(m)} = \\ + \vec{r}_M + \lambda \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (\vec{r}_{M_0} + \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2) \tag{2}$$

ecuația punctuală vectorială a planului (P_m) — loc geometric al extremităților vectorilor accelerații de ordin m, $\vec{a}_M^{(m)}$, corespunzătoare punctelor $M \in (P)$ și înmulțite printr-un factor λ. În (2) avem

$$\vec{a}_M^{(m)} = \vec{a}_{M_0}^{(m)} + (-A_m + \vec{B}_m X)\vec{u} + \sum_{j=0}^{m-1} \vec{\omega}^{(j)} (\vec{C}_{mj} \cdot \vec{u}), \tag{3}$$

în care

$$A_{m+1} = \frac{dA_m}{dt} + (\vec{\omega} \cdot \vec{B}_m),\ \vec{B}_{m+1} = \frac{d\vec{B}_m}{dt} - \vec{A}_m \omega, \tag{4}$$

$$\vec{C}_{mj} = \vec{C}_{m-1,\,j-1} + D\vec{C}_{m-1,\,j},\ D \equiv \frac{d}{dt} - \omega X, \tag{5}$$

$$\vec{C}_{10} \equiv \omega,\quad \vec{C}_{m-1,\,-1} \equiv \vec{B}_{m-1}, \tag{6}$$

$$(j = 0, 1, \ldots,\quad m-1;\ m = 1, 2, \ldots)$$

μ_1, μ_2 sînt niște parametri,

$$\vec{u} \equiv \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2,$$

iar

$$\left.\begin{aligned}
&A_1(\vec{u}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) && \text{pentru}\quad A_1 = (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}),\\
&A_2(\vec{u}) = 3(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) && \text{pentru}\quad A_2 = 3(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{\omega}),\\
&A_3(\vec{u}) = 4(\vec{\omega}^{(3)}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u})+3(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u}) - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(\vec{\omega}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u})\ \text{etc.};\\
& && \text{pentru}\quad A_3 = 4(\vec{\omega}^{(3)}\cdot\vec{\omega})+3(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{\omega}^{(2)})-\\
& && \qquad - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\ \text{etc.};
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&B_1(\vec{u}) = (\vec{B}_1\cdot\vec{u}) = (\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u}) && \text{pentru}\quad \vec{B}_1 = \vec{\omega}^{(2)},\\
&B_2(\vec{u}) = (\vec{\omega}^{(3)}\cdot\vec{u}) - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) && \text{pentru}\quad \vec{B}_2 = \vec{\omega}^{(3)} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\,\vec{\omega},\\
&B_3(\vec{u}) = (\vec{\omega}^{(4)}\cdot\vec{u}) - 2(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{\omega})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u})\ \text{etc.};\\
& && \text{pentru}\quad \vec{B}_3 = \vec{\omega}^{(4)} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\,\vec{\omega}^{(2)} -\\
& && \qquad - 2(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{\omega})\,\vec{\omega}\ \text{etc.};
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

și $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ este pseudovector viteză unghiulară instantanee a planului (P).

Problema de determinare a valorilor parametrului λ pentru care se extremalizează o funcție trigonometrică oarecare a unghiului diedru format de planele (P) și (P_m) conduce la valorile

$$\left.\begin{aligned}
\lambda'_m &= \frac{1}{2}\,\frac{A_m + A_m(\vec{u}_3) + \sqrt{[A_m - A_m(\vec{u}_3)]^2 - 4B_m^2(\vec{u}_3)}}{A_m A_m(\vec{u}_3) + B_m^2(\vec{u}_3)},\\
\lambda''_m &= \frac{1}{2}\,\frac{A_m + A_m(\vec{u}_3) - \sqrt{[A_m - A_m(\vec{u}_3)]^2 - 4B_m^2(\vec{u}_3)}}{A_m A_m(\vec{u}_3) + B_m^2(\vec{u}_3)},
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

$$\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2. \quad(10)$$

Au loc următoarele teoreme.

TEOREMA I. *Planele* (P) *și* (P'_m) *sau* (P) *și* (P''_m) *formează cu ansamblul vectorilor accelerații reduse de ordin oarecare, definiți prin egalitățile*

$$\vec{u}_{Mr}^{(m)\prime} = \lambda'_m\,\vec{a}_M^{(m)} - \lambda'_m\frac{d}{dt}\,\vec{a}_M^{(m-1)},\quad \vec{a}_{Mr}^{(m)\prime\prime} = \lambda''_m\,\vec{a}_M^{(m)}, \quad(11)$$

$$(P'_m):\quad \vec{r}\,'_{M_m} = \vec{r}_{M_0} + \mu_1\vec{u}_1 + \mu_2\vec{u}_2 + \vec{a}_{M_r}^{(m)}, \quad(12)$$

$$(P''_m):\quad \vec{r}\,''_{M_m} = \vec{r}_{M_0} + \mu_1\vec{u}_1 + \mu_2\vec{u}_2 + \vec{a}_{M_r}^{(m)\prime\prime}, \quad(13)$$

$$(P):\quad \vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \mu_1\vec{u}_1 + \mu_2\vec{u}_2, \quad(14)$$

şi avînd originile lor în planul (P) *şi extremităţile lor în planul* (P'_m) *sau* (P''_m), *în corespondenţă cu ordinul m ales, cruci spaţiale în sensul lui A. P Kotelnikov* [23] – [25].

TEOREMA II. *Ternele de plane* (P), (P'_m), (P''_m) *determină prin intersecţiile lor triedre triortogonale.*

TEOREMA III. *Orice varietate liniară* V_{n-k} *dintr-un spaţiu euclidian* E_n *cu n dimensiuni, în mişcare rigidă generală şi orice varietate loc al extremităţilor acceleraţiilor reduse de ordin oarecare a punctelor varietăţii* V_{n-k} *considerate formează o cruce a lui Kotelnikov generalizată.*

TEORIA ACCELERAŢIILOR REDUSE ÎN COORDONATE TANGENŢIALE

3. Fie u_1, u_2, u_3 — coordonate tangenţiale ale unui plan generic avînd ecuaţia carteziană [1])

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + 1 = 0. \tag{15}$$

Coordonatele tangenţiale ale planelor (P), (P'_m) (sau (P), (P''_m)) ce constituie bazele crucilor generalizate ale lui Kotelnikov se exprimă prin relaţii matriciale

$$\left\{\begin{matrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{matrix}\right\} = - \left\{\begin{matrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \end{matrix}\right\} F', \ \vec{g}' \equiv (g'_1, g'_2, g'_3), \tag{16}$$

$$F' = ((\vec{r}_{M_0} - \lambda'_m \vec{r}^{(m)}_{M_0}) \cdot \vec{g}'), \tag{17}$$

$$g'_1 = \begin{vmatrix} v'_{12} & v'_{22} \\ v'_{13} & v'_{23} \end{vmatrix}, \ g'_2 = \begin{vmatrix} v'_{13} & v'_{23} \\ v'_{11} & v'_{21} \end{vmatrix}, \ g'_3 = \begin{vmatrix} v'_{11} & v'_{21} \\ v'_{12} & v'_{22} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$v'_{lk} (1 - A_m \lambda'_m)(\vec{u}_l \cdot \vec{i}_k) + \lambda'_m (\vec{B}_m \vec{u}_l \vec{i}_k) + \sum_{j=0}^{m-1} (\vec{\omega}^{(j)} \cdot \vec{i}_k)(\vec{C}_{mj} \cdot \vec{u}_l); \tag{19}$$

$$\left\{\begin{matrix} u''_1 \\ u''_2 \\ u''_3 \end{matrix}\right\} = - \left\{\begin{matrix} g''_1 \\ g''_2 \\ g''_3 \end{matrix}\right\} F'', \ \vec{g}'' \equiv (g''_1, g''_2, g''_3), \tag{20}$$

$$F'' = ((\vec{r}_{M_0} - \lambda''_m \vec{r}^{(m)}_{M_0}) \cdot \vec{g}''), \tag{21}$$

$$g''_1 = \begin{vmatrix} v''_{12} & v''_{22} \\ v''_{13} & v''_{23} \end{vmatrix}, \ g''_2 = \begin{vmatrix} v''_{13} & v''_{23} \\ v''_{11} & v''_{21} \end{vmatrix}, \ g''_3 = \begin{vmatrix} v''_{11} & v''_{21} \\ v''_{12} & v''_{22} \end{vmatrix}, \tag{22}$$

$$v''_{lk} = (1 - \lambda''_m A_m)(\vec{u}_l \cdot \vec{i}_k) + \lambda''_m (\vec{B}_m \vec{u}_l \vec{i}_k) + \sum_{j=0}^{m-1} (\vec{\omega}^{(j)} \cdot \vec{i}_k)(\vec{C}_{mj} \cdot \vec{u}_l), \tag{23}$$

$$(l = 1, 2; \ k = 1, 2, 3),$$

---

[1]) Folosirea sistematică a coordonatelor tangenţiale omogene va fi făcută într-o altă lucrare.

în care $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ sînt versorii axelor de coordonate ale triedrului triortogonal invariabil legat de batiul mecanismului spațial considerat.

4. În mod analog se poate enunța, pornind de la ecuațiile punctuale vectoriale ale unei drepte (D) în mișcarea spațială generală

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \mu(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3),\ (\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j) = \delta_{ij},\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \qquad (24)$$
$$(i, j = 1, 2, 3)$$

și de la ecuațiile punctuale vectoriale ale dreptei (D_m^*) asociate acesteia

$$\vec{r}_{M_m^*} = \vec{r}_M + \lambda_m\, \vec{a}_M^{(m)}, \qquad (25)$$

în care

$$\begin{aligned}\vec{a}_M^{(m)} = \vec{a}_{M_0}^{(m)} + \mu\,(- A_m + \vec{B}_m x)(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3) + \\ + \mu \sum_{j=0}^{m-1} \vec{\omega}^{(j)}\,(\vec{C}_{mj}\cdot(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3)),\end{aligned} \qquad (26)$$

și $\omega = \vec{\omega}\,(t)$ este pseudovector viteză unghiulară instantanee al dreptei (D), iar simbolurile ce intervin în (20′) se definesc prin relațiile (3)—(5), teoremă duală teoremei. Se găsesc astfel cruci generalizate duale ale lui Kotelnikov, dreptele fundamentale ale unei atare cruci (D) și (D_m^*)

$$(D) : (24),\ (D)_m^* : r_{M_m^*} = r_M + \frac{\vec{a}_M^{(m)}}{A_m - A_m\,(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3)}, \qquad (27)$$

corespunzătoare accelerației reduse de ordin m

$$\vec{a}_{M_r}^{(m)} \equiv \frac{\vec{a}_M^{(m)}}{A_m - A_m\,(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3)}, \qquad (28)$$

în care $A_m\,(a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3)$ se definesc prin „operația de polarizare" în raport cu $\vec{u} \equiv a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$ prin formulele analoge formulelor (7), (8), putînd fi exprimate în coordonate tangențiale dacă se ia ca punct de plecare o pereche de ecuații tangențiale a două din punctele sale

$$\begin{aligned} a_1' u_1 + a_2' u_2 + a_3' u_3 + 1 = 0, \\ a_1'' u_1 + a_2'' u_2 + a_3'' u_3 + 1 = 0.\ ^{1)} \end{aligned} \qquad (29)$$

APLICAȚII LA CURBE CICLOIDALE DE ÎNFĂȘURARE LINIARĂ

5. Acad. I. I. Artobolevski a numit curbe cicloidale de înfășurare liniară [3] curbe ce se obțin prin înfășurare a unei drepte ce aparține unui cerc ce se rostogolește fără alunecare pe un cerc sau pe o dreaptă fixe.

---

1) Nu folosim aici coordonate tangențiale omogene.

Ansamblul acestor curbe poate fi reprodus cu ajutorul mecanismelor planetare cu un singur satelit constituite din trei organe.

Să considerăm mecanismul (fig. 1) constituit dintr-un disc imobil circular *1*, dintr-un disc circular mobil *2* (satelit) și dintr-un antrenor (manivelă) *3*, articulat prin cuple de clasa cincea cu roțile *1* și *2*. Fie $u - u$ o dreaptă arbitrară invariabil legată de roata *2*. Fie $BN = a$ cea mai scurtă distanță a acestei drepte de punctul B (centrul satelitului *2*). Ne propunem să determinăm ecuațiile curbei ce este înfășurată liniar de totalitatea pozițiilor dreptei $u - u$ atunci cînd roata *2* se rostogolește fără alunecare pe roata *1*. Să rotim antrenorul *3* de un unghi φ în poziția *3'*. Atunci roata *2* se va roti de unghiul ψ și va trece în poziția *2'*, iar dreapta $u - u$ va trece în poziția $u' - u'$, pe cînd punctele N și P se vor situa în N' și P'. Să coborîm din punctul A (centrul discului fix 1) perpendiculara AD pe dreapta $u' - u'$. Ecuația familiei de drepte $u - u$ va fi

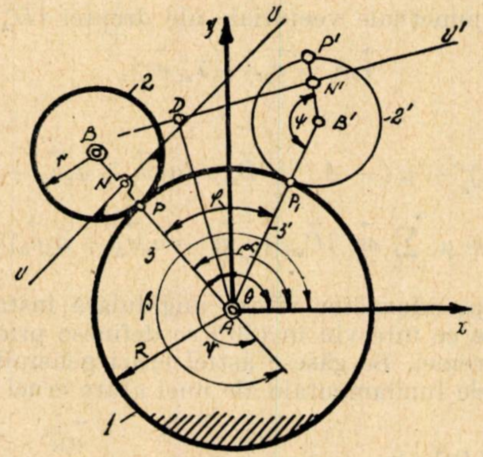


Fig. 1

$$x \cos \theta + y \sin \theta = P, \tag{30}$$

sau, punîndu-se în evidență coordonatele tangențiale neomogene u, v ale dreptei $u - u$,

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{31}$$

în care $p = AD$ și θ este unghiul pe care-l formează dreapta AD cu axa Ax.

Segmentul p este egal cu

$$p = -(R + r) \cos \psi + a, \tag{32}$$

în care R este raza roții *1*, iar r este raza roții *2*. Unghiul Ψ de rotire a dreptei $u - u$ este dat prin

$$\Psi = \psi + \varphi = (1 + \lambda)\psi, \tag{33}$$

deoarece $\varphi = \frac{r}{R}$, $\psi = \lambda\psi$, în care s-a notat prin $\lambda = \frac{r}{R}$.

Din figura 1 rezultă

$$\theta + \Psi = 180^\circ + \alpha = \beta, \tag{34}$$

iar din ecuațiile (34) se obține, ținîndu-se seama de (33),

$$\psi = \frac{\beta - \theta}{1 + \lambda}. \tag{35}$$

În consecință, ecuația (32) ia forma

$$p = -(R + r)\cos\frac{1}{1+\lambda}(\beta - \theta) + a \tag{36}$$

și ecuațiile parametrice pentru curba de înfășurare liniară căutată se prezintă în coordonate tangențiale sub forma

$$u = -\frac{\cos\theta}{p} = \frac{\cos\theta}{(R + r)\cos\frac{1}{1+\lambda}(\beta - \theta) - a}, \tag{37}$$

$$v = -\frac{\sin\theta}{p} = \frac{\sin\theta}{(R + r)\cos\frac{1}{1+\lambda}(\beta - \theta) - a}. \tag{37'}$$

Din ecuațiile (37), (37′) obținute nemijlocit sau din ecuațiile

$$x = -(R+r)\left[\cos\frac{1}{1+\lambda}(\beta - \theta)\cos\theta - \frac{1}{1+\lambda}\sin\frac{1}{1+\lambda}(\beta - \theta)\sin\theta\right] + a\cos\theta, \tag{38}$$

$$y = -(R+r)\left[\cos\frac{1}{1+\lambda}(\beta - \theta)\sin\theta + \frac{1}{1+\lambda}\sin\frac{1}{1+\lambda}(\beta - \theta)\cos\theta\right] + a\sin\theta, \tag{38'}$$

stabilite de acad. I. I. Artobolevski în [3], rezultă, că curba de înfășurare liniară căutată este o curbă transcendentă de tipul curbelor cicloidale. Se menționează totodată că orice dreaptă ce aparține planului roții *2* și este paralelă la dreapta $u - u$ va avea drept curbă de înfășurare liniară curba definită prin ecuațiile (37), (37′) (sau (38), (38′)), avînd o valoare corespunzătoare a parametrului a. De aceea, pentru studiul acestor curbe ajunge să se considere cazul în care dreapta $u - u$ coincide cu diametrul roții *2*, adică cazul ce corespunde la $a = 0$. Realizarea construcției prin puncte a curbei de înfășurare liniară obținută se face ducînd din punctul P_{21} (fig. 2), care este centrul momentan de rotație în mișcarea roții *2* față de roata *1*, perpendiculara $P_{21}M$ pe dreapta $u - u$. Punctul M va aparține curbei de înfășurare liniară în poziția considerată a roții *2* și a dreptei $u - u$. Menționăm că în [3] s-a dat o interpretare geometrică interesantă pentru funcțiile $p = p(\theta)$ și $\frac{dp}{d\theta} = f(\theta)$, făcîndu-se un număr de construcţii auxiliare reproduse în figura 2, asupra cărora nu este cazul a se insista aici.

Dacă roata mobilă *2* (fig. 3) de care este invariabil legată dreapta $u - u$ are contact interior cu roata fixă *1*, atunci ecuaţiile parametrice

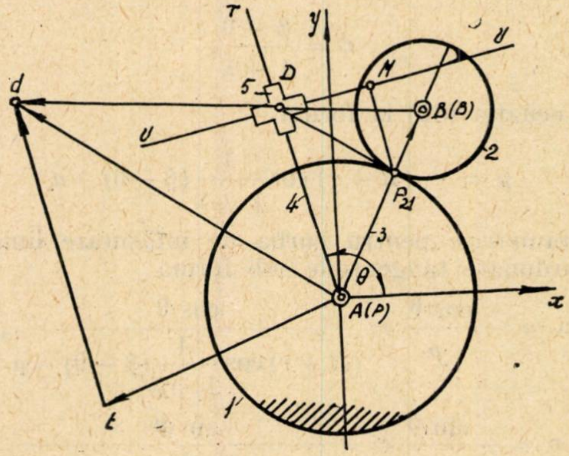

T
y
d
D
5
u
M
B(B)
2
P21
4
3
θ
A(P)
x
t
1

Fig. 2

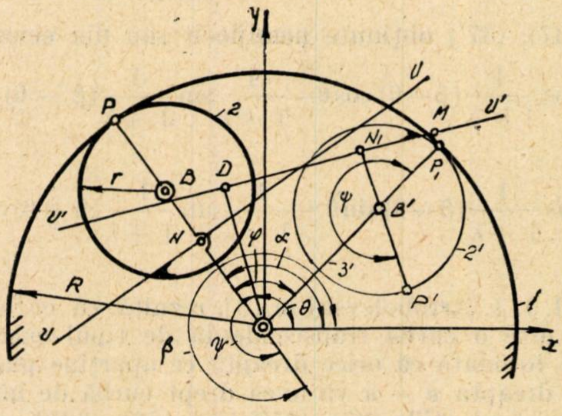

y
u
P
2
M
u'
N1
P1
r
B
D
φ
B'
u''
N
φ
α
2'
3'
P'
R
θ
1
u
β
ψ
x

Fig. 3

în coordonate tengenţiale ale curbei de înfăşurare liniară $u = u(\theta)$ şi $v = v(\theta)$ vor fi

$$u = -\frac{\cos\theta}{p} = -\frac{\cos\theta}{(R-r)\cos\dfrac{1}{1-\lambda}(\beta-\theta)+a}, \tag{39}$$

$$v = -\frac{\sin\theta}{p} = -\frac{\sin\theta}{(R-r)\cos\dfrac{1}{1-\lambda}(\beta-\theta)+a}, \tag{39'}$$

pe cînd ecuațiile parametrice punctuale ale aceleași curbe sînt

$$x = (R - r)\left[\cos\frac{1}{1-\lambda}(\beta-\theta)\cos\theta - \frac{1}{1-\lambda}\sin\frac{1}{1-\lambda}(\beta-\theta)\sin\theta\right] + a\cos\theta, \tag{40}$$

$$y = (R - r)\left[\cos\frac{1}{1-\lambda}(\beta-\theta)\sin\theta + \frac{1}{1-\lambda}\sin\frac{1}{1-\lambda}(\beta-\theta)\cos\theta\right] + a\sin\theta, \tag{40'}$$

în care s-a notat prin $\lambda = \frac{r}{R}$. În figura 3 sînt indicate unghiurile β și θ, precum și poziția punctului M, care aparține curbei de înfășurare liniară. Deducerea ecuațiilor (39) și (39′) (sau a ecuațiilor (40) și (40′)) este analogă deducerii ecuațiilor (37) și (37′) (sau a ecuațiilor (38) și (38′)). Dacă în ecuațiile (39) și (39′) se ia $\beta = 135°$ și $\lambda = \frac{1}{2}$, atunci aceste ecuații se reduc la ecuația

$$u^{-2} + v^{-2} = a^2, \tag{41}$$

în care $a = 2(R - r)$, cu alte cuvinte în acest caz curba de înfășurare liniară este o astroidă.

Ținînd seama de corespondența ce intercede între ecuațiile punctuale și cele tangențiale, transcrise toate în coordonate omogene, cristalizată în tabelul de mai jos [1])

Ecuații punctuale	Ecuații tangențiale
$x^p + ay^q = 0 \ (p > q)$	$u^p + \frac{(-1)^p p^p}{aq^q (p-q)^{p-q}} v^q w^{p-q} = 0$
$x^p y^q + a = 0$	$u^p v^q + \frac{(-1)^{p+q} p^p q^q}{a(p+q)^{p+q}} w^{p+q} = 0$
$Ax^m + By^m + Cz^m = 0$	$\frac{u^{\frac{m}{m+1}}}{A^{\frac{1}{m-1}}} + \frac{v^{\frac{m}{m-1}}}{B^{\frac{1}{m-1}}} + \frac{w^{\frac{m}{m-1}}}{C^{\frac{1}{m-1}}} = 0$

în care p, q, m pot fi fracționare și negative, se obține nemijlocit sub titlu de verificare ecuația punctuală a astroidei

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a = 2(R - r), \tag{42}$$

care se poate deduce și din ecuațiile (40) și (40′) (sau (41)).

Curba de înfășurare liniară descrisă în acest din urmă caz în planul roții mobile *2* de către o dreaptă invariabil legată de roata fixă *1* este o curbă de clasa doua (elipsă).

---

[1]) z (w) este coordonata de omogenizare.

Să considerăm cazul în care roata mobilă *2* (fig. 4) este rostogolită fără alunecare pe un organ imobil *1*, care nu este altceva decît dreapta $x - x$. Antrenorul *3* lunecă acum între directoarele imobile A, a căror axă este paralelă cu axa $x - x$. Fie $u - u$ o dreaptă arbitrară aleasă în planul roții *2* și $BN = a$ cea mai scurtă distanță a acestei drepte de punctul B. Pentru a deduce ecuațiile tangențiale sau punctuale ale curbei de înfășurare liniară a dreptei $u - u$, să situăm punctul B al antrenorului *3*

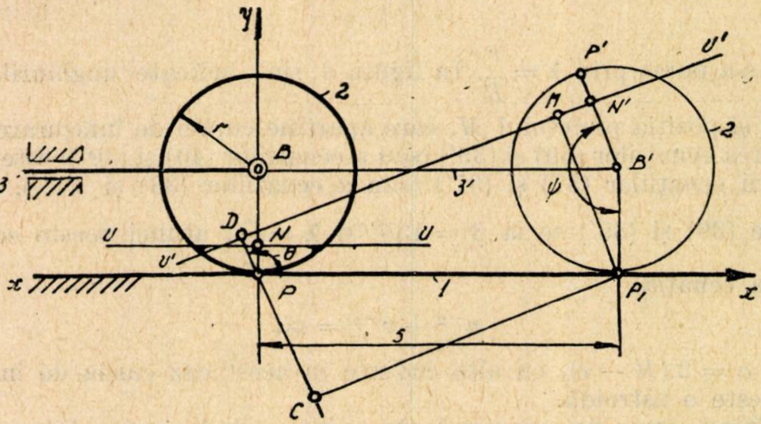


Fig. 4

și al roții *2* în poziția B'. Atunci roata *2* se va deplasa în poziția *2'* și dreapta $u - u$ va ocupa poziția $u' - u'$. Unghiul de rotire ψ al roții *2* va fi legat de deplasarea $s = BB'$ a centrului B al roții *2* prin condiția $\psi = \frac{s}{r}$, în care prin r s-a notat raza roții *2*. Să ducem din punctul P perpendiculara $PD = p$ pe dreapta $u' - u'$. Atunci ecuația familiei de drepte $u - u$ va avea forma

$$x \cos \theta + y \sin \theta = r\left[\sin \theta + \left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)\cos \theta\right] + a, \tag{43}$$

deoarece

$$p = PD = DC - PC = (a - r \cos \psi) + \psi r \cos \theta, \quad \psi = \frac{4\pi}{3} - \theta, \tag{44}$$

și prin urmare ecuațiile parametrice ale curbei de înfășurare liniară în coordonate tangențiale vor fi

$$u = -\frac{\cos \theta}{p} = -\frac{\cos \theta}{r\left[\sin \theta + \left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)\cos \theta\right] + a}, \tag{45}$$

$$v = -\frac{\sin \theta}{p} = -\frac{\sin \theta}{r\left[\sin \theta + \left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)\cos \theta\right] + a}, \tag{45'}$$

iar ecuațiile parametrice în coordonate punctuale

$$x = r\left[\sin\theta\cos\theta + \left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right)\right] + a\cos\theta, \tag{46}$$

$$y = r\sin^2\theta + a\sin\theta. \tag{46'}$$

Din ecuațiile (45) și (45') (sau (46) și (46')) rezultă că această curbă de înfășurare liniară este și ea o curbă transcendentă de natura curbelor cicloidale. Construcția acestei curbe de înfășurare liniară poate fi făcută prin puncte. În figura 4 este indicat punctul M al acestei curbe în poziția în care dreapta $u - u$ ocupă poziția $u' - u'$. Pentru determinarea poziției punctului M este necesar să se ducă perpendiculara din centrul momentan de rotație P_1 al roții *2* pe dreapta $u' - u'$.

Construcția grafoanalitică a accelerațiilor de orice ordin în punctul M al curbei de înfășurare liniară astfel găsită poate fi făcută — așa cum s-a arătat în șirul de lucrări anterioare consacrate aplicării metodei accelerațiilor reduse la studiul mecanismelor plane [13], [14] —, realizîndu-se economii remarcabile, dacă se folosesc teoremele stabilite în [16].

CONCLUZII

6. Rezultatele obținute completează prin noile teoreme stabilite șirul de teoreme ce se încadrează fructuos în teoria și practica accelerațiilor reduse de ordin oarecare, *în coordonate punctuale sau tangențiale.*

Teoria și practica accelerațiilor reduse, elaborată la Iași și continuată acum de numeroși oameni de știință din țară și din străinătate [25]—[30], conduce, din punct de vedere teoretic, pentru spații cu mai multe dimensiuni, la noțiunea fecundă de *accelerații reduse de ordin oarecare și de diferite specii*, permițînd totodată din punct de vedere practic să se rezolve cu unele avantaje în comparație cu metodele deja cunoscute [31], [32] numeroase probleme de analiză și sinteză a mecanismelor [33], [34]. Teoria și practica accelerațiilor reduse conduce, în particular, la rezolvarea problemei fundamentale ce interesează mecanizarea complexă și automatizarea proceselor de producție și care constă în distribuția accelerațiilor de diferite ordine pentru punctele organelor mobile aparținînd mecanismelor plane sau spațiale sau pentru punctele situate pe curbe *directe* și *inverse* (descrise punctual) sau pe curbe *directe* și *inverse* de înfășurare liniară (descrise tangențial).

Primită la redacție la 28 iunie 1962.

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ПРИВЕДЕННЫХ УСКОРЕНИЙ В ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ И ТОЧЕЧНЫХ КООРДИНАТАХ

РЕЗЮМЕ

Акад. И. И. Артоболевский исследовал в ряде недавно опубликованных работ [4], [6] важный для приложений класс линейно огибающих

шатунных кривых, получив их декартовы уравнения в параметрическом виде.

В [7] один из авторов настоящей статьи подчеркнул возможность систематического использования тангенциальных координат в рамках вышеуказанных исследований, в то время как в [11], [12] авторы изложили несколько теорем тангенциальной кинематической геометрии, относящихся к анализу и синтезу плоских и пространственных механизмов.

В настоящей статье, исходя из формул (часть которых не была еще воспроизведена в других заметках) [3]—[10] устанавливаются следующие теоремы, касающиеся различных обобщений разработанной одним из авторов и его сотрудниками теории приведенных ускорений различных порядков и родов [16]—[22]:

ТЕОРЕМА 1. Плоскости (P) и (P'_m) или же (P) и (P''_m), определяемые [11] — [13], с совокупностью векторов приведенных ускорений любого порядка, выражаемых [11] – [9] и имеющих свои начала на плоскости (P), а концы на плоскости (P'_m) или (P''_m), образуют обобщенные, соответствующие выбранному порядку m, пространственные кресты А. П. Котельникова [23]—[25].

ТЕОРЕМА 2. Тройки плоскостей (P), (P'_m), (P''_m), определяемых [11] — [13], образуют своими пересечениями прямоугольные трехгранники.

ТЕОРЕМА 3. Ассоциированные на основании теории приведенных ускорений пары линейных подпространств n-мерного эвклидова пространства E_n образуют обобщенные кресты Котельникова.

Затем излагаются теоремы, дуальные некоторым из вышеизложенных, и приводится ряд новых рекуррентных формул, служащих основой теории приведенных ускорений в тангенциальных координатах [15]—[23].

Статья заканчивается приложением вышеизложенной теории для вывода на языке тангенциальных координат результатов, полученных акад. И. И. Артоболевским в [3], касающихся теории линейно огибающих циклоидальных кривых.

Не приводятся построения ускорений высших порядков, основанные на графо-аналитическом методе приведенных ускорений любого порядка, так как этот метод нашел свое отражение в рамках теории плоских механизмов в ряде статей, представленных на 2-ом Всесоюзном Совещании по основным проблемам теории машин и механизмов [13] или же в [14], в то время как некоторые задачи теории пространственных механизмов были выработаны в [15] или же представлены одним из авторов на 3-ем Общепольском совещании по теории машин и механизмов [1].

Полученные параметрические уравнения в тангенциальных координатах, касоющиеся линейно огибающих кривых, линейно огибающих

поверхностей, ускорений различных порядков в плоском и пространственном движении и др., могут быть использованы (в рамках работ, успешно проводимых коллективом Института прикладной механики им. Тр. Вуя под руководством Р. Богдана и Кр. Пелекуди [38]—[40]) для исследования датчиков механических, электрических, электронных, служащих для определения различных кинематических параметров, наилучшим образом определяемых в тангенциальных координатах.

SUR LA THÉORIE DES ACCÉLÉRATIONS RÉDUITES EXPRIMÉE EN COORDONNÉES PONCTUELLES ET TANGENTIELLES

RÉSUMÉ

M. I. I. Artobolevski a étudié, dans une série de travaux tout à fait récents [4]—[6], les courbes enveloppées par des droites invariablement liées aux bielles des mécanismes articulés plans à quatre organes ou bien des mécanismes à bielle-manivelle, tout en établissant les équations paramétriques cartésiennes de ces courbes, nommées «courbes de bielle à droites enveloppées».

Dans [7], l'un des auteurs a souligné la possibilité d'utiliser systématiquement les coordonnées tangentielles, dans le cadre des recherches ci-dessus, tandis que dans [11], [12] les auteurs ont énoncé plusieurs théorèmes de géométrie cinématique tangentielle, relatifs à l'analyse et à la synthèse des mécanismes plans et de l'espace.

Dans cet article, tout en prenant comme point de départ plusieurs formules, en partie nouvelles, concernant la théorie des accélérations réduites d'ordre et d'espèce quelconques (3)—(8), ils établissent quelques théorèmes, à savoir :

THÉORÈME I. *La tangente trigonométrique de l'angle dièdre des plans* (P) *et* (P'_m) (12) *ou bien* (P) *et* (P''_m) (13) *relatifs aux valeurs* λ'_m, λ''_m (9) *du paramètre* λ, *réalise d'une manière effective un extremum, tandis que les plans ci-dessus, tout en portant respectivement les origines ou bien les extrémités des accélérations réduites d'ordre m et de deuxième espèce* [25] *constituent des croix généralisées au sens de Kotelnikoff* [23]—[24].

THÉORÈME II. *Les droites d'intersection des plans* (P), (P'_m), (P''_m) *forment un trièdre triorthogonal.*

THÉORÈME III. *Les couples de variétés linéaires, relatives à la théorie des accélérations réduites d'ordre et d'espèce quelconques de l'espace euclidien* E_n *à n dimensions, constituent elles aussi des croix généralisées au sens de Kotelnikoff.*

Les résultats acquis, dont une partie sont transcrits dans le langage de la géométrie tangentielle (15)—(22), sont utilisés ensuite pour l'établissement des équations tangentielles des courbes cycloïdales enveloppées

par des droites invariablement liées aux satellites de divers mécanismes planétaires plans (37), (39), étudiés par I. I. Artobolevski dans [3].

Les auteurs ont renoncé ici d'insister sur les constructions concernant la détermination des accélérations des points de mécanismes plans ou de l'espace, élaborés avantageusement grâce à la méthode grapho-analytique des accélérations réduites d'ordre quelconque dans un nombre de travaux antérieurs [17]—[20].

L'article conclut par quelques indications relatives aux perspectives des recherches ultérieures sur ce sujet, tout en indiquant en particulier la méthode mécano-électrique élaborée dans [38]—[40].

BIBLIOGRAFIE

1. * * * III *Ogolnopolska konferencja naukowa katedr i zakladow teorii maszyn i mechanizmów.* (Rogów, 10.VI.1961), Katedra teorii maszyn i mechanizmów Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1961.
2. I. I. Artobolewski, *O pewnej klasie krzywych lacznikowych.* (*Op. cit.* p. 11).
3. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Циклоидальные линейно огибающие кривые.* Доклады АН СССР, **144**, *1*, 76—78 (1962).
4. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *К теории четырехзвенных механизмов с двумя поступательными парами.* Доклады АН СССР, **139**, *4*, 838—840 (1961).
5. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Линейно огибающие шатунные кривые механизмов с поступательной парой.* Доклады АН СССР., **139**, *5*, 1077—1080 (1961).
6. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Линейно огибающие шатунные кривые четырехзвенного эллипсографа*, **139**, *6*, 1336—1338 (1961). Доклады АН СССР.
7. D. Mangeron, *Dyskusja*, loc. cit. [1], p. 6, 9.
8. D. Mangeron, Gh. Ciobanu, A. Braier, *Problema distribuţiei acceleraţiilor de ordin oarecare în mişcarea sistemelor materiale.* Bul. Inst. Politehn. Iaşi, serie nouă, **2** (**6**), *1—2*, 29—37 (1956).
9. R. Woinaroski, *Mişcări rigide cu un punct fix în spaţiul euclidian cu 5 dimensiuni.* (**1**), (**2**). Lucr. Inst. petrol, gaze şi geol., Buc., *5*, 383—396; 397—406 (1959).
10. * * * *Современные проблемы физики.* Физматгиз, М., 1961.
11. Д. МАНЖЕРОН, Е. КРОЙТОРУ, *К общей теории приведенных ускорений в тангенциальных координатах.* Доклады АН СССР, **145** (1962). В печати.
12. D. Mangeron, E. Croitoru, *Sulla teoria generale delle accelerazioni ridotte d'ordine qualunque.* Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., s. **VIII**, 32, 5 (1962).
13. Д. МАНЖЕРОН, К. ДРЭГАН, *Исследование механизмов методом приведенных ускорений.* În vol. *Труды Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Анализ и Синтез механизмов.* МАШГИЗ, М., 1960, 111—122; 209—210.
14. D. Mangeron, C. Drăgan, Vl. Svijevschi, *Eine neue Methode zum Studium der Theorie der Mechanismen und Maschinen.* Revue de Méc. Appl., **II**, *1*, 145—156 (1957).
15. D. Mangeron, C. Drăgan, *Studiul mecanismelor spaţiale prin metoda acceleraţiilor reduse.* Studii şi cerc. de mec. apl., **XII**, *5*, 1025—1046 (1961).
16. Д. МАНЖЕРОН, *К графо-аналитическим методам кинематики материальных систем.* Доклады АН СССР, **102**, *5*, 897—898 (1955).
17. D. Mangeron, C. Drăgan, O. Munteanu, *Studiul mecanismelor plane cu cuple cinematice inferioare, bazat pe metoda acceleraţiilor reduse*, Bul. Inst. politehn. Iaşi, serie nouă, **2** (**6**), *3—4*, 263—281 (1956).
18. Д. МАНЖЕРОН, Я. С. ЗИЛЬБЕРМАН, *О некоторых свойствах обобщенных крестов ускорений А. П. Котельникова.* Труды Рост. на-Дону института инж. железнодор. транспорта, Вып. XXIX, *Прикладная механика*, Трансжелдориздат, 5—10 (1961).

19. Д. МАНЖЕРОН, Я. И. ЯСЮЛЕНИС, *О некоторых экстремальных свойствах пространственных приведенных ускорений любого порядка используемых в теории машин и механизмов.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, serie nouă, **5** (**9**), 307—310 (1959).

20. Д. МАНЖЕРОН, Д. С. ТАВХЕЛИДЗЕ, *Об одном классе дифференциальных ,,инвариантов'' в задаче распределения ускорений любого порядка в сложных плоских механизмах.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, serie nouă, **7** (**11**), *3—4*, 261—264 (1961).

21. Д. МАНЖЕРОН, П. А. ЛЕБЕДЕВ, *Алгорифм составления алгебраических уравнений линейно-огибающих шатунных кривых плоских механизмов.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, serie nouă, **8** (**12**), 1—2 (1961) Sub tipar.

22. А. П. КОТЕЛЬНИКОВ, *Заметка по графической динамике.* Труды Московского Инст. инж. им. Баумана, 29—30, 3—27 (1937).

23. П. Н. ОСИПОВ, *Бикватернионы Клиффорда-Котельникова и матрицы Эйлера.* Труды КТИПП, вып. **17**, 229—250 (1957).

24. Д. МАНЖЕРОН, *Пространственное обобщение крестов Котельникова.* Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, *1*, 168—169 (1960).

25. А. И. ЯСЮЛЕНИС, *Применение кругов к ускорениям высшего порядка.* Lietuvos Zemes Ukio Akademijos Moksliniai Darbai, **V**, 253—259 (1958).

26. V. MANAFU, *Generalizarea metodei figurilor auxiliare. Studiul cinematic al grupelor de clasa* III *ordinul trei.* Bul. Inst. politehn. Iași, serie nouă, **2** (**6**), *1—2*, 311—320 (1956).

27. N. I. MANOLESCU, *Asupra metodei asemănării din cinematica mecanismelor plane.* Comunicările ştiinţifice ale Inst. de căi ferate ,,Gh. Gheorghiu-Dej'', 3—10 (1958).

28. R. P. VOINEA, M. C. ATANASIU, *Contribution à l'étude de la structure des chaines cinématiques.* Bul. Inst. politehn. București, **22**, *1*, 3—51 (1960).

29. GH. MUNTEANU, *Unele aplicații ale metodei accelerațiilor reduse în dinamică,* Studii și cerc. mecanică apl., **XI**, *3* (1960).

30. * * * *Teoria mecanismelor și mașinilor. Structura și cinematica mecanismelor.* Ed. tehnică, București, cap. II, *Studiul cinematic al grupelor lui Assur.* 22. *Metoda accelerațiilor reduse.* 352—354 (1959).

31. D. MANGERON, R. BOGDAN, *Studii, cercetări și perspective în domeniul teoriei mașinilor și mecanismelor în Republica Populară Romînă.* Extras din Raportul prezentat la a II-a Consfătuire Unională în domeniul problemelor de bază ale teoriei mașinilor și mecanismelor, Moscova, 24—28 martie 1958. Institutul de Mecanică aplicată ,,Traian Vuia'', Studii și cercetări de mecanică aplicată, **IX**, *4*, 1093—1098 (1958).

32. D. MANGERON, R. BOGDAN, *The second USSR conference on the theory of machines and mechanisms* (*Moscow, March* 24—28, (1958), Bul. Inst. politehn. Iași, serie nouă, **4** (**8**), *1—2*, 471—478 (1958).

33. Н. И. ЛЕВИТСКИЙ, *Итоги работы секции анализа и синтеза механизмов.* În vol. *Итоги Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов.* Академия Наук СССР., Институт Машиноведения, 24—29 (1958).

34. И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, *Современное состояние теории машин и механизмов.* În vol. *Труды Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Анализ и Синтез механизмов.* МАШГИЗ. М., 1960, 7—23, 196—206.

35. C. I. DRĂGAN, *Asupra unor noi metode de studiu a mecanismelor şi maşinilor.* Autoreferatul lucrării de disertaţie pentru obţinerea titlului de candidat în științe fizico-matematice. Universitatea ,,Al. I. Cuza'', Iași, 1961, 38.

36. Я. С. ЗИЛЬБЕРМАН, *Исследование механизмов методом приведенных ускорений.* Труды Ростовского на-Дону Инст. инж. железнодор. трансп. Вып. XXIX, *Прикладная механика.* Трансжелдориздат, 11—91, 1961.

37. Р. БОГДАН, К. ПЕЛЕКУДИ, Л. КАЛМАЧУК, *О механоэлектрических датчиках для экспериментального определения траекторий в плоских механизмах.* În vol. *Труды Второго Всесоюзного Совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Динамика машин.* МАШГИЗ, М., 35—46 (1960).

38. R. BOGDAN, C. PELECUDI, L. CALMACIUC, *Asupra problemei de determinare experimentală a deplasărilor în mecanisme plane.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, **VIII**, *3* (1957).

39. D. MANGERON, *Eine neue Methode zum Studiul der Theorie der Mechanismen und Maschinen.* II. Czechoslovak conference Dynamics of Machines. Abstracts of papers. Smolenice, 18-th-20th October 1961. Czechoslovak Academy of Sciences and Slovak Academy of Sciences, 57—59.

40. D. MANGERON, *Mechanisms design based on the theory of reduced accelerations of any order.* Proceedings of the seventh Congress on theoretical and applied Mechanics. The Indian Society of theoretical and applied Mechanics. Indian Institute of Technology, Kharagpur India, 1961.

STUDII

O GENERALIZARE A FORMULELOR DE ANALIZĂ ARMONICĂ A MOMENTULUI MOTOR PRODUS DE FORȚELE DE INERȚIE ȘI DE GREUTĂȚILE PIESELOR MECANISMELOR BIELĂ-MANIVELĂ LA MOTOARELE CU ARDERE INTERNĂ

DE

GEORGE BĂRĂNESCU

1. INTRODUCERE

Pentru calculul arborelui cotit la vibrațiile de răsucire este necesară descompunerea în serie Fourier a momentului motor al fiecărui cot. Descompunerea este posibilă, deoarece momentul motor este o funcție periodică, continuă și netedă.

Momentul motor nu este cunoscut analitic, întrucît unele din forțele care îl produc — și anume forțele corespunzătoare presiunilor gazelor din cilindri — nu sînt cunoscute analitic. Din acest motiv, variația momentului motor se determină prin calculul valorilor acestei funcții, pentru mai multe poziții ale arborelui cotit.

Analiza armonică a momentului motor al unui cot se face plecînd de la curba momentului motor, trasată prin puncte. Această metodă prezintă neajunsul unor calcule laborioase, mai ales cînd se efectuează calculul vibrațiilor de răsucire ale arborelui cotit la diverse regimuri de sarcină și turație. Calculele sînt lungi chiar dacă se dispune de un aparat pentru analiza armonică, întrucît, pentru calcularea momentului motor, trebuie trasate diagramele mecanice ale ciclurilor termice, la regimurile de sarcină și turație cercetate.

Există și o altă metodă, mai simplă și suficient de precisă. Se supune analizei armonice momentele motoare ale diverselor categorii de forțe: momentul M_g al forțelor produse de presiunile gazelor din cilindri care acționează cotul, momentul M_i al forțelor de inerție ale pieselor mecanismelor care acționează cotul, și momentul M_G al greutăților pieselor mecanismelor care acționează cotul. Întrucît momentul motor total M al unui cot este suma acestor trei momente, armonica de un ordin oarecare a momentului M se obține prin însumarea vectorială a armonicilor de același ordin ale momentelor M_g, M_i și M_G.

Avantajul celei de-a doua metode constă în faptul că armonicile momentului M_g se pot determina direct din date statistice, stabilite în funcție de tipul motorului și de presiunea medie indicată a ciclului termic [1], iar armonicile momentelor M_i și M_G se pot determina analitic. Ca urmare, armonicile momentului M se calculează imediat, pentru orice regim de sarcină și turație al motorului.

În articol se stabilesc mai întîi formulele pentru calculul coeficienților seriei Fourier a momentului M_i, în cazul motoarelor cu ardere internă prevăzute cu cel mai general tip de mecanism bielă-manivelă. Aceste formule sînt apoi particularizate pentru mecanismele bielă-manivelă folosite în practică. În același mod se stabilesc formulele pentru calculul coeficienților seriei Fourier a momentului M_G. Se presupune că fiecare bielă care acționează cotul, inclusiv biela principală împreună cu masele provenite de la bielele secundare, poate fi înlocuită din punct de vedere dinamic cu două mase concentrate pe axele articulațiilor bielei; în aceste condiții momentul M_i este produs numai de forțele de inerție ale maselor cu mișcare de translație (deoarece forța de inerție a masei concentrată pe axa manetonului nu produce moment față de axa de rotație a arborelui cotit), iar momentul M_G este produs numai de greutățile maselor cu mișcare de rotație și de greutățile maselor cu mișcare de translație. Viteza unghiulară a arborelui cotit este considerată constantă.

2. ANALIZA ARMONICĂ A MOMENTULUI M_i

2.1. ANALIZA ARMONICĂ A MOMENTULUI M_i ÎN CAZUL GENERAL

Cel mai general mecanism bielă-manivelă este mecanismul cu biele articulate dezaxat, la care axele cilindrilor cu biele secundare întîlnesc axa cilindrului cu bielă principală (fig. 1).

Se consideră un motor prevăzut cu astfel de mecanisme bielă-manivelă. Fiecare cot este acționat de q biele, dintre care una este biela principală. Se folosesc următoarele notații pentru mecanismul cu bielă principală și pentru unul din mecanismele cu bielă secundară

R, lungimea manivelei;
L, lungimea bielei principale;
r, lungimea brațului bielei secundare;
l, lungimea bielei secundare;
H, dezaxarea cilindrului cu bielă principală;
H_l, dezaxarea cilindrului cu bielă secundară;
$h = \frac{H}{R}$, coeficientul de dezaxare al cilindrului cu bielă principală;
$h_l = \frac{H_l}{R}$, coeficientul de dezaxare al cilindrului cu bielă secundară;
S_{il}, distanța de la punctul mort interior al piciorului bielei secundare la normala dusă prin punctul O pe axa cilindrului cu bielă secundară;

α, α_l,	unghiuri descrise de manivelă, măsurate față de poziția manivelei paralelă cu axa cilindrului respectiv, conform figurii 1 ;
β,	înclinarea bielei principale față de axa BO_k ;
β_l,	înclinarea bielei secundare față de axa B_lO_k ;
γ,	unghiul dintre axa cilindrului cu bielă principală și axa cilindrului cu bielă secundară, măsurat în sensul de rotație al manivelei ;
δ,	unghiul de calaj al brațului bielei secundare față de biela principală, măsurat în sensul de rotație al manivelei ;
x_{B_l},	deplasarea pistonului acționat de biela secundară ;
v_{B_l},	viteza pistonului acționat de biela secundară ;
j_{B_l},	accelerația pistonului acționat de biela secundară ;
m_{t_l},	masa pieselor care participă la mișcarea pistonului acționat de biela secundară, inclusiv partea din masa bielei secundare concentrată în punctul B_l ;
F_{i_l},	forța de inerție a masei m_{t_l} ;
M_{i_k},	momentul produs de forța F_{i_l} asupra cotului ;
ω,	viteza unghiulară a manivelei.

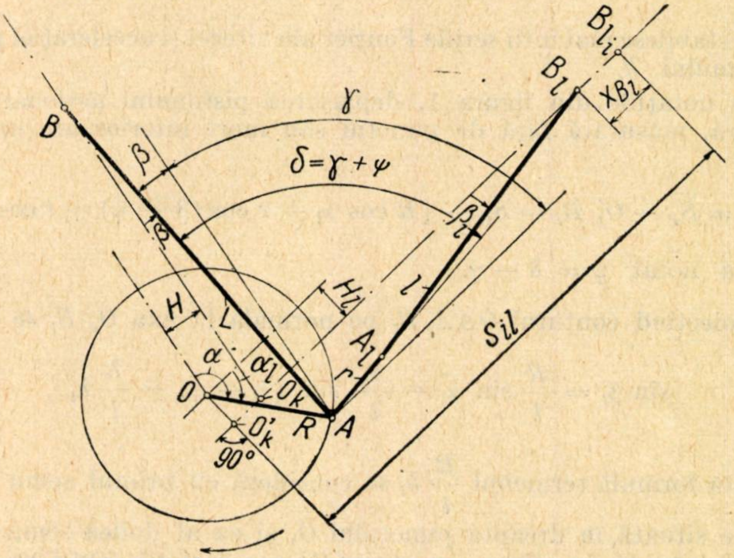


Fig. 1. — Schema mecanismului bielă-manivelă general.

Momentul M_i este suma momentelor M_{i_k} $(k = 1, 2, 3, \ldots, q)$ produse de forțele de inerție ale mecanismelor care acționează cotul

$$M_i = \sum_{k=1}^{k=q} M_{i_k} . \tag{1}$$

Pentru descompunerea în serie Fourier a momentului M_i se descompune în serie Fourier fiecare din momentele M_{i_k} și se însumează vectorial armonicile de același ordin.

Din condiția conservării energiei rezultă pentru mecanismul k, presupus cu bielă secundară

$$M_{i_k}\, d\alpha = F_{i_l}\, dx_{B_l},$$

sau

$$M_{i_k} = F_{t_l} \frac{v_{B_l}}{\omega} \cdot$$

Avînd în vedere expresia forței de inerție F_{i_l}

$$F_{i_l} = - m_{t_l}\, j_{B_l},$$

se obține

$$M_{i_k} = - m_{t_l}\, j_{B_l} \frac{v_{B_l}}{\omega}. \qquad (2)$$

Se stabilesc mai întîi seriile Fourier ale vitezei și accelerației pistonului mecanismului k.

Cu notațiile din figura 1, deplasarea pistonului acționat de biela secundară, măsurată față de punctul său mort interior are următoarea expresie

$$x_{B_l} = S_{il} - O'_k\, B_l = S_{il} - [R \cos \alpha_l + r \cos (\beta - \psi) + l \cos \beta_l], \qquad (3)$$

unde s-a notat $\psi = \delta - \gamma$.

Proiectînd conturul $OAA_l\, B_l$ pe normala la axa $O_k\, B_l$ se obține

$$\sin \beta_l = \frac{R}{l} \sin \alpha_l - \frac{r}{l} \sin (\beta - \psi) \mp \frac{R}{l} h_l. \qquad (4)$$

În această formulă termenul $\frac{R}{l}\, h_l$ se consideră cu primul semn cînd axa $O_k\, B_l$ este situată în dreapta punctului O, și cu al doilea semn cînd axa $O_k\, B_l$ este situată în stînga punctului O; aceste două feluri de dezaxare sînt numite respectiv dezaxare în sensul de rotație și dezaxare în sensul invers sensului de rotație.

Proiectînd conturul OAB pe normala la axa $O_k\, B$ se obține expresia

$$\sin \beta = \lambda\, (\sin \alpha \mp h), \qquad (5)$$

în care s-a notat $\lambda = \frac{R}{L} \cdot$

Din formulele (4) și (5) rezultă după transformări

$$\sin \beta_l = \frac{R}{l}\left(1 - \frac{r}{L}\cos\psi\cos\gamma\right)\sin\alpha_l - \frac{r}{L}\frac{R}{l}\cos\psi\sin\gamma\cos\alpha_l -$$

$$- \frac{r}{l}\left(\pm\frac{h_l R}{r} - \sin\psi\cos\beta \mp \lambda h\cos\psi\right). \tag{6}$$

Cu notațiile

$$\lambda_l \cos\zeta = \frac{R}{l}\left(1 - \frac{r}{L}\cos\psi\cos\gamma\right), \tag{7}$$

$$\lambda_l \sin\zeta = \frac{r}{L}\frac{R}{l}\cos\psi\sin\gamma, \tag{8}$$

$$f_l = \frac{1}{\lambda_l}\frac{r}{l}\left(\pm\frac{h_l R}{r} - \sin\psi\cos\beta \mp \lambda h\cos\psi\right), \tag{9}$$

formula (6) devine

$$\sin\beta_l = \lambda_l\left[\sin(\alpha_l - \zeta) - f_l\right]. \tag{10}$$

Mărimea f_l definită de relația (9) este numită coeficientul de dezaxare echivalent.

Expresiile mărimilor ξ și λ_l se obțin din formulele (7) și (8)

$$\zeta = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{L}\frac{\cos\psi\sin\gamma}{1 - \frac{r}{L}\cos\psi\cos\gamma}, \tag{11}$$

$$\lambda_l = \frac{R}{l}\sqrt{\left(1 - \frac{r}{L}\cos\psi\cos\gamma\right)^2 + \left(\frac{r}{L}\cos\psi\sin\gamma\right)^2}. \tag{12}$$

Din (5) și (10) se deduc expresiile

$$\cos\beta = \left[1 - \lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

$$\cos\beta_l = \left\{1 - \lambda_l^2\left[\sin(\alpha_l - \zeta) - f_l\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Se dezvoltă relația (13) după formula binomului

$$\cos\beta = \lambda\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\frac{1}{2}}{j}\lambda^{2j-1}(\sin\alpha \mp \mathrm{h})^{2j}.$$

sau

$$\cos\beta = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \sum_{s=0}^{s=2j} (\mp 1)^s \binom{2j}{s} h^s \sin^{2j-s}\alpha .$$

Se pune în evidență termenul pentru $s = 2j$

$$\cos\beta = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} +$$

$$+ \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \sum_{s=0}^{s=2j-1} (\mp 1)^s \binom{2j}{s} h^s \sin^{2j-s}\alpha .$$

Prin separarea termenilor care conțin puterile impare ale lui $\sin\alpha$ de termenii care conțin puterile pare ale lui $\sin\alpha$ se obține expresia

$$\cos\beta = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} +$$

$$+ \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \sum_{m=j}^{m=1} \mp \binom{2j}{2j-2m+1} h^{2j-2m+1} \sin^{2m-1}\alpha +$$

$$+ \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \sum_{m=j}^{m=1} \binom{2j}{2j-2m} h^{2j-2m} \sin^{2m}\alpha .$$

După gruparea sumelor rezultă

$$\cos\beta = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} +$$

$$+ \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \sin^{2m-1}\alpha \sum_{j=m}^{\infty} \mp (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2m+1} \lambda^{2j-1} h^{2j-2m+1} +$$

$$+ \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \sin^{2m}\alpha \sum_{j=m}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2m} \lambda^{2j-1} h^{2j-2m} .$$

Folosind formulele cunoscute

$$\sin^{2m-1}\alpha = \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} (-1)^{\nu-1} \binom{2m-1}{m-\nu} \sin(2\nu-1)\alpha ,$$

$$\sin^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} (-1)^{\nu} \binom{2m}{m-\nu} \cos 2\nu\alpha + \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} ,$$

se obține

$$\begin{aligned}\cos\beta = {} & \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} + \\ & + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \sum_{j=m}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2m} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2m} + \\ & + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} (-1)^{\nu-1} \binom{2m-1}{m-\nu} \sin(2\nu-1)\alpha \times \\ & \times \sum_{j=m}^{\infty} \mp (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2m+1} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2m+1} + \\ & + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^{\nu=m} (-1)^{\nu} \binom{2m}{m-\nu} \cos 2\nu\alpha \sum_{j=m}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \times \\ & \times \binom{2j}{2j-2m} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2m} = X + Y + Z. \end{aligned} \tag{15}$$

În expresia

$$\begin{aligned} X = {} & \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} + \\ & + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \sum_{j=m}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2m} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2m}, \end{aligned}$$

se pune în evidență limita $j = 0$ pentru primul termen și limita $j = m$ pentru al doilea termen

$$\begin{aligned} X = {} & 1 + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{1}{2}}{m} \binom{2m}{m} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m-1} + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j} + \\ & + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \sum_{j=m+1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \binom{2j}{2j-2m} \lambda^{2j-1} \cdot h^{2j-2m}. \end{aligned} \tag{16}$$

Se observă că prima sumă are valoarea 1 pentru $m = 0$. Cu notația

$$A_0 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{1}{2}}{m} \binom{2m}{m} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m-1}, \tag{17}$$

se poate scrie

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{1}{2}}{m} \binom{2m}{m} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m-1} = \\ & = \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{1}{2}}{m} \binom{2m}{m} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m-1} = 1 - \lambda A_0. \end{aligned}$$

Notînd $j - m = u$ în ultima sumă din (16) se deduce

$$X = 1 - \lambda A_0 + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\frac{1}{2}}{j} \lambda^{2j-1} h^{2j} +$$

$$+ \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^{m+u} \binom{\frac{1}{2}}{m+u} \binom{2m+2u}{2u} \lambda^{2m+2u-1} h^{2u}.$$

Ținînd seama de egalitatea

$$\binom{2m+2u}{2u} = \binom{2m+2u}{2m}, \tag{18}$$

și grupînd sumele din ultimul termen, se obține

$$X = 1 - \lambda A_0^*, \tag{19}$$

unde s-a notat

$$A_0^* = A_0 - \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \binom{\frac{1}{2}}{u} \lambda^{2u} \cdot h^{2u} \left[\frac{1}{\lambda} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\binom{\frac{1}{2}}{u}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{2m}{m} \binom{\frac{1}{2}}{m+u} \binom{2m+2u}{2m} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m-1} \right]. \tag{20}$$

În mod analog se procedează cu expresia Y din formula (15). Folosind egalitatea

$$\binom{2j}{2j-2m+1} = \binom{2j}{2m-1},$$

grupînd primele două sume, și notînd $j - m = u$ în a treia sumă, expresia Y ia forma

$$Y = \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \sin (2\nu - 1)\alpha \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{-1}{2^{2m-2}} \binom{2m-1}{m-\nu}.$$

$$\times \sum_{u=0}^{\infty} \mp (-1)^{m+u} \binom{\frac{1}{2}}{m+u} \binom{2m+2u}{2m-1} \lambda^{2m+2u-1} \cdot h^{2u+1}.$$

Grupînd ultimele două sume și folosind notația

$$A_{2\nu-1}^* = \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^{u+1} \lambda^{2u+1} \cdot h^{2u+1} \sum_{m=\nu}^{\infty} (-1)^m \binom{2m-1}{m-\nu} \binom{\frac{1}{2}}{m+u} \binom{2m+2u}{2m-1} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m-2} \tag{21}$$

rezultă

$$Y = -\lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \pm (-1)^{\nu} A_{2\nu-1}^* \sin (2\nu - 1)\alpha. \tag{22}$$

Grupînd primele două sume, folosind în a treia sumă notația $j - m = u$, și ținînd seama de egalitatea (13), expresia Z devine

$$Z = \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \cos 2\nu\alpha \sum_{m=\nu}^{\infty} \frac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m-\nu} \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^{m+u} \binom{\frac{1}{2}}{m+u} \times$$

$$\times \binom{2m+2u}{2m} \lambda^{2m+2u-1} \cdot h^{2u}.$$

Prin gruparea ultimelor două sume se obține

$$Z = -\lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} A_{2\nu}^{*} \cos 2\nu\alpha, \tag{23}$$

unde s-a notat

$$A_{2\nu} = \sum_{m=\nu}^{\infty} (-1)^{m+1} \binom{2m}{m-\nu} \binom{\frac{1}{2}}{m} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m-1}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} A_{2\nu}^{*} = A_{2\nu} - \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^{u} \lambda^{2u} h^{2u} \sum_{m=\nu}^{\infty} (-1)^{m} \binom{2m}{m-\nu} \binom{\frac{1}{2}}{m+u} \times \\ \times \binom{2m+2u}{2m} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m-1}. \end{aligned} \tag{25}$$

Prin înlocuirea expresiilor (19), (22) și (23) în formula (15) rezultă seria Fourier

$$\cos\beta = 1 - \lambda A_0^{*} - \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \pm (-1)^{\nu} A_{2\nu-1}^{*} \sin(2\nu-1)\alpha - \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} A_{2\nu}^{*} \cos 2\nu\alpha. \tag{26}$$

În formula (26), pentru termenii care au două semne se consideră primul semn cînd cilindrul cu bielă principală este dezaxat în sensul de rotație, și al doilea semn cînd cilindrul cu bielă principală este dezaxat în sensul invers sensului de rotație; în aceste condiții coeficienții A^{*} se calculează considerînd totdeauna coeficientul de dezaxare h ca o mărime pozitivă.

Din compararea formulelor (13) și (14) se constată că formula (14) se deduce din formula (13) prin înlocuirile

$$\beta \rightarrow \beta_l, \ \lambda \rightarrow \lambda_l, \ \alpha \rightarrow \alpha_l - \xi \mp h \rightarrow -f_l. \tag{27}$$

Coeficientul de dezaxare echivalent f_l este variabil. Întrucît unghiul β are valori mici, se poate înlocui $\cos\beta$ din formula (9) cu valoarea sa medie dedusă din (26); în acest caz expresia coeficientului f_l devine

$$f_l \approx \frac{1}{\lambda_l} \frac{r}{l} \left[\pm \frac{h_l R}{r} - (1 - \lambda A_0^{*}) \sin\psi \mp \lambda h \cos\psi \right]. \tag{28}$$

Considerînd pentru coeficientul f_l valoarea constantă din (28), seria Fourier a funcțiunii $\cos \beta_l$ se obține înlocuind condițiile (27) în seria (26)

$$\cos \beta_l = 1 - \lambda_l a_0^* - \lambda_l \sum_{\nu=1}^{\infty} \pm (-1)^{\nu} a_{2\nu-1}^* \sin (2\nu - 1)(\alpha_l - \xi) - \\ - \lambda_l \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{2\nu}^* \cos 2\nu (\alpha_l - \xi). \tag{29}$$

Deoarece coeficientul de dezaxare echivalent poate fi pozitiv sau negativ înaintea termenilor din seria (29) care au două semne trebuie păstrat primul sau al doilea semn, după cum f_l rezultă din formula (28) pozitiv sau negativ. Expresiile coeficienților a^* se obțin din expresiile coeficienților A^* prin înlocuirile $\lambda \rightarrow \lambda_l$ și $h \rightarrow |f_l|$.

Din expresia coeficientului $a_{2\nu-1}^*$

$$a_{2\nu-1}^* = \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^{u+1} \lambda_l^{2u+1} f_l^{2u+1} \sum_{m=\nu}^{\infty} (-1)^m \binom{2m-1}{m-\nu} \binom{\frac{1}{2}}{m+u} \times \\ \times \binom{2m+2u}{2m-1} \left(\frac{\lambda_l}{2}\right)^{2m-2},$$

se constată că semnul se schimbă o dată cu semnul coeficientului f_l. Dacă la calculul acestui coeficient se consideră semnul care rezultă din formula (28), seria (29) poate fi scrisă sub forma

$$\cos \beta_l = 1 - \lambda_l a_0^* - \lambda_l \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{2\nu-1}^* \sin (2\nu - 1)(\alpha_l - \xi) - \\ - \lambda_l \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{2\nu}^* \cos 2\nu (\alpha_l - \xi). \tag{30}$$

Înlocuind în formula

$$\cos (\beta - \psi) = \cos \psi \cos \beta + \sin \psi \sin \beta,$$

pe $\sin \beta$ din (5) și $\cos \beta$ din (26) se obține

$$\cos (\beta - \psi) = (1 - \lambda A_0^*) \cos \psi \mp \lambda h \sin \psi - \\ - \lambda \cos \psi \sum_{\nu=1}^{\infty} \pm (-1)^{\nu} A_{2\nu-1}^* \sin (2\nu - 1)\alpha + \\ + \lambda \sin \psi \sin \alpha - \lambda \cos \psi \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} A_{2\nu}^* \cos 2\nu\alpha. \tag{31}$$

Efectuînd în formula (30) înlocuirea $\alpha_l = \alpha - \gamma$ se deduce expresia

$$\begin{aligned}\cos \beta_l = 1 - \lambda_l a_0^* - \lambda_l \Bigg[& \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu a_{2\nu-1}^* \cos (2\nu - 1)(\gamma + \xi) \sin (2\nu - 1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu a_{2\nu}^* \sin 2\nu (\gamma + \xi) \sin 2\nu\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} a_{2\nu+1}^* \sin (2\nu + 1)(\gamma + \xi) \cos (2\nu - 1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu a_{2\nu}^* \cos 2\nu (\gamma + \xi) \cos 2\nu\alpha \Bigg]. \end{aligned} \tag{32}$$

Înlocuind expresiile (30) și (31) în formula (3) rezultă după gruparea termenilor

$$\begin{aligned} x_{B_l} = {} & S_{il} - r\,[(1 - \lambda A_0^*) \cos \psi \mp \lambda h \sin \psi] - l(1 - \lambda_l a_0^*) - \\ & - R \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (D_\nu^* \sin \nu\alpha - E_\nu^* \cos \nu\alpha), \end{aligned} \tag{33}$$

unde s-a notat

$$\left.\begin{aligned} D_1^* &= \sin \gamma + \frac{l}{R} \lambda_l a_1^* \cos (\gamma + \xi) + \frac{r}{L} (\pm A_1^* \cos \psi + \sin \psi), \\ D_{2\nu}^* &= (-1)^{\nu+1} 2\nu \frac{l}{R} \lambda_l a_{2\nu}^* \sin 2\nu (\gamma + \xi), \\ D_{2\nu+1}^* &= (-1)^\nu (2\nu+1) \left[\frac{l}{R} \lambda_l a_{2\nu+1}^* \cos (2\nu+1)(\gamma + \xi) \pm \frac{r}{L} A_{2\nu+1}^* \cos \psi \right], \\ E_1^* &= \frac{l}{R} \lambda_l a_1^* \sin (\gamma + \xi) - \cos\gamma, \\ E_{2\nu}^* &= (-1)^\nu 2\nu \left[\frac{l}{R} \lambda_l a_{2\nu}^* \cos 2\nu (\gamma + \xi) + \frac{r}{L} A_{2\nu}^* \cos \psi \right], \\ E_{2\nu+1}^* &= (-1)^\nu (2\nu + 1) \frac{l}{R} \lambda_l a_{2\nu+1}^* \sin (2\nu + 1)(\gamma + \xi). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Prin derivarea formulei (33) în raport cu timpul se obține seria Fourier a vitezei pistonului

$$v_{B_l} = - R\omega \sum_{\nu=1}^{\infty} (D_\nu^* \cos \nu\alpha + E_\nu^* \sin \nu\alpha). \tag{35}$$

O nouă derivare în raport cu timpul dă seria Fourier a accelerației pistonului

$$j_{B_l} = R\omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (F_\nu^* \cos \nu\alpha + J_\nu^* \sin \nu\alpha), \tag{36}$$

relație în care s-a notat

$$\begin{aligned} F_\nu^* &= -\nu E_\nu^*, \\ J_\nu^* &= \nu D_\nu^*. \end{aligned} \tag{37}$$

Înlocuind expresiile (35) și (36) în formula (2) se obține

$$M_{i_k} = m_{i_l} R^2 \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (D_\nu^* \cos \nu\alpha + E_\nu^* \sin \nu\alpha) \sum_{\nu=1}^{\infty} (F_\nu^* \cos \nu\alpha + J_\nu^* \sin \nu\alpha).$$

Aplicînd formula de înmulțire a seriilor Fourier rezultă

$$\begin{aligned} M_{i_k} = \frac{1}{2} m_{i_l} R^2 \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \Bigg\{ \Bigg[\Bigg\{ \sum_{s=1}^{\infty} [D_s^* (F_{s+\nu}^* + F_{s-\nu}^*) + \\ + E_s^* (J_{s+\nu}^* + J_{s-\nu}^*)] \Bigg\} \cos \nu\alpha + \\ + \Bigg\{ \sum_{s=1}^{\infty} [D_s^* (J_{s+\nu}^* - J_{s-\nu}^*) - E_s^* (F_{s+\nu}^* - F_{s-\nu}^*)] \Bigg\} \sin \nu\alpha \Bigg] \Bigg\}, \end{aligned} \tag{38}$$

în care s-a considerat

$$\left.\begin{aligned} F_{-u}^* &= F_u^*, \\ J_{-u}^* &= -J_u^*. \end{aligned}\right| \tag{39}$$

Se dezvoltă formula (38) avînd în vedere condițiile (39) și faptul că toți coeficienții cu indice zero sînt nuli

$$\begin{aligned} M_{i_k} = \frac{1}{2} m_{t_l} R^2 \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \Bigg\{ \Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} (D_s^* F_{s+\nu}^* + E_s^* J_{s+\nu}^*) + \\ + \sum_{s=\nu+1}^{\infty} (D_s^* F_{s-\nu}^* + E_s^* J_{s-\nu}^*) + \\ + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D_s^* F_{\nu-s}^* - E_s^* J_{\nu-s}^*) \Bigg] \cos \nu\alpha + \\ + \Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} (D_s^* J_{s+\nu}^* - E_s^* F_{s+\nu}^*) - \sum_{s=\nu+1}^{\infty} (D_s^* J_{s-\nu}^* - E_s^* F_{s-\nu}^*) + \\ + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D_s^* J_{\nu-s}^* + E_s^* F_{\nu-s}^*) \Bigg] \sin \nu\alpha \Bigg\}. \end{aligned} \tag{40}$$

În a doua sumă din această formulă se înlocuieşte $s = u + \nu$

$$\sum_{s=\nu+1}^{\infty} (D_s^* F_{s-\nu}^* + E_s^* J_{s-\nu}^*) = \sum_{u=1}^{\infty} (D_{\nu+u}^* F_u^* + E_{\nu+u}^* J_u^*). \tag{41}$$

La fel se transformă a cincea sumă

$$\sum_{s=\nu+1}^{\infty} (D_s^* J_{s-\nu}^* - E_s^* F_{s-\nu}^*) = \sum_{u=1}^{\infty} (D_{\nu+u}^* J_u^* - E_{\nu+u}^* F_u^*). \tag{42}$$

Efectuînd în (41) şi (42) schimbarea de notaţie $u \to s$ şi înlocuind în (40) se obţine

$$\begin{aligned} M_{i_k} = \frac{1}{2} m_{t_l} R^2 \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \Bigg\{ \Bigg[& \sum_{s=1}^{\infty} (D_s^* F_{\nu+s}^* + E_s^* J_{\nu+s}^* + D_{\nu+s}^* F_s^* + E_{\nu+s}^* J_s^*) + \\ & + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D_s^* F_{\nu-s}^* - E_s^* J_{\nu-s}^*) \Bigg] \cos \nu\alpha + \\ & + \Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} (D_s^* J_{\nu+s}^* - E_s^* F_{\nu+s}^* - D_{\nu+s}^* J_s^* + E_{\nu+s}^* F_s^*) + \\ & + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D_s^* J_{\nu-s}^* + E_s^* F_{\nu-s}^*) \Bigg] \sin \nu\alpha \Bigg\}. \end{aligned}$$

Se elimină coeficienţii F^* şi J^* cu ajutorul egalităţilor (37)

$$\begin{aligned} M_{i_k} = \frac{1}{2} m_{t_l} R^2 \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \Bigg\{ \Bigg[& \sum_{s=1}^{\infty} \nu (- D_s^* E_{\nu+s}^* + D_{\nu+s}^* E_s^*) - \\ & - \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (\nu - s)(D_s^* E_{\nu-s}^* + D_{\nu-s}^* E_s^*) \Bigg] \cos \nu\alpha + \\ & + \Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} \nu (D_s^* D_{\nu+s}^* + E_s^* E_{\nu+s}^*) + \\ & + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (\nu - s)(D_s^* D_{\nu-s}^* - E_s^* E_{\nu-s}^*) \Bigg] \sin \nu\alpha \Bigg\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} m_{t_l} R^2 \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} [(S_1 - S_2) \cos \nu\alpha + (S_3 + S_4) \sin \nu\alpha]. \tag{43}$$

Se separă termenii din suma S_2

$$S_2 = \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (\nu - s) D_s^* E_{\nu-s}^* + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (\nu - s) D_{\nu-s}^* E_s^* = S_2' + S_2''.$$

În suma S_2'' se înlocuiește $s = \nu - u$

$$S_2'' = \sum_{u=\nu-1}^{u=1} u\, D_u^* \, E_{\nu-u}^* .$$

Efectuînd schimbarea de notație $u \to s$ se deduce

$$S_2 = \nu \sum_{s=1}^{s=\nu-1} D_s^* \, E_{\nu-s}^* . \tag{44}$$

Se separă termenii din suma S_4

$$S_4 = \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (\nu - s)\, D_s^* \, D_{\nu-s}^* - \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (\nu - s)\, E_s^* \, E_{\nu-s}^* = S_4' - S_4'' . \tag{45}$$

Pentru ν impar suma S_4' se poate scrie sub forma

$$S_4' = \sum_{s=1}^{s=\frac{\nu-1}{2}} (\nu - s)\, D_s^* \, D_{\nu-s}^* + \sum_{s=\frac{\nu+1}{2}}^{s=\nu-1} (\nu - s)\, D_s^* \, D_{\nu-s}^* = \sigma' + \sigma'' .$$

În suma σ'' se face înlocuirea $s = \nu - u$

$$\sigma'' = \sum_{u=\frac{\nu-1}{2}}^{u=1} u D_{\nu-u}^* \, D_u^* .$$

Efectuînd schimbarea de notație $u \to s$ și înlocuind egalitatea precedentă se deduce

$$S_4' = \nu \sum_{s=1}^{s=\frac{\nu-1}{2}} D_s^* \, D_{\nu-s}^* . \tag{46}$$

Procedînd la fel pentru ν par se obține

$$S_4' = \nu \sum_{s=1}^{s=\frac{\nu}{2}-1} D_s^* \, D_{\nu-s}^* + \frac{\nu}{2} D_{\frac{\nu}{2}}^{*2} . \tag{47}$$

Din compararea expresiilor (46) și (47) se constată că se poate scrie pentru ambele cazuri

$$S_4' = \nu \sum_{\substack{s=1,2,3,\ldots;\\ s<\frac{\nu}{2}}} D_s^* \, D_{\nu-s}^* + \frac{\nu}{2} D_{\frac{\nu}{2}}^{*2} , \tag{48}$$

unde $D_{\frac{\nu}{2}}^*$ se consideră numai dacă $\frac{\nu}{2}$ este un număr întreg, deci pentru ν par.

Operînd la fel suma S_4'' se obține expresia

$$S_4'' = \nu \sum_{\substack{s=1,2,3,\ldots;\\ s<\frac{\nu}{2}}} E_s^* E_{\nu-s}^* + \frac{\nu}{2} E_{\frac{\nu}{2}}^{*2}, \tag{49}$$

unde $E_{\frac{\nu}{2}}^*$ se consideră numai dacă $\frac{\nu}{2}$ este un număr întreg.

Înlocuind expresiile (48) și (49) în (45) se obține

$$S_4 = \nu \sum_{\substack{s=1,2,3,\ldots;\\ s<\frac{\nu}{2}}} (D_s^* D_{\nu-s}^* - E_s^* E_{\nu-s}^*) + \frac{\nu}{2} (D_{\frac{\nu}{2}}^{*2} - E_{\frac{\nu}{2}}^{*2}). \tag{50}$$

Din (43), (44) și (50) rezultă seria

$$\begin{aligned} M_{i_k} = \frac{1}{2} m_{t_l} R^2 \omega^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \Biggl\{ \Biggl[\sum_{s=1}^{\infty} (-D_s^* E_{\nu+s}^* + D_{\nu+s}^* E_s^*) - \\ - \sum_{s=1}^{s=\nu-1} D_s^* E_{\nu-s}^* \Biggr] \cos \nu\alpha + \\ + \Biggl[\sum_{s=1}^{\infty} (D_s^* D_{\nu+s}^* + E_s^* E_{\nu+s}^*) + \sum_{\substack{s=1,2,3,\ldots;\\ s<\frac{\nu}{2}}} (D_s^* D_{\nu-s}^* - E_s^* E_{\nu-s}^*) + \\ + \frac{1}{2} (D_{\frac{\nu}{2}}^{*2} - E_{\frac{\nu}{2}}^{*2}) \Biggr] \sin \nu\alpha \Biggr\}. \end{aligned} \tag{51}$$

2.2. CAZUL MECANISMULUI CU BIELE SECUNDARE DEZAXAT CU AXELE CILINDRILOR PARALELE

Deoarece axele cilindrilor sînt paralele rezultă $\gamma = 0$; din formula (11) se deduce $\xi = 0$. Înlocuind aceste condiții în (34) se obține

$$D_{2\nu}^* = 0, \qquad E_1^* = -1, \qquad E_{2\nu+1}^* = 0, \tag{52}$$

și

$$\left.\begin{aligned} D_1^* &= \frac{l}{R} \lambda_l a_1^* + \frac{r}{L} (\pm A_1^* \cos \psi + \sin \psi), \\ D_{2\nu+1}^* &= (-1)^\nu (2\nu + 1) \left(\frac{l}{R} \lambda_l a_{2\nu+1}^* \pm \frac{r}{L} A_{2\nu+1}^* \cos \psi \right), \\ E_{2\nu}^* &= (-1)^\nu 2\nu \left(\frac{l}{R} \lambda_l a_{2\nu}^* + \frac{r}{L} A_{2\nu}^* \cos \psi \right). \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Seria Fourier a momentului M_{i_k} se obține prin introducerea condițiilor (52) în formula (51). În acest scop se pun în evidență în formula (51) termenii pentru ν și s impar și par; avem

$$M_{i_k} = \frac{1}{2} m_{t_l} R^2 \omega^2 \left(T_1 - T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \right). \tag{54}$$

Termenul T_1 devine pentru ν și s impar și par

$$\begin{aligned} T_1 = {} & \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) \Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} \big(- D^*_{2s-1} E^*_{2\nu+2s-2} + D^*_{2\nu+2s-2} E^*_{2s-1} - \\ & - D^*_{2s} E^*_{2\nu+2s-1} + D^*_{2\nu+2s-1} E^*_{2s} \big) \Bigg] \cos (2\nu - 1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu \Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} \big(- D^*_{2s-1} E^*_{2\nu+2s-1} + D^*_{2\nu+2s-1} E^*_{2s-1} - \\ & - D^*_{2s} E^*_{2\nu+2s} + D^*_{2\nu+2s} E^*_{2s} \big) \Bigg] \cos 2\nu\,\alpha. \end{aligned} \tag{55}$$

Pentru ν impar și par termenul T_2 are expresia

$$\begin{aligned} T_2 = {} & \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) \left(\sum_{s=1}^{s=2\nu-2} D^*_s E^*_{2\nu-s-1} \right) \cos (2\nu - 1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu \left(\sum_{s=1}^{s=2\nu-1} D^*_s E^*_{2\nu-s} \right) \cos 2\nu\,\alpha. \end{aligned}$$

Se scrie T_2 pentru s impar și par. Numărul termenilor din coeficientul cosinusurilor impare este totdeauna par, deci numărul termenilor care conțin pe D^* cu indice impar sau indice par este $\nu - 1$. Numărul termenilor din coeficientul cosinusurilor pare este totdeauna impar, deci numărul termenilor care conțin pe D^* cu indice impar este cu o unitate mai mare decît numărul termenilor care conțin pe D^* cu indice par. Expresia lui T_2 devine

$$\begin{aligned} T_2 = {} & \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) \left[\sum_{s=1}^{s=\nu-1} \left(D^*_{2s-1} E^*_{2\nu-2s} + D^*_{2s} E^*_{2\nu-2s-1} \right) \right] \cos (2\nu - 1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu \left[\sum_{s=1}^{s=\nu} D^*_{2s-1} E^*_{2\nu-2s+1} + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} D^*_{2s} E^*_{2\nu-2s} \right] \cos 2\,\nu\alpha. \end{aligned} \tag{56}$$

Termenul T_3 se dezvoltă la fel ca T_1. Punînd în evidență sinusurile pare nemultiplu și multiplu de patru se obține

$$T_3 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1)\Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s-1} D^*_{2\nu+2s-2} + E^*_{2s-1} E_{2\nu+2s-2} +$$

$$+ D^*_{2s} D^*_{2\nu+2s-1} + E^*_{2s} E^*_{2\nu+2s-1})\Bigg] \sin (2\nu - 1)\alpha +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} 2(2\nu - 1)\Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s-1} D^*_{4\nu+2s-3} + E^*_{2s-1} E^*_{4\nu+2s-3} +$$

$$+ D^*_{2s} D^*_{4\nu+2s-2} + E^*_{2s} E^*_{4\nu+2s-2})\Bigg] \sin 2(2\nu - 1)\alpha +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} 4\nu\Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s-1} D^*_{4\nu+2s-1} + E^*_{2s-1} E^*_{4\nu+2s-1} +$$

$$+ D^*_{2s} D^*_{4\nu+2s} + E^*_{2s} E^*_{4\nu+2s})\Bigg] \sin 4\nu\alpha. \qquad (57)$$

Se dezvoltă termenul T_4 pentru ν impar și par. Deoarece condiția $s < \frac{\nu}{2}$ devine pentru sinusurile impare $s < \frac{2\nu - 1}{2}$, sau $s < \nu - \frac{1}{2}$, deci $s \leqslant \nu - 1$ (deoarece s și ν sînt numere întregi), iar pentru sinusurile pare $s < \frac{2\nu}{2}$, deci $s \leqslant \nu - 1$, expresia termenului T_4 ia forma

$$T_4 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1)\Bigg[\sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D^*_s D^*_{2\nu-s-1} - E^*_s E^*_{2\nu-s-1})\Bigg] \sin (2\nu - 1)\alpha +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu\Bigg[\sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D^*_s D^*_{2\nu-s} - E^*_s E^*_{2\nu-s})\Bigg] \sin 2\nu\alpha. \qquad (58)$$

Pentru punerea în evidență a termenilor cu s impar și par se observă următoarele

— dacă ν din (58) este impar, numărul termenilor din fiecare sumă este par, deci numărul termenilor care conțin pe D^*_s sau E^*_s cu s impar sau cu s par este $\frac{\nu - 1}{2}$;

— dacă ν din (58) este par, numărul termenilor din fiecare sumă este impar; numărul termenilor care conțin pe D_s^* sau E_s^* cu s impar este deci cu o unitate mai mare decît numărul termenilor care conțin pe D_s^* sau E_s^* cu s par, adică $\frac{\nu}{2}$ față de $\frac{\nu}{2} - 1$.

Întrucît s este un număr întreg se constată că ambele cazuri pot fi exprimate prin următoarele condiții: numărul termenilor care conțin pe D_s^* sau E_s^* cu s impar este $\leqslant \frac{\nu}{2}$, iar numărul termenilor care conțin pe D_s^* sau E_s^* cu s par este $< \frac{\nu}{2}$.

Avînd în vedere aceste observații se obține expresia

$$\begin{aligned} T_4 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) \Bigg[& \sum_{\substack{s=1,2,3,\ldots;\\ s \leqslant \frac{\nu}{2}}} (D_{2s-1}^* D_{2\nu-2s}^* - E_{2s-1}^* E_{2\nu-2s}^*) + \\ & + \sum_{\substack{s=1,2,3,\ldots;\\ s < \frac{\nu}{2}}} (D_{2s}^* D_{2\nu-2s-1}^* - E_{2s}^* E_{2\nu-2s-1}^*) \Bigg] \sin (2\nu - 1)\alpha + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2(2\nu - 1) \Bigg[& \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D_{2s-1}^* D_{4\nu-2s-1}^* - E_{2s-1}^* E_{4\nu-2s-1}^*) + \\ & + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D_{2s}^* D_{4\nu-2s-2}^* - E_{2s}^* E_{4\nu-2s-2}^*) \Bigg] \sin 2(2\nu - 1)\alpha + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} 4\nu \Bigg[& \sum_{s=1}^{s=\nu} (D_{2s-1}^* D_{4\nu-2s+1}^* - E_{2s-1}^* E_{4\nu-2s+1}^*) + \\ & + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D_{2s}^* D_{4\nu-2s}^* - E_{2s}^* E_{4\nu-2s}^*) \Bigg] \sin 4\nu\alpha. \end{aligned} \tag{59}$$

În termenul T_5, care există numai pentru ν par, se pun în evidență sinusurile pare nemultiplu și multiplu de patru

$$\begin{aligned} T_5 = & \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1)(D_{2\nu-1}^{*2} - E_{2\nu-1}^{*2}) \sin 2(2\nu - 1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu (D_{2\nu}^{*2} - E_{2\nu}^{*2}) \sin 4\nu\alpha. \end{aligned} \tag{60}$$

Înlocuind în (54) expresiile (55), (56), (57), (59) şi (60) rezultă

$$
\begin{aligned}
M_{i_k} = \frac{1}{2} m_{t_l} R^2 \omega^2 \Biggl\{ & \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) \Biggl[\sum_{s=1}^{\infty} (-D^*_{2s-1} E^*_{2\nu+2s-2} + D^*_{2\nu+2s-2} E^*_{2s}\,{}_{11} - \\
& - D^*_{2s} E^*_{2\nu+2s-1} + D^*_{2\nu+2s-1} E^*_{2s}) - \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D^*_{2s-1} E^*_{2\nu-2s} + \\
& + D^*_{2s} E^*_{2\nu-2s-1}) \Biggr] \cos (2\nu - 1)\alpha + \\
& + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu \Biggl[\sum_{s=1}^{\infty} (-D^*_{2s-1} E^*_{2\nu+2s-1} + D^*_{2\nu+2s-1} E^*_{2s-1} - \\
& - D^*_{2s} E^*_{2\nu+2s} + D^*_{2\nu+2s} E^*_{2s}) - \\
& - \sum_{s=1}^{s=\nu} D^*_{2s-1} E^*_{2\nu-2s+1} - \sum_{s=1}^{s=\nu-1} D^*_{2s} E^*_{2\nu-2s} \Biggr] \cos 2\nu\alpha + \\
& + \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) \Biggl[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s-1} D^*_{2\nu+2s-2} + E^*_{2s-1} E^*_{2\nu+2s-2} + \\
& + D^*_{2s} D^*_{2\nu+2s-1} + E^*_{2s} E^*_{2\nu+2s-1}) + \\
& + \sum_{\substack{s=1,2,3,\ldots; \\ s \leqslant \frac{\nu}{2}}} (D^*_{2s-1} D^*_{2\nu-2s} - E^*_{2s-1} E^*_{2\nu-2s}) + \sum_{\substack{s=1,2,3,\ldots; \\ s < \frac{\nu}{s}}} (D^*_{2s} D^*_{2\nu-2s-1} - \\
& - E^*_{2s} E^*_{2\nu-2s-1}) \Biggr] \sin (2\nu - 1)\alpha + \\
& + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2(2\nu - 1) \Biggl[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s-1} D^*_{4\nu+2s-3} + E^*_{2s-1} E^*_{4\nu+2s-3} + \\
& + D^*_{2s} D^*_{4\nu+2s-2} + E^*_{2s} E^*_{4\nu+2s-2}) + \\
& + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D^*_{2s-1} D^*_{4\nu-2s-1} - E^*_{2s-1} E^*_{4\nu-2s-1} + D^*_{2s} D^*_{4\nu-2s-2} - E^*_{2s} E^*_{4\nu-2s-2}) + \\
& + \frac{1}{2} (D^{*2}_{2\nu-1} - E^{*2}_{2\nu-1}) \Biggr] \sin 2(2\nu - 1)\alpha + \\
& + \sum_{\nu=1}^{\infty} 4\nu \Biggl[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s-1} D^*_{4\nu+2s-1} + E^*_{2s-1} E^*_{4\nu+2s-1} + D^*_{2s} D^*_{4\nu+2s} + E^*_{2s} E^*_{4\nu+2s}) + \\
& + \sum_{s=1}^{s=\nu} (D^*_{2s-1} D^*_{4\nu-2s+1} - E^*_{2s-1} E^*_{4\nu-2s+1}) + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D^*_{2s} D^*_{4\nu-2s} - \\
& - E^*_{2s} E^*_{4\nu-2s}) + \frac{1}{2} (D^*_{2\nu} - E^{*2}_{2\nu}) \Biggr] \sin 4\nu\alpha \Biggr\}. \qquad (61)
\end{aligned}
$$

Pentru stabilirea seriei Fourier în cazul cercetat se înlocuiesc condițiile (52) în formula (61). Datorită condiției $E^*_{2\nu+1} = 0$ unele sume se reduc la un singur termen; de exemplu suma $\sigma = \sum\limits_{s=1}^{\infty} D^*_{2\nu+2s-1} E^*_{2s-1}$ nu este nulă numai cînd $2s - 1 = 1$, adică pentru $s = 1$, deci $\sigma = -D^*_{2\nu+1}$, deoarece $E^*_1 = -1$.

Efectuînd înlocuirile în formula (61) se obține seria

$$\begin{aligned} M_{i_k} = \frac{1}{2} m_{t_l} R^2 \omega^2 \Bigg\{ & \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) \Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} (-D^*_{2s-1} E^*_{2\nu+2s-2} + D^*_{2\nu+2s-1} E^*_{2s}) - \\ & - \sum_{s=1}^{s=\nu-1} D^*_{2s-1} E^*_{2\nu-2s} \Bigg] \cos (2\nu - 1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu (D^*_{2\nu-1} - D^*_{2\nu+1}) \cos 2\nu\alpha + \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1)(E^*_{2\nu-2} - \\ & - E^*_{2\nu}) \sin (2\nu - 1)\alpha + \\ & + \Bigg[2 \sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s-1} D^*_{2s+1} + E^*_{2s} E^*_{2s+2}) + D^{*2}_1 - 1 \Bigg] \sin 2\alpha + \\ & + \sum_{\nu=2}^{\infty} 2(2\nu - 1) \Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s-1} D^*_{4\nu+2s-3} + E^*_{2s} E^*_{4\nu+2s-2}) + \\ & + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D^*_{2s-1} D^*_{4\nu-2s-1} - E^*_{2s} E^*_{4\nu-2s-2}) + \frac{1}{2} D^{*2}_{2\nu-1} \Bigg] \sin 2(2\nu - 1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} 4\nu \Bigg[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s-1} D^*_{4\nu+2s-1} + E^*_{2s} E^*_{4\nu+2s}) + \\ & + \sum_{s=1}^{s=\nu} D^*_{2s-1} D^*_{4\nu-2s+1} - \sum_{s=1}^{s=\nu-1} E^*_{2s} E^*_{4\nu-2s} - \frac{1}{2} E^{*2}_{2\nu} \Bigg] \sin 4\nu\alpha \Bigg\}. \end{aligned} \tag{62}$$

2.3. CAZUL MECANISMULUI CU BIELE SECUNDARE AXAT CU $\psi \neq 0$

Condițiile acestui mecanism sînt $h_l = 0$ și $h = 0$. Din formulele (20), (21), (25) și (28) rezultă $A^*_0 = A_0$, $A^*_{2\nu-1} = 0$, $A^*_{2\nu} = A_{2\nu}$ și

$$f_l \approx -\frac{1}{\lambda_l} \frac{r}{l} (1 - \lambda A_0) \sin \psi. \tag{63}$$

Formulele (34) devin

$$\left.\begin{aligned}
D_1^* &= \sin\gamma + \frac{l}{R}\lambda_l\, a_1^* \cos(\gamma+\xi) + \frac{r}{L}\sin\psi,\\
D_{2\nu}^* &= (-1)^{\nu+1}\, 2\nu\, \frac{l}{R}\lambda_l\, a_{2\nu}^* \sin 2\nu(\gamma+\xi),\\
D_{2\nu+1}^* &= (-1)^{\nu}(2\nu+1)\frac{l}{R}\lambda_l\, a_{2\nu+1}^* \cos(2\nu+1)(\gamma+\xi),\\
E_1^* &= \frac{l}{R}\lambda_l\, a_1^* \sin(\gamma+\xi) - \cos\gamma,\\
E_{2\nu}^* &= (-1)^{\nu}\, 2\nu\left[\frac{l}{R}\lambda_l\, a_{2\nu}^* \cos 2\nu(\gamma+\xi) + \frac{r}{L}A_{2\nu}\cos\psi\right],\\
E_{2\nu+1}^* &= (-1)^{\nu}(2\nu+1)\frac{l}{R}\lambda_l\, a_{2\nu+1}^* \sin(2\nu+1)(\gamma+\xi).
\end{aligned}\right\}\tag{64}$$

La calculul coeficienților a^* se folosește valoarea coeficientului de dezaxare echivalent obținută din formula (63).

Seria Fourier a momentului M_{i_k} este dată de formula (51), în care coeficienții se calculează din relațiile (64).

2.4. CAZUL MECANISMULUI CU BIELE SECUNDARE AXAT CU $\psi = 0$

Acest mecanism este un caz particular al mecanismului precedent. Întrucît coeficienții a^* se deduc din formulele (21) și (25) prin înlocuirile $\lambda \to \lambda_l$ și $h \to f_l$, se obține

$$a_{2\nu-1}^* = 0, \qquad a_{2\nu}^* = a_{2\nu},$$

deoarece pentru condițiile particulare ale mecanismului ($h = 0$, $h_l = 0$, $\psi = 0$) coeficientul de dezaxare echivalent este nul; coeficientul $a_{2\nu}$ se calculează din formula (24) prin înlocuirea $\lambda \to \lambda_l$.

Înlocuind aceste condiții în (64) se obține

$$\left.\begin{aligned}
D_1^* = \sin\gamma,\ D_{2\nu+1}^* = 0,\ E_1^* = -\cos\gamma,\\
E_{2\nu-1}^* = 0,
\end{aligned}\right\}\tag{65}$$

și

$$\left.\begin{aligned}
D_{2\nu}^* &= (-1)^{\nu+1}\, 2\nu\, \frac{l}{R}\lambda_l\, a_{2\nu} \sin 2\nu(\gamma+\xi),\\
E_{2\nu}^* &= (-1)^{\nu}\, 2\nu\left[\frac{l}{R}\lambda_l\, a_{2\nu}\cos 2\nu(\gamma+\xi) + \frac{r}{L}A_{2\nu}\right].
\end{aligned}\right\}\tag{66}$$

În cazul cercetat seria Fourier a momentului M_{i_k} se deduce înlocuind condițiile (65) în formula (61). Datorită condițiilor (65) unele sume se reduc la un singur termen; de exemplu suma $\sigma = \sum\limits_{s=1}^{\infty} - \mathrm{D}^*_{2s-1} E^*_{2\nu+2s-2}$ nu este nulă numai dacă $2s - 1 = 1$, adică pentru $s = 1$, deci $\sigma = - E^*_{2\nu}$ sin γ, deoarece $D^*_1 = \sin\gamma$.

Efectuînd înlocuirile rezultă seria

$$
\begin{aligned}
M_{i_k} = {} & \frac{1}{2} m_{t_l} R^2 \omega^2 \Biggl\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) \Bigl[(D^*_{2\nu-2} - D^*_{2\nu}) \cos\gamma - (E^*_{2\nu-2} + \\
& + E^*_{2\nu}) \sin\gamma \Bigr] \cos(2\nu - 1)\alpha + \\
& + \Bigl[2 \sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s+2} E^*_{2s} - D^*_{2s} E^*_{2s+2}) + \sin 2\gamma \Bigr] \cos 2\alpha + \\
& + \sum_{\nu=2}^{\infty} 2\nu \Bigl[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2\nu+2s} E^*_{2s} - D^*_{2s} E^*_{2\nu+2s}) - \sum_{s=1}^{s=\nu-1} D^*_{2s} E^*_{2\nu-2s} \Bigr] \cos 2\nu\alpha + \\
& + \sum_{\nu=1}^{\infty} (2\nu - 1) \Bigl[(D^*_{2\nu-2} + D^*_{2\nu}) \sin\gamma + (E^*_{2\nu-2} - E^*_{2\nu}) \cos\gamma \Bigr] \sin(2\nu - 1)\alpha + \\
& + \Bigl[2 \sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s} D^*_{2s+2} + E^*_{2s} E_{2s+2}) - \cos 2\gamma \Bigr] \sin 2\alpha + \\
& + \sum_{\nu=2}^{\infty} 2(2\nu - 1) \Bigl[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s} D^*_{4\nu+2s-2} + E^*_{2s} E^*_{4\nu+2s-2}) + \\
& + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D^*_{2s} D^*_{4\nu-2s-2} - E^*_{2s} E^*_{4\nu-2s-2}) \Bigr] \sin 2(2\nu - 1)\alpha + \\
& + \sum_{\nu=1}^{\infty} 4\nu \Bigl[\sum_{s=1}^{\infty} (D^*_{2s} D^*_{4\nu+2s} + E^*_{2s} E^*_{4\nu+2s}) + \sum_{s=1}^{s=\nu-1} (D^*_{2s} D^*_{4\nu-2s} - E^*_{2s} E^*_{4\nu-2s}) + \\
& + \frac{1}{2} (D^{*2}_{2\nu} - E^{*2}_{2\nu}) \Bigr] \sin 4\alpha \Biggr\}.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

2.5. CAZUL MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELĂ NORMAL DEZAXAT

Acest mecanism este un caz particular al mecanismului cu biele secundare dezaxat cu axele cilindrilor paralele. Condițiile particulare sînt

$$
r = 0, \quad l = L, \quad h_l = h, \quad m_{t_l} = m_{t_L}, \tag{68}
$$

unde m_{t_L} este masa pieselor care participă la mişcarea pistonului, inclusiv partea din masa bielei concentrată în punctul B (fig. 1).

Înlocuind condițiile (68) în formulele (7) și (9) și avînd în vedere că $\gamma = 0$ și $\xi = 0$, se obține $\lambda_l = \lambda$ și $f_l = \pm h$. Coeficienții $a^*_{2\nu-1}$ și $a^*_{2\nu}$, care se deduc din formulele (21) și (25) prin înlocuirile $\lambda \to \lambda_l$ și $h \to f_l$, au expresiile

$$a^*_{2\nu-1} = \pm A^*_{2\nu-1}, \quad a^*_{2\nu} = A^*_{2\nu}.$$

Formulele (53) devin

$$\left.\begin{aligned} D^*_{2\nu-1} &= \pm(-1)^{\nu-1}(2\nu-1)A^*_{2\nu-1}, \\ E^*_{2\nu} &= (-1)^{\nu}\,2\nu\,A^*_{2\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Înlocuind expresiile (69) în formula (62) și considerînd $k = 1$ pentru mecanismul normal, rezultă după transformări

$$\begin{aligned} M_{i_1} = m_{t_L} R^2\omega^2 \Bigg[\Bigg\{ & \pm \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}(2\nu-1)\Bigg\{\sum_{s=1}^{\infty}[(2s-1)(\nu+s-1)A^*_{2s-1}A^*_{2\nu+2s-2} + \\ & + s(2\nu+2s-1)A^*_{2s}A^*_{2\nu+2s-1}] - \sum_{s=1}^{s=\nu-1}(2s-1)(\nu-s)\times \\ & \times A^*_{2s-1}A^*_{2\nu-2s}\Bigg\}\cos(2\nu-1)\alpha \pm \\ & \pm \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\nu\Big[(2\nu-1)A^*_{2\nu-1} + (2\nu+1)A^*_{2\nu+1}\Big]\cos 2\nu\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}(2\nu-1)[(\nu-1)A^*_{2\nu-2} + \nu A^*_{2\nu}]\sin(2\nu-1)\alpha + \\ & + \Bigg\{\frac{1}{2}\Big(A_1^{*2} - 1\Big) - \sum_{s=1}^{\infty}[(4s^2-1)A^*_{2s-1}A^*_{2s+1} + 4s(s+1)A^*_{2s}A^*_{2s+2}]\Bigg\}\sin 2\alpha - \\ & - \sum_{\nu=2}^{\infty}(2\nu-1)\Bigg\{\sum_{s=1}^{\infty}[(2s-1)(4\nu+2s-3)A^*_{2s-1}A^*_{4\nu+2s-3} + \\ & + 4s(2\nu+s-1)A^*_{2s}A^*_{4\nu+2s-2}] - \\ & - \sum_{s=1}^{s=\nu-1}[(2s-1)(4\nu-2s-1)A^*_{2s-1}A^*_{4\nu-2s-1} + \\ & + 4s(2\nu-s-1)A^*_{2s}A^*_{4\nu-2s-2}] - \frac{1}{2}(2\nu-1)^2 A^{*2}_{2\nu-1}\Bigg\}\sin 2(2\nu-1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty}2\nu\Bigg\{\sum_{s=1}^{\infty}[(2s-1)(4\nu+2s-1)A^*_{2s-1}A^*_{4\nu+2s-1} + \\ & + 4s(2\nu+s)A^*_{2s}A^*_{4\nu+2s}] - \sum_{s=1}^{s=\nu}(2s-1)(4\nu-2s+1)A^*_{2s-1}A^*_{4\nu-2s+1} - \\ & - 4\sum_{s=1}^{s=\nu-1}s(2\nu-s)A^*_{2s}A^*_{4\nu-2s} - 2\nu^2 A^{*2}_{2\nu}\Bigg\}\sin 4\nu\alpha\Bigg\}\Bigg]. \end{aligned} \tag{70}$$

În formula (70) termenii care au două semne se consideră cu primul semn cînd mecanismul este dezaxat în sensul de rotație, și cu al doilea semn cînd mecanismul este dexazat în sensul invers sensului de rotație.

2.6. CAZUL MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELĂ NORMAL AXAT

Acest mecanism este un caz particular al mecanismului precedent, caracterizat prin condiția $h = 0$. Din formulele (21) și (25) se obține

$$A^*_{2\nu-1} = 0, \quad A^*_{2\nu} = A_{2\nu}. \tag{71}$$

Formulele (69) devin

$$\left.\begin{aligned} D^*_{2\nu-1} &= 0, \\ E^*_{2\nu} &= (-1)^{\nu}\, 2\nu A_{2\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Prin înlocuirea condițiilor (71) în formula (70) rezultă expresia

$$\begin{aligned} M_{i_1} = m_{t_L} R^2 \omega^2 \Bigg\{ & \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} (2\nu - 1) [(\nu-1) A_{2\nu-2} + \nu A_{2\nu}] \sin (2\nu - 1)\alpha + \\ & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Bigg[-\frac{1}{2} \nu^3 A_{\nu}^2 + (-1)^{\nu}\, 4\nu \sum_{s=1}^{\infty} s(\nu + s) A_{2s} A_{2\nu+2s} - \\ & - (-1)^{\nu}\, 4\nu \sum_{\substack{s=1,2,3,\dots;\\ s<\frac{\nu}{2}}} s(\nu - s) A_{2s} A_{2\nu-2s} \Bigg] \sin 2\nu\alpha \Bigg\}, \end{aligned} \tag{73}$$

unde s-a considerat $A_1 = 1$ și $A_3 = A_5 = A_7 = \dots = 0$.

3. ANALIZA ARMONICĂ A MOMENTULUI M_G

Momentul M_G este suma dintre momentul M_{G_r} produs de greutatea maselor cu mișcare de rotație, și momentul M_{G_t} produs de greutățile maselor cu mișcare de translație.

Se folosesc notațiile următoare:

G_r, greutatea maselor cu mișcare de rotație, inclusiv partea din masa ansamblului format din biela principală și masele provenite de la bielele secundare, concentrată în punctul A;

G_{t_k}, greutatea maselor care participă la mișcarea pistonului acționat de biela k, inclusiv partea respectivă in masa bielei k;

ρ, distanța de la axa de rotație a arborelui cotit la centrul masei a cărei greutate este G_r;

φ_k, unghiul cu care trebuie rotită direcția $B_l O_k$ în sensul de rotație al manivelei pentru ca vectorul $\overline{B_l O_k}$ să aibă direcția și sensul vectorului G_{t_k}.

Dacă unghiul α se măsoară ca în figura 1, momentul M_{G_r} are expresia

$$M_{G_r} = \rho G_r \sin(\alpha - \varphi_1), \tag{74}$$

unde φ_1 este valoarea unghiului φ_k pentru cilindrul cu bielă principală ($k = 1$).

Momentul M_{G_t} este suma momentelor produse de greutățile maselor cu mișcare de translație ale mecanismului

$$M_{G_t} = \sum_{k=1}^{k=q} M_{G_{t_k}}.$$

Din condiția conservării energiei se obține pentru cilindrul k

$$G_{t_k} \cos\varphi_k \cdot dx_{B_t} = M_{G_{t_k}}\, d\alpha,$$

deci

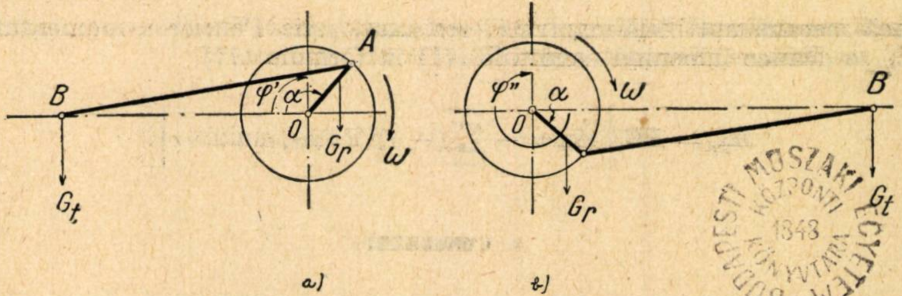
$$M_{G_{t_k}} = G_{t_k} \cos\varphi_k \cdot \frac{v_{B_t}}{\omega}.$$

Înlocuind viteza pistonului din formula (35) rezultă seria Fourier

$$M_{G_{t_k}} = -RG_{t_k} \cos\varphi_k \sum_{\nu=1}^{\infty} (D_\nu^* \cos\nu\alpha + E_\nu^* \sin\nu\alpha). \tag{75}$$

La aplicarea formulei (75) trebuie folosite expresiile coeficienților D_ν^* și E_ν^* corespunzătoare tipului de mecanism, stabilite la dezvoltarea în serie Fourier a momentului M_{i_k}.

De obicei momentul M_G se ia în considerare numai la motoarele mari în linie, unde greutățile maselor mecanismului au valori apreciabile în comparație cu celelalte forțe care acționează mecanismul.



a) b)

Fig. 2. — Pozițiile cilindrului la motorul orizontal.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

La motoarele orizontale unghiul φ are valoarea $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ dacă cilindrul este situat în stînga axei de rotație a arborelui cotit (fig. 2*a*), și valoarea $\varphi'' = \frac{3\pi}{2}$ dacă cilindrul este situat în dreapta axei de rotație a arborelui cotit (fig. 2*b*) (motorul fiind privit dinspre extremitatea în care sensul de rotație al arborelui cotit este același cu sensul pozitiv ales pentru rotația manivelei). Înlocuind aceste valori în formulele (74) și (75) se obține

$$M'_{G_r} = \rho G_r \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

sau

$$M''_{G_r} = \rho G_r \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

și

$$M_{G_t} = 0.$$

La motoarele verticale cu cilindri situați deasupra axei de rotație a arborelui cotit $\varphi = 0$, deci

$$M_{G_r} = \rho G_r \sin \alpha$$

$$M_{G_t} = -\, RG_t \sum_{\nu=1}^{\infty} (D_\nu^* \cos \nu\alpha + E_\nu^* \sin \nu\alpha). \qquad (76)$$

Dacă mecanismul bielă-manivelă este dezaxat, se obține prin înlocuirea condițiilor (52) și (69) în formula (76)

$$M_{G_t} = RG_t \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \pm (-1)^\nu (2\nu - 1) A_{2\nu-1}^* \cos (2\nu - 1)\, \alpha + \right.$$

$$\left. + \sin \alpha - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu 2\nu A_{2\nu}^* \sin 2\, \nu\alpha \right]. \qquad (77)$$

Dacă mecanismul bielă-manivelă este axat, seria Fourier a momentului M_{G_t} se deduce înlocuind condițiile (71) în formula (77)

$$M_{G_t} = RG_t \left[\sin \alpha - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu 2\nu A_{2\nu} \sin 2\, \nu\alpha \right].$$

4. CONCLUZII

Formulele precedente permit stabilirea armonicilor momentelor M_i și M_G pentru orice tip de mecanism bielă-manivelă. În acest scop se aplică formula corespunzătoare tipului de mecanism pentru fiecare mecanism cu bielă secundară care acționează un cot al arborelui cotit, și pentru mecanismul cu bielă principală respectiv, după care se însumează geometric armonicile de același ordin.

Deoarece mărimile λ, λ_l, h și h_l au valori subunitare, puterile lor superioare sînt numere foarte mici. Din această cauză armonicile de ordin superior ($\nu > 4$) sînt neglijabile. Totodată, la aplicarea formulelor se pot neglija termenii care conțin coeficienții A^* și a^* cu indice mai mare decît patru, iar la calculul acestor coeficienți se pot neglija termenii cu grad mai mare de 5—6.

Primită la redacție la 16 mai 1962.

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДВИЖУЩЕГО МОМЕНТА, ПРОИЗВЕДЕННОГО СИЛАМИ ИНЕРЦИИ И ВЕСОМ ДЕТАЛЕЙ КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА У ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

РЕЗЮМЕ

Проделывается гармонический анализ движущего момента, произведенного силами инерции и весом деталей кривошипно-шатунного механизма. Сначала устанавливаются формулы для расчета коэффициентов ряда Фурье в случае самого общего кривошипно-шатунного механизма. Эти формулы обобщаются затем для кривошипно-шатунных механизмов, применяемых на практике.

EINE VERALLGEMEINERUNG DER FORMELN DER HARMONISCHEN ANALYSE DES DURCH DIE MASSENKRAFT UND DIE SCHWERE DER TRIEBWERKE BEI VERBRENNUNGSMOTOREN HERVORGERUFENEN MOMENTES

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die harmonische Analyse des durch die Massenkraft und die Schwere der Massen der Triebwerke bei Verbrennungsmotoren hervorgerufenen Antriebsmoments ausgeführt. Zuerst werden die Formeln zur Berechnung der Fourierkoeffizienten für den allgemeinsten Typ des Kurbeltriebes aufgestellt, die anschließend auf die in der Praxis vorkommenden Sonderfälle angewandt werden.

BIBLIOGRAFIE

1. В. П. Терских, *Расчеты крутильных колебаний силовых установок*, I, Москва, Машгиз, 1953.
2. G. P. Tolstov, *Serii Fourier*. Ed. tehnică, București, 1955.

COMPORTAREA LA SARCINI RIDICATE A UNOR ADITIVI PE BAZĂ DE FOSFOR

DE

OLGA BIŢĂ şi I. DINCĂ

INTRODUCERE

În ultimii ani s-au efectuat pe scară largă cercetări în scopul elucidării acțiunii aditivilor de onctuozitate şi extremă presiune (*E.P.*).

Necesitatea acestor cercetări a apărut în special în legătură cu utilizarea din ce în ce mai largă a angrenajelor sever solicitate, ceea ce a pus probleme noi în studiul ungerii la limită sau a regimului onctuos.

F. C. Bowden şi D. Tabor au arătat însă că nu numai în ungerea la limită impusă de condițiile de funcționare ale unui cuplu de frecare, ci chiar şi în cazul regimului hidrodinamic, sub sarcini locale mari, temperaturile în punctele de contact intermetalice, care apar ocazional, se pot apropia de punctele de topire ale metalelor, favorizînd astfel crearea punților de sudură [1].

În cazul regimului de ungere la limită însă, cînd grosimea filmului de lubrifiant este prea mică pentru a putea asigura separarea efectivă a suprafețelor metalice, devin preponderente proprietățile lubrifiantului, mai puțin cunoscute, denumite cu termenul de *proprietăți de onctuozitate* [2].

Forțele de coeziune moleculară sau forțele Van der Waals, nu asigură decît legături slabe între lubrifiant şi metal. Legături mai puternice se obțin numai prin atracția electrostatică, care rezultă din caracterul polar al moleculelor lubrifiantului, sau datorită unei reacții chimice care are loc între substanțele active din punct de vedere chimic, folosite ca adaosuri în lubrifiant, şi metal.

Factorii care influențează regimul de ungere onctuos sînt destul de numeroşi: sarcina, viteza relativă, proprietățile fizico-chimice complexe mai puțin cunoscute ale suprafețelor de frecare şi lubrifiantului, starea suprafețelor, regimul termic, deformațiile, cantitatea de lubrifiant disponibil etc. Infuența acestor factori este extrem de complexă şi din acest motiv în studiul regimului de ungere la limită nu se pot aplica legi de comportare generală.

Rezultatele și concluziile obținute de diferiți cercetători nu se pot aplica decît în domeniul restrîns de variație a parametrilor din cadrul experiențelor respective. Din acest motiv, metoda de cercetare cea mai eficace rămîne încă aceea a observațiilor experimentale.

Urmarea firească a folosirii unui lubrifiant neadecvat condițiilor impuse de funcționarea în regim limită, este gripajul.

Gripajul suprafețelor nu va putea surveni niciodată în regim hidrodinamic. Este necesar ca, datorită unei cauze oarecare ori a condițiilor de lucru impuse, acest regim să se întrerupă sau să nu poată exista, creîndu-se astfel condițiile propice apariției gripajului : contact intermetalic și regim termic ridicat.

Gripajul este caracterizat printr-o încălzire puternică a suprafețelor și o deteriorare gravă a acestora, astfel încît, cel puțin una, atinge superficial temperatura de topire a materialului, dacă acesta este omogen, sau a constituentului cu temperatura cea mai joasă, în cazul folosirii unor materiale eterogene, favorizînd sudarea pe porțiuni mai mult sau mai puțin întinse.

De obicei, evoluția acestui accident este rapidă, pentru că factorii determinanți se stabilesc brusc iar acțiunea lor este foarte caracteristică și violentă.

În cazul folosirii aditivilor de extremă presiune (antigripanți), temperatura generată la punctele de contact intermetalic favorizează apariția reacției dintre aditiv și suprafața metalică, îndepărtînd printr-o coroziune chimică un eventual accident.

Se știe că folosirea la ungerea angrenajelor, chiar mai puțin solicitate, a unui ulei inert din punct de vedere chimic dă o foarte mică protecție la uzură și gripaj.

Substanțele folosite ca aditivi de extremă presiune, sînt în general săpunurile de plumb și compușii organici ai sulfului, clorului și fosforului [3], [4], [5].

Acești aditivi trebuie aleși astfel ca să nu poată reacționa decît cînd temperatura la punctele de contact se ridică periculos, formînd un strat aderent de compuși ai metalului cu clorul, sulful sau fosforul, reducînd astfel pericolul gripajului.

Acțiunea antigripantă a acestor aditivi, care se bazează — după cum s-a mai spus — pe polaritatea și pe reactabilitatea lor la punctele de contact, este folosită și în scopul grăbirii rodajului suprafețelor în frecare [6], [7].

Mecanismul acestei polisări și păsuiri chimice a suprafețelor în frecare este următorul :

La locul unde apare contactul intermetalic, datorită presiunii locale mărite, temperatura se ridică periculos, însă în locul gripajului se produce dizolvarea proeminențelor angajate în acest proces, acoperirea suprafețelor nou formate cu produse de reacție, smulgerea acestor produse de reacție prin acțiuni dinamice și realizarea unei suprafețe de contact mai întinse. Ciclul se repetă pînă cînd se creează jocul necesar sau pînă cînd sarcina unitară locală este mai mică decît rezistența peliculei de lubrifiant, înlăturînd astfel contactul intermetalic și, implicit, regimul termic prea ridicat.

Rezultate bune, cu aplicabilitate practică, ca aditivi de rodaj, au dat compușii fosforului și sulfului.

În cazul oțelurilor de exemplu, uleiurile care conțin fosfor activ produc o creștere apreciabilă a rezistenței peliculei de lubrifiant, deoarece fosforul reacționează cu oțelul la toate temperaturile, filmul de fosfură formîndu-se de preferință înaintea celorlalte [3].

În plus, straturile fosfatate reduc riscul sudării suprafețelor sub sarcină mare, ajutînd la eliminarea constituentului care favorizează gripajul, și anume, ferita [8].

În lucrarea de față sînt expuse unele rezultate și observații experimentale referitoare la influența a doi aditivi cu conținut de fosfor asupra rezistenței la uzură și gripaj a oțelului, în cazul sarcinilor mari, și anume, lecitina și tricrezil fosfatul.

DATE EXPERIMENTALE

CONDIȚII DE LUCRU

Încercările experimentale au fost efectuate pe mașina pentru studiul uzurii, tip IMA [9], la care se pot varia următorii factori :

— sarcina,
— temperatura,
— viteza,
— natura materialelor,
— calitatea lubrifiantului,

și care permite :

— determinarea momentului de frecare (a coeficientului de frecare),
— măsurarea vitezei,
— măsurarea temperaturii uleiului și a suprafețelor în frecare,
— măsurarea uzurii gravimetrice a epruvetelor încercate.

Experiențele s-au efectuat la sarcini mari, cuprinse între ~2 060 kg/cm² și ~5 800 kg/cm², sarcini ce au putut fi obținute prin realizarea unui contact liniar între epruvetele folosite (fig. 1).

Presiunea maximă în acest caz a fost calculată cu ajutorul formulei lui Hertz

$$p^2_{\max} = \frac{0{,}175.P.E}{r.l}$$

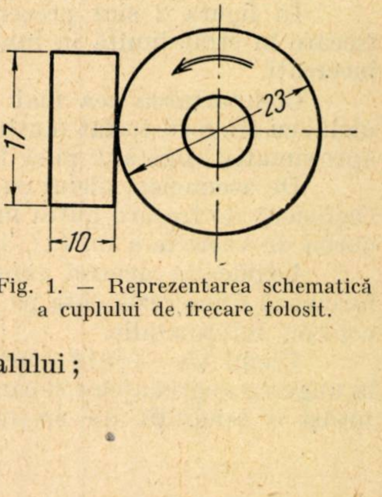


Fig. 1. — Reprezentarea schematică a cuplului de frecare folosit.

unde

P — forța aplicată, kg ;
E — modulul de elasticitate al materialului ;
r — raza tamburului, cm ;
l — lățimea tamburului, cm.

Temperatura inițială de lucru s-a menținut constantă, $t_i = 26°C$. De asemenea, temperatura mediului ambiant a fost de ~23—24°C în tot timpul experimentărilor.

Măsurarea temperaturii uleiului, în baie, s-a făcut cu ajutorul unui termometru cufundat în ulei, iar temperatura la punctul de contact dintre suprafețele metalice s-a înregistrat cu ajutorul unui termocuplu introdus în materialul sabotului la distanța de 0,5 mm de suprafața de lucru.

Timpul de lucru a fost același pentru toate încercările, și anume, 15 minute; nu s-a putut însă respecta în cazurile în care epruvetele au gripat înainte de terminarea lui.

Turația tamburului, în gol, s-a menținut constantă și egală cu 1 350 rot/min, revenind la o viteză liniară de ~2 m/s.

Încercările s-au efectuat numai pe oțel, și anume, tamburul a fost confecționat din oțel cu $H_B = 230$ iar sabotul tot din oțel cu $H_B = 161$; suprafețele de lucru fiind prelucrate identic, prin rectificare fină.

Ca medii lubrifiante s-au folosit: uleiul de angrenaje Vx — 5012 (STAS 899/1953) și uleiul 312 (STAS 1197/1950) curat sau aditivat.

S-au folosit ca aditivi lecitina industrială de natură animală, cu un conținut de 3,40% fosfor, 1,76% azot și cu indicele de iod de 63,8, tricrezil fosfatul /OP $(OC_6H_4CH_3)_3$/ pur și, pentru comparație, sulful nativ.

Concentrațiile aditivilor în ulei au fost:

— 0,5% lecitină industrială,
— 1,0% tricrezil fosfat,
— 1,5% sulf.

Aceste concentrații au fost alese ca urmare a altor cercetări efectuate de către colectiv [6] [7] sau după indicațiile găsite în literatura de specialitate [10].

Rezultate.

În timpul experiențelor s-a urmărit variația temperaturii, a coeficientului de frecare și a uzurii gravimetrice a celor două epruvete, în funcție de sarcină și aditivul studiat. În plus, s-a verificat și influența naturii aditivului asupra posibilității de prevenire a gripajului și de refacere a suprafețelor deja gripate.

În figura 2 sînt prezentate curbele de variație a coeficientului de frecare în strat limită în funcție de sarcină, pentru tipurile de lubrifianți încercați.

Comportarea cea mai bună, din acest punct de vedere, a avut-o uleiul cu tricrezil fosfat (curba *4*) care a prezentat un coeficient de frecare aproximativ constant pînă la 5 840 kg/cm².

De asemenea, uleiul cu lecitină (curba *3*), cu toate că a prezentat un coeficient de frecare puțin mai ridicat, a avut o comportare foarte bună, curba de variație a lui (μ), după o ușoară creștere, devenind asimptotică.

Explicația acestei comportări constă în faptul că cei doi aditivi formează filme rezistente pe suprafețele metalice, eliminînd pericolul unui contact intermetalic.

Uleiul Vx — 5012 (curba *2*), care este un ulei folosit în mod curent la ungerea angrenajelor și care posedă proprietăți antigripante, a prezentat totuși o tendință de creștere a coeficientului de frecare de la cca.

4500 kg/cm², fără ca însă, pînă la sarcina maximă folosită, să-și fi pierdut proprietățile onctuoase și antigripante.

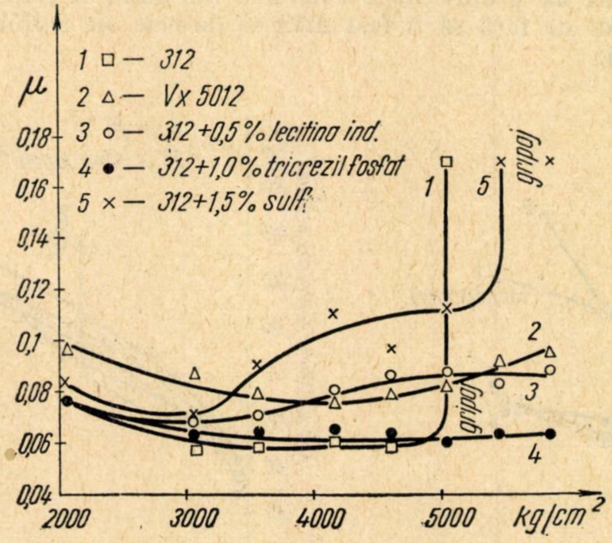


Fig. 2. — Variația coeficientului de frecare în funcție de sarcină.

1 – ulei 312 curat; 2 — ulei Vx–5012; 3 — 312 + lecitină; 4 — 312 + tricrezil fosfat; 5 – 312 + sulf.

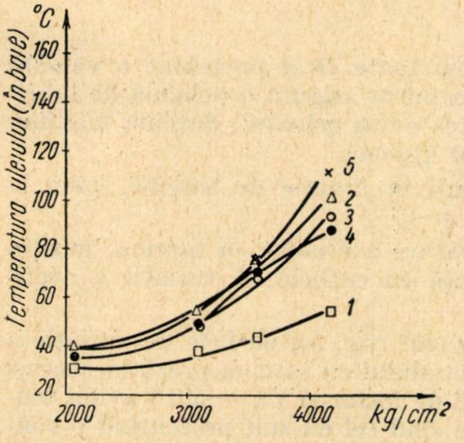


Fig. 3. — Variația temperaturii băii de ulei în cazul sarcinilor moderate, pentru cele cinci tipuri de lubrifianți folosiți.

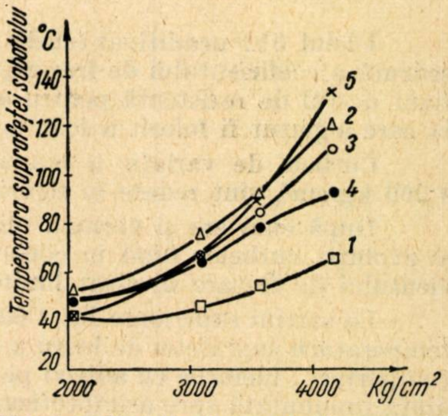


Fig. 4. — Variația temperaturii suprafeței de lucru (sabotului), în aceleași condiții ca în figura 3.

Uleiul cu conținut de 1,5% sulf (curba *5*) a prezentat o variație a coeficientului de frecare cu sarcina, mai mare și destul de dezordonată, conducînd pînă la urmă la griparea suprafețelor la 5 470 kg/cm².

Această comportare este destul de surprinzătoare, fiind în contradicție cu datele experimentale ale altor cercetători străini [10].

S-ar putea ca proprietățile coloidale ale sulfului folosit în cadrul experimentărilor de față să fi fost diferite de cele ale sulfului folosit de alți cercetători.

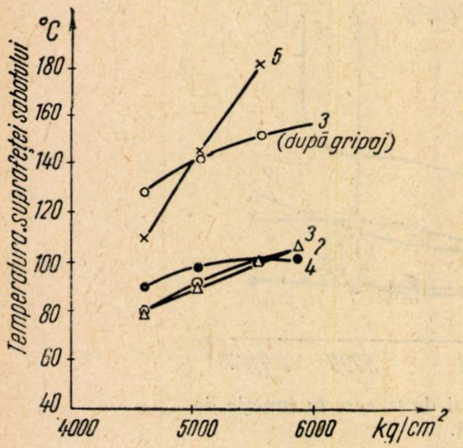


Fig. 5. — Regimul termic al cuplului de frecare la sarcini mari.

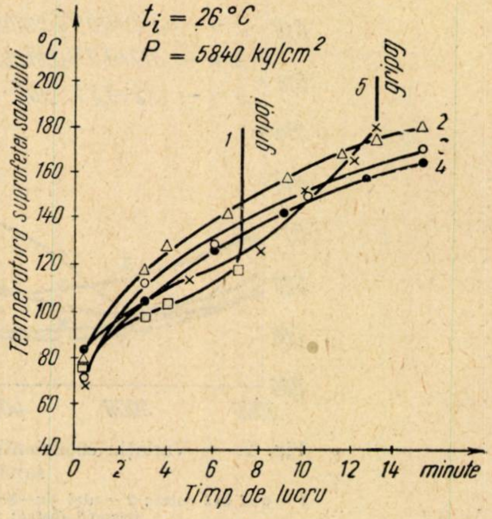


Fig. 6. — Variația temperaturii suprafeței de lucru în timpul experimentării, la sarcina maximă.

Uleiul 312 neaditivat (curba *1*), cu toate că a prezentat o valoare scăzută a coeficientului de frecare, nu a putut asigura o peliculă de lubrifiant destul de rezistentă pentru a putea evita gripajul. Sarcina maximă la care a putut fi folosit a fost ~4 600 kg/cm².

Curbele de variație a temperaturii în funcție de sarcină, pînă la 4 200 kg/cm², sînt redate în figurile 3 și 4.

După cum era și normal, temperatura a crescut cu sarcina, poziția și evoluția curbelor fiind în concordanță cu curbele de variație a coeficientului de frecare în strat limită.

La sarcini superioare lui 4 600 kg/cm² (fig. 5), curbele de variație a temperaturii suprafeței de lucru a materialului cu sarcina prezintă aceeași comportare; uleiurile cu aditivi pe bază de fosfor și Vx — 5012 avînd tendință pronunțată spre asimptotizare pe cînd cel cu sulf prezentînd o continuă creștere.

În figura 6 sînt redate curbele de variație a temperaturii suprafeței oțelului în funcție de timpul de experimentare, la sarcina maximă folosită.

Din nou se remarcă tendința de stabilizare a temperaturii uleiurilor cu aditivi pe bază de fosfor și a uleiului Vx — 5012 și apariția bruscă a accidentului în cazul uleiului 312 neaditivat sau cu adaos de sulf.

În tabela 1 sînt prezentate cîteva date referitoare la influența naturii lubrifiantului asupra comportării la uzură a cuplului de oțel încercat.

Tabela 1

Natura lubrifiantului	Sarcina kg/cm²	Uzura, mg/min	
		Sabot	tambur
312	4 600	$2,3.10^{-2}$	$1,0.10^{-2}$
Vx — 5012	5 840	$2,0.10^{-2}$	$1,0.10^{-2}$
312 + lecitină	5 840	$3,3.10^{-2}$	$4,0.10^{-2}$
312 + tricrezil fosfat	5 840	$0,5.10^{-2}$	$0,5.10^{-2}$
312 + sulf	5 470	$5,3.10^{-2}$	$10,0.10^{-2}$

În cazul experiențelor cu contact liniar între epruvete, uzura gravimetrică fiind extrem de mică, nu poate constitui un criteriu destul de concludent pentru caracterizarea influenței naturii lubrifiantului asupra comportării materialelor în frecare din acest punct de vedere.

Din datele obținute se pare că tricrezil fosfatul dă cel mai rezistent film de suprafață, iar uzura mai mare înregistrată în cazul lecitinei, explică promptitudinea cu care aceasta reacționează la punctele de contact, cînd regimul termic crește în mod periculos, substituind o uzură corozivă eventualului gripaj.

În figurile 7*a* și 7*b* se prezintă microfotografiile amprentei de contact în cazul utilizării uleiului fără aditiv și respectiv, cu aditiv pe bază de fosfor. Prima microfotografie a fost făcută înainte de sarcina de gripaj.

În figura 7*a* suprafața de contact este puțin mai mare, aria amprentei are aspectul lucios, prezintă uniformitate în totalitatea ei și o continuitate a liniilor paralele după direcția mișcării.

Figura 7*b* evidențiază o amprentă mai mică dimensional, cu aspect mai mat și cu puncte de strălucire deosebită față de suprafața de bază, ca niște alveole cu margini neregulate. Densitatea acestora crește în direcția de rulare a tamburului.

Din compararea vizuală a celor două epruvete s-ar părea că prima reflectă o comportare superioară a cuplului de frecare, deci în cazul folosirii uleiului curat. Aceasta este însă numai o aparență, deoarece completarea datelor vizuale cu observațiile experimentale obținute în ambele cazuri, conduc la următoarea explicație : În domeniul sarcinilor moderate și deci și al solicitărilor termice moderate, comportarea uleiului curat este bună atît în ceea ce privește valoarea coeficientului de frecare și a constanței acestuia, cît și a proprietăților de vehiculare a căldurii.

Cînd domeniul de variație a sarcinii crește apropiindu-se de limita de curgere a materialului, se produce o creștere rapidă și a regimului termic și la valori aproximativ constante ale acestuia și relativ scăzute, se produce brusc gripajul cu smulgeri brutale de material și transferul acestuia de pe o suprafață pe alta.

În cazul folosirii uleiului cu aditiv pe bază de fosfor, în domeniul sarcinilor și regimurilor termice moderate, comportarea uleiului este aproximativ aceeași ca în cazul uleiului neaditivat (fig. 2, 3, 4).

Cînd domeniul sarcinilor depăşeşte 4 500—5 000 kg/cm², în cazul folosirii aditivilor cu fosfor gripajul este substituit de coroziunea chimică în punctele cele mai solicitate.

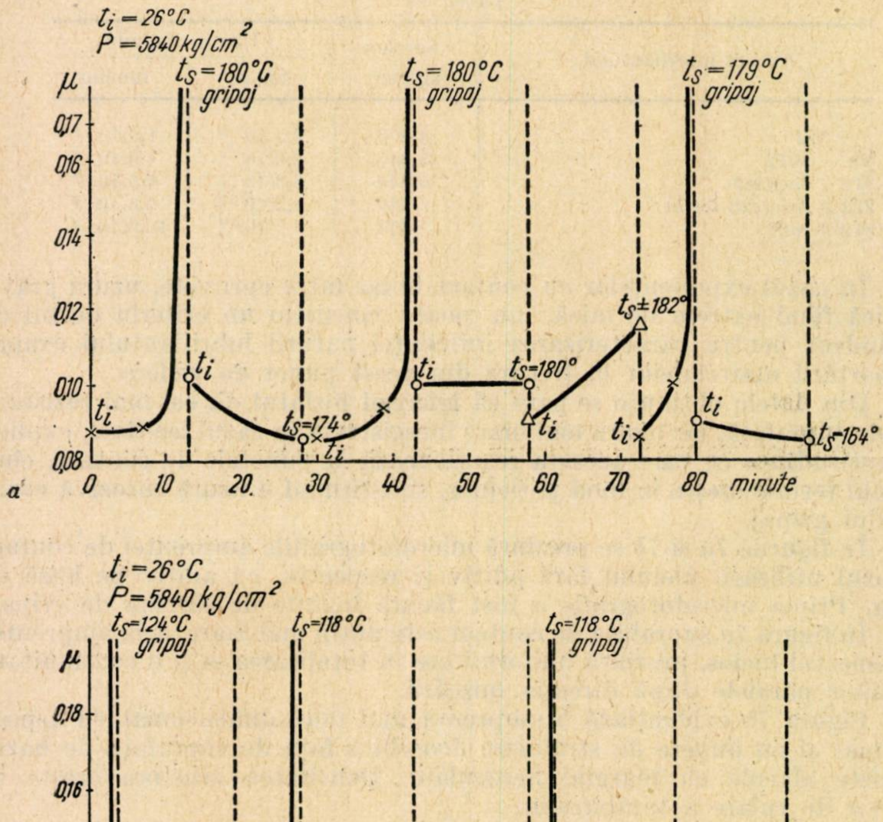


Fig. 8. — Prezentarea schematică a posibilităţii de refacere a suprafeţelor gripate de către lubrifianţii cu aditivi pe bază de fosfor.
a — după gripaj cu ulei + sulf; *b* — după gripaj cu ulei curat.

Coeficientul de frecare îşi păstrează valoarea constantă sau are variaţii foarte mici (fig. 2).

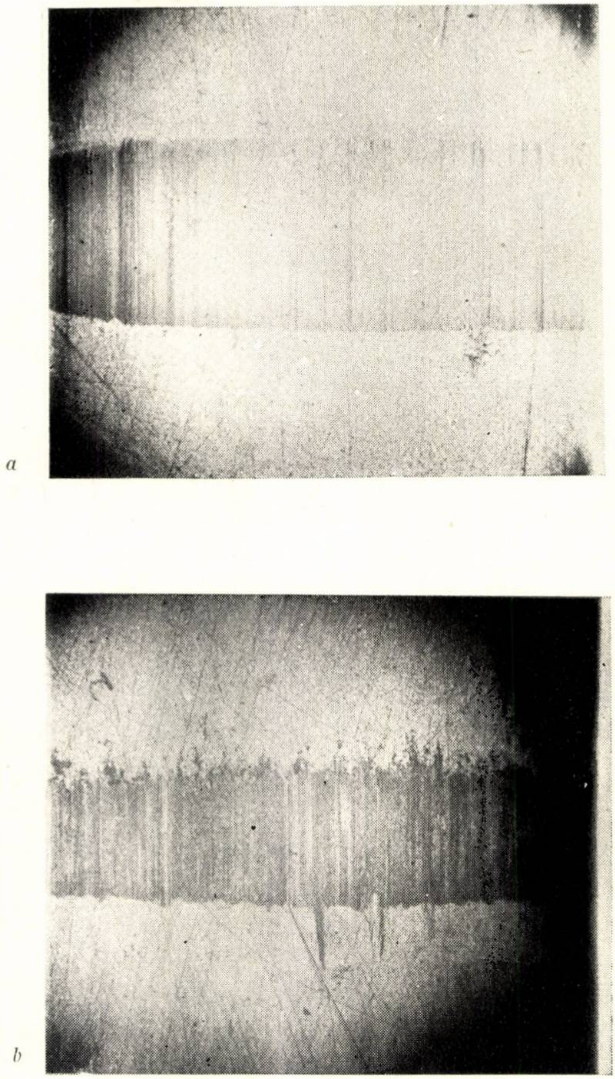


Fig. 7. — Aspectul suprafețelor de lucru.
a – în cazul uleiului 312 curat, pînă la $\sim$4600 kg/cm^2; *b* – în cazu uleiului 312 + aditiv, pînă la $\sim$ 5 840 kg/cm^2.

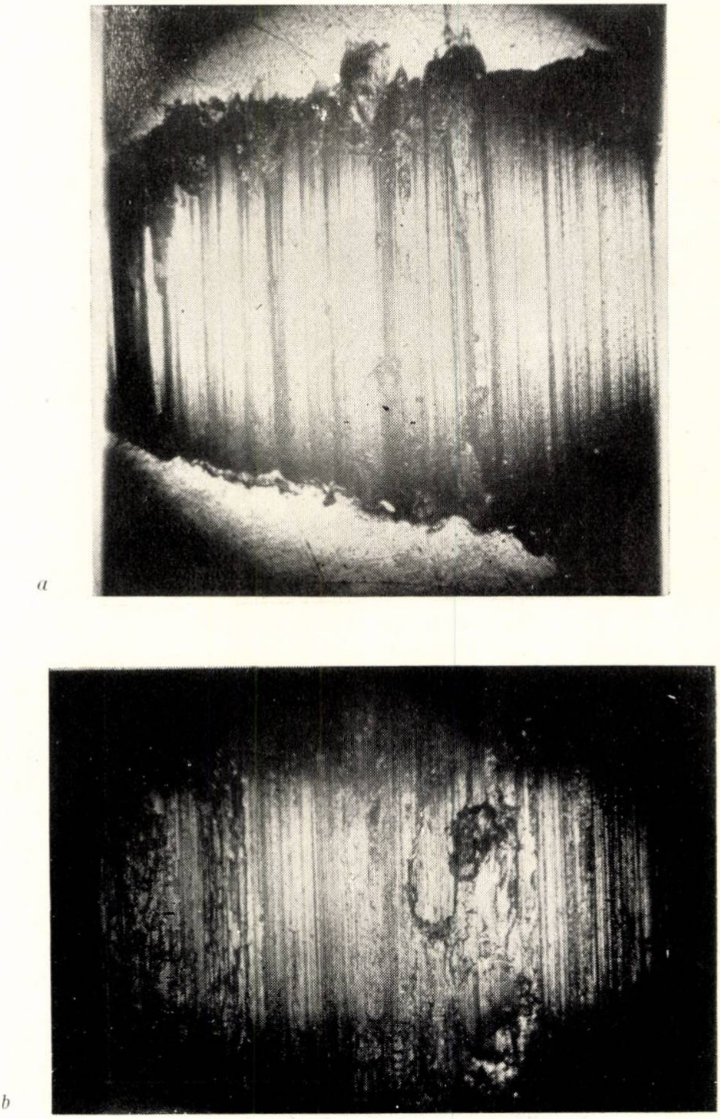


Fig. 9. — Aspectul suprafețelor după gripaj
a – sabotul; *b* – tamburul.

Aspectul mat al suprafeţelor se explică prin acoperirea acestora cu produsele de reacţie, substanţe cu proprietăţi onctuoase pronunţate (fosfaţii fierului de ex.). Alveolele cu margini neregulate indică punctele cele mai solicitate care au fost corodate chimic.

Aceasta este explicaţia firească a faptului că suprafeţele rodate chimic prezintă un aspect mat, mai întunecat la culoare, şi care par la prima vedere inferioare suprafeţelor oglindă obţinute prin rodaj mecanic [7].

Experimentările au mai condus la o serie de observaţii interesante şi în ceea ce priveşte posibilitatea aditivilor pe bază de fosfor studiaţi, respectiv lecitina şi tricrezil fosfatul, de a reface suprafeţele deja gripate.

În figurile 8*a* şi 8*b* este prezentată variaţia coeficientului de frecare în strat limită, în funcţie de timpul de lucru, la sarcina maximă.

Se remarcă faptul că atît lecitina cît şi tricrezil fosfatul adăugate în ulei, pot restabili condiţiile de funcţionare normală, dacă acestea au fost întrerupte printr-un eventual accident. Fenomenul este foarte asemănător cu un rodaj chimic al suprafeţelor gripate, al cărui mecanism a fost expus în partea introductivă a lucrării. Acest lucru este pus în evidenţă de faptul că, în general, coeficientul de frecare în cazul uleiului cu aditiv pe bază de fosfor, cu toate că prezintă o uşoară descreştere sau rămîne constant pe tot timpul experimentării, are imediat după gripaj valori mai ridicate şi tendinţă de scădere în timp.

Microfotografiile din figurile 9*a* şi 9*b* reprezintă aspectul suprafeţelor după gripaj.

Suprafaţa epruvetei statice (fig. 9*a*) prezintă smulgeri intense de material pe direcţia mişcării şi deci uzură excesivă, pe cînd suprafaţa epruvetei de rulare (fig. 9*b*) prezintă aglomerări de material topit şi transferat de pe suprafaţa sabotului şi urme ale punţilor de sudură.

S-a observat că prin folosirea uleiului aditivat cu lecitină sau tricrezil-fosfat la ungerea unor asemenea suprafeţe deja gripate, uzura scade foarte mult, devenind după un timp insensibilă; se realizează un nou rodaj, ca urmare a acţiunii corozive locale a acidului ortofosforic pus în libertate prin descompunerea termică a aditivilor.

CONCLUZII

Acţiunea aditivilor de onctuozitate şi extremă presiune (antigripanţi) se explică pe de-o parte prin capacitatea de polarizare electrostatică şi pe de altă parte prin acţiunea lor chimică asupra suprafeţelor metalice cu formare de pelicule rezistente de sulfuri, cloruri, fosfuri sau fosfaţi, în funcţie de natura lor.

Atenţia preferenţială a lucrării de faţă pentru aditivii pe bază de fosfor şi dintre acestea pentru lecitină şi tricrezil fosfat, a fost determinată, în afară de calităţile antigripante specifice aditivilor pe bază de fosfor, de proprietăţile lor polifuncţionale mai pronunţate.

Cercetarea comparativă, experimentală, privind unele aspecte ale eficienței acestor aditivi în comparație cu sulful sau cu un ulei neaditivat, a condus la rezultate interesante mai ales în ceea ce privește proprietățile lor de onctuozitate și antigripante.

Din curbele de evoluție a fenomenului de frecare a rezultat că în cazul folosirii uleiului cu sulf, coeficientul de frecare este mai ridicat decît cel obținut în cazul folosirii uleiului cu aditiv pe bază de fosfor.

În consecință, regimul termic este mai sever, ceea ce determină, în condiții similare de lucru, apariția gripajului.

Sarcinile critice de gripaj în cazul folosirii aditivilor cu fosfor sînt superioare celor din cazul folosirii sulfului, care la rîndul lor sînt însă mai bune decît în cazul uleiului neaditivat. De fapt în literatura de specialitate se indică [3] creșterea bruscă de $\sim$ 5 ori a sarcinilor critice de gripaj după adăugarea aditivilor pe bază de fosfor și de $\sim$ 3 ori prin adăugarea sulfului și se subliniază că fosforul reacționează cu oțelul la toate temperaturile, filmul de fosfuri formîndu-se de preferință înaintea sulfurilor.

Sînt interesante rezultatele încercărilor referitoare la posibilitatea de a reface cu ajutorul aditivilor suprafețele gripate ca urmare a impunerii unui regim de încărcare care depășea sarcina critică în cazul folosirii uleiului neaditivat sau cu adaos de sulf.

Astfel, în timp ce încercările cu sulf au avut ca rezultat fie oprirea motorului, datorită unor coeficienți de frecare exagerați, fie griparea gravă a suprafețelor cu transfer substanțial de material, în cazul folosirii lecitinei și tricrezil fosfatului frecarea decurgea aproximativ normal, uneori cu coeficienți de frecare și regim termic mai ridicați decît în cazul funcționării normale.

Mecanismul corectării suprafețelor deja gripate în cazul folosirii lecitinei și tricrezil fosfatului ca aditivi în lubrifiant, constă în acțiunea corozivă a acestora, ca urmare a descompunerii lor, asupra asperităților proeminente sau asupra zonelor gripate, dizolvarea acestora și netezirea progresivă a suprafețelor pînă la formarea unei arii portante suficiente pentru a rezista sarcinii normale impuse, după care coroziunea încetează. Produsul principal de reacție, $FePO_4$, rezultat în acest caz, este el însăși un lubrifiant solid foarte eficace și un pasivant consacrat al suprafețelor metalice.

În concluzie, atît lecitina cît și tricrezil fosfatul permit o polisare chimică a suprafețelor de oțel, prevenind uzura ulterioară printr-un rodaj bun și rapid al acestora chiar în cazul unui început de gripaj apărut înainte de folosirea lor.

Aceste proprietăți îi impune și ca aditivi pentru efectuarea rodajului, chimic la agregatele mecanice. De altfel rezultate bune cu aplicabilitate practică s-au obținut deja în cazul folosirii lecitinei industriale ca aditiv de rodaj, în cazul motoarelor cu ardere internă [7].

În plus, lecitina prezintă și proprietăți antioxidante superioare pentru uleiurile care lucrează în condiții de temperatură ridicată (motoare cu ardere internă), cînd alterarea acestora este favorizată de prezența fierului şi a altor catalizatori metalici. La fel, tricrezil fosfatul adăugat în lubrifiant îi conferă şi proprietăţi detergent-dispergente, calitate importantă mai ales în cazul motoarelor cu aprindere prin compresie, fiind superior din acest punct de vedere altor aditivi pe bază de săpunuri organometalice ale căror depuneri au efect nociv.

Primită la redacţie la 16 iunie 1962.

О ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ФОСФОРНЫХ ПРИСАДОК НА ПОВЫШЕННЫЕ НАГРУЗКИ

РЕЗЮМЕ

В работе дается ряд лабораторных экспериментальных данных, выявляющих положительное поведение на повышенные нагрузки двух присадок с фосфорной основой: лецитин и трикрезил фосфат.

Экспериментальные результаты, полученные авторами, относятся к области усилий от 2 000 кг/см^2 до 5800 кг/см^2 и выявляют превосходство этих присадок для восстановления поврежденных металлических поверхностей и против заедания. Эти свойства составляют основу их использования в качестве присадок для приработки трущихся металлических поверхностей, ускоряя процесс и давая гарантии против заедания.

BEHAVIOUR OF SOME PHOSPHORUS COMPOUNDS AT HEAVY LOADS

ABSTRACT

This paper gives a series of experimental data which emphasize the good behaviour of two phosphorus compounds at heavy loads, i.e., the lecitine and the threecresyl phosphate.

The experimental results obtained by the authors refer to loads ranging from 2 000 kg/cm^2 and $\sim$ 5 800 kg/cm^2 and show the superiority of these compounds as regards their anti-seizure qualities and their possibilities of improving demaged metal surfaces. These properties constitute the reason for using the lecitine and the threecresyl phosphate as additives during the running-in period of metal surfaces, as they accelerate the process and present safety against seizure.

BIBLIOGRAFIE

1. F. T. BARCROFT, *A Technique for investigating reactions between E. P. additives and metal surfaces at high temperatures.* Wear, **3**, *6* (1960).
2. P. LAVAL, *Les fondements théoriques de l'étude du frottement et de la lubrification.* Revue Universelle des Mines, de la Métallurgie, de la Mécanique, **XVIII**, *1* (1962).
3. J. S. ELLIOTT, *Hypoid Gear Lubricants and Additives.* Journ. of the Institute of Petroleum, *8* (1959).
4. G. V. VINOGRADOV, O. E. MOROZOVA, *A study of the Wear of Steel under heavy loads with Lubricants containing sulphurbased additives.* Wear, **3**, *4* (1960).
5. E. G. ELLIS, *Lubricant additives to day.* Scientific Lubrication, *2* (1962).
6. O. PREOTESCU și colab., *Considerații asupra uzurii ansamblurilor de frecare în perioada de rodaj.* St. cerc. mec. apl., **VIII**, *1* (1957).
7. OLGA BIȚĂ, I. DINCĂ, *Reducerea timpului de rodaj prin metode chimice. Cercetări în domeniul așchierii metalelor și rodajului.* **III**, I.D.T., București (1962).
8. J. LEONARD, *Journées du grippage en Mécanique, 2 et 3 juin 1961, Introduction.* Revue Universelle des Mines, de la Métallurgie, de la Mécanique, **XVIII**, *1* (1962).
9. GH. MARIN, *Aparat pentru calorimetrarea proceselor de uzură.* St. cerc. mec. apl., **XI**, *2* (1960).
10. OLGA BIȚĂ, I. DINCĂ, *Date noi în tehnica rodării motoarelor cu ardere internă.* St. cerc. mec. apl., **XII**, *5* (1961).

ASUPRA PROBLEMEI PLANE A TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE CURBILINII OARECARE

I. INTRODUCERE. PRELIMINARII MATEMATICE

DE

P. P. TEODORESCU [1]

În general, în problema plană a teoriei elasticității — ca și în orice altă problemă de fizică matematică, de altfel — cele mai mari dificultăți în calculul practic provin din necesitatea de a satisface — cu cea mai bună aproximație posibilă — condițiile la limită, în particular condițiile pe contur. Aceste dificultăți pot fi în parte eliminate printr-o alegere convenabilă a sistemului de coordonate utilizat.

Astfel, în cazul dreptunghiului elastic și în cazul domeniilor infinite care se obțin din acesta se folosesc coordonate carteziene rectangulare (x, y) [25]; pe conturul domeniului respectiv avem $x =$ const. sau $y =$ const., condițiile la limită punîndu-se sub o formă mai simplă. Analog, în cazul paralelogramului elastic și în cazul domeniilor infinite obținute din acesta, am utilizat [23], [24], [27] coordonate oblice (ξ, η), astfel încît pe contur a rezultat $\xi =$ const. sau $\eta =$ const. Grinda perete triunghiulară ne-a condus [26] la sistemul de coordonate triunghiulare (x, θ), astfel încît condițiile la limită s-au pus pentru $x =$ const. sau pentru $\theta =$ const. De asemenea, în cazul sectorului de inel circular, precum și în cazul domeniilor ce se pot obține prin particularizare, se folosesc coordonate polare (r, θ), putînd scrie $r =$ const. sau $\theta =$ const. pe contur.

Observațiile de mai sus ne conduc la ideia utilizării, în general, a unor coordonate curbilinii oarecare (ξ, η), astfel alese funcție de domeniul dat încît conturul acestuia să fie mărginit de linii de coordonate (de exemplu, domeniile corespunzătoare unor grinzi pereți pentru bolți de poduri (fig. 1*a*), grinzi pereți în consolă (fig. 1*b*), colțuri de cadru (fig. 1*c*) etc.). În acest caz condițiile la limită se pun pentru $\xi =$ const. sau pentru

---

[1] Facultatea de matematică și mecanică, Universitatea București.

$\eta = \text{const}$. Un studiu al unui astfel de sistem de coordonate a fost întreprins pentru prima oară de K. F. Gauss [9]. Cel care a dezvoltat însă, în mod sistematic, această teorie, aplicînd-o la problemele fizicii matematice — în general — şi la probleme de teoria elasticităţii — în particular — a fost G. Lamé [14], [15], [16]. Studiind problema generală tridimensională, G. Lamé a dat formule pentru deformaţiile specifice liniare şi volumice, precum şi pentru rotiri, în coordonate curbilinii ortogonale. C. W. Borchardt [1], [2] a obţinut, pe altă cale, deformaţiile specifice liniare, W. Thomson [34] a studiat problema deformaţiei specifice volumice iar E. Cesàro [7] a reluat formulele pentru rotiri.

Dintre lucrările clasice care studiază problema plană a teoriei elasticităţii, utilizînd mai mult coordonatele curbilinii, citâm pe cele ale lui S. Timoshenko şi J. N. Goodier [35], N. I. Musheli̦şvili [19], M. Bricas [3], E. Butty [6], L. Föppl [8], M. T. Huber [13], H. Neuber [21], A. E. H. Love [17] şi H. Hencky [12]. Studii în legătură cu formularea problemei plane a teoriei elasticităţii în coordonate curbilinii au fost făcute, în ultimul timp, de către L. Brillouin [4], G. N. Buharinov [5], M. I. Naiman [20], A. N. Şapiro [22] şi E. Hampe [11]. Ultimul a dat şi unele rezultate privind coordonatele curbilinii oarecare. De altfel, coordonatele curbilinii neortogonale au început să fie mai mult utilizate în ultimul timp; menţionăm astfel studiul lui R. Grammel [10], care foloseşte o generalizare a funcţiilor circulare şi iperbolice pentru calculul colţurilor de cadru. Noi am dat unele rezultate pentru problema plană a teoriei elasticităţii în coordonate curbilinii oarecare în [28]...[33].

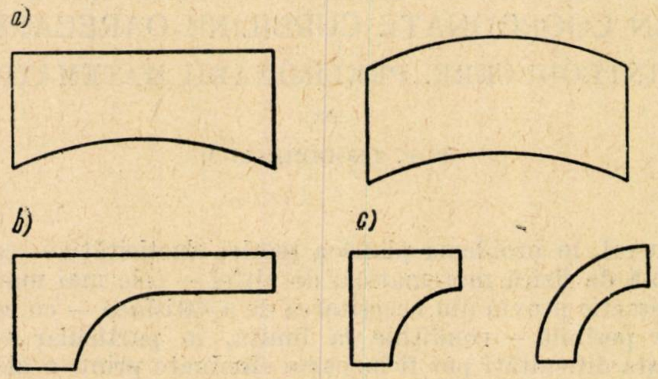


Fig. 1

În cele ce urmează vom expune cele mai importante rezultate privind problema plană a teoriei elasticităţii în coordonate curbilinii oarecare, concluzînd cu o formulare în tensiuni şi în deplasări a acestei probleme. Considerăm că este mai interesant să folosim un calcul direct, fără metode tensoriale, pentru că sîntem în cazul a două variabile. În felul acesta, prin modul de a alege mărimile geometrice şi mecanice necunoscute şi prin introducerea unor elemente noi de natură geometrică, formularea pe care o vom da diferă de cele considerate pînă în prezent, constituind — după părerea noastră — o generalizare naturală a celor mai importante cazuri particulare cunoscute.

1. PRELIMINARII MATEMATICE

Vom da întîi cîteva rezultate de ordin matematic, necesare în cursul studiului pe care-l întreprindem.

1.1. Schimbări de axe de coordonate. Schimbări de variabilă. Sistemul de bază la care ne vom referi în cele ce urmează va fi sistemul de coordonate carteziene ortogonale. Fie date funcțiile

$$\xi = \xi\,(x, y), \qquad \eta = \eta\,(x, y), \tag{1.1}$$

continue și derivabile ori de cîte ori este necesar [1]). Fiecărei perechi de două variabile (x, y) îi corespunde o pereche de variabile (ξ, η). În acest caz vom conveni ca punctului M, de coordonate carteziene ortogonale (x, y) să-i atribuim coordonatele curbilinii [2]) (ξ, η). Menționăm că această corespondență poate să nu fie biunivocă, adică variabilelor (ξ, η) să le corespundă mai multe perechi de variabile (x, y); în acest caz ținem seama de regiunea din plan în care se află domeniul considerat, pentru a înlătura o eventuală ambiguitate.

Uneori este practic să reprezentăm relațiile (1.1) sub forma

$$x = x\,(\xi, \eta), \qquad y = y\,(\xi, \eta), \tag{1.2}$$

funcțiile care apar fiind, de asemenea, continue și derivabile de cîte ori este necesar. Observăm că, pentru $\eta = \text{const.}$, relațiile (1.2) devin ecuațiile parametrice ale unei curbe în planul Oxy; putem face aceeași observație luînd $\xi = \text{const.}$ În felul acesta, dînd diferite valori constantelor introduse, obținem două familii de curbe, numite linii de coordonate, care joacă rolul paralelelor la axele Ox și Oy în coordonate carteziene ortogonale (fig. 2).

Relațiile (1.1) și (1.2) ne vor defini schimbările de variabilă care ne conduc de la coordonate carteziene ortogonale la coordonate curbilinii și invers.

1.2. Elementul de arc. Fie punctul $M\,(\xi, \eta)$ și arcul elementar MN, de lungime ds, unde $N\,(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$. Considerăm, de asemenea, punctul $A\,(\xi + d\xi, \eta)$, situat pe linia $\eta = \text{const.}$, și punctul $B\,(\xi, \eta + d\eta)$, situat pe linia $\xi = \text{const.}$ (fig. 3). În coordonate carteziene ortogonale vom avea $M\,(x, y)$ și $N\,(x + dx, y + dy)$, așa că putem admite că proiecțiile arcului AB pe axele Ox și Oy sînt date de

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,d\eta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta, \end{aligned} \tag{1.3}$$

---

[1]) De obicei este suficient să fie de clasa C^4.

[2]) Dacă nu se face o mențiune specială, vom înțelege coordonate curbilinii oarecare.

de-a lungul liniilor de coordonate variind numai ξ sau η. În felul acesta vom avea, în coordonate carteziene ortogonale, $A\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi,\, y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi\right)$ şi $B\left(x+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\, y+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right)$.

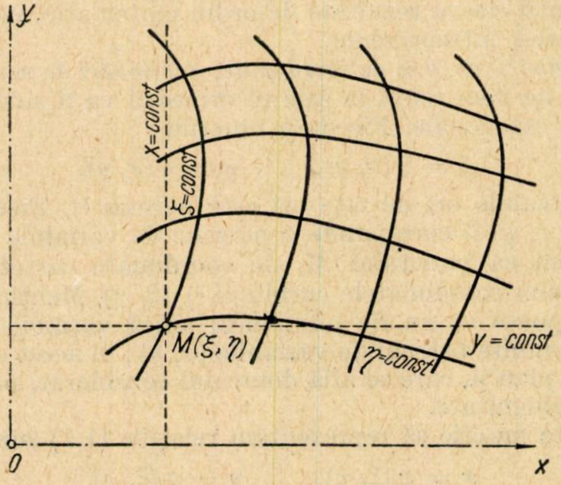

y
x=const
ξ=const
M(ξ,η)
η=const
y=const
0
x

Fig. 2

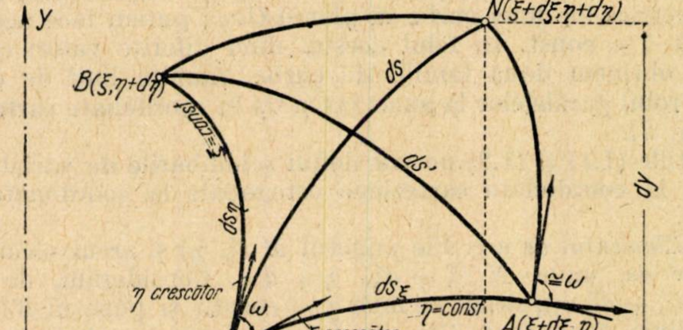

y
N(ξ+dξ,η+dη)
B(ξ,η+dη)
ξ=const
ds
ds'
dsη
dy
η crescător
ω
dsξ
≅ω
η=const
A(ξ+dξ,η)
ξ crescător
M(ξ,η)
α
β
0
x
dx
y
x

Fig. 3

Putem scrie astfel lungimea elementului de arc MN sub forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = E d\,\xi^2 + 2F\,d\xi\,d\eta + G d\,\eta^2, \tag{1.4}$$

unde am introdus simbolii lui Gauss

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2,$$
$$F = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}, \qquad (1.5)$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2.$$

Notăm

$$E = \frac{1}{h_x^2}, \quad G = \frac{1}{h_y^2},$$
$$F = \frac{\cos\omega}{h_x h_y}, \qquad (1.6)$$

unde h_x, h_y sînt parametrii diferențiali de ordinul întîi introduși de G. Lamé [14]. Expresia arcului elementar va deveni

$$ds^2 = \left(\frac{d\xi}{h_x}\right)^2 + 2\cos\omega\,\frac{d\xi\,d\eta}{h_x h_y} + \left(\frac{d\eta}{h_y}\right)^2. \qquad (1.7)$$

Făcînd $\eta = \text{const.}$, respectiv $\xi = \text{const.}$, găsim expresiile elementului de arc de-a lungul liniilor de coordonate

$$ds_\xi = \text{arc } MA = \frac{d\xi}{h_x} \cong \text{arc } BN, \quad ds_\eta = \text{arc } MB = \frac{d\eta}{h_y} \cong \text{arc } AN, \qquad (1.8)$$

unde pentru arcele AN și BN am neglijat infiniții mici de ordin superior. Înlocuind în (1.7), mai putem scrie

$$ds^2 = ds_\xi^2 + 2\cos\omega\, ds_\xi\, ds_\eta + ds_\eta^2. \qquad (1.7')$$

Regăsim astfel formula cosinusului unghiului în triunghiul MAN. Deci $\omega(\xi, \eta) = \omega(x, y)$, care variază puțin cînd trecem de la punctul M la punctul infinit vecin A, reprezintă unghiul pe care-l fac între ele liniile de coordonate ce se taie în punctul M (ξ, η). Vom avea

$$\cos\omega = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]}}, \qquad (1.9)$$

deoarece

$$h_x = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}}, \quad h_y = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}}. \qquad (1.10)$$

Analog, elementul de arc AB va fi dat de

$$ds'^2 = ds_\xi^2 - 2\cos\omega\, ds_\xi\, ds_\eta + ds_\eta^2 . \tag{1.11}$$

Notăm cu α şi β unghiurile pe care le fac tangentele la liniile de coordonate $\eta = \text{const.}$ şi $\xi = \text{const.}$ cu axa Ox. Ţinînd seama de coordonatele carteziene ortogonale ale punctelor M şi A, vom putea scrie

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial x}{\partial\xi}} . \tag{1.12}$$

Folosind relaţii trigonometrice simple şi ţinînd seama de (1.10), putem scrie de asemenea

$$\sin\alpha = h_x \frac{\partial y}{\partial\xi}, \quad \cos\alpha = h_x \frac{\partial x}{\partial\xi} . \tag{1.13}$$

În mod analog vom avea

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial x}{\partial\eta}} \tag{1.12'}$$

şi

$$\sin\beta = h_y \frac{\partial y}{\partial\eta}, \quad \cos\beta = h_y \frac{\partial x}{\partial\eta} . \tag{1.13'}$$

Mai observăm că

$$\omega = \beta - \alpha, \tag{1.14}$$

de unde obţinem

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\dfrac{\partial y}{\partial\eta} - \dfrac{\partial x}{\partial\eta}\dfrac{\partial y}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\dfrac{\partial x}{\partial\eta} + \dfrac{\partial y}{\partial\xi}\dfrac{\partial y}{\partial\eta}} . \tag{1.15}$$

Ţinînd seama de (1.9) putem scrie şi

$$\sin\omega = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\dfrac{\partial y}{\partial\eta} - \dfrac{\partial x}{\partial\eta}\dfrac{\partial y}{\partial\xi}}{\sqrt{\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2\right]\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2\right]}} . \tag{1.16}$$

Vom avea

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial\xi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}\,dy, \\ d\eta &= \frac{\partial\eta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}\,dy \end{aligned} \tag{1.17}$$

şi, anulînd aceste creşteri de-a lungul liniilor de coordonate, rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial x}}{\dfrac{\partial\eta}{\partial y}}, \quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\xi}{\partial y}}. \tag{1.18}$$

Înlocuind pe dx şi dy cu ajutorul relaţiilor (1.3) în (1.17) şi identificînd coeficienţii infiniţilor mici, găsim

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta} &= 1, \\ \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial\eta} &= 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

şi

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta} &= 1, \\ \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial y}{b\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{1.19'}$$

Ultimele două relaţii (1.19), (1.19′) se pot obţine şi din identificarea formulelor (1.12), (1.12′) cu (1.18).

Introducem determinantul funcţional

$$D = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{1.20}$$

şi obţinem relaţiile care exprimă derivatele parţiale ale funcţiilor (1.2) în raport cu derivatele parţiale ale funcţiilor (1.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\xi} &= \frac{1}{D}\frac{\partial\eta}{\partial y}, & \frac{\partial x}{\partial\eta} &= -\frac{1}{D}\frac{\partial\xi}{\partial y}, \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} &= -\frac{1}{D}\frac{\partial\eta}{\partial x}, & \frac{\partial y}{\partial\eta} &= \frac{1}{D}\frac{\partial\xi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Înlocuind pe (1.21) în (1.20), găsim şi determinantul funcţional

$$\frac{1}{D}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,y)}=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}, \tag{1.20'}$$

care ne conduce la relaţiile

$$\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial x}&=D\frac{\partial y}{\partial\eta}, &\quad \frac{\partial\xi}{\partial y}&=-D\frac{\partial x}{\partial\eta},\\ \frac{\partial\eta}{\partial x}&=-D\frac{\partial y}{\partial\xi}, &\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}&=D\frac{\partial x}{\partial\xi},\end{aligned} \tag{1.21'}$$

unde D este dat de (1.20′).

În felul acesta, trecerea de la un sistem de coordonate la altul este pe deplin realizată din punct de vedere diferenţial.

Vom nota parametrii diferenţiali

$$h_\xi=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2}},\qquad h_\eta=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2}}, \tag{1.22}$$

relaţiile de transformare (1.21) permiţîndu-ne să scriem formulele (1.10) sub forma

$$h_x=Dh_\eta,\qquad h_y=Dh_\xi. \tag{1.23}$$

În definitiv, arcul elementar va fi dat de

$$D^2\,ds^2=\left(\frac{d\xi}{h_\eta}\right)^2+2\cos\omega\frac{d\xi\,d\eta}{h_\xi h_\eta}+\left(\frac{d\eta}{h_\xi}\right)^2. \tag{1.7''}$$

Unghiurile α şi β vor fi precizate prin

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=-h_\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}, &\quad \cos\alpha&=h_\eta\frac{\partial\eta}{\partial y},\\ \sin\beta&=h_\xi\frac{\partial\xi}{\partial x}, &\quad \cos\beta&=-h_\xi\frac{\partial\xi}{\partial y}\end{aligned} \tag{1.24}$$

iar pentru unghiul format de axele de coordonate putem scrie

$$\operatorname{tg}\omega=-\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}}{\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}} \tag{1.25}$$

şi

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega &= h_\xi h_\eta \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ \cos\omega &= -h_\xi h_\eta \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.25'}$$

De asemenea, vom avea

$$ds_\xi = \frac{1}{D}\frac{d\xi}{h_\eta}, \qquad ds_\eta = \frac{1}{D}\frac{d\eta}{h_\xi}. \tag{1.26}$$

Observăm că putem exprima determinantul funcţional sub una din formele

$$D = \frac{\sin\omega}{h_\xi h_\eta}, \qquad \frac{1}{D} = \frac{\sin\omega}{h_x h_y}. \tag{1.20''}$$

Pentru a calcula razele de curbură ale celor două linii de coordonate în punctul M (ξ, η), observăm că (fig. 4)

$$\frac{1}{\rho_\xi} = -\frac{d\alpha}{ds_\xi} = -\frac{h_x\, d\alpha}{d\xi},$$

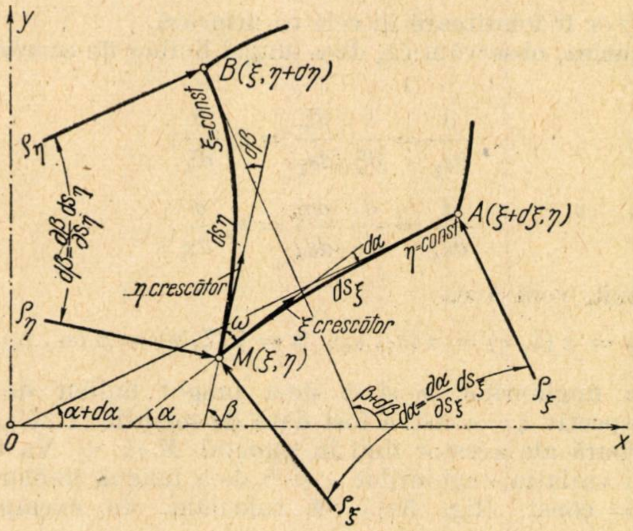

y
B(ξ, η+dη)
ξ=const
dβ
ρη
$d\beta = \frac{\partial\beta}{\partial s_\eta} ds_\eta$
dsη
A(ξ+dξ, η)
dα
η=const
η crescător
dsξ
ρη
ω
ξ crescător
M(ξ, η)
$\frac{\partial\alpha}{\partial s_\xi} ds_\xi$
ρξ
β+dβ
dα=
α+dα
α
β
0
x
ρξ

Fig. 4

deoarece la $ds_\xi > 0$ corespunde $d\alpha < 0$; apoi

$$d\sin\alpha = \cos\alpha\, d\alpha = h_x \frac{\partial x}{\partial\xi} d\alpha = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(h_x \frac{\partial y}{\partial\xi}\right) d\xi,$$

avînd $d\eta = 0$ pe linia de coordonate $\eta = \text{const}$. Putem folosi și relațiile

$$d\cos\alpha = -\sin\alpha\, d\alpha = -h_x \frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(h_x \frac{\partial x}{\partial \xi}\right) d\xi.$$

Procedînd analog și cu raza de curbură ρ_η (unde la o creștere $ds_\eta > 0$ corespunde $d\beta > 0$, obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_\xi} &= \frac{\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(h_x \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)}{\dfrac{\partial y}{\partial \xi}} = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(h_x \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)}{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}} = -h_x^3\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\right), \\ \frac{1}{\rho_\eta} &= -\frac{\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(h_y \dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)}{\dfrac{\partial y}{\partial \eta}} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(h_y \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)}{\dfrac{\partial x}{\partial \eta}} = h_y^3\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\right). \end{aligned} \tag{1.27}$$

În acest caz, ținînd seama și de (1.13), (1.13′), putem scrie și

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s_\xi} = -\frac{1}{\rho_\xi}, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial s_\eta} = \frac{1}{\rho_\eta}, \tag{1.27′}$$

expresii care vor fi folositoare în cele ce urmează.

De asemenea, observăm că, de-a lungul liniilor de coordonate putem scrie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_\xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{d\xi}{ds_\xi} = h_x \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial s_\eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{d\eta}{ds_\eta} = h_y \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

În general, vom avea

$$\alpha = \alpha(\xi, \eta) = \alpha(s_\xi, s_\eta), \quad \beta = \beta(\xi, \eta) = \beta(s_\xi, s_\eta).$$

Variația unghiurilor α și β de-a lungul liniilor de coordonate $\eta = \text{const.}$, respectiv $\xi = \text{const.}$ a fost dată de relațiile (1.27′), introducînd razele de curbură ale acestor linii în punctul $M(\xi, \eta)$. Va fi necesar să considerăm și variația unghiurilor α și β de-a lungul liniilor $\xi = \text{const.}$, respectiv $\eta = \text{const.}$ (fig. 5*a*). Să calculăm, de exemplu, variația $d\alpha = \dfrac{\partial \alpha}{\partial s_\eta} ds_\eta$ de-a lungul liniei $\xi = \text{const.}$ (fig. 5*b*). Ducînd tangentele la două linii $\eta = \text{const.}$ infinit vecine, obținem punctul J'; construim apoi arcul de cerc $MJ'JB$, capabil de acest unghi. Dacă I este centrul de curbură, vom lua J astfel ca dreapta JI să fie perpendiculară pe coarda MB. În acest caz putem introduce o rază ρ'_η, ca în figură. Procedînd analog de-a lungul liniei $\eta = \text{const.}$ şi observînd că, pentru $ds_\xi > 0$ corespunde $d\beta < 0$ (fig. 5*a*), obţinem în definitiv

$$\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta} = \frac{1}{\rho'_\eta}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial s_\xi} = -\frac{1}{\rho'_\xi}. \tag{1.29}$$

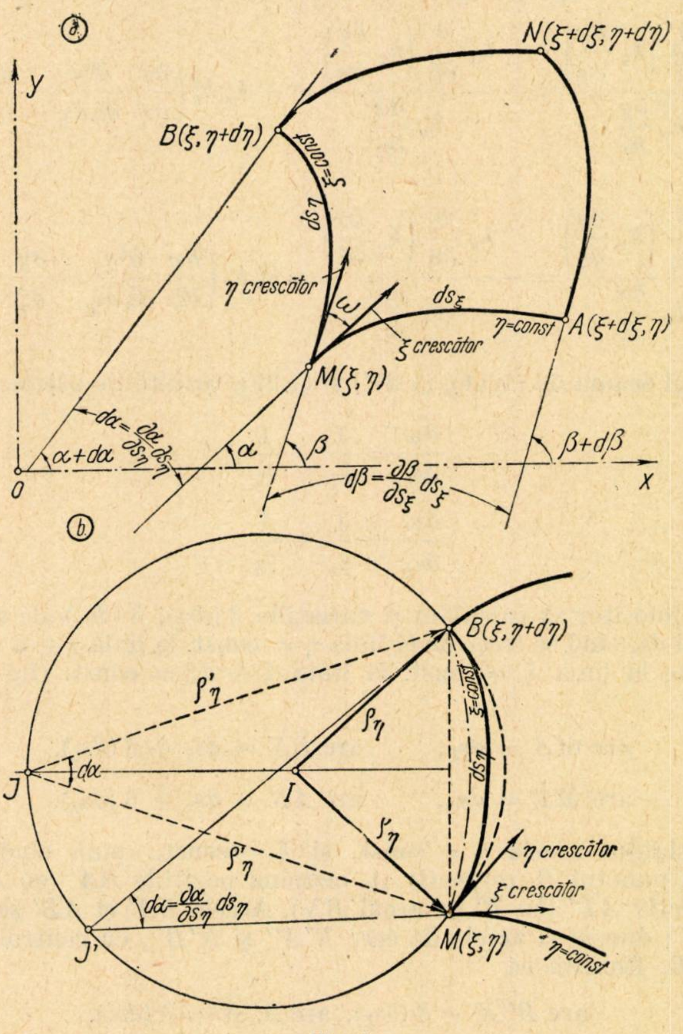

a
N(ξ+dξ, η+dη)
y
B(ξ, η+dη)
ξ=const
dsη
η crescător
ω
dsξ
η=const
A(ξ+dξ, η)
ξ crescător
M(ξ, η)
dα = ∂α/∂sη dsη
α+dα
α
β
β+dβ
dβ = ∂β/∂sξ dsξ
0
x
b
B(ξ, η+dη)
ρ'η
ρη
ξ=const
dsη
J
dα
I
ρη
ρ'η
η crescător
ξ crescător
dα = ∂α/∂sη dsη
J'
M(ξ, η)
η=const

Fig. 5

Pe de altă parte, din

$$\frac{\partial}{\partial s_\eta}(\sin\alpha) = \cos\alpha\,\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta} = h_x\,\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta} = h_y\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left(h_x\,\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)$$

sau din

$$\frac{\partial}{\partial s_\eta}(\cos\alpha) = -\sin\alpha\,\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta} = -h_x\,\frac{\partial y}{\partial\xi}\,\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta} = h_y\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left(h_x\,\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)$$

şi din relaţii analoage pentru unghiul β, mai putem scrie

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho'_\xi} &= \frac{h_x\,\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(h_y\,\dfrac{\partial x}{\partial\eta}\right)}{h_y\,\dfrac{\partial y}{\partial\eta}} = -\,\frac{h_x\,\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(h_y\,\dfrac{\partial y}{\partial\eta}\right)}{h_y\,\dfrac{\partial x}{\partial\eta}} = -\,h_x\,h_y^2\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial y}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}\right),\\ \frac{1}{\rho'_\eta} &= \frac{h_y\,\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(h_x\,\dfrac{\partial y}{\partial\xi}\right)}{h_x\,\dfrac{\partial x}{\partial\xi}} = -\,\frac{h_y\,\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(h_x\,\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\right)}{h_x\,\dfrac{\partial y}{\partial\xi}} = h_x^2\,h_y\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial y}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}\right).\end{aligned} \tag{1.29'}$$

Ţinînd seama de (1.14), (1.27′) şi (1.29), rezultă de asemenea

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial s_\xi} &= \frac{1}{\rho_\xi} - \frac{1}{\rho'_\xi},\\ \frac{\partial\omega}{\partial s_\eta} &= \frac{1}{\rho_\eta} - \frac{1}{\rho'_\eta}.\end{aligned} \tag{1.30}$$

Este folositor să calculăm şi variaţiile $\delta\,(ds_\xi)$, $\delta\,(ds_\eta)$ ale elementelor de arc ds_ξ şi ds_η cînd se trece de la linia $\eta = \text{const.}$ la linia $\eta + d\,\eta = \text{const.}$, respectiv de la linia $\xi = \text{const.}$ la linia $\xi + d\xi = \text{const.}$ (fig. 6*a*). Vom avea astfel

$$\text{arc}\ MA = ds_\xi, \qquad \text{arc}\ BN = ds_\xi + \delta\,(ds_\xi),$$

$$\text{arc}\ MB = ds_\eta, \qquad \text{arc}\ AN = ds_\eta + \delta\,(ds_\eta).$$

Translatăm arcele $\eta = \text{const.}$ şi $\xi = \text{const.}$, pînă cînd ajung să treacă prin punctul B, respectiv A, ocupînd poziţiile BA' (cu A' pe arcul AN), respectiv AB' (cu B' pe arcul BN). Arcele BA' şi AB' se vor intersecta în N'; ducem şi arcele de cerc $N'A''$ şi $N'B''$, cu centrul în A, respectiv în B. Rezultă că

$$\text{arc}\ B''N = \delta\,(ds_\xi),\ \text{arc}\ A''N = \delta\,(ds_\eta).$$

Pe de altă parte, ţinînd seama de (1.29), putem scrie

$$\text{arc}\ N'A'' = \left(-\,\frac{\partial\beta}{\partial s_\xi}\,ds_\xi\right)ds_\eta = \frac{ds_\xi\,ds_\eta}{\rho'_\xi},\quad \text{arc}\ N'B'' = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta}\,ds_\eta\right)ds_\xi = \frac{ds_\xi\,ds_\eta}{\rho'_\eta}$$

observînd că la $ds_\xi > 0$ corespunde $d\beta < 0$.

Înlocuind arcele de curbă prin corzile corespunzătoare (fig. 6*b*), din simple relații trigonometrice căpătăm

$$\begin{aligned}\delta\,(ds_\xi) &= \left(\frac{1}{\rho'_\xi} + \frac{\cos\omega}{\rho'_\eta}\right)\frac{ds_\xi\, ds_\eta}{\sin\omega},\\ \delta\,(ds_\eta) &= \left(\frac{1}{\rho'_\eta} + \frac{\cos\omega}{\rho'_\xi}\right)\frac{ds_\xi\, ds_\eta}{\sin\omega}.\end{aligned} \tag{1.31}$$

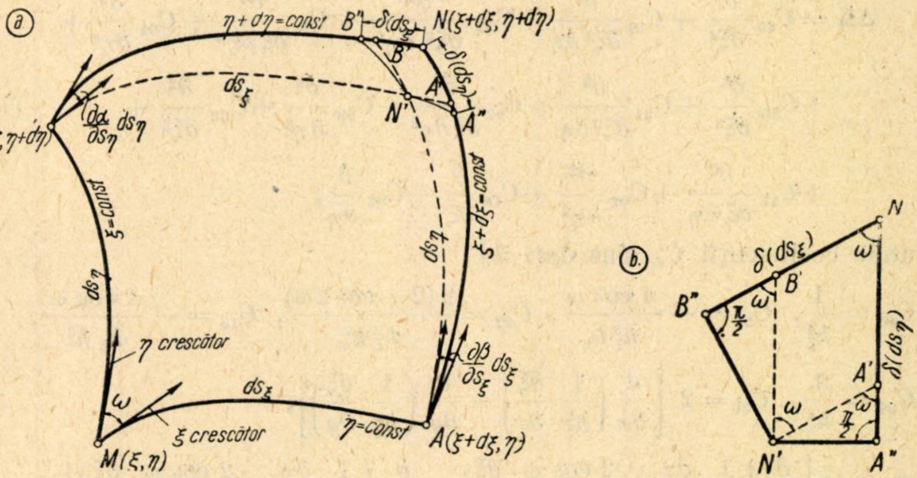


Fig. 6

1.3. Operatori diferențiali. Vom exprima unii operatori diferențiali, utili în problema plană a teoriei elasticității în coordonate carteziene ortogonale, cu ajutorul coordonatelor curbilinii.

Astfel, operatorii de derivare de ordinul întîi vor fi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta},\\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Pentru operatorii de derivare de ordinul al doilea obținem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2\,\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial\eta},\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2\,\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial\eta},\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta} +\\ &+ \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}.\end{aligned} \tag{1.33'}$$

În acest caz, operatorul lui Laplace [1]) va deveni

$$\Delta = \frac{1}{h_\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{2\cos\omega}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{h_\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \Delta\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta}. \tag{1.34}$$

Procedînd analog cu operatorul armonic, găsim operatorul biarmonic sub forma

$$\begin{aligned}\Delta\Delta = {} & C_{40}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + C_{31}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\eta} + C_{22}\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\eta^2} + C_{13}\frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\eta^3} + C_{04}\frac{\partial^4}{\partial\eta^4} + \\ & + C_{30}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + C_{21}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta} + C_{12}\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\eta^2} + C_{03}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3} + C_{20}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \\ & + C_{11}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta} + C_{02}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + C_{10}\frac{\partial}{\partial\xi} + C_{01}\frac{\partial}{\partial\eta},\end{aligned} \tag{1.35}$$

unde coeficienții C_{ij} sînt dați de

$$\begin{aligned}& C_{40} = \frac{1}{h_\xi^4}, \quad C_{31} = -\frac{4\cos\omega}{h_\xi^3 h_\eta}, \quad C_{22} = \frac{2(2+\cos 2\omega)}{h_\xi^2 h_\eta^2}, \quad C_{13} = -\frac{4\cos\omega}{h_\xi h_\eta^3}, \\ & C_{04} = \frac{1}{h_\eta^4}, \quad C_{30} = 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h_\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{h_\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right], \\ & C_{21} = 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h_\xi^2}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{2\cos\omega}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{h_\xi^2}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{2\cos\omega}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right], \\ & C_{12} = 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h_\eta^2}\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{2\cos\omega}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{h_\eta^2}\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{2\cos\omega}{h_\xi h_\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right], \\ & C_{03} = 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h_\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{h_\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right], \\ & C_{20} = 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta\xi\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta\xi\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right] - (\Delta\xi)^2 + \Delta\left(\frac{1}{h_\xi^2}\right), \\ & C_{11} = 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta\xi\frac{\partial\eta}{\partial x} + \Delta\eta\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta\xi\frac{\partial\eta}{\partial y} + \Delta\eta\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right] - \\ & \qquad - 2\Delta\xi\,\Delta\eta - 2\,\Delta\left(\frac{\cos\omega}{h_\xi h_\eta}\right), \\ & C_{02} = 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta\eta\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\right] - (\Delta\eta)^2 + \Delta\left(\frac{1}{h_\eta^2}\right), \\ & C_{10} = \Delta\Delta\xi, \qquad C_{01} = \Delta\Delta\eta.\end{aligned} \tag{1.35'}$$

---

[1]) Aici și în cele ce urmează vom conveni să numim acest operator tot operator armonic cu toate că are o formă diferită, folosind aceeași notație ; analog pentru operatorul biarmonic

Coeficienţii care apar în expresiile operatorilor diferenţiali de mai sus sînt funcţii de variabilele x şi y. Este de multe ori util să exprimăm aceşti coeficienţi în funcţie de variabilele ξ şi η. Pentru acesta observăm că, ţinînd seama de relaţiile (1.21′), putem scrie

$$\begin{aligned} \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Operatorii de derivare de ordinul al doilea capătă forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{1}{D}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial D}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial D}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \\ &+ \frac{1}{D}\left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \xi} - \\ &- \frac{1}{D}\left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{D^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial D}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial D}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \\ &+ \frac{1}{D}\left[\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \xi} - \\ &- \frac{1}{D}\left[\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} &= -\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) - \\ &- \frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial D}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial D}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \\ &= -\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \\ &- \frac{1}{D}\left[\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \xi} + \\ &+ \frac{1}{D}\left[\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{1.37'}$$

Observăm că, schimbînd ordinea de derivare la ultimul operator, mai putem scrie

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} &= -\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) - \\ &- \frac{1}{D}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial D}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial D}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) = \\ &= -\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \\ &- \frac{1}{D}\left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \xi} + \\ &+ \frac{1}{D}\left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{1.37''}$$

Operatorul lui Laplace va deveni

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2}\Delta &= \frac{1}{h_y^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{2\cos\omega}{h_x h_y}\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{1}{h_x^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \\ &+ \frac{1}{D}\left[\frac{1}{2D}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{D}{h_y}\right)^2 - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \xi} + \\ &+ \frac{1}{D}\left[\frac{1}{2D}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{D}{h_x}\right)^2 - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned} \tag{1.38}$$

fiind parametrul diferențial de ordinul al doilea al lui Lamé.

Operatorul biarmonic se obține aplicînd de două ori operatorul armonic. Deoarece coeficienții acestui din urmă operator sînt funcții de ξ și η, în mod practic se calculează întîi Δ și apoi se repetă operația.

În sfîrșit, este adesea practic să folosim operatori de derivare de-a lungul liniilor de coordonate. Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Utilizînd relațiile (1.13), (1.13′), (1.28) și (1.39), rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_\xi} &= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial s_\eta} &= \cos\beta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\beta\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.40}$$

şi, ţinînd seama de (1.14), se mai poate scrie

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \cos\omega\,\frac{\partial}{\partial s_\eta} = \sin\omega\left(\sin\beta\,\frac{\partial}{\partial x} - \cos\beta\,\frac{\partial}{\partial y}\right),\\ &\frac{\partial}{\partial s_\eta} - \cos\omega\,\frac{\partial}{\partial s_\xi} = \sin\omega\left(-\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Spre deosebire de operatorii (1.39), operatorii (1.40) nu sînt permutabili între ei. Ţinînd seama de (1.29) şi (1.40), vom putea scrie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} &= \cos\alpha\cos\beta\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin(\alpha+\beta)\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \sin\alpha\sin\beta\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \\ &\quad + \frac{\sin\beta}{\rho'_\xi}\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\cos\beta}{\rho'_\xi}\,\frac{\partial}{\partial y},\\ \frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} &= \cos\alpha\cos\beta\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sin(\alpha+\beta)\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \sin\alpha\sin\beta\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \\ &\quad - \frac{\sin\alpha}{\rho'_\eta}\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cos\alpha}{\rho'_\eta}\,\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \tag{1.42}$$

deci operatorii (1.40) sînt permutabili numai dacă relaţiile

$$\frac{\sin\alpha}{\rho'_\eta} + \frac{\sin\beta}{\rho'_\xi} = 0, \qquad \frac{\cos\alpha}{\rho'_\eta} + \frac{\cos\beta}{\rho'_\xi} = 0 \tag{1.43}$$

sînt îndeplinite simultan. De aici rezultă că trebuie să avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,$$

ceea ce nu se poate, deoarece $\omega = \beta - \alpha$; sau ar trebui ca

$$\frac{1}{\rho'_\xi} = \frac{1}{\rho'_\eta} = 0,$$

ceea ce revine la condiţia ca unghiurile făcute cu axa Ox să fie funcţii de o singură coordonată curbilinie

$$\alpha = \alpha(s_\xi), \qquad \beta = \beta(s_\eta), \tag{1.43$'$}$$

deci ca tangentele la o familie de linii de coordonate, de-a lungul unei linii de coordonate din cealaltă familie, să fie paralele între ele.

Ţinînd seama şi de (1.41), rezultă că

$$\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} - \frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} = \operatorname{cosec}\omega\left[\left(\frac{1}{\rho'_\xi} + \frac{\cos\omega}{\rho'_\eta}\right)\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \left(\frac{1}{\rho'_\eta} + \frac{\cos\omega}{\rho'_\xi}\right)\frac{\partial}{\partial s_\eta}\right] \tag{1.44}$$

iar relaţiile (1.31) ne permit să scriem şi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} - \frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi}\right) ds_\xi\,ds_\eta = \delta(ds_\xi)\,\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \delta(ds_\eta)\,\frac{\partial}{\partial s_\eta}. \tag{1.44$'$}$$

Deci, cei doi operatori (1.40) sînt permutabili între ei dacă și numai dacă două linii de coordonate oarecare ale uneia din familii determină pe liniile de coordonate din cealaltă familie arce egale și invers.

De asemenea, din (1.40) obținem și

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \operatorname{cosec} \omega \left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial s_\xi} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial s_\eta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \operatorname{cosec} \omega \left(-\cos \beta \frac{\partial}{\partial s_\xi} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial s_\eta} \right). \end{aligned} \tag{1.45}$$

Prin aplicarea succesivă a operatorilor (1.45) și ținînd seama de (1.27′) și (1.29), găsim operatorii de ordinul al doilea

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = {} & \operatorname{cosec}^2 \omega \left\{ \sin^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} - \sin \alpha \sin \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial s_\xi \, \partial s_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta \, \partial s_\xi} \right) + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} - \right. \\ & - \operatorname{cosec} \omega \left[\sin \beta \left(\frac{\cos \omega}{\rho_\xi} \sin \beta - \frac{1}{\rho'_\xi} \sin \alpha \right) + \sin \alpha \left(\frac{\cos \omega}{\rho'_\eta} \sin \beta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\rho_\eta} \sin \alpha \right) \right] \frac{\partial}{\partial s_\xi} - \operatorname{cosec} \omega \left[\sin \beta \left(\frac{\cos \omega}{\rho'_\xi} \sin \alpha - \frac{1}{\rho_\xi} \sin \beta \right) + \right. \\ & \left. \left. + \sin \alpha \left(\frac{\cos \omega}{\rho_\eta} \sin \alpha - \frac{1}{\rho'_\eta} \sin \beta \right) \right] \frac{\partial}{\partial s_\eta} \right\}, \end{aligned} \tag*{(1.46}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} = {} & \operatorname{cosec}^2 \omega \left\{ \cos^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} - \cos \alpha \cos \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial s_\xi \, \partial s_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta \, \partial s_\xi} \right) + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} - \right. \\ & - \operatorname{cosec} \omega \left[\cos \beta \left(\frac{\cos \omega}{\rho_\xi} \cos \beta - \frac{1}{\rho'_\xi} \cos \alpha \right) + \cos \alpha \left(\frac{\cos \omega}{\rho'_\eta} \cos \beta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\rho_\eta} \cos \alpha \right) \right] \frac{\partial}{\partial s_\xi} - \operatorname{cosec} \omega \left[\cos \beta \left(\frac{\cos \omega}{\rho'_\xi} \cos \alpha - \frac{1}{\rho_\xi} \cos \beta \right) + \right. \\ & \left. \left. + \cos \alpha \left(\frac{\cos \omega}{\rho_\eta} \cos \alpha - \frac{1}{\rho'_\eta} \cos \beta \right) \right] \frac{\partial}{\partial s_\eta} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} = {} & \operatorname{cosec}^2 \omega \left\{ - \sin \beta \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} + \sin \beta \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial s_\xi \, \partial s_\eta} - + \right. \\ & + \sin \alpha \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial s_\eta \, \partial s_\xi} - \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} + \operatorname{cosec} \omega \left[\sin \beta \left(\frac{\cos \omega}{\rho_\xi} \cos \beta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\rho'_\xi} \cos \alpha \right) + \sin \alpha \left(\frac{\cos \omega}{\rho'_\eta} \cos \beta - \frac{1}{\rho_\eta} \cos \alpha \right) \right] \frac{\partial}{\partial s_\xi} + \\ & + \operatorname{cosec} \omega \left[\sin \beta \left(\frac{\cos \omega}{\rho'_\xi} \cos \alpha - \frac{1}{\rho_\xi} \cos \beta \right) + \sin \alpha \left(\frac{\cos \omega}{\rho_\eta} \cos \alpha - \right. \right. \end{aligned} \tag{1.46′}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\rho_\eta'}\cos\beta\Bigr)\Bigr]\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Bigr\} = \operatorname{cosec}^2\omega\Bigl\{-\sin\beta\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2}+\\
&+\sin\alpha\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta}+\sin\beta\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi}-\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2}+\\
&+\operatorname{cosec}\omega\Bigl[\cos\beta\Bigl(\frac{\cos\omega}{\rho_\xi}\sin\beta-\frac{1}{\rho_\xi'}\sin\alpha\Bigr)+\cos\alpha\Bigl(\frac{\cos\omega}{\rho_\eta'}\sin\beta- \qquad (1.46')\\
&-\frac{1}{\rho_\eta}\sin\alpha\Bigr)\Bigr]\frac{\partial}{\partial s_\xi}+\operatorname{cosec}\omega\Bigl[\cos\beta\Bigl(\frac{\cos\omega}{\rho_\xi'}\sin\alpha-\frac{1}{\rho_\xi}\sin\beta\Bigr)+\\
&+\cos\alpha\Bigl(\frac{\cos\omega}{\rho_\eta}\sin\alpha-\frac{1}{\rho_\eta'}\sin\beta\Bigr)\Bigr]\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Bigr\}.
\end{aligned}
$$

Ținînd seama și de (1.44), putem scrie operatorul lui Laplace sub forma

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \operatorname{cosec}^2\omega\Bigl\{\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2}-\cos\omega\Bigl(\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta}+\frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi}\Bigr)+\frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2}-\\
&-\operatorname{cosec}\omega\Bigl[\Bigl(\frac{1}{\rho_\xi''}-\frac{1}{\rho_\xi'}\Bigr)\cos\omega+\frac{\cos^2\omega}{\rho_\eta'}-\frac{1}{\rho_\eta}\Bigr]\frac{\partial}{\partial s_\xi}-\\
&-\operatorname{cosec}\omega\Bigl[\Bigl(\frac{1}{\rho_\eta}-\frac{1}{\rho_\eta'}\Bigr)\cos\omega+\frac{\cos^2\omega}{\rho_\xi'}-\frac{1}{\rho_\xi}\Bigr]\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Bigr\}=\\
&=\operatorname{cosec}^2\omega\Bigl\{\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2}-2\cos\omega\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta}+\frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2}-\\
&-\operatorname{cosec}\omega\Bigl[\Bigl(\frac{1}{\rho_\xi''}-\frac{2}{\rho_\xi'}\Bigr)\cos\omega-\frac{1}{\rho_\eta}\Bigr]\frac{\partial}{\partial s_\xi}- \qquad (1.47)\\
&-\operatorname{cosec}\omega\Bigl(2\frac{\cos^2\omega}{\rho_\xi'}-\frac{1}{\rho_\xi}+\frac{\cos\omega}{\rho_\eta}\Bigr)\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Bigr\}=\\
&=\operatorname{cosec}^2\omega\Bigl\{\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2}-2\cos\omega\frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi}+\frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2}-\\
&-\operatorname{cosec}\omega\Bigl(2\frac{\cos^2\omega}{\rho_\eta'}-\frac{1}{\rho_\eta}+\frac{\cos\omega}{\rho_\xi}\Bigr)\frac{\partial}{\partial s_\xi}-\\
&-\operatorname{cosec}\omega\Bigl[\Bigl(\frac{1}{\rho_\eta}-\frac{2}{\rho_\eta'}\Bigr)\cos\omega-\frac{1}{\rho_\xi}\Bigr]\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Bigr\},
\end{aligned}
$$

operatorul biarmonic obținîndu-se prin aplicarea succesivă a operatorului (1.47).

Fie acum un element de arc ds', de normală exterioară $\bar{n}$ (fig. 7). În coordonate carteziene ortogonale derivata normală şi derivata tangenţială se vor putea calcula cu formulele

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \cos(n, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(n, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial s} &= -\cos(n, y) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(n, x) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

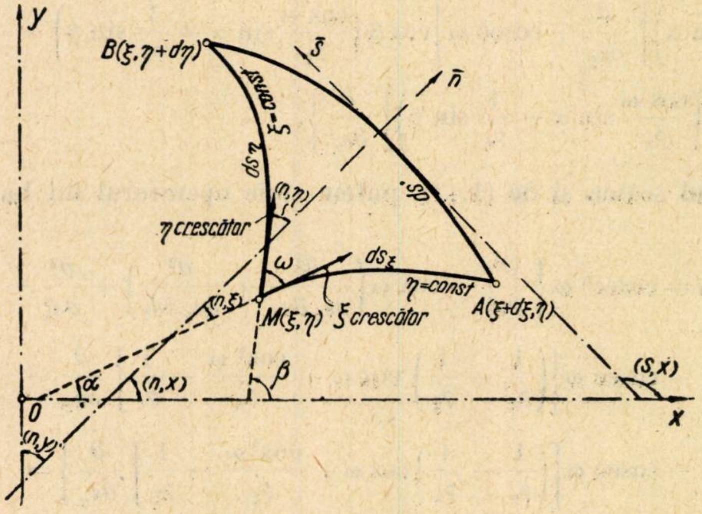


Fig. 7

Ţinînd seama de (1.45), rezultă că aceşti operatori se vor putea exprima în coordonate curbilinii sub forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \operatorname{cosec} \omega \left[\sin(n, \eta) \frac{\partial}{\partial s_\xi} + \sin(n, \xi) \frac{\partial}{\partial s_\eta} \right], \\ \frac{\partial}{\partial s} &= \operatorname{cosec} \omega \left[-\cos(n, \eta) \frac{\partial}{\partial s_\xi} + \cos(n, \xi) \frac{\partial}{\partial s_\eta} \right], \end{aligned} \tag{1.49}$$

unde (n, ξ), (n, η) sînt unghiurile făcute de normala exterioară $\bar{n}$ cu liniile de coordonate $\eta = \text{const.}$, respectiv $\xi = \text{const.}$

Aceşti operatori sînt foarte utili în punerea condiţiilor la limită.

1.4. Coordonate curbilinii izogonale. Numim coordonate curbilinii izogonale acel sistem de coordonate pentru care liniile celor două familii de linii de coordonate sînt egal înclinate unele pe celelalte, deci pentru care avem $0 < \omega = \text{const.} < \pi$. În particular, în cazul în care $\omega = \frac{\pi}{2}$, obţinem coordonatele curbilinii ortogonale.

În cazul coordonatelor curbilinii izogonale se pot obţine anumite simplificări ale diferiţilor operatori introduşi. În primul rînd observăm că derivatele parțiale ale funcției ω în raport cu s_ξ și s_η sînt nule; în baza relațiilor (1.30), putem deci scrie

$$\rho'_\xi = \rho_\xi\,, \qquad \rho'_\eta = \rho_\eta\,, \tag{1.50}$$

razele ρ'_ξ, ρ'_η pe care le-am introdus devenind, de asemenea, raze de curbură. Observăm, de asemenea, că proprietatea (1.50) caracterizează coordonatele curbilinii izogonale.

Operatorii diferențiali de ordinul al doilea (1.46), (1.46′) capătă forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \operatorname{cosec}^2\omega\Big[\sin^2\beta\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} - \sin\alpha\sin\beta\left(\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi}\right) + \sin^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} - \\ &\quad - \left(\frac{\sin\beta}{\rho_\xi} + \frac{\sin\alpha}{\rho_\eta}\right)\left(\cos\beta\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial s_\eta}\right)\Big],\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \operatorname{cosec}^2\omega\Big[\cos^2\beta\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} - \cos\alpha\cos\beta\left(\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi}\right) + \cos^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} + \\ &\quad + \left(\frac{\cos\beta}{\rho_\xi} + \frac{\cos\alpha}{\rho_\eta}\right)\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial s_\eta}\right)\Big],\end{aligned}\tag{1.51}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} &= \operatorname{cosec}^2\omega\Big[-\sin\beta\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} + \sin\beta\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} + \\ &\quad + \sin\alpha\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} - \sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} - \left(\frac{\sin\beta}{\rho_\xi} + \frac{\sin\alpha}{\rho_\eta}\right)\Big(\sin\beta\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \\ &\quad - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Big)\Big] = \operatorname{cosec}^2\omega\Big[-\sin\beta\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} + \sin\alpha\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} + \\ &\quad + \sin\beta\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} - \sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} + \\ &\quad + \left(\frac{\cos\beta}{\rho_\xi} + \frac{\cos\alpha}{\rho_\eta}\right)\left(\cos\beta\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial s_\eta}\right)\end{aligned}\tag{1.51′}$$

iar operatorul lui Laplace devine

$$\begin{aligned}\Delta &= \operatorname{cosec}^2\omega\Big[\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} - \cos\omega\left(\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} + \sin\omega\Big(\frac{1}{\rho_\eta}\frac{\partial}{\partial s_\xi} + \\ &\quad + \frac{1}{\rho_\xi}\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Big)\Big] = \operatorname{cosec}^2\omega\Big[\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} - 2\cos\omega\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\,\partial s_\eta} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} + \operatorname{cosec}\omega\Big(\frac{\cos\omega}{\rho_\xi} + \\ &\quad + \frac{1}{\rho_\eta}\Big)\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \operatorname{cosec}\omega\left(\frac{\cos 2\omega}{\rho_\xi} + \frac{\cos\omega}{\rho_\eta}\right)\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Big] = \\ &= \operatorname{cosec}^2\omega\Big[\frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} - 2\cos\omega\frac{\partial^2}{\partial s_\eta\,\partial s_\xi} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} - \operatorname{cosec}\omega\Big(\frac{\cos\omega}{\rho_\xi} + \\ &\quad + \frac{\cos 2\omega}{\rho_\eta}\Big)\frac{\partial}{\partial s_\xi} + \operatorname{cosec}\omega\left(\frac{\cos\omega}{\rho_\eta} + \frac{1}{\rho_\xi}\right)\frac{\partial}{\partial s_\eta}\Big].\end{aligned}\tag{1.52}$$

1.5. Coordonate curbilinii ortogonale. În cazul coordonatelor curbilinii ortogonale vom avea

$$\cos\omega = \operatorname{cotg}\omega = 0, \qquad \sin\omega = \operatorname{cosec}\omega = 1.$$

Formulele (1.9) şi (1.25′) ne arată că aceste sisteme de coordonate se caracterizează prin una din relaţiile

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\,\frac{\partial y}{\partial\eta} = 0, \tag{1.53}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\,\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0. \tag{1.53'}$$

Operatorii diferenţiali (1.34), (1.35), (1.35′) suferă anumite simplificări. Pentru acesta observăm că determinantul funcţional D se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{D} = -\frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial x}}{\dfrac{\partial\xi}{\partial y}}\,h_\eta^2 = \frac{\dfrac{\partial\eta}{\partial y}}{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}}\,h_\eta^2 = -\frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\eta}{\partial x}}\,h_\xi^2 = \frac{\dfrac{\partial\xi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\eta}{\partial y}}\,h_\xi^2, \tag{1.54}$$

$$D = -\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial y}{\partial\xi}}\,h_y^2 = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial x}{\partial\xi}}\,h_y^2 = -\frac{\dfrac{\partial y}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial x}{\partial\eta}}\,h_x^2 = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial y}{\partial\eta}}\,h_x^2, \tag{1.54'}$$

de unde rezultă

$$D^2 = \frac{1}{h_\xi^2\,h_\eta^2} = h_x^2\,h_y^2. \tag{1.55}$$

Operatorul lui Laplace (1.38) va deveni astfel

$$\begin{aligned}\Delta = {} & h_x^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + h_y^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{h_x^2}{\dfrac{\partial x}{\partial\xi}}\left[\frac{\partial x}{\partial\xi}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial y}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}\right) - \right.\\ & \left. - \frac{\partial y}{\partial\eta}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{h_y^2}{\dfrac{\partial y}{\partial\eta}}\left[\frac{\partial y}{\partial\eta}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta}\right) - \right.\\ & \left. - \frac{\partial x}{\partial\xi}\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\eta}.\end{aligned} \tag{1.56}$$

De asemenea, în sistemul de coordonate $(s_\xi,\ s_\eta)$ putem scrie operatorul armonic (1.52) sub forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s_\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_\eta^2} + \frac{1}{\rho_\eta}\,\frac{\partial}{\partial s_\xi} + \frac{1}{\rho_\xi}\,\frac{\partial}{\partial s_\eta}. \tag{1.57}$$

Variația (1.31) a elementelor de arc va deveni

$$\begin{aligned}\delta(ds_\xi) &= \frac{ds_\xi\, ds_\eta}{\rho_\xi} = -\, ds_\eta\, d\alpha,\\ \delta(ds_\eta) &= \frac{ds_\xi\, ds_\eta}{\rho_\eta} = ds_\xi\, d\beta\end{aligned} \tag{1.58}$$

iar formula (1.44), care ne arată influența ordinei de derivare, se scrie

$$\frac{\partial^2}{\partial s_\xi\, \partial s_\eta} - \frac{\partial^2}{\partial s_\eta\, \partial s_\xi} = \frac{1}{\rho_\xi}\frac{\partial}{\partial s_\xi} - \frac{1}{\rho_\eta}\frac{\partial}{\partial s_\eta}. \tag{1.59}$$

Cazul particular în care liniile de coordonate sînt traiectoriile tensiunilor normale principale sau traiectoriile tensiunilor tangențiale extreme a fost considerat de J. C. Maxwell [18].

1.6. Coordonate curbilinii armonice. În cele ce urmează vom particulariza rezultatele obținute la punctul anterior, luînd în considerare coordonatele curbilinii armonice, în care sînt cuprinse cele mai multe sisteme de coordonate uzuale. Menționăm că aceste coordonate se mai numesc și coordonate izoterme, datorită interesului deosebit pe care-l prezintă în problema termoelastică.

Numim coordonate curbilinii armonice acel sistem de coordonate pentru care relațiile de transformare (1.2) verifică ecuațiile cu derivate parțiale de tip Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial y}{\partial \eta},\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -\frac{\partial y}{\partial \xi},\end{aligned} \tag{1.60}$$

deci sînt funcții armonic conjugate pentru care

$$\Delta x(\xi, \eta) = \Delta y(\xi, \eta) = 0. \tag{1.61}$$

Se observă cu ușurință că este verificată condiția (1.53), deci coordonatele curbilinii armonice sînt un caz particular de coordonate curbilinii ortogonale.

Relațiile (1.21), (1.21′) ne arată că și relațiile de transformare inverse (1.1) sînt date de ecuații de același tip

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial y},\\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x},\end{aligned} \tag{1.60′}$$

condiția de ortogonalitate (1.53′) fiind verificată. Aceste funcții vor fi de asemenea armonic conjugate

$$\Delta \xi(x, y) = \Delta \eta(x, y) = 0. \tag{1.61′}$$

Parametrii diferenţiali de ordinul întîi vor fi egali între ei, fiind daţi de

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_x^2} = \frac{1}{h_y^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 . \tag{1.62}$$

Determinantul funcţional va fi

$$D = h^2 \tag{1.63}$$

iar relaţiile (1.23) ne permit să scriem

$$h_\xi = h_\eta = \frac{1}{h} . \tag{1.62'}$$

Arcul elementar va fi dat de

$$ds^2 = \frac{1}{h^2}\,(d\xi^2 + d\eta^2), \tag{1.64}$$

această relaţie caracterizînd coordonatele armonice; de asemenea elementele de arc de-a lungul liniilor de coordonate vor fi

$$ds_\xi = \frac{d\xi}{h}, \qquad ds_\eta = \frac{d\eta}{h} . \tag{1.64'}$$

Putem scrie analog şi relaţiile între operatori

$$\frac{\partial}{\partial s_\xi} = h\,\frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial s_\eta} = h\,\frac{\partial}{\partial \eta} . \tag{1.65}$$

Razele de curbură într-un punct curent sînt date de

$$\frac{1}{\rho_\xi} = -\frac{\partial h}{\partial \eta} = -\frac{1}{h}\,\frac{\partial h}{\partial s_\eta}, \qquad \frac{1}{\rho_\eta} = -\frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{1}{h}\,\frac{\partial h}{\partial s_\xi} . \tag{1.66}$$

În cazul coordonatelor curbilinii (ξ, η), operatorii diferenţiali de ordinul întîi vor fi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial \eta} = h^2\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial \eta} = h^2\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial}{\partial \eta}\right). \end{aligned} \tag{1.67}$$

Operatorii diferenţiali de ordinul al doilea nu capătă o formă remarcabilă. Parametrul diferenţial de ordinul al doilea va fi dat de

$$\Delta = h^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right), \tag{1.68}$$

prin aplicarea lui succesivă obţinîndu-se şi operatorul biarmonic.

În cazul coordonatelor curbilinii (s_ξ, s_η), folosim tot expresia (1.57).

Primită la redacţie la 14 iunie 1962.

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

I. ВВЕДЕНИЕ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

РЕЗЮМЕ

Исходя из идеи использования произвольных криволинейных координат (ξ, η) или (s_ξ, s_η), выбранных таким образом, чтобы контур данной области был образован из линий координат, показываются в трех статьях наиболее важные результаты, касающиеся плоской задачи теории упругости в такой системе координат. В конце даются формулы для напряжений и деформации в данной задаче.

В первой части работы дается несколько результатов математического порядка, полезных в последующих расчетах (некоторые результаты, уже известные, представлены в новой форме, для единства изложения). Выражается элемент дуги, оператор второго порядка и оператор Лапласа различными способами: в частности, вводятся радиусы ρ'_ξ, ρ'_η с помощью соотношений (1.29), (1.29′), находя, таким образом, для этих операторов формулы (1.46), (1.46′), (1.47).

Полученные результаты применяются для частных случаев изогональных, ортогональных и гармонических координат.

SUR LE PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES CURVILIGNES QUELCONQUES

I. INTRODUCTION. PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES

RÉSUMÉ

En partant de l'idée d'utiliser des coordonnées curvilignes quelconques (ξ, η) ou (s_ξ, s_η) choisies, en fonction du domaine donné, de manière que le contour du domaine soit formé par des lignes de coordonnées, on expose — au cours de trois articles — les résultats les plus importants concernant le problème plan de la théorie de l'élasticité dans un tel système de coordonnées, et on conclut par une formulation du problème en tensions et en déplacements.

Dans la première partie du travail on donne quelques résultats d'ordre mathématique, utiles dans l'étude qui suit (les quelques résultats qui sont déjà connus sont mis sous une forme nouvelle, pour l'unité de l'exposition). On exprime l'élément d'arc, les opérateurs différentiels du second ordre et l'opérateur de Laplace de différentes manières; on introduit surtout les rayons ρ'_ξ, ρ'_η à l'aide des relations (1.29) (1.29′), ce qui permet de trouver pour ces opérateurs les formes remarquables (1.46), (1.46′), (1.47).

On particularise les résultats obtenus pour les coordonnées isogonales, orthogonales et harmoniques.

BIBLIOGRAFIE

1. C. W. Borchardt, *Über die Transformation der Elasticitätsgleichungen in allgemeine orthogonale Coordinaten.* Journal für die reine und angew. Math., **76**, 45 (1873).
2. — *Gesammelte Werke.* Berlin, 1888.
3. M. Bricas, *La théorie de l'élasticité bidimensionnelle.* Athènes, 1937.
4. L. Brillouin, *Les lois de l'élasticité en coordonnées quelconques.* Congrès Intern. de Math., Toronto, 1924 ; Annales de physique, **3**, 251 (1925).
5. Г. Н. Бухаринов, *Решение плоской задачи теории упругости для области, ограниченной криволинейным контуром частного вида.* Сб. Эксперимент. методы определения напряжений и т.д., Москва-Ленинград, 1935, 135.
6. E. Butty, *Tratado de elasticidad teorico-tecnica (elastotecnia).* I, Buenos Aires, 1957.
7. E. Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della Elasticità.* Turin, 1894.
8. L. Föppl, *Drang und Zwang.* **III**, München, 1947.
9. K. F. Gauss, *Recherches générales sur les surfaces courbes.* Nouvelles Ann. de Math., **IX**, 195, 1852 (tradus după Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Göttingue, 1828).
10. R. Grammel, *Eine Verallgemeinerung der Kreis- und Hyperbelfunktionen.* Ing. Archiv, 189 (1948).
11. E. Hampe, *Zur Berechnung von beliebig begrenzten Scheiben (Rahmenecken, Bogenscheibenbrücken u.s.w.) mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion.* Baupl. u. Bautechn., **9**, *3*, 127 (1955).
12. H. Hencky, *Neuere Verfahren in der Festigkeitslehre.* Oldenburg-Münich, 1951.
13. M. T. Huber, *Teoria sprezystosci.* **I**, **II** (Pisma, t. IV, V), Warszawa, 1954.
14. G. Lamé, *Mémoire sur les coordonnées curvilignes.* Journal de Math. pures et appl., **V**, 313 (1840).
15. — *Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité.* Journal de Math. pures et appl., **VI**, 37 (1841).
16. — *Leçons sur les coordonnées curvilignes.* Paris, 1859.
17. A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity.* Cambridge, 1934.
18. J. C. Maxwell, *On the Equilibrium of the Elastic Solids.* Trans. of the Roy. Soc. of Edinbourgh, **20**, *1*, 87 (1853).
19. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1954.
20. М. И. Найман, *Напряжения в балках с криволинейным отверстием.* Тр. ЦАГИ, 313, 1937.
21. H. Neuber, *Kerbspannungslehre.* Berlin, Springer-Verlag, 1958.
22. A. N. Shapiro, *Fonctions de tensions dans un système arbitraire de coordonnées curvilignes.* C. R. Acad. Sc. U.R.S.S., **XV**, *8*, 693 (1947).
23. P. P. Teodorescu, *Asupra problemei plane a elasticității în coordonate oblice.* St. cerc. mec. apl., **IX**, *2*, 391 (1958).
24. — *Asupra calculului grinzilor pereți cu contur paralelogram.* An. Univ. ,,C. I. Parhon'', seria șt. nat., **VII**, *20*, 9 (1958).
25. — *Probleme plane în teoria elasticității.* **I**, Ed. Acad. R.P.R., București, 1961.
26. — *Considerații în legătură cu problema plană a teoriei elasticității în coordonate triunghiulare.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *4*, 849 (1962).
27. — *Asupra utilizării funcțiilor de tensiune în problema plană a teoriei elasticității în coordonate oblice.* An. Univ. București, seria șt. nat., mat.-fizică, **XI**, *33* (1962).
28. — *Sur les équations du problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes quelconques.* C. Ren. hebd. des séances de l'Acad. des Sc., **255**, *7*, 1181 (1962).
29. — *Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes arbitraires. I. Opérateurs différentiels.* Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc., série des Sc. Techn., **X**, *7*, 269—[403] (1962).
30. — *Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes arbitraires. II. Etat de tension.* Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc., série des Sc. techn., **X**, *7*, 283 — [417] (1962).
31. — *Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes arbitraires. III. Etat de déformation. Loi de Hooke.* Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc., série des Sc. techn., **X**, *7*, 291 — [425] (1962).

32. P. P. TEODORESCU, *Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes arbitraires. IV. Formulation en tensions du problème*. Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc., série des Sc. techn., **X**, *8*, 313–[459] (1962).
33. — *Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes arbitraires. V. Formulation en déplacements du problème. Méthodes de calcul*. Bull. de l'Acad. Polonaise des Sc., série des Sc. techn., **X**, *8*, 321 – [467] (1962).
34. W. THOMSON (LORD KELVIN), Math. and Phys. Papers, **I**.
35. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*. New York – Toronto – London, McGraw Hill Book Co. Inc., 1951.

STUDII

CALCULUL LA STAREA LIMITĂ DE REZISTENȚĂ AL ELEMENTELOR DE BETON PRECOMPRIMAT SOLICITATE LA COMPRESIUNE EXCENTRICĂ CU EXCENTRICITATE MICĂ

DE

MARCEL TANNENBAUM[1]

1. PARTICULARITĂȚILE COMPORTĂRII ELEMENTELOR DE BETON PRECOMPRIMAT SOLICITATE LA COMPRESIUNE EXCENTRICĂ CU EXCENTRICITATE MICĂ

1.1. Compresiunea excentrică cu excentricitate mică reprezintă o solicitare mai rar întîlnită în construcții de beton precomprimat. Ea poate apare numai în anumite secțiuni ale unor elemente de construcție cu caracter special.

De aceea s-a acordat pînă acum puțină importanță acestui mod de solicitare, astfel încît practic nu există în prezent metode pentru calculul secțiunilor de beton precomprimat în acest caz. Aplicarea mecanică a principiilor de calcul ale betonului armat duce, după cum se va arăta mai jos, la soluții lipsite de sens fizic.

Prezenta lucrare are ca scop stabilirea unei metode raționale și corecte pentru calculul la starea limită de rezistență a elementelor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică.

1.2. Compresiunea excentrică cu excentricitate mică reprezintă modul cel mai răspîndit de solicitare al elementelor de construcție din zidărie și beton simplu. Ca urmare, cele mai largi studii asupra acestui mod de solicitare s-au efectuat în special asupra stîlpilor și pereților de zidărie [1], [2], [3].

După cum se știe, capacitatea portantă a elementelor alcătuite din material casant-elastic solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică (forța în limitele sîmburelui central), se poate deduce din condiția constanței momentului față de limita sîmburelui central.

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

Într-adevăr, secțiunea cedează atunci cînd se atinge în fibra cea mai solicitată rezistența la rupere a materialului R. Putem deci scrie (fig. 1):

$$\sigma_1 = R = \frac{N}{A} + \frac{Ne_0}{W_1} = \frac{N}{W_1}\left(\frac{W_1}{A} + e_0\right) = \frac{N}{W_1}(r_1 + e_0), \tag{1}$$

respectiv

$$N\,(r_1 + e_0) = R\,W_1 = \text{const.} \tag{2}$$

În cazul elementelor de zidărie sau de beton simplu — materiale cu pronunțate proprietăți plastice — datele experimentale au confirmat posibilitatea exprimării capacității portante sub o formă asemănătoare, respectiv a constanței momentului față de marginea mai puțin comprimată a secțiunii (fig. 2)

$$Ne = S_0\,R_{pr} = \text{const.} \tag{3}$$

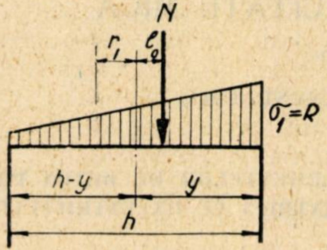


Fig. 1

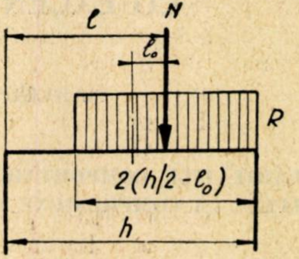


Fig. 2

Această relație este valabilă pentru $e_0 \leqslant 0{,}45\,y$ în cazul secțiunilor de formă oarecare, respectiv pentru $e_0 \leqslant 0{,}225\,h$ în cazul secțiunilor dreptunghiulare.

Pentru o secțiune dreptunghiulară, admițînd o distribuție uniformă a eforturilor unitare în zona comprimată, putem scrie momentul capabil față de marginea mai puțin comprimată (fig. 2)

$$Ne = 0{,}5\,bh_0^2\,R_{pr} = 0{,}5\,b\,h_0^2\left[1 - 4\left(\frac{e_0}{h}\right)^2\right]R,$$

respectiv

$$R = \frac{R_{pr}}{1 - 4\,(e_0/h)^2}. \tag{4}$$

Relația (4) reprezintă deci numai o formă de exprimare a proprietății fundamentale de creștere a rezistenței betonului o dată cu localizarea stării de eforturi.

Ea cuprinde sub o formă neexplicitată efectul plastificării materialului, precum și influența modificării caracteristicilor de rezistență ale acestuia în urma reducerii porțiunii solicitate a secțiunii în raport cu întreaga ei suprafață [2].

E R A T Ă

Pag.	rîndul sau formula	în loc de :	se va citi :	din vina
1061	(2)	$= \frac{\rho}{2}$	$= \frac{\rho_\infty}{2}$	autorului
1095	20	$-\frac{1}{2}\frac{d\varphi^*}{da}$	$-2\frac{d\varphi^*}{da}$	,,
1096	2	$\frac{da^*}{da}$	$\frac{d\varphi^*}{da}$	editurii
1096	9	$\theta_0 \cong \theta_2$	$\theta_0 \cong \theta_1$	,,
1211	2	$E^*_{2s\,11}$	E^*_{2s-1}	,,

St. cerc. mec. apl. 5, 1962

Pentru excentricitatea limită $e_0 = 0{,}225\ h$ rezultă

$$R = R_i = 1{,}25\ R_{pr}$$

relația cunoscută din analiza proprietăților mecanice ale betonului.

1.3. În cazul elementelor de beton armat, armătura longitudinală din zonele solicitate la compresiune are în special rolul de a prelua o parte din încărcarea care revine secțiunii și influențează în măsură relativ redusă caracterul cedării betonului. În consecință, comportarea elementelor solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică, în care întreaga secțiune sau cea mai mare parte a ei este comprimată, nu trebuie să difere practic de cea a elementelor de beton simplu.

Datele experimentale confirmă această concluzie, condiția constanței momentului capabil față de marginea mai puțin comprimată verificîndu-se și în cazul secțiunilor armate [4].

Pentru uniformizarea relațiilor de calcul și racordarea cu cazul excentricității mari, s-a convenit a se lua momentele față de armătura situată la marginea mai puțin comprimată. Deoarece din condiții constructive armătura longitudinală se dispune cît mai aproape de marginea secțiunii, această modificare nu influențează practic rezultatele, diferența fiind situată în limitele răspîndirii datelor experimentale.

1.4. În cazul elementelor de beton precomprimat apar o serie de diferențe principale, care modifică complet comportarea în raport cu elementele de beton armat.

În primul rînd armătura pretensionată are caracterul unei încărcări exterioare, a cărei valoare depinde însă de starea de deformație a betonului secțiunii. În consecință, excentricitatea forței totale care solicită secțiunea în starea limită de rezistență nu este egală cu excentricitatea încărcării aplicate, ci cu excentricitatea rezultantei acestei încărcări și a forței din armăturile pretensionate.

În al doilea rînd, datorită caracterului particular al armăturii pretensionate, aceasta poate fi poziționată oricum în secțiune și se află, de obicei, la o distanță destul de mare de la marginea mai puțin comprimată. În consecință, nu mai este admisibilă aproximația din cazul secțiunilor de beton armat și condiția de constanță a momentului trebuie scrisă, ca la secțiuni de zidărie sau beton simplu, față de marginea mai puțin comprimată.

În al treilea rînd, avem o diferență de obicei destul de mare între înălțimea totală a secțiunii h și înălțimea utilă a secțiunii h_0 (distanța de la armătura pretensionată pînă la marginea mai comprimată); de multe ori se întîmplă chiar ca armătura pretensionată să fie poziționată centric și deci $h_0 = \frac{h}{2}$. Ca urmare, atunci cînd se depășește excentricitatea limită, secțiunea de calcul pentru cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mică este înlocuită cu o secțiune avînd cu totul alte caracteristice geometrice și de rezistență.

În al patrulea rînd, o dată cu trecerea în cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mare, o parte a armăturii pretensionate va fi situată în zona întinsă și nu va mai acționa ca o forță exterioară în starea limită de rezistență; în consecință se modifică și solicitarea din secțiune.

Se vede deci că, pentru secțiuni de beton precomprimat, cazul solicitării la compresiune excentrică cu excentricitate mică nu poate fi rezolvat prin simplă analogie cu betonul armat. Principala problemă constă în lipsa unei racordări o dată cu trecerea în domeniul compresiunii excentrice cu excentricitate mare.

2. CALCULUL ELEMENTELOR DE BETON PRECOMPRIMAT SOLICITATE LA COMPRESIUNE EXCENTRICĂ CU EXCENTRICITATE MICĂ

2.1. În conformitate cu prevederile punctului precedent, elementele de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică se calculează în starea limită de rezistență pe baza condiției de constanță a momentului față de marginea mai puțin comprimată a secțiunii (fig. 3)

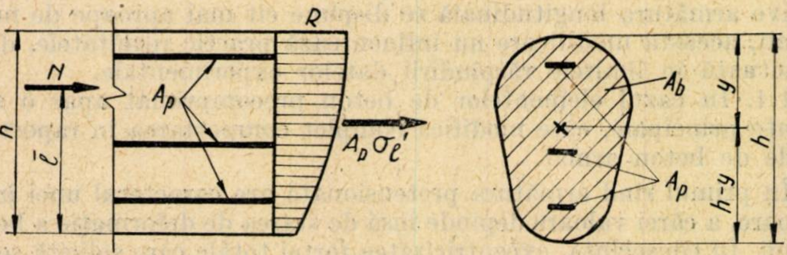


Fig. 3

$$N\bar{e} \leqslant m\,(S_0\,R_{pr} + S_p\,\sigma_l') \tag{5}$$

unde

N — forța axială datorită încărcării exterioare de calcul;
$\bar{e}$ — distanța de la forța N pînă la marginea mai puțin comprimată a secțiunii;
S_0 — momentul static al întregii secțiuni de beton față de marginea mai puțin comprimată a secțiunii;
S_p — momentul static al armăturii pretensionate din secțiune față de marginea mai puțin comprimată a secțiunii;
R_{pr} — rezistența prismatică de calcul a betonului.
σ_l' — efortul unitar din armătura pretensionată în starea limită de rezistență, stabilit în conformitate cu prevederile paragrafului 2.2;
m — coeficient al condițiilor de lucru al elementului, care va fi stabilit ulterior.

Influența flexibilității în planul în care acționează momentul se ia în considerare prin multiplicarea excentricității forței exterioare N față de centrul de greutate al secțiunii, e_0, cu un coeficient η ca și în cazul elementelor de beton armat.

2.2. Armătura pretensionată din zona comprimată acționează în starea limită de rezistență ca o forță exterioară, care solicită la compresiune excentrică secțiunea. Spre deosebire însă de o forță exterioară oarecare, forța exercitată de armătura pretensionată nu este independentă de starea de deformații din secțiune.

Armătura pretensionată din zona comprimată conlucrează cu betonul adiacent pînă în momentul cedării secțiunii, deoarece nu există factori care să influențeze în mod defavorabil condițiile de aderență, ca în zona întinsă a secțiunii. În consecință, efortul unitar inițial din această armătură se reduce, ca efect al scurtării elastice a acesteia cu o cantitate egală cu deformația specifică la compresiune a betonului la nivelul armăturii considerate.

În conformitate cu prescripțiile sovietice [5], se propune în acest scop ca deformația specifică a betonului la nivelul armăturii în stadiul limită de rezistență să se ia cu valoarea minimă probabilă $\bar{\varepsilon}_l = 0{,}002$. În consecință efortul unitar din această armătură se reduce în stadiul limită de rezistență cu

$$\Delta\sigma'_l = \bar{\varepsilon}_l\, E_p = 0{,}002 \times 1\,800\,000 = 3\,600 \text{ kg/cm}^2. \tag{6}$$

Deoarece armăturile pretensionate din zona comprimată nu sînt în realitate situate chiar la marginea secțiunii, în noua redactare a normativului de calcul în stările limită [6] s-a introdus valoarea mai acoperitoare,

$$\Delta\sigma'_l = 3\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

Pentru a nu complica relațiile de calcul, efortul din această armătură nu se introduce în mod explicit ca o forță exterioară, ci apare ca o forță interioară egală cu $A_p\,\sigma'_l$, unde

$$\sigma'_l = 3\,000 - m_0\,\bar{\sigma}'_0 \tag{7}$$

și $\bar{\sigma}'_0$ — efortul unitar de calcul din armătura pretensionată în faza finală;

$m_0 = 1{,}1$ — coeficientul de imprecizie al forței de precomprimare.

Rezistența σ'_l poate fi astfel pozitivă (compresiune) sau negativă (întindere).

Pentru secțiunile considerate σ'_l este întotdeauna negativ (întindere).

2.3. Condiția limită a cazului de compresiune excentrică cu excentricitate mică se scrie, în conformitate cu prevederile punctului 1.2

$$|e_0| \leqslant 0{,}45\, y \tag{8}$$

unde $|e_0|$ reprezintă excentricitatea rezultantei forțelor din secțiune (exterioare și din armăturile pretensionate) față de centrul de greutate.

Deoarece în cazul de față toate relațiile se scriu față de marginea mai puțin comprimată, putem scrie condiția (8) sub forma

$$|\bar{e}| \leqslant h - 0{,}55\, y, \tag{9}$$

unde $|\bar{e}|$ — distanța de la rezultanta forțelor din secțiune pînă la marginea mai puțin comprimată;

y — distanța de la centrul de greutate al secțiunii pînă la marginea mai comprimată.

Condiția (9) se transformă, explicitînd pe $|\bar{e}|$

$$\frac{N\bar{e} - S_p \sigma_l'}{N - A_p \sigma_l'} \leqslant h - 0{,}55\, y. \tag{10}$$

Elementele care nu satisfac această condiție trebuie calculate după relațiile pentru cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mare.

Excentricitatea limită a forței exterioare N rezultă din relația (10)

$$\bar{e} \leqslant \frac{(N - A_p \sigma_l')(h - 0{,}55\, y) + S_p \sigma_l'}{N} \tag{11}$$

Se remarcă în relația (11) dependența excentricității limită de prezența armăturii pretensionate în secțiune.

3. CONDIȚIILE DE TRECERE DINTRE CELE DOUĂ CAZURI DE COMPRESIUNE EXCENTRICĂ

3.1. S-a arătat la punctul 1.4. că, pentru elemente de beton precomprimat, trecerea dintre cazurile de compresiune excentrică se face cu o discontinuitate care exprimă caracterul calitativ și cantitativ diferit al fenomenelor care condiționează modul de comportare al elementului sub acțiunea celor două tipuri de solicitări.

O dată ce excentricitatea forței exterioare depășește valoarea limită dată de relația (11), se deschid fisurile la marginea întinsă a secțiunii și nu mai este deci aplicabilă relația (5). Din secțiunea totală de înălțime h rămîne activă o porțiune de înălțime h_0, avînd caracteristici geometrice cu totul diferite de cele inițiale. Față de această nouă secțiune poziția forței exterioare poate corespunde fie cazului de compresiune excentrică cu excentricitate mare, fie cazului de compresiune excentrică cu excentricitate mică.

În figura 4 *A* s-a reprezentat variația momentului capabil al secțiunii în raport cu marginea mai puțin comprimată, în funcție de poziția forței exterioare. Cele două cazuri posibile menționate mai sus s-au notat respectiv cu 1 și 2.

În cazul 1, depășirea excentricității limită pentru secțiunea inițială duce la o reducere bruscă importantă a momentului capabil, datorită în special reducerii înălțimii utile a secțiunii.

Asemenea salturi în capacitatea portantă a elementelor, pe măsura variației unui parametru al încărcării exterioare, se pot constata și pentru alte tipuri de solicitări ale elementelor de beton armat sau beton precomprimat : de exemplu în cazul grinzilor încovoiate momentul de fisurare constituie capacitatea portantă a secțiunii inițiale nefisurate, iar momentul de curgere capacitatea portantă a secțiunii fisurate. Pentru procente foarte reduse de armare se poate întîmpla ca momentul de rupere să fie mai mic decît momentul de fisurare, astfel încît capacitatea portantă a secțiunii inițiale nefisurate devine chiar capacitatea portantă a elementului.

În cazul 2, după depășirea excentricității limită pentru secțiunea inițială, există încă un domeniu în care ne aflăm sub excentricitatea limită pentru secțiunea de calcul cu înălțimea h_0.

Situația aceasta aparent paradoxală, în care la ieșirea dintr-un caz de compresiune excentrică cu excentricitate mică ne putem afla într-un alt caz de compresiune excentrică cu excentricitate mică, constituie una dintre „curiozitățile" modului de comportare al secțiunilor de beton precomprimat la asemenea solicitări.

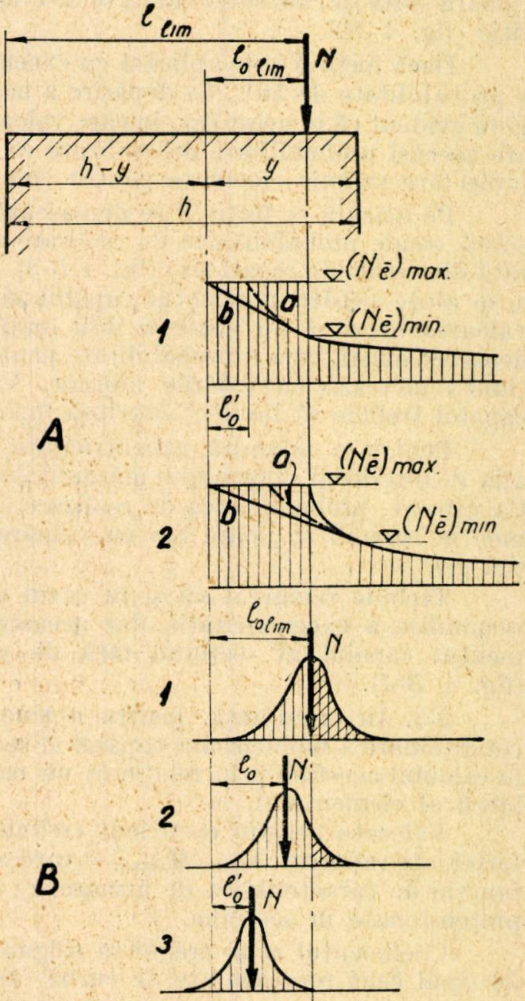


Fig. 4. — *A*. — Variația momentului capabil al secțiunii în raport cu marginea mai puțin comprimată în funcție de poziția forței exterioare. *B*. — Abaterea statistică a excentricității forței exterioare față de valoarea medie de calcul.

Spre deosebire de cazul 1 reducerea momentului capabil are loc în mod continuu între valorile corespunzătoare celor două excentricități limită, deoarece pentru acest domeniu de variație al excentricităților secțiunea se comportă aproximativ ca o secțiune de zidărie solicitată la compresiune cu excentricitate mare. Or, pentru elementele de zidărie și beton simplu există racordare între cele două cazuri de compresiune excentrică. Această concluzie este confirmată de faptul că situația reprezentată în figura 4 *A-2* se constată de regulă la secțiuni în care armătura pretensionată este dispusă la distanță mare de la marginea mai puțin comprimată, astfel încît elementul continuă să se comporte ca un element de beton simplu în toată perioada inițială de dezvoltare a fisurilor, pînă ce acestea ajung la armătura pretensionată.

3.2. Pe baza analizei de mai sus s-ar putea considera posibil calculul elementelor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu relația (5) pînă la atingerea excentricității limită dată de relația (11), iar în continuare cu relațiile pentru cazul compresiunii cu excentricitate mare. Un asemenea punct de vedere simplist ar neglija însă cu totul aspectele legate de variabilitatea statistică a factorilor de care depinde solicitarea elementului.

Excentricitatea forței exterioare constituie astfel o variabilă condiționată statistic, ale cărei valori se distribuie după o lege oarecare de repartiție (fig. 4 *B*).

Dacă forța N este aplicată cu excentricitatea limită, putem considera o probabilitate de 50% de depășire a acestei excentricități (fig. 4 *B-1*). Este evident că în acest caz, în care valoarea minimă a momentului capabil are aceeași probabilitate de realizare ca și valoarea maximă, calculele de proiectare trebuie efectuate pentru valoarea minimă.

Pe măsură ce forța N se deplasează către centrul de greutate al secțiunii, scade probabilitatea de realizare a valorii minime (porțiunea hașurată din curba de repartiție) (fig. 4 *B-2*). În aceste condiții nu este rațional a se alege pentru momentul capabil al secțiunii valoarea minimă. Nici valoarea maximă nu poate fi însă luată drept criteriu de dimensionare, deoarece există încă o probabilitate pentru apariția condițiilor în care secțiunea lucrează cu valorile minime. Valoarea de calcul a momentului capabil trebuie să fie deci cuprinsă între cele două valori limită.

Pentru o anumită excentricitate, întreaga curbă de repartiție se află în interiorul domeniului mărginit de excentricitatea limită (fig. 4 *B-3*). Ca urmare, probabilitatea de realizare a valorii minime este nulă, și momentul capabil se poate lua cu valoarea maximă, corespunzătoare relației (5).

Trebuie remarcat că și în cazul aplicării centrice a forței avem o răspîndire a excentricității, dar aceasta nu influențează în general momentul capabil al secțiunii față de marginea mai puțin comprimată (fig. 4 *B-4*).

3.3. În consecință, pentru a ține seamă de criteriile statistice de condiționare a momentului capabil al secțiunii, este necesar a se introduce în calculul acestuia prin relația 5) un coeficient variabil al condițiilor de lucru al elementului, m.

Valoarea acestui coeficient trebuie să fie funcție de excentricitatea forței, de raportul $M_{\min}/M_{\max}$, — care se poate exprima la rîndul său în funcție de caracteristica de armare α_p, — precum și de poziția armăturii pretensionate în secțiune.

Coeficientul m ar trebui să asigure o variație a momentului capabil de tipul celei reprezentate de curba (*a*) în figura 4 *A-1*.

Deoarece nu cunoaștem însă valoarea corectă a excentricității pentru care avem probabilitate nulă de realizare a momentului capabil minim, este mai acoperitor și comod pentru calcul a se admite o astfel de expresie a coeficientului m care să asigure o variație liniară a momentului capabil între valoarea minimă (pentru excentricitatea limită) și valoarea maximă (pentru aplicarea centrică a forței), respectiv dreapta *b* în figura 4 *A-1*.

Coeficientul m trebuie să asigure o racordare asemănătoare și în cazul reprezentat de figura 4 *A-2*.

Introducerea acestui coeficient variabil al condițiilor de lucru al elementului permite o proiectare rațională a secțiunilor solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică, astfel încît să se realizeze același grad de securitate pentru orice poziție a forței exterioare.

4. STABILIREA COEFICIENTULUI CONDIȚIILOR DE LUCRU AL ELEMENTULUI ÎN CAZUL COMPRESIUNII EXCENTRICE CU EXCENTRICITATE MICĂ

4.1. Pentru stabilirea coeficientului condițiilor de lucru al elementului în cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mică este deci suficient — în conformitate cu concluziile de la punctul 3.3. — a calcula raportul $M_{\min}/M_{\max}$ pentru diferite poziții ale armăturii pretensionate în secțiune.

Influența excentricității forței exterioare se ia în considerare în mod aproximativ prin relația liniară admisă între m și $\bar{e}$.

Calculele s-au efectuat pentru cazul armăturilor pretensionate alcătuite din sîrme SBP I sau SBP II sub formă de armătură preîntinsă sau armături postîntinse introduse în canale prevăzute în corpul elementului.

4.2. În tabela 1 se dau valorile raportului $M_{\min}/M_{\max}$ pentru secțiuni dreptunghiulare armate simetric.

Drept variabile s-au ales :

— a_p/h, unde a_p este distanța de la armătură pînă la marginea cea mai apropiată a secțiunii ;

— $\alpha_p = \dfrac{A_p}{A_b}\,\dfrac{R_p}{R_{pr}}$, unde A_p reprezintă întreaga armătură pretensionată din secțiune, iar A_b întreaga secțiune de beton.

Valorile din tabel situate sub linia punctată corespund situației în care, după depășirea excentricității limită, se rămîne totuși în cazul compresiunii excentrice cu excentricitate mică pentru secțiunea de calcul cu înălțimea $h_0 = h - a_p$.

Pe bază de calcule comparative a reieșit că este indicat să se elimine influența parametrului a_p/h, alegînd pentru calcul valorile acoperitoare corespunzătoare cazului practic cel mai defavorabil $a_p/h = 0{,}1$.

În consecință, se reprezintă grafic punctele $(m, \bar{e}_{\lim}/h - y)$ pentru diferite valori ale parametrului α_p. Unind aceste puncte cu punctul de coordonate (1 ; 1) se obține o familie de drepte care, în conformitate cu ipoteza admisă la punctul 3.3, reprezintă legea de variație a coeficientului m.

Pe această bază se obțin pentru coeficientul condițiilor de lucru al elementului m, valorile trecute în graficul din figura 5, în funcție de excentricitatea $\dfrac{\bar{e}}{h-y}$ și de caracteristica de armare $\dfrac{A_p\,R_p}{A_b\,R_{pr}}$.

Tabela 1

Valorile raportului M_{min}/M_{max} pentru secțiuni dreptunghiulare armate simetric

a_p/h \ α_p	0,0447	0,0893	0.179	0.358	0.536	0.715	0,893
0	0,41	0,465	0,526	0,608	0,66	0,74	0,80
0,1	0,476	0,52	0,572	0,635	0,70	0,705	0,66
0,2	0,543	0,58	0,618	0,675	0,645	0,585	0,487
0,3	0,622	0,658	0,647	0,60			
0,4	0,608	0,595	0,57	0,50			
0,5	0,53	0,515	0,48	0,393			
$\bar{e}_{lim}/h$	0,7375	0,75	0,778	0,857	1,00	1,333	3,00
$\bar{e}_{lim}/h-y$	1,475	1,50	1,556	1,714	2,00	—	—

4.3. Modul în care a fost stabilit coeficientul condițiilor de lucru m, reprezintă o primă aproximație, bazată pe numeroase ipoteze simplificatoare. Totuși, prin introducerea acestui coeficient se permite pentru prima dată elaborarea unor principii de calcul în concordanță cu realitatea fenomenelor.

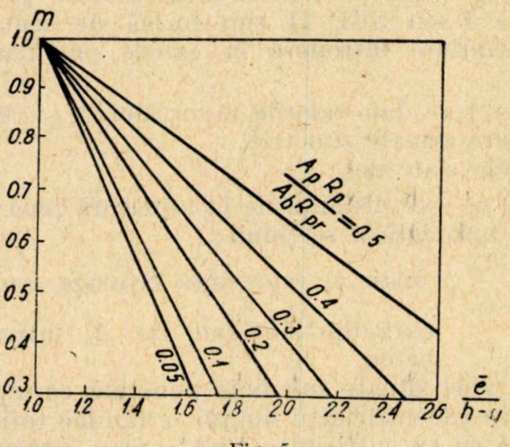


Fig. 5

Este necesară însă în viitor precizarea valorilor acestui coeficient prin cercetări suplimentare, astfel încît să se asigure cuprinderea cît mai corectă a tuturor situațiilor posibile.

4.4. Această metodă de calcul a secțiunilor elementelor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică a fost introdusă în normativul pentru calcul și alcătuirea constructivă a elementelor de construcții din beton, beton armat și beton precomprimat, întocmit de către Comisia pentru introducerea calculului la stări limită.

Primită la redacție la 4 iunie 1962.

РАСЧЕТ ПО ПРЕДЕЛЬНОМУ СОСТОЯНИЮ ПО ПРОЧНОСТИ ДЛЯ ДЕТАЛЕЙ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННОГО БЕТОНА, РАБОТАЮЩИХ НА ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ С МАЛЫМ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ

РЕЗЮМЕ

Для деталей из предварительно-напряженного бетона, работающих на эксцентрическое сжатие с малым эксцентриситетом, доказывается—путем анализа изменения состояния напряжения в предельном состоянии, одновременно с изменением эксцентриситета внешней силы— существование скачка при переходе от одного случая к другому случаю эксцентрического сжатия.

Показываются возможности решения задачи о расчете этих элементов путем введения некоторого переменного коэффициента, учитывающего условия работы деталей таким образом, чтобы обеспечить осуществление такой же степени безопасности сечения при любых значениях эксцентриситета внешней силы.

CALCUL, À L'ÉTAT LIMITE DE RÉSISTANCE, DES ÉLÉMENTS DE BÉTON PRÉCONTRAINT SOLLICITÉS À LA COMPRESSION EXCENTRIQUE À FAIBLE EXCENTRICITÉ

RÉSUMÉ

Dans le cas des éléments de béton précontraint, sollicités à la compression excentrique à faible excentricité, l'auteur, par l'analyse de l'évolution des contraintes en fonction de la variation de l'excentricité de la force extérieure, dans l'état limite de résistance, démontre l'existence d'une discontinuité lors de la transition entre les deux cas de compression excentrique.

Il indique la possibilité de résoudre le problème du calcul de ces éléments par l'introduction d'un coefficient variable des conditions de travail de l'élément, afin d'assurer la réalisation du même degré de sécurité de la section considérée, quelle que soit la valeur de l'excentricité de la force extérieure.

BIBLIOGRAFIE

1. L. I. Onișcic, *Particularitățile de comportare sub sarcină a construcțiilor de zidărie în stadiul de rupere. Cercetări privitoare la elemente de construcții din zidărie.* București, 1953.
2. M. I. Pildiș, *Compresiunea excentrică a elementelor de construcții de zidărie. Cercetări privitoare la elemente de construcții din zidărie.* București, 1953.

3. С. В. Поляков, *Каменные и армокаменные конструкции.* Москва, 1957.
4. М. С. Боришанский, *Исследование работы внецентренно-сжатых железобетонных элементов.* Проект и стандарт, *6* (1936).
5. * * * *Технические условия проектирования бетонных и железобетонных конструкций.* 2—я редакция АСИА НИИЖБ ГИПРОТИС, 1960.
6. * * * *Normativ pentru calculul și alcătuirea constructivă a elementelor de construcții din beton, beton armat și beton precomprimat* (redactarea I și redactarea a II-a). București, Institutul de construcții și INCERC, 1961.

STUDII

METODELE DIRECTĂ ȘI INDIRECTĂ ÎN CALCULUL PLASTIC AL STRUCTURILOR DE BETON ARMAT 1)

DE

VALERIU PETCU 2)

Exploatarea rezervelor plastice de rezistență ale structurilor static nedeterminate de beton armat este limitată de condițiile specifice comportării acestor structuri sub acțiunea încărcărilor [1], [2].

Indiferent de natura lor, aceste condiții conduc la limitarea valorii maxime a coeficienților de redistribuție ai structurii considerate.

În general, această valoare limită a coeficientului de redistribuție ($r_{\min}$) este mai mică decît valoarea maximă a coeficienților de redistribuție ai structurii, obținuți în ipoteza redistribuirii totale a eforturilor.

Observație : În cazul general al structurilor care admit atît mecanisme de grindă cît și mecanisme de etaj, coeficientul de redistribuție $r_{\min}$ are două valori și anume : o valoare pentru secțiunile critice solicitate la încovoiere simplă și o altă valoare pentru secțiunile critice solicitate la compresiune excentrică.

Limitarea valorii maxime a coeficienților de redistribuție arată că, în general, redistribuția parțială de eforturi este o caracteristică a calculului plastic al structurilor de beton armat.

Din cele de mai sus rezultă că soluția plastică de calcul a unei structuri de beton armat este situată între soluția elastică și soluția plastică totală (pentru terminologie a se vedea anexa).

Din punctul de vedere al valorii momentelor plastice de calcul, soluția elastică reprezintă limita superioară iar soluția plastică totală — limita inferioară a domeniului de existență a soluției plastice de calcul.

Această situație pune în evidență două metode de stabilire a soluției plastice de calcul, funcție de limita de referință luată în considerație și anume :

— *metoda directă*, la care limita de referință o constituie soluția plastică totală, și

— *metoda indirectă*, la care limita de referință este soluția elastică.

---

1) Comunicare prezentată la a IX-a Sesiune științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic Timișoara, 7—14 aprilie, 1962.

2) Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

1. *Metoda directă constă în majorarea momentelor plastice care alcătuiesc soluția plastică totală, astfel încît coeficienții de redistribuție să fie cel mult egali cu* $r_{\min}$ *pentru toate secțiunile critice ale structurii.*

Aplicarea acestei metode presupune stabilirea, în prealabil, a soluției plastice totale.

Teoretic, o structură static nedeterminată de beton armat, cu caracteristicile statico-geometrice date, admite o infinitate de soluții plastice totale, datorită posibilităților de variație a procentelor de armare din secțiunile critice.

Dintre aceste soluții trebuie luată în considerație soluția plastică optimă, respectiv soluția care asigură cele mai favorabile condiții de rupere și de exploatare pentru toate secțiunile critice ale structurii.

Într-o lucrare anterioară [3] s-a enunțat și s-a fundamentat teoretic *principiul redistribuției optime*, pe baza căruia se obține soluția plastică optimă.

Fie r_0 valoarea maximă a coeficienților de redistribuție ai soluției plastice optime.

În practică, se pot întîlni două cazuri :

a) $r_0 \leqslant r_{\min}.$

În acest caz soluția plastică de calcul coincide cu soluția plastică optimă.

b) $r_0 > r_{\min}.$

Soluția plastică de calcul se obține în acest caz prin majorarea momentelor plastice din secțiunile critice pentru care $r > r_{\min}$, astfel încît, în final, să se obțină $r' = r_{\min}$ pentru aceste secțiuni critice.

Fie :

$$m_p^0 = a + b.K_1 = a + \beta.b.K_u = a + c.K_u \tag{1}$$

expresia momentului plastic optim dintr-o secțiune critică a structurii, în care :

a și b sînt coeficienții corespunzători momentului elastic maxim ;

$c = \beta.b$;

$m_p^0 = \dfrac{M_p^0}{G \cdot l}$;

$K_1 = \dfrac{P_1}{G}$; $K_u = \dfrac{P_u}{G}$; $\beta = \dfrac{K_1}{K_u} = \dfrac{P_1}{P_u}$;

G — sarcina permanentă de calcul ;

P_1 — sarcina utilă corespunzătoare apariției primei articulații plastice în secțiunea critică considerată ;

P_u — sarcina utilă de calcul ;

M_p^0 — momentul plastic optim ;

l — lungimea barei care conține secțiunea critică.

Expresia coeficientului de redistribuţie corespunzător secţiunii critice considerate este

$$r = \frac{1 + K_u}{1 + K_1} = \frac{1 + K_u}{1 + \beta \cdot K_u}, \quad (0 < \beta < 1). \tag{2}$$

Fie

$$r_{\min} = \frac{1 + K_u}{1+\beta' \cdot K_u}, \quad (0 < \beta < \beta' < 1), \tag{3}$$

expresia valorii maxime admise a coeficientului de redistribuţie ($r > r_{\min}$).

Din relaţiile (1), (2) şi (3) rezultă că pentru a se realiza în secţiunea critică considerată $r' = r_{\min}$ trebuie ca în expresia momentului plastic să se înlocuiască β prin β', rezultînd în acest mod valoarea momentului plastic de calcul

$$m_p = a + \beta' \cdot b \cdot K_u = a + \frac{\beta'}{\beta} \cdot c \cdot K_u. \tag{4}$$

În concluzie, în metoda directă momentele plastice de calcul se obţin din momentele plastice optime, prin amplificarea termenului corespunzător sarcinii utile cu raportul $\frac{\beta'}{\beta} > 1$.

Metoda directă este indicată la calculul plastic al structurilor alcătuite din bare, în cazul în care stabilirea soluţiei plastice optime nu constituie o operaţie laborioasă.

Eficienţa maximă a acestei metode are loc atunci cînd soluţiile plastice optime sînt cunoscute în prealabil. Un exemplu tipic în acest sens îl constituie grinzile continue [4], [5].

2. *Metoda indirectă constă în micşorarea momentelor elastice maxime, stabilite pe baza sarcinilor de calcul, în ipoteza comportării elastice a structurii, astfel încît momentele plastice obţinute în acest mod să satisfacă condiţia* $r \leqslant r_{\min}$ *pentru toate secţiunile critice.*

Fie :

$$m_e = a + b \cdot K_u, \quad \left(m_e = \frac{M_e}{G \cdot l}\right), \tag{5}$$

expresia momentului elastic maxim dintr-o secţiune critică, obţinută pe baza sarcinilor de calcul.

Valoarea momentului plastic corespunzător condiţiei $r' = r_{\min}$ se obţine înlocuind coeficientul K_u din relaţia (5) prin coeficientul $K_1 = \beta' \cdot K_u$.

Rezultă deci

$$m_p = a + \beta' \cdot b \cdot K_u. \tag{6}$$

Momentele plastice obţinute în acest mod reprezintă valori de calcul dacă asigură structurii capacitatea portantă prescrisă.

Pentru aceasta este necesar să se verifice capacitatea portantă a structurii, pentru toate mecanismele posibile de rupere, pe baza momentelor plastice date de relația (6).

Dacă sarcinile totale de rupere plastică obținute pe această cale sînt superioare sau cel puțin egale cu sarcina totală de calcul ($G + P_u$), atunci momentele date de relația (6) sînt momente plastice de calcul.

În cazul în care, pentru unul sau mai multe mecanisme de rupere, sarcina totală de rupere plastică, determinată cu momentele date de relația (6), este inferioară sarcinii totale de calcul, urmează a se majora momentele plastice corespunzătoare, astfel încît să se asigure realizarea sarcinii de calcul prescrise.

În concluzie, expresia momentului plastic de calcul determinată prin metoda indirectă este :

$$m_p = a + \beta' \cdot \beta'' \cdot b \cdot K_u, \quad (\beta'' \geqslant 1), \tag{7}$$

în care coeficientul β'' rezultă din condiția asigurării sarcinii de calcul prescrise.

În unele cazuri (ca de exemplu plăcile armate pe două direcții), este avantajos ca expresia momentului plastic de calcul să fie exprimată sub forma

$$m_p = \gamma (a + \beta' \cdot b \cdot K_u), \quad (\gamma \geqslant 1), \tag{7'}$$

coeficientul γ rezultînd, de asemenea, din condiția asigurării sarcinii de calcul prescrise.

Observație : Nu este necesar ca toate momentele plastice date de relația (6) să fie corectate cu coeficientul β'' (sau γ).

În general este avantajos, din punct de vedere constructiv (respectiv din punctul de vedere al distribuției armăturii de-a lungul elementelor de construcție), să se corecteze cu acest coeficient momentele plastice cu valorile cele mai mici.

Este recomandabil însă ca această corecție să se aplice în primul rînd momentelor plastice din secțiunile critice din cîmpuri, obținîndu-se în acest mod o siguranță suplimentară la apariția articulațiilor plastice, respectiv o reducere a deschiderii fisurilor sub acțiunea sarcinilor de exploatare pentru aceste secțiuni critice.

Aplicarea metodei indirecte este indicată în cazurile în care obținerea soluției plastice optime constituie o operație laborioasă.

Un exemplu în care metoda indirectă își găsește aplicație în mod deosebit îl constituie calculul plastic al plăcilor continue armate pe două direcții [6].

CONCLUZII

În lucrare se prezintă caracteristicile metodelor directă și indirectă specifice calculului plastic al structurilor de beton armat. Baza acestor metode o constituie limita inferioară (soluția plastică totală), respectiv limita superioară (soluția elastică) a domeniului în care este situată soluția plastică de calcul.

Metoda directă se aplică la calculul plastic al structurilor alcătuite din bare, pentru care stabilirea soluţiei plastice optime nu constituie o operaţie laborioasă, iar metoda indirectă — în toate celelalte cazuri.

ANEXA

DEFINIŢII

Coeficient de redistribuţie : Raportul dintre sarcina totală de calcul (permanentă + utilă) a unei structuri şi sarcina totală de apariţie a primei articulaţii plastice într-o anumită secţiune critică, determinat pentru schema de încărcare corespunzătoare valorii maxime a acestui raport.

Moment plastic de calcul : Moment plastic care satisface integral condiţiile de rupere şi de exploatare.

Moment plastic optim : Moment plastic obţinut pe baza principiului redistribuţiei optime.

Redistribuţie totală de eforturi : Redistribuţie de eforturi corespunzătoare transformării structurii în mecanism.

Sarcină de calcul : În metoda stărilor limită — sarcină obţinută prin amplificarea sarcinii normate (sarcinii de exploatare) cu coeficientul de supraîncărcare corespunzător.

Secţiune critică : Secţiune a unei structuri în care apare o articulaţie plastică.

Soluţie de calcul : Ansamblul format de momentele plastice de calcul.

Soluţie elastică : Ansamblul format de momentele elastice maxime (în valoare absolută), determinate pe baza sarcinilor de calcul.

Soluţie plastică optimă : Ansamblul format de momentele plastice optime.

Soluţie plastică totală : Ansamblul format de momentele plastice corespunzătoare redistribuirii totale a eforturilor sub acţiunea sarcinilor de calcul.

Primită la redacţie la 21 aprilie 1962.

ПРЯМОЙ И КОСВЕННЫЙ МЕТОДЫ В ПЛАСТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТРУКТУР

РЕЗЮМЕ

В работе приводятся основы прямого и косвенного методов, характерных для пластического расчета железобетонных структур.

Прямой метод состоит в увеличении пластических моментов, соответствующих перераспределению усилий, так чтобы коэффициенты перераспределения, соответствующие критическим сечениям структуры, не превышали бы максимальное значение, допустимое из условий разрыва и эксплуатации.

Косвенный метод состоит в уменьшении максимальных упругих моментов, установленных на основании нагрузок разрыва в гипотезе упругого поведения структуры, так что полученные таким образом пластические моменты дали бы величины коэффициентов перераспределения не больше максимально допустимой величины из условий разрыва и эксплуатации.

Прямой метод применяется при пластическом расчете стержневых структур, для которых нахождение оптимального пластического решения не представляет трудностей, а косвенный метод — в остальных случаях.

DIRECT AND INDIRECT METHODS IN THE PLASTIC DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

ABSTRACT

This paper presents the basic principles of the direct and indirect methods, specific to the design of the reinforced concrete structures.

The direct method consists in the increasing of the plastic moments corresponding to the total stress re-distribution, such that the re-distribution coefficients corresponding to the critical sections of the structure be at most equal to the maximum value permitted by the working and failure conditions.

The indirect method consists in the decreasing of the maximum elastic moments established an the basis of failure loads under the assumption of an elastic behaviour of the structure, such that the plastic moments obtained in this manner should lead to values of the re-distribution coefficients at most equal to the maximum value permitted by working and failure conditions.

The direct method applies to the plastic design of structures consisting of rods for which the establishing of the optimum plastic solution does not constitute a laborious operation, while the indirect method applies to all the remaining cases.

BIBLIOGRAFIE

1. V. PETCU, *Problemele proiectării plastice a structurilor static nedeterminate de beton armat* Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, **XIII**, *8* (1961).
2. — *Les conditions de service dans le calcul plastique des structures hyperstatiques en béton armé.* Archiwum Inzynierii Ladowej, **VIII**, *1* (1962).
3. — *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic.* St. cerc. mec. apl., **XII**, *5* (1961).
4. — *Calculul grinzilor continue de beton armat în domeniul plastic.* St. cerc. mec. apl., **XII**, *6* (1961).
5. — *Momente de plastificare în grinzi continue de beton armat,încastrate la extremităţi.* St. cerc. mec. apl., **XIII**, *1* (1962).
6. — *Calculul plastic al plăcilor continue armate cruciş.* Standardizarea, **XIV**, *5* (1962).

STUDII

CONTRIBUŢII LA STUDIUL DEFORMAŢIILOR PLĂCILOR CURBE SUBŢIRI

DE

MIRCEA SOARE[1]

În mod obişnuit, calculul unei structuri din plăci curbe subţiri se face pe baza eforturilor, fie că este vorba de o structură static determinată sau static nedeterminată.

Cunoaşterea deformaţiilor plăcilor curbe subţiri s-a dovedit utilă în multe aplicaţii inginereşti şi este indispensabilă în cazul teoriei încovoierii sau cînd condiţiile marginale sînt date în deplasări.

Obiectul studiului de faţă este de a determina deformaţiile de membrană pentru plăcile curbe subţiri avînd curbura lui Gauss pozitivă, cu aplicarea rezultatelor la paraboloidul eliptic şi de rotaţie ; de asemenea, se generalizează cunoscuta metodă grafo-analitică a lui Mohr de la calculul săgeţilor grinzii supuse la încovoiere, se discută limitele de aplicabilitate ale teoriei de membrană, se precizează variaţia reală a deformaţiilor obţinute prin aplicarea teoriei încovoierii şi, în sfîrşit, se determină eforturile de membrană într-un caz de rezemare static nedeterminat.

Ecuaţiile de bază sînt prezentate pentru cazul general al cupolelor *înalte* ; rezultate mai simple se pot obţine în cazul plăcilor curbe subţiri pleoştite ; în felul acesta se poate ajunge la rezultate explicite.

Ideile de bază rămîn neschimbate în cazul mai general, însă calculele devin mai greoaie, în pofida unei exactităţi iluzorii.

1. ECUAŢIILE GENERALE

Fie

$$z = z(x, y), \tag{1.1}$$

---

[1]) Institutul pentru cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC).

ecuația suprafeței mediane a unei plăci curbe subțiri și notațiile lui Monge pentru derivatele de ordinul întîi și al doilea

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \psi, \tag{1.2}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial z}{\partial y^2}, \tag{1.3}$$

în care φ, ψ reprezintă unghiurile pe care tangentele într-un punct curent (x, y) le fac cu axa Ox, respectiv Oy (fig. 1).

Eforturile și momentele *reale* care apar în placă în secțiunile $x =$ const., $y =$ const. sînt reprezentate în figura 1 cu sensul lor pozitiv de acțiune. Relațiile necesare se scriu mai comod dacă în locul eforturilor și momentelor reale se consideră eforturile și momentele *proiectate* în planul xOy.

În teoria de membrană, momentele încovoietoare și de răsucire, precum și forțele tăietoare sînt neglijate în ecuațiile de echilibru ; ele pot fi evaluate cu ajutorul relațiilor de elasticitate, în funcție de deplasările u, v, w și în măsura în care ele rezultă neglijabile, ipoteza de membrană este acceptabilă.

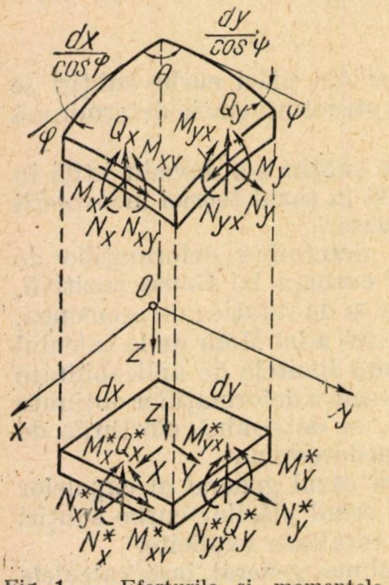


Fig. 1. — Eforturile și momentele proiectate și reale.

Legătura între eforturile reale și proiectate este dată de relațiile

$$\left.\begin{aligned} N^*_x &= N_x \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}, \\ N^*_y &= N_y \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}, \\ N^*_{xy} &= N^*_{yx} = N_{xy} = N_{yx}. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Pentru cazurile obișnuite, încărcarea este normală pe planul xOy, astfel încît, mai departe, vom considera componenta Z $(X = Y \equiv 0)$.

Vom exprima eforturile proiectate prin intermediul unei funcții de eforturi F (de tip Airy)

$$\left.\begin{aligned} N^*_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ N^*_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ N^*_{xy} &= N^*_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Funcţia de eforturi satisface ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -Z. \tag{1.6}$$

Ecuaţia (1.6) este dedusă numai cu ajutorul condiţiilor de echilibru, de aceea are un caracter *static*; ea reprezintă prima ecuaţie de bază a problemei.

Deplasările u, v, w se produc în sensul axelor de coordonate x, y, z. Asociind ecuaţiilor de echilibru, ecuaţiile de deformaţii şi relaţiile de elasticitate, se poate scrie şi a doua ecuaţie de bază a problemei, prin eliminarea succesivă a necunoscutelor.

Forma cea mai comodă de exprimare, în cazul general, se obţine alegînd ca necunoscută finală săgeata w

$$t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + r\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right), \tag{1.7}$$

în care

E — modulul de elasticitate al materialului,
δ — grosimea plăcii (presupusă constantă),
μ — coeficientul lui Poisson

$$f = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left\{N_x^*(1+p^2)^2 + 2N_{xy}^*\,pq\,(1+p^2) + N_y^*\,[p^2q^2 - \mu(1+p^2+q^2)]\right\},$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left\{N_y^*(1+q^2)^2 + 2N_{xy}^*\,pq\,(1+q^2) + N_x^*\,[p^2q^2 - \mu(1+p^2+q^2)]\right\},$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left\{N_x^*\,pq\,(1+p^2) + N_{xy}^*\,[2p^2q^2 + (1+\mu)\,(1+p^2+q^2)] + \right.$$
$$\left. + N_y^*\,pq\,(1+q^2)\right\}. \tag{1.8}$$

Ecuaţia (1.7) are un caracter *geometric*; ea exprimă condiţia de compatibilitate a deformaţiilor.

Placa curbă subţire *pleoştită* este caracterizată prin aproximaţiile

$$1 + p^2 \approx 1, \quad 1 + q^2 \approx 1, \quad pq \approx 0. \tag{1.9}$$

În acest caz, notaţiile (1.8) se simplifică esenţial, devenind

$$\left.\begin{aligned} f &\approx N_x^* - \mu N_y^* = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ g &\approx N_y^* - \mu N_x^* = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ h &\approx (1+\mu)\,N_{xy}^* = -(1+\mu)\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

iar ecuația (1.7) devine

$$t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + r\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right). \quad (1.11)$$

Pentru simplitatea scrierii, vom introduce operatorii

$$\Delta(\ldots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ldots) \qquad \text{operatorul lui Laplace,}$$

$$\Delta_1(\ldots) = \left(t\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + r\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ldots) \qquad \text{operator mixt de ordinul al doilea.} \quad (1.12)$$

Cu acestea, cele două ecuații de bază (1.6) și (1.7) se scriu

— *pentru plăci curbe subțiri oarecare*

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 F = -Z, && (1.13\,a)\\ &\Delta_1 w = -\frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right); && (1.13\,b)\end{aligned}\right|$$

— *pentru plăci curbe subțiri pleoștite*

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 F = -Z, && (1.14\,a)\\ &\Delta_1 w = -\frac{1}{E\delta}\Delta\Delta F. && (1.14\,b)\end{aligned}\right|$$

În ambele cazuri se constată că *operatorul diferențial al săgeților este identic cu operatorul diferențial al funcției de eforturi*; aceasta constituie de fapt, extinderea analogiei lui Mohr de la grinda dreaptă la membrane.

Într-adevăr, făcînd substituțiile

$$\left.\begin{aligned} &w \to F,\\ &\frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) \text{ sau } \frac{1}{E\delta}\Delta\Delta F \to Z,\end{aligned}\right|$$

ecuația geometrică se transformă în ecuația statică.

În cazul plăcilor curbe subțiri pleoștite, ipotezele suplimentare intervin numai prin intermediul celei de a doua ecuații de bază; de aceea, atunci cînd starea de eforturi este static determinată, ea este riguroasă.

Să comparăm, mai departe, ecuațiile de bază din teoria încovoierii și teoria de membrană, pentru plăcile curbe subțiri pleoștite.

În teoria încovoierii, cele două ecuații de bază au forma

$$\left.\begin{aligned} &K \cdot \Delta\Delta w - \Delta_1 F = Z, && (1.15\,a)\\ &\Delta\Delta F + E\delta \cdot \Delta_1 w = 0, && (1.15\,b)\end{aligned}\right\}$$

unde $K = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii.

Comparînd cu sistemul (1.14), se constată că ecuația de deformații este identică, în timp ce în prima ecuație, în teoria de membrană, lipsește termenul $K \cdot \Delta\Delta w$.

Așadar, cele două teorii concordă dacă se anulează rigiditatea la încovoiere ($K \to 0$). Această rigiditate, proporțională cu puterea a treia a grosimii δ, este nulă pentru $\delta = 0$; or, pentru $\delta = 0$ și rigiditatea la întindere $E\delta$, proporțională cu δ, se anulează.

Reducerea precedentă trebuie înțeleasă în sensul că grosimea plăcii este mică, astfel încît puterea a treia a grosimii să poată fi neglijată în raport cu însăși grosimea.

Astfel se poate conchide că o membrană este un corp elastic de grosime redusă, de rigiditate nulă la deformații flexionale, însă de rigiditate bine determinată la deformații extensionale.

Examinarea sistemelor (1.14) și (1.15) arată că, în teoria de membrană, ordinul ecuațiilor este patru, adică de două ori mai mic decît în teoria încovoierii. De aici rezultă că și numărul funcțiilor de integrare și al condițiilor la limită de care dispunem pentru determinarea lor, va fi de două ori mai mic.

Condițiile marginale se pot pune numai asupra eforturilor și deplasărilor tangențiale.

Pentru tipurile de margini și determinarea statică, se poate consulta lucrarea [12].

Situîndu-ne mai departe, în ipoteza de placă pleoștită, o dată determinate săgețile w, momentele și forțele tăietoare se determină cu ajutorul relațiilor cunoscute din teoria plăcilor plane

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\ M_y &= -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\ M_{xy} = M_{yx} &= -K(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= -K\frac{\partial}{\partial x}\Delta w,\\ Q_y &= -K\frac{\partial}{\partial y}\Delta w. \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

În sfîrșit, deplasările tangențiale se determină cu ajutorul relațiilor

$$\left.\begin{aligned} u &= \int rw\,dx + \frac{1}{E\delta}\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)dx + c_1(y),\\ v &= \int tw\,dy + \frac{1}{E\delta}\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)dy + c_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

Funcțiile de integrare $c_1(y)$ și $c_2(x)$ depinzînd de cîte o singură variabilă, nu sînt independente; ele trebuie să fie precizate astfel încît soluțiile u și v să satisfacă condiția de compatibilitate a deformațiilor

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\,sw = - \frac{2\,(1+\mu)}{E\delta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Problema se simplifică considerabil, în cazul cînd există simetrii sau antisimetrii ale stării de eforturi și de deformații.

2. STAREA DE EFORTURI STATIC DETERMINATĂ

Vom determina, în cele ce urmează, eforturile de membrană într-un paraboloid eliptic acoperind în plan un contur dreptunghiular $2a.2b$.

Notînd cu f_x și f_y săgețile celor două timpane și alegînd originea axelor de coordonate la creștet (fig. 2), ecuația suprafeței mediane se scrie

$$z = f_x \frac{x^2}{a^2} + f_y \frac{y^2}{b^2}. \tag{2.1}$$

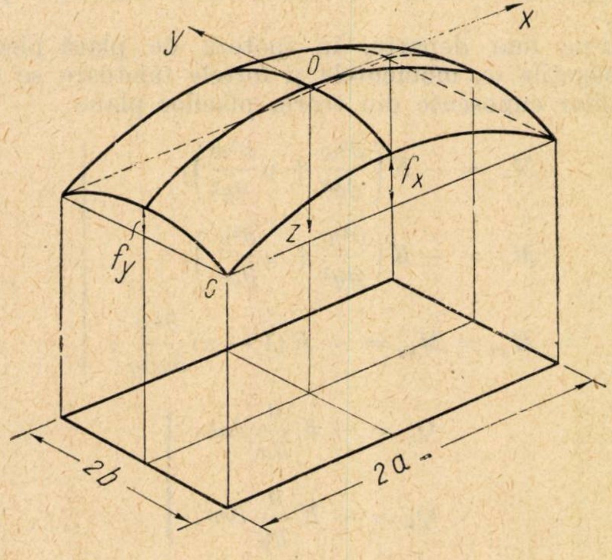


Fig. 2. — Elementele geometrice ale paraboloidului eliptic pe contur dreptunghiular.

Vom presupune că marginile $x = \pm a$ și $y = \pm b$ sînt simple, adică descărcarea plăcii se produce numai prin eforturi tangențiale.

Fie de determinat eforturile de membrană pentru o încărcare parabolică și uniformă în planul xOy.

2.1. ÎNCĂRCARE PARABOLICĂ

Fie

$$Z = p\left[\frac{f_x}{f_x + f_y}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{f_y}{f_x + f_y}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\right] \tag{2.2}$$

componenta încărcării; ea este nulă la colțuri și maximă la creștetul plăcii, unde atinge intensitatea p.

Ecuația (1.6) devine

$$\frac{2f_y}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2f_x}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\,p\left[\frac{f_x}{f_x + f_y}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{f_y}{f_x + f_y}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\right] \tag{2.3}$$

Se constată destul de ușor că soluția care satisface condiția $F = 0$ pe contur are forma polinomială

$$F(x,\, y) = \frac{pa^2b^2}{4\,(f_x + f_y)}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right). \tag{2.4}$$

Calculînd derivatele secunde ale funcției F, eforturile proiectate se obțin aplicînd relațiile (1.5):

$$\left.\begin{aligned} N_x^* &= -\,\frac{pa^2}{2\,(f_x + f_y)}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),\\ N_y^* &= -\,\frac{pb^2}{2\,(f_x + f_y)}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right),\\ N_{xy}^* = N_{yx}^* &= -\,\frac{pab}{f_x + f_y}\,\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Eforturile reale se deduc din (1.4), ținînd seama de factorul

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \sqrt{\frac{1 + \left(\dfrac{2f_y y}{b^2}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{2f_x x}{a^2}\right)^2}},$$

care afectează eforturile longitudinale. În cazul plăcilor curbe subțiri pleoștite, acest factor are valori foarte apropiate de unitate și de aceea se poate considera

$$N_x \approx N_x^*, \quad N_y \approx N_y^*.$$

2.2. ÎNCĂRCAREA UNIFORM DISTRIBUITĂ

Pentru acest tip de încărcare nu este posibilă obținerea unei soluții elementare; pentru rezolvare, este indicat să considerăm încărcarea sub forma seriei trigonometrice

$$Z = p \equiv \frac{4p}{\pi}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m}\cos\alpha_m x\,., \qquad (m = 1, 3, 5,\ldots) \tag{2.6}$$

unde

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{2a}. \tag{2.7}$$

Ecuația (1.6) se scrie în acest caz

$$\frac{2f_y}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2f_x}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -p = -\frac{4p}{\pi}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m}\cos\alpha_m x, \tag{2.8}$$

și admite soluția de aceeași formă

$$F(x, y) = \frac{pa^2b^2}{4f_y}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{pa^2b^2}{f_y}\sum_m \left(A_m \,\mathrm{ch}\,\beta_m y + B_m \,\mathrm{sh}\,\beta_m y\right)\cos\alpha_m x, \tag{2.9}$$

unde

$$\beta_m = \frac{m\pi}{2b}\sqrt{\frac{f_y}{f_x}}\,. \tag{2.10}$$

Tabela 1

Valorile coeficienților k_x (deasupra)
k_y (mijloc)
k_{xy} (dedesubt)

x/a	y/a				
	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0	0,250 0,250 0	0,267 0,233 0	0,318 0,182 0	0,399 0,101 0	0,500 0 0
0,25	0,233 0,267 0	0,250 0,250 0,029	0,301 0,199 0,068	0,389 0,111 0,096	0,500 0 0,108
0,50	0,182 0,318 0	0,199 0,301 0,068	0,250 0,250 0,140	0,350 0,150 0,210	0,500 0 0,244
0,75	0,101 0,399 0	0,111 0,389 0,096	0,150 0,350 0,210	0,250 0,250 0,356	0,500 0 0,465
1,00	0 0,500 0	0 0,500 0,108	0 0,500 0,243	0 0,500 0,465	— — (...)

Din condiţiile limită amintite anterior, rezultă

$$A_m = -\frac{8}{\pi^3}\cdot\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3\,\mathrm{ch}\beta_m b}, \qquad B_m = 0.$$

Eforturile proiectate se deduc din (2.8) prin derivări de două ori

$$\left.\begin{aligned}
N_x^* &= -\frac{2pa^2}{\pi f_x}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m}\cdot\frac{\mathrm{ch}\beta_m y}{\mathrm{ch}\beta_m b}\cos\alpha_m x,\\
N_y^* &= -\frac{pb^2}{2f_y}-\frac{b^2 f_x}{a^2 f_y}N_x^*,\\
N_{xy}^* = N_{yx}^* &= -\frac{2pab}{\pi\sqrt{f_x f_y}}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m}\cdot\frac{\mathrm{sh}\beta_m y}{\mathrm{ch}\beta_m b}\sin\alpha_m x.
\end{aligned}\right\}\qquad (2.11)$$

Se observă că, pentru un punct $\left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{b}\right)$ dat, expresiile eforturilor proiectate depind doar de raportul săgeţilor f_x/f_y, ceea ce a făcut posibilă tabularea lor [9], [12] sub forma

$$N_x^* = -k_x\cdot\frac{pa^2}{f_x};\quad N_y^* = -k_y\cdot\frac{pb^2}{f_y};\quad N_{xy}^* = N_{yx}^* = -k_{xy}\cdot\frac{pab}{\sqrt{f_x f_y}}\qquad (2.12)$$

În cele ce urmează, ne vom mărgini să considerăm cazul paraboloidului de rotaţie pe contur patrat ($a = b$, $f_x = f_y = f$). Expresiile eforturilor se pun sub forma

$$N_x^* = -k_x\cdot\frac{pa^2}{f};\quad N_y^* = -k_y\cdot\frac{pa^2}{f};\quad N_{xy}^* = N_{yx}^* = -k_{xy}\cdot\frac{pa^2}{f},\qquad (2.13)$$

în care valorile coeficienţilor k_x, k_y, k_{xy} sînt trecute în tabela 1.

Deoarece, la colţuri intensitatea încărcării este diferită de zero, acestea sînt puncte singulare [9], [12].

3. EXEMPLU DE APLICARE A ANALOGIEI LUI MOHR

Ne propunem să determinăm deplasările u, v, w şi eforturile secundare în cazul studiat la punctul 2.1.

Funcţia de eforturi definită de relaţia (2.4) prezintă particularitatea că operatorul bilaplacean este constant

$$\Delta\Delta F = \frac{p}{f_x + f_y},$$

astfel încît ecuaţia cu derivate parţiale a săgeţilor (1.11) ia forma

$$\frac{2f_y}{b^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{2f_x}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\frac{p}{E\delta(f_x+f_y)}. \tag{3.1}$$

Se observă însă că, dacă în (3.1), se fac următoarele schimbări:

$$\left.\begin{aligned} w &\rightarrow F, \\ \frac{p}{E\delta(f_x+f_y)} &\rightarrow p, \end{aligned}\right\}$$

se recade peste ecuaţia (2.8), a cărei soluţie este cunoscută. Bazaţi pe această observaţie, vom putea scrie direct

$$\begin{aligned} w(x,\ y) &= \frac{pa^2b^2}{4E\delta f_y(f_x+f_y)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)- \\ &-\frac{8pa^2b^2}{\pi^3 E\delta f_y(f_x+f_y)}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3}\frac{\operatorname{ch}\beta_m y}{\operatorname{ch}\beta_m b}\cos\alpha_m x \\ &(m=1,\ 3,\ 5,\ldots). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Soluţia respectă condiţia $w=0$ pe contur. Săgeata maximă se produce la centru

$$w_{\max}=\frac{pa^2b^2}{4E\delta f_y(f_x+f_y)}\left[1-\frac{32}{\pi^3}\sum_m\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3\operatorname{ch}\beta_m b}\right]; \tag{3.3}$$

$$(m=1,\ 3,\ 5,\ldots)$$

în particular pentru paraboloidul de rotaţie ($a=b,\ f_x=f_y=f$), rezultă

$$w_{\max}=0{,}7367\frac{pa^4}{E\delta f^2}.$$

Ţinînd seama că coeficienţii k_x, k_y, k_{xy} sînt tabulaţi, derivatele secunde se scriu

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -k_y\cdot\frac{pb^2}{E\delta f_y(f_x+f_y)}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -k_x\cdot\frac{pa^2}{E\delta f_x(f_x+f_y)}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} &= +k_{xy}\frac{pab}{E\delta\sqrt{f_xf_y}(f_x+f_y)}. \end{aligned}\right\}$$

Momentele încovoietoare şi de răsucire se scriu imediat aplicînd relațiile (1.16); ținînd seama că

$$k_x + k_y = +0{,}5 \quad \text{şi} \quad \frac{K}{E\delta} = \frac{\delta^2}{12(1-\mu^2)},$$

expresiile lor finale sînt

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\frac{pb^2\delta^2}{24(1-\mu^2)(f_x+f_y)f_y}\left[1 - 2k_x\left(1 - \mu\frac{a^2f_y}{b^2f_x}\right)\right], \\ M_y &= -\frac{pa^2\delta^2}{24(1-\mu^2)(f_x+f_y)f_x}\left[1 - 2k_y\left((1 - \mu\frac{b^2f_x}{a^2f_y}\right)\right], \\ M_{xy} &= M_{yx} = -\frac{pab\,\delta^2}{12(1+\mu)(f_x+f_y)\sqrt{f_xf_y}}\,k_{xy}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

Momentele încovoietoare satisfac relația algebrică

$$\left(1 - \mu\frac{b^2f_x}{a^2f_y}\right)M_x + \left(\frac{b^2f_x}{a^2f_y} - \mu\right)M_y = \frac{pb^2\delta^2}{24f_y(f_x+f_y)}.$$

Colțurile sînt puncte singulare pentru momentele de torsiune. Pe contur, momentele încovoietoare nu se anulează, astfel încît placa este încastrată parțial. Valoarea maximă se obține la mijlocul laturii ($x = a$, $y = 0$) unde $k_x = 0$ şi

$$M_{x,\max} = -\frac{pb^2\delta^2}{24(1-\mu^2)(f_x+f_y)f_y}.$$

Să evaluăm importanța momentelor. Formînd raportul dintre eforturile unitare σ' produse de efortul longitudinal N_x^* şi eforturile unitare σ'' produse de momentul încovoietor M_x (ambele la creştet), rezultă

$$\left|\frac{\sigma''}{\sigma'}\right| = \frac{1}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{b^2f_x}{a^2f_y} + \mu\right)\frac{\delta}{f_x + f_y}.$$

Pentru a avea un ordin de mărime, să considerăm iarăşi $a = b, f_x = f_y = f$, $\mu = \frac{1}{6}$ şi $\max(\delta - f) = 1 - 20$; introducînd aceste valori în relația de mai sus, se obține

$$\left|\frac{\sigma''}{\sigma'}\right| = \frac{1}{67} = 0{,}015,$$

adică o valoare neglijabilă; ipoteza de membrană este astfel justificată.

Deplasările tangenţiale u şi v rezultă din aplicarea relaţiilor (1.18) sub forma

$$u = \frac{pb^2 f_x}{E\delta f_y (f_x + f_y)} \left\{ x - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{f_y}{2f_x b^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} - \mu x (b^2 - y^2) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{32}{\pi^4} a \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cdot \frac{\text{ch}\beta_m y}{\text{ch}\beta_m b} \sin\alpha_m x, \right\},$$

$$v = \frac{p}{2E\delta(f_x + f_y)} \left\{ 2a^2 y \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - b^2 y + \frac{y^3}{3} + \mu y (a^2 - x^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{64}{\pi^4} a^2 b \sqrt{\frac{f_x}{f_y}} \sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cdot \frac{\text{sh}\beta_m y}{\text{ch}\beta_m b} \cos\alpha_m x \right\}$$

$$(m = 1, 3, 5, \ldots).$$

Deplasările tangenţiale sînt maxime pe mijlocul laturilor de contur. În cazul paraboloidului de rotaţie pe contur patrat, rezultă

$$u_{\max} = v_{\max} = 0{,}14287 \frac{pa^3}{E\delta f}.$$

4. DEFORMAŢIILE DE MEMBRANĂ ŞI DEFORMAŢIILE REALE ALE PARABOLOIDULUI DE ROTAŢIE

Fie de determinat, în continuare, deplasările paraboloidului de rotaţie pe contur patrat, sub acţiunea unei încărcări uniforme. Starea de eforturi de membrană a fost discutată la punctul 2.2.

Pentru a putea face o comparaţie între rezultatele teoriei de membrană şi teoriei încovoierii, vom căuta, la început, soluţia sub forma unei serii duble trigonometrice.

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, vom considera încărcarea dată sub forma

$$Z(x, y) = p \equiv \frac{16p}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2} - 1}}{mn} \cos\frac{m\pi x}{2a} \cos\frac{n\pi y}{2b} \tag{4.1}$$

$$(m, n = 1, 3, 5, \ldots).$$

Căutînd soluţia pentru F şi w de aceeaşi formă

$$\left.\begin{aligned} F(x, y) &= \sum_m \sum_n F_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{2a} \cos\frac{n\pi y}{2b}, \\ w(x, y) &= \sum_m \sum_n w_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{2a} \cos\frac{n\pi y}{2b}, \\ &(m, n = 1, 3, 5, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

din sistemul (1.14) se obține

$$\left.\begin{aligned} F_{m,n} &= \frac{32\,pa^2b^2}{\pi^4}\cdot\frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}-1}}{mn\,(m^2f_y+n^2f_x)}, \\ w_{m,n} &= \frac{4pa^4b^4}{\pi^2E\,\delta}\cdot\frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2(-1)^{\frac{m+1}{2}-1}}{mn\,(m^2f_y+n^2f_x)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

Fără a mai deduce explicit eforturile, momentele și deplasările tangențiale, vom preciza că *fiecare armonică* (m, n) a soluției (4.2) satisface următoarele *condiții marginale de membrană* :

$$\left.\begin{aligned} &- \text{pe laturile } x = \pm a \rightarrow N_x^* = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \\ &- \text{pe laturile } y = \pm b \rightarrow N_y^* = 0, \quad \varepsilon_x = 0. \end{aligned}\right\}$$

În plus, următoarele condiții suplimentare, care ar apărea în teoria încovoierii, sînt de asemenea satisfăcute :

$$\left.\begin{aligned} &- \text{pe laturile } x = \pm a \rightarrow w = 0, \quad M_x = 0, \\ &- \text{pe laturile } y = \pm b \rightarrow w = 0, \quad M_y = 0. \end{aligned}\right\}$$

Cum raportul dintre eforturile unitare produse de momente și de eforturi este mai mic decît 1/10, rezultatele precedente denotă că ipoteza de membrană este realizată și în acest caz.

Atunci cînd se trece la suprapunerea efectelor (însumarea tuturor armonicelor m, n), pentru numărul infinit de termeni ai seriei duble, săgețile nu vor mai fi nule pe contur și deci condițiile *reale* de rezemare nu vor fi satisfăcute.

Pentru satisfacerea acestor condiții, în zona marginală va trebui să apară o stare perturbatoare de momente, care să conducă la săgeți pe contur, egale și de semn contrar cu cele rezultate din teoria de membrană.

Sumarea este ușoară în cazul paraboloidului de rotație. Din (4.2) și (4.3) se deduce

$$w(x, y) = \frac{pa^4}{4E\delta f^2}\cdot\frac{16}{\pi^2}\sum_m\sum_n\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b} = \frac{pa^4}{4E\delta f^2} = \text{const.} \qquad (4.4)$$

Rezultă astfel o deplasare elastică similară cu o deplasare de corp rigid.

În teoria încovoierii, soluția generală are aceeași formă (4 · 2); din sistemul (1.15) rezultă însă

$$F_{m,n} = \frac{32\,pa^2b^2}{\pi^4} \cdot \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn} \cdot \frac{m^2f_y + n^2f_x}{(m^2f_y + n^2f_x)^2 + \dfrac{\pi^4}{768\,(1-\mu^2)}\,a^4b^4\delta^2\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)^4}$$

$$w_{m,n} = \frac{4\,pa^4b^4}{\pi^2E\delta} \cdot \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn} \cdot \frac{\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}{(m^2f_y + n^2f_x)^2 + \dfrac{\pi^4}{768\,(1-\mu^2)}\,a^4b^4\delta^2\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)^4}. \tag{4.5}$$

Relațiile (4.5) se simplifică în cazul paraboloidului de rotație; săgețile w capătă expresia

$$w = \frac{pa^4}{4\,E\delta f^2} \cdot \frac{16}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn} \cdot \frac{\lambda^4}{\lambda^4 + (m^2+n^2)^2} \cos\frac{m\pi x}{2a} \cos\frac{n\pi y}{2a}, \tag{4.6}$$

unde

$$\lambda = \frac{4}{\pi}\sqrt[4]{3\,(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{f}{\delta}}. \tag{4.7}$$

Variația săgeților w în secțiunea $y = 0$, pentru $\lambda = 14$ este redată în figura 3.

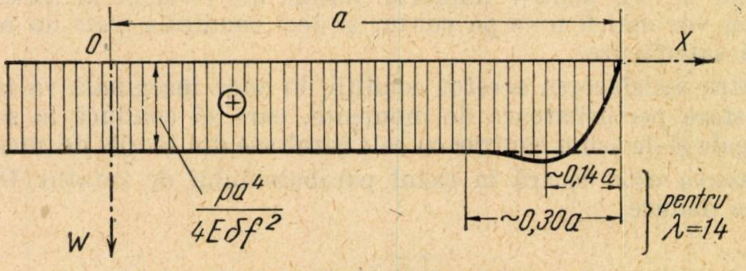


Fig. 3. — Variația săgeților w în secțiunea $y = 0$.

Se vede că soluția de membrană dă rezultate corecte pe toată suprafața cu excepția unei zone marginale înguste.

O soluție aproximativă cu rezultate foarte bune se poate obține considerînd, după A. L. Goldenveiser [5] *efectul de contur simplu.*

Ecuația care caracterizează acest efect se deduce din (1.15), anulînd membrul drept care reprezintă încărcarea exterioară și admițînd că F și w depind numai de o singură variabilă.

Trecînd peste operațiile intermediare, se ajunge la următoarea ecuație a săgeților produse de perturbațiile marginale

$$\frac{d^4\overline{w}}{dx^4} + \frac{4\,\beta^4}{a^4}\overline{w} = 0, \tag{4.8}$$

unde $\beta = \sqrt[4]{12(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{f}{\delta}}$ coeficient de amortizare. (4.9)

Reținînd soluția amortizată de la o margine, avem

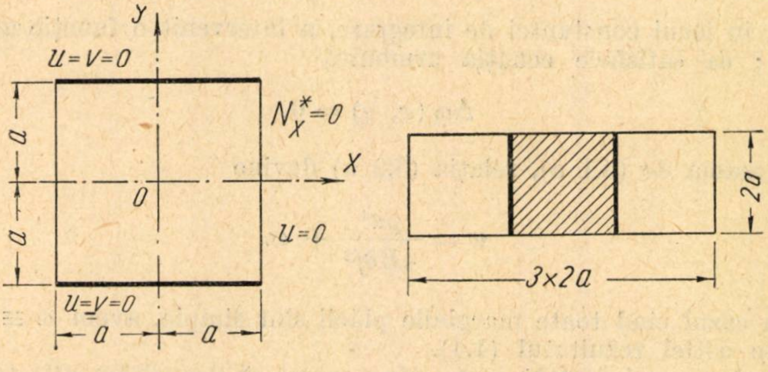
$$\overline{w} = e^{-\beta\frac{x}{a}}\left(A_1\cos\beta\frac{x}{a} + A_2\sin\beta\frac{x}{a}\right).$$

Constantele A_1 și A_2 se determină astfel încît la marginea $x = 0$ să avem

$$\overline{w} + \frac{pa^4}{4E\delta f^2} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d^2\overline{w}}{dx^2} = 0.$$

5. UN CAZ DE REZEMARE STATIC NEDETERMINAT

În încheierea problemelor de deformații, vom studia starea de eforturi într-un paraboloid de rotație pe contur patrat, într-un caz de rezemare static nedeterminat. În acest scop, vom presupune că deplasările tangențiale u și v sînt împiedecate pe laturile $y = \pm a$ (fig. 4a), ceea ce corespunde panoului central dintr-un șir de plăci (fig. 4b).



a) b)

Fig. 4. — Rezemarea static nedeterminată; *a*) condițiile de rezemare pe contur; *b*) panoul central dintr-un șir de plăci.

În felul acesta, placa curbă subțire are două margini opuse *complete* și celelalte două margini *simple*.

Funcţia de eforturi F a fost dedusă la punctul 2.2, cu ajutorul seriilor simple trigonometrice. Pentru deducerea mai simplă a săgeţilor w, este util să facem cîteva consideraţii suplimentare.

În cazul paraboloidului de rotaţie, operatorul Δ_1 se reduce la operatorul laplacean, mai puţin un factor de proporţionalitate, întrucît

$$r = t = \frac{2f}{a^2}, \quad s \equiv 0.$$

Avem astfel

$$\Delta_1(\ldots) = \frac{2f}{a^2}\,\Delta(\ldots),$$

iar sistemul (1.14) se scrie

$$\left.\begin{aligned} \Delta F &= -\frac{pa^2}{2f}, & (5.1\text{ a})\\ \Delta w &= -\frac{a^2}{2E\delta f}\,\Delta\Delta F. & (5.1\text{ b}) \end{aligned}\right\}$$

Cum în (5.1 b), în ambii membri figurează operatorul Δ, se poate integra o dată simbolic

$$w = -\frac{a^2}{2E\delta f}\,\Delta F + \omega, \tag{5.2 a}$$

în care, în locul constantei de integrare, a intervenit o funcţie arbitrară $\omega(x, y)$; ea satisface ecuaţia armonică

$$\Delta\omega\,(x, y) = 0.$$

Ţinînd seama de (5.1 a), relaţia (5.2 a) devine

$$w = \frac{pa^4}{4E\delta f^2} + \omega. \tag{5.2 b}$$

În cazul cînd toate marginile plăcii sînt simple, avem $\omega \equiv 0$ şi se regăseşte astfel rezultatul (4.4).

Pentru cazul de faţă însă, este necesar să dezvoltăm atît termenul constant, cît şi funcţia armonică, în serie simplă trigonometrică :[1])

$$w = \frac{pa^4}{E\delta f^2}\sum_m\left[\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi m} + C_m\,\mathrm{ch}\,\alpha_m y + D_m\,\mathrm{sh}\,\alpha_m y\right]\cos\alpha_m x. \tag{5.3}$$

---

[1]) În cazul paraboloidului de rotaţie, avem $\alpha_m = \beta_m$.

Deplasările tangențiale se deduc cu ajutorul relațiilor (1.18)

$$u = \frac{pa^3}{E\delta f}\sum_m \left[\frac{4}{\pi^2}(1+\mu)\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} + (1+\mu)\frac{\pi}{2}m(A_m \operatorname{ch}\alpha_m y + B_m \operatorname{sh}\alpha_m y) + \frac{4}{\pi m}(C_m \operatorname{ch}\alpha_m y + D_m \operatorname{sh}\alpha_m y)\right]\sin\alpha_m x, \tag{5.4 a}$$

$$v = \frac{pa^3}{E\delta f}\sum_m \left[\frac{4}{\pi m}(C_m \operatorname{sh}\alpha_m y + D_m \operatorname{ch}\alpha_m y) - (1+\mu)\frac{\pi}{2}m(A_m \operatorname{sh}\alpha_m y + B_m \operatorname{ch}\alpha_m y)\right]\cos\alpha_m x. \tag{5.4 b}$$

Din condiții de simetrie față de axa Ox, rezultă că se poate lua de la început, $B_m = D_m = 0$.

Ținînd seama de condițiile limită, din relațiile (5.4) se deduc ecuațiile care determină constantele A_m și C_m

$$\left.\begin{aligned} &+(1+\mu)\frac{\pi}{2}m\,A_m \operatorname{ch}\alpha_m a + \frac{4}{\pi m}C_m \operatorname{ch}\alpha_m a = -\frac{4}{\pi^2}(1+\mu)\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2},\\ &-(1+\mu)\frac{\pi}{2}m\,A_m \operatorname{sh}\alpha_m a + \frac{4}{\pi m}C_m \operatorname{sh}\alpha_m a = 0,\end{aligned}\right\}$$

cu rădăcinile

$$A_m = -\frac{4}{\pi^3}\cdot\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3 \operatorname{ch}\alpha_m a}, \qquad C_m = -\frac{1+\mu}{2\pi}\cdot\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m \operatorname{ch}\alpha_m a},$$

Ținînd seama că $\alpha_m a = \beta_m b$, se observă că valoarea lui A_m de mai sus este jumătate din aceea obținută la punctul 2.2 pentru cazul marginilor simple (static determinat). De aici rezultă că expresiile eforturilor proiectate se pot pune sub forma

$$\left.\begin{aligned} N_x^* &= -\frac{1}{2}k_x\cdot\frac{pa^2}{f},\\ N_y^* &= -\frac{pa^2}{2f} - N_x^* = -\frac{1-k_x}{2}\cdot\frac{pa^2}{f},\\ N_{xy}^* &= N_{yx}^* = -\frac{1}{2}k_{xy}\cdot\frac{pa^2}{f},\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

în care coeficienții k_x și k_{xy} se iau din tabela 1.

Variația eforturilor N_x^*, N_y^* și $N_{xy}^* = N_{yx}^*$ este redată în figura 5 *a*, *b*, *c*.

Alte cazuri static nedeterminate vor face obiectul unui studiu separat.

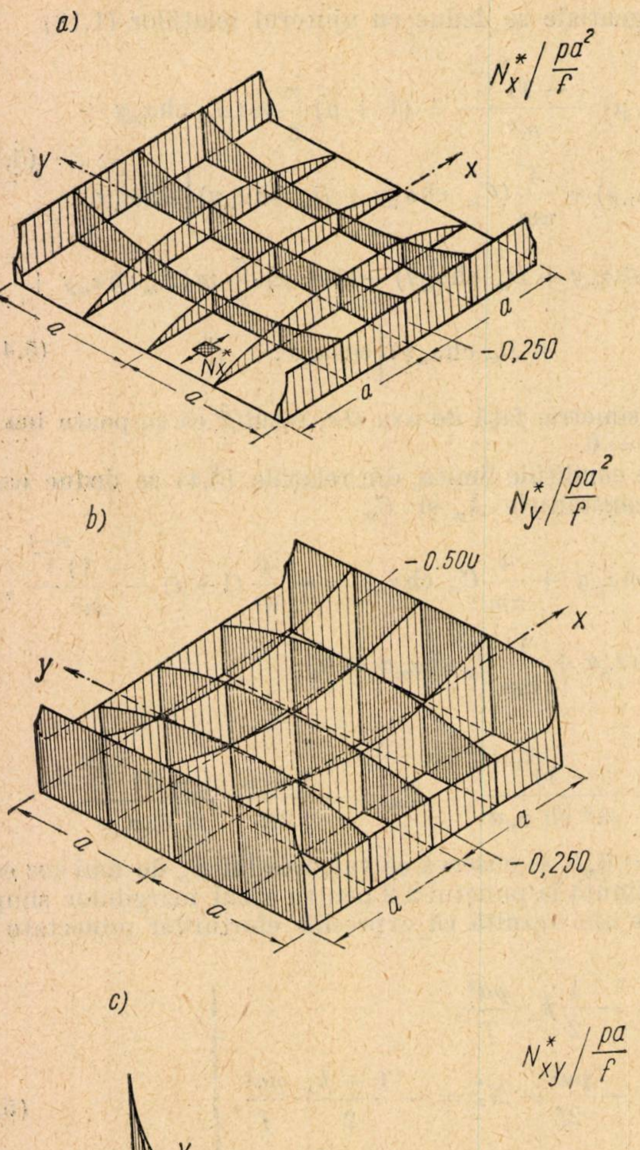

a)
N*x / pa²/f
y
x
a
a
a
a
−0,250
N*x
b)
N*y / pa²/f
−0.500
x
y
a
a
a
a
−0,250
c)
N*xy / pa/f
y
x
N*xy = N*yx
a
a

Fig. 5. — Eforturile de membrană în paraboloidul de rotaţie: *a*) variaţia lui N_x^*; *b*) variaţia lui N_y^*; *c*) variaţia lui $N_{xy}^* = N_{yx}^*$.

6. OBSERVAŢII FINALE

Posibilitatea determinării eforturilor şi deplasărilor de membrană este legată intim de *invariabilitatea geometrică a plăcii curbe subţiri*. Aceasta va fi asigurată dacă pentru condiţiile de contur date, corespunzătoare modului de rezemare a marginilor şi cînd nu există eforturi interioare, ecuaţiile deplasărilor vor avea o singură soluţie, identic egală cu zero pe toată suprafaţa.

În cazul paraboloidului de rotaţie, săgeţile w satisfac ecuaţia armonică[1])

$$\Delta w = 0.$$

Să presupunem că săgeţile w sînt zero *pe un contur închis*; atunci dintr-o proprietate a funcţiilor armonice de a atinge maximul sau minimul pe un contur închis, decurge că săgeţile sînt nule pe întreaga suprafaţă, iar deplasările tangenţiale au valori care caracterizează translaţia şi rotirea plăcii în planul xOy, ca un corp rigid, neînsoţit de deformaţii elastice.

A. R. Rjanitzîn [11] a studiat invariabilitatea geometrică a paraboloidului eliptic şi de rotaţie şi pentru un caz mai complet.

Plăcile curbe subţiri avînd curbura totală negativă sau nulă prezintă aspecte mai delicate, în privinţa aplicabilităţii teoriei de membrană. O discuţie mai detaliată a fost făcută în cazul paraboloidului hiperbolic în şa [13], unde generatoarele rectilinii joacă un rol considerabil.

Studiul deformaţiilor de membrană pentru cupole înalte a fost făcut în memoriile importante ale lui W. Flügge şi F. T. Geyling [4] şi A. Sollazzo [14]; calculul este complicat, fiind necesară o metodă de calcul numerică.

Shizuo Ban [1] a determinat deformaţiile paraboloidului hiperbolic raportat la generatoare, fără a examina valabilitatea teoriei de membrană.

V. M. Nikireev [8] a utilizat metoda deformaţiilor, plecînd tot de la ipoteza de placă curbă subţire pleoştită.

Primită la redacţie la 21 iunie 1962.

К ИЗУЧЕНИЮ ДЕФОРМАЦИИ МЕМБРАН В ПЛАСТИНКАХ

РЕЗЮМЕ

Исходя из гипотезы тонкостенной пологой пластинки, исследуется ряд вопросов, касающихся деформирования мембраны: распространение аналогии Мора на расчеты прогибов, сравнение между дефор-

---

[1]) Aceasta rezultă din (5.1 b), anulînd membrul drept care este funcţie de încărcarea exterioară.

мациями мембраны и деформациями изгиба, определение состояния напряжения в случае статически неопределимой опоры.

Вычисления проделаны для случая эллиптического параболоида и параболоида вращения, когда уравнения, встречающиеся в частных производных, имеют постоянные коэффициенты.

CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF MEMBRANE DEFORMATIONS OF SHELLS

ABSTRACT

Proceeding from the assumption of shallow shells, this paper examines a series of aspects which refer to membrane deformations: the extension of Mohr's analogy to the calculation of deflections, comparison between membrane deformations and bending deformations, determination of the state of stresses in a statically indeterminate case of support.

The calculations are developed for the case of revolution and elliptical paraboloid, when the partial derivative equations which intervene have constant coefficients.

BIBLIOGRAFIE

1. Shizuo Ban, *Formänderung der hyperbolischen Paraboloidschale.* Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Abhandlungen, XIII, Zürich, 1953, 1–16.
2. E. Bölcskei, *Déformation des voiles minces.* Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, **V**, *4*, 489 (1952).
3. В. В. Дикович, *Пологие прямоугольные в плане оболочки вращения.* Госстройиздат, 1960.
4. W. Flügge, F. T. Geyling, *A General Theory of Deformations of Membrane Shells.* Memories of the International Association for Bridge and Structural Engineering. **XVII**, Zürich, 1957, 23.
5. А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек.* Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953.
6. P. Layrangues, *Étude générale de la déformation élastique des voiles minces.* Annales des Ponts et Chaussées, *1*, 39–76 (1956).
7. K. Marguerre, *Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung.* Jahrbuch 1939 der Deutschen Luftfahrtforschung, **I**, 413–8.
8. В. М. Никиреев, *Расчет безмоментной пологой оболочки на постоянную вертикальную нагрузку.* Строительная механика и расчет сооружений, **I**, *6*, 1—9 (1959).
9. A. Parme, *Hyperbolic Paraboloids and Other Shells of Double Curvature.* Proceedings A.S.C.E. Journal of the Structural Division, 82, Sept (1956).
10. A. Pucher, *Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen.* Beton und Eisen, *19*, 298 (1934).
11. А. Р. Ржаницын, *Безмоментная теория пологих оболочек.* Расчет пространственных конструкций. Выпуск III, Государственное издательство литетуры по строительству и архитектуре, Москва, 1955, 285—307.

12. M. SOARE, *Aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul plăcilor curbe subţiri*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1959.

13. — *Contribuţii la teoria încovoierii paraboloidului hiperbolic în şa*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *2*, 429–450 (1962).

14. A. SOLLAZZO, *Deformazioni membranali dei gusci a doppia curvatura su pianta di forma generica*. Universita di Trieste, Instituto di Scienza delle Costruzioni, Pubblicazione N. 37, Trieste, 1961.

15. В. З. ВЛАСОВ, *Общая теория оболочек и ее приложения в технике*. Гостехиздат, Москва, 1949.

NOTE

TORSIUNEA BARELOR CILINDRICE CU FISURĂ DIAMETRALĂ DE ADÎNCIME VARIABILĂ STUDIATĂ CU AJUTORUL ANALOGIEI CU MEMBRANĂ

DE

EDUARD NICOLAU [1]

1. Într-o lucrare anterioară [1] s-a prezentat aparatul — conceput şi executat la Institutul de mecanică aplicată — pentru cercetarea torsiunii barelor cilindrice sau prizmatice solicitate cu un moment de torsiune precum şi studiul cîtorva profile efectuate cu acest aparat.

Avînd în vedere faptul că rezolvarea pe cale analitică a problemei barelor cilindrice fisurate după un plan diametral şi supuse la un moment de răsucire este dificilă s-a recurs la utilizarea analogiei cu membrana. În cercetarea prezentată mai jos, s-a urmărit să se determine nu numai diagramele tensiunilor tangenţiale maxime ci şi variaţia acestor diagrame pe măsura avansării fisurii pînă la despicarea în două a unui arbore cilindric.

Aparatul folosit (fig. 1) este cel prezentat în lucrarea menţionată mai sus şi care cuprinde două elemente (*a*) dispozitivul de măsurare a coordonatelor membranei şi (*b*) dispozitivul de control al stabilităţii presiunii interioare.

Membrana folosită a fost din foaie de cauciuc sintetic cu grosime constantă de 0,5 mm. Aria închisă de conturul experimental a fost de circa 75 cm^2.

Conturul studiat — de formă circulară — are tăietura diametrală l' de adîncime variabilă avînd valorile

$$\frac{l'}{D} = 0{,}0;\quad 0{,}24;\quad 0{,}58;\quad 0{,}69;\quad 0{,}88;\quad 1{,}00.$$

Măsurătorile făcute cu aparatul au permis să se traseze curbele de nivel ale membranei umflate, în diferitele cazuri studiate, să se evalueze variația, pantelor membranei de-a lungul secțiunii din prelungirea tăieturii (fisurii) și să se calculeze volumele închise de membrană.

---

[1] Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

După cum se știe între ordonatele, pantele și volumele membranei pe de o parte și funcția de tensiune Φ, tensiunile tangențiale τ_{xz}, și τ_{yz} și

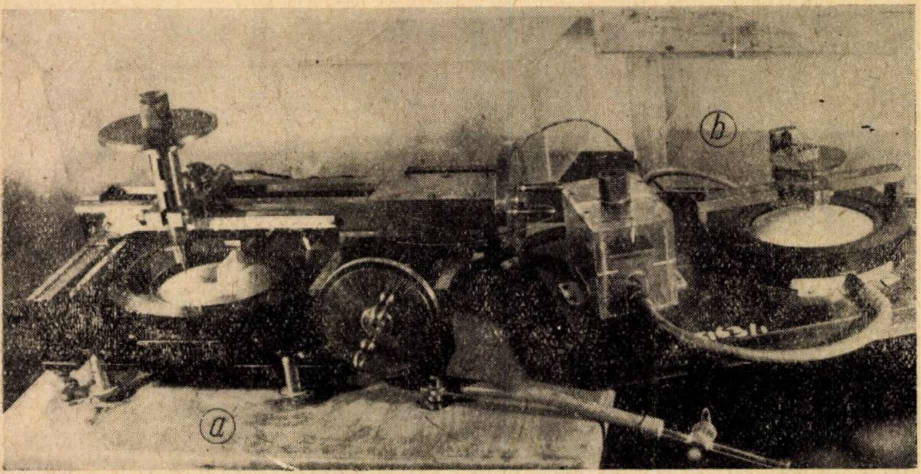


Fig. 1. — Aparatul pentru studiul stării de tensiune prin analogia cu membrana. *a* — dispozitivul de măsurare a coordonatelor membranei; *b* — dispozitiv de control al stabilității presiunii.

rigiditatea la torsiune R a profilului pe de altă parte, există proporționalitate.

Într-adevăr, dacă

$$\Delta\Phi = -2G\theta,$$

$$\Phi_c = 0,$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

$$R = \frac{M_t}{\theta},$$

iar pentru ordonatele z ale membranei avem:

$$\Delta z = -\frac{p}{T} \qquad p = \text{presiunea interioară},$$

$$z_c = 0 \qquad T = \text{tensiunea în membrană},$$

vor rezulta următoarele egalități :

$$\Phi = k \cdot z,$$

$$\tau_{xz} = k \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \tau = -k \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$k = G.\theta.\frac{T}{p} \qquad \theta = \text{unghiul de răsucire specifică},$$

$$R = 2G\frac{T}{p}V \qquad V = \text{volumul închis de membrană.}$$

Deci măsurătorile de cote făcute pe membrană cu aparatul de analogie cu membrana și cu care se pot evalua pantele și volumele permite evaluarea tensiunilor tangențiale și a rigidității.

Caracteristicile profilului studiat sînt date în figura 2. Tăietura a fost realizată așa cum se vede și în figura 1 cu o lamelă glisantă din plexiglas de grosime 0,02 D. Rolul lamelei constă în aceea că menține de-a lungul ei membrana la nivelul conturului. Se realizează deci un contur simplu conex de forma celui din figura 2 în care lungimea conturului rectiliniu l' poate avea valori de la 0 la D.

2. Măsurătorile de cote efectuate pentru diferite lungimi ale lamelei ce modelează fisura au permis trasarea curbelor de nivel indicate în figura 3 *a*, *b*, *c*, *d*, *e* și *f* în care *a* și *f* sînt cazurile limită cînd fisura nu există (*a*) și cînd profilul este despicat în două profile de secțiuni semicirculare (*b*) ce corespunde cazului cînd fisura a avansat pînă la capătul opus.

După cum se vede din figura 4, unde sînt trasate secțiuni prin membrană cu un plan vertical normal pe planul fisurii la mijlocul zonei nefisurate, începînd de la valoarea 0,58 pentru raportul $\frac{l'}{D}$ profilul se comportă ca două jumătăți aproape distincte. Aceasta rezultă din faptul că nivelul membranei este mai coborît în dreptul lamelei (a fisurii) și deci membrana capătă din ce în ce mai pronunțat forma a două umflături distincte. Raportul $\frac{l'}{D} = 0{,}58$ corespunde cazului cînd curbura lui Gauss prin mijlocul zonei nefisurate din prelungirea fisurii, trecînd de la valori pozitive la valori negative se anulează.

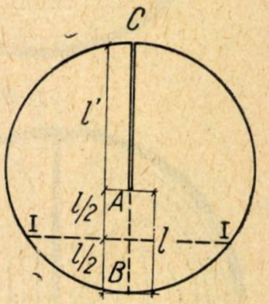
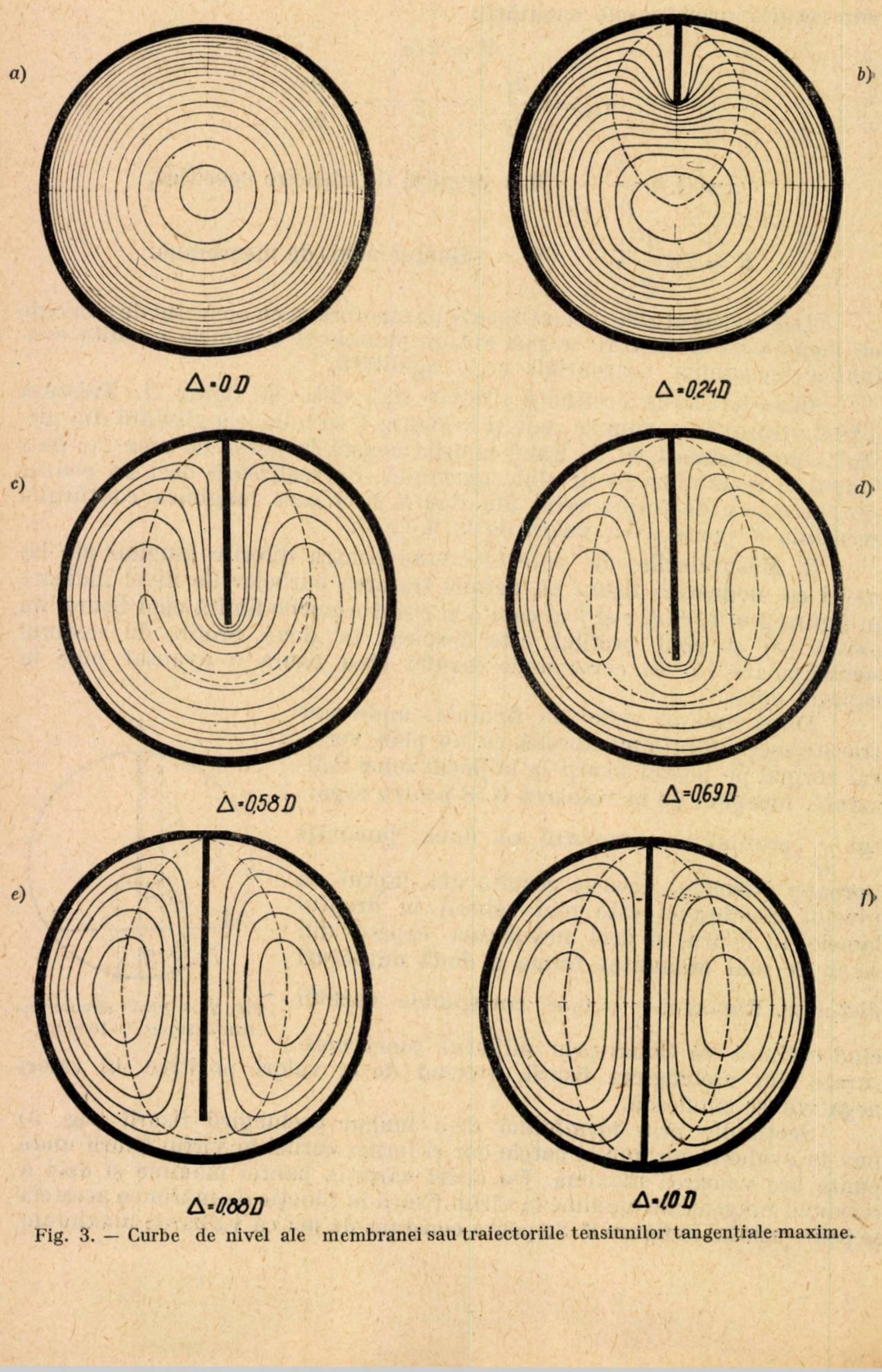


Fig. 2. — Profil circular cu fisură supus la torsiune.

Secțiunile prin membrană de-a lungul prelungirii fisurii (fig. 5) pun în evidență nu numai cotele dar și forma curbei în vîrful fisurii unde panta are valoarea maximă. De altfel variația pantei maxime și deci a tensiunii tangențiale maxime la vîrful fisurii în funcție de mărimea acesteia se poate urmări în figura 6. Se poate constata de aci că valoarea maximum



a) $\Delta = 0\,D$

b) $\Delta = 0{,}24D$

c) $\Delta = 0{,}58\,D$

d) $\Delta = 0{,}69\,D$

e) $\Delta = 0{,}88\,D$

f) $\Delta = 1{,}0\,D$

Fig. 3. — Curbe de nivel ale membranei sau traiectoriile tensiunilor tangenţiale maxime.

maximorum a tensiunii tangenţiale (în vîrful fisurii) are loc pentru o adîncime de $\frac{l'}{D} = 0{,}31$ a fisurii şi corespunde unui coeficient de concentrare de cca 6,5. Tot din această diagramă se poate constata că valoarea coeficientului de concentrare a tensiunii în vîrful fisurii este mai mare decît 1, pînă la o adîncime a fisurii de $\frac{l'}{D} = 0{,}79$, după care tensiunea tangenţială maximă e mai mare lîngă conturul circular.

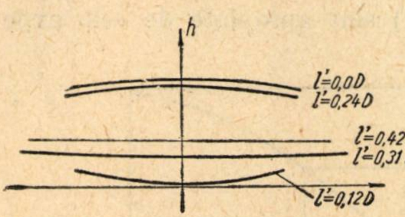


Fig. 4. — Secţiuni I I prin membrană.

Există unele soluţii teoretice [2], [3], [4] pentru problema studiată mai sus pe cale experimentală. Astfel, pentru cazul unei caneluri de adîncime mică cu conturul secţiunii în arc de cerc de rază ρ precum şi pentru cazul unei semi coroane cu raza cercului mic ρ, se constată că pentru $\rho \to 0$ coeficientul de concentrare tinde către valoarea 2.

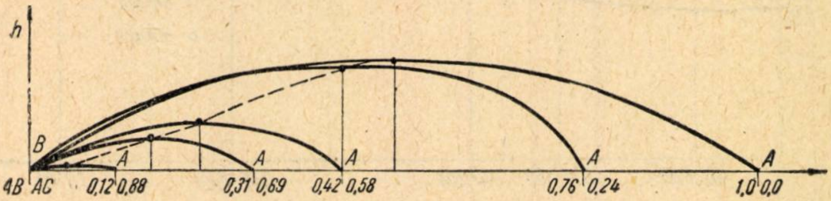


Fig. 5. — Secţiuni AB prin membrană.

Experimental n-a putut fi determinată această limită ci o valoare apropiată pentru cazul cînd fisura are adîncimea $\frac{l'}{D} = 0{,}02$. Diagrama arată că rezultatul teoretic şi cel experimental sînt concordante.

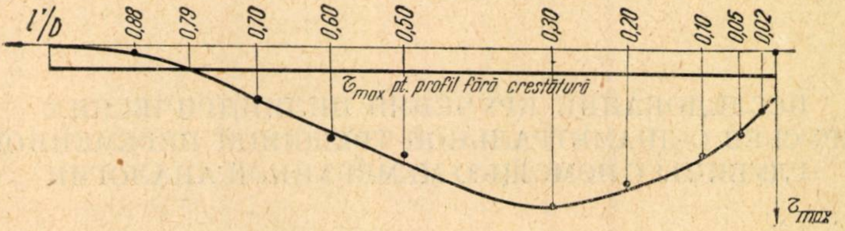


Fig. 6. — Variaţia tensiunii maxime tangenţiale în vîrful fisurii.

În diagrama din figura 7, se poate urmări variaţia rigidităţii profilului fisurat. După cum se vede scăderea rigidităţii o dată cu avansarea fisurii este accentuată şi variază aproape liniar pînă ce adîncimea ei atinge

0,58 din diametru, după care descreșterea este mult mai lentă stabilizîndu-se la 0,34 din valoarea rigidității în cazul profilului circular.

Soluțiile teoretice obținute de De Saint Venant [2], [3] dau rigiditatea pentru cazul $\frac{l'}{D} = 0{,}5$ și 1,0 (despicare). Valorile obținute pentru aceste cazuri (notate pe diagrama fig. 7) sînt apropiate de cele experimentale. Valorile experimentale sînt inferioare celor teoretice pentru că evaluarea volumelor închise de membrană s-a făcut prin lipsă. Soluția teoretică aproximativă, dată de V. Manea [4], dă pentru rigiditate o valoare inferioară celei experimentale deoarece s-a obținut folosind cîțiva termeni ai seriei.

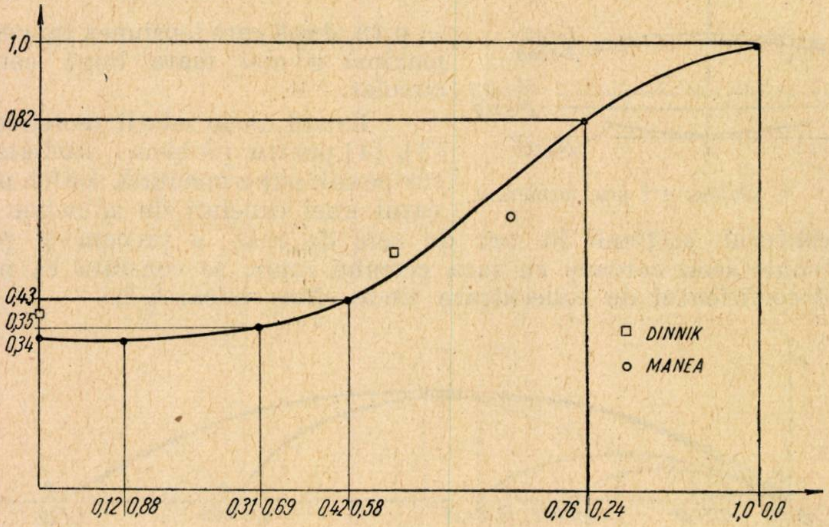


Fig. 7. — Variația rigidității cu adîncimea fisurii.

Primită la redacție la 21 iunie 1962.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ С ДИАМЕТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ С ПОМОЩЬЮ МЕМБРАННОЙ АНАЛОГИИ

РЕЗЮМЕ

В работе представлены и рассматриваются результаты измерений, проделанных с помощью мембранной аналогии для профиля в виде окружности с диаметральной трещиной переменной глубины.

TORSION OF CYLINDRICAL BARS WITH DIAMETRAL CRACK OF VARIABLE DEPTH, EXAMINED WITH THE AID OF THE MEMBRANE ANALOGY

ABSTRACT

The present paper presents and analyses the results of the measurements carried out with the aid of the membrane analogy for a circular profile with diametral crack of variable depth.

BIBLIOGRAFIE

1. EDUARD NICOLAU, *Contribuţii la utilizarea analogiei cu membrana în cercetarea tensiunilor la torsiune*. St. cerc. mec. apl., **VII**, *2* (1956).
2. В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория упругости*. Москва, 1958.
3. А. Н. ДИННИК, *Продольный изгиб. Кручение*. Москва, 1955.
4. V. MANEA, *Torsiunea arborelui cu caneluri radiale exterioare*. St. cerc. mec. apl., **IX**, *2* (1958).

— REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE —

METODE MODERNE ȘI APLICAȚII ALE METALURGIEI PULBERILOR ȘI METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE ÎN CONSTRUCȚIA DE MAȘINI ȘI INSTALAȚII

DE

V. MARCU

CONSIDERAŢII GENERALE

O caracteristică aproape generală a materialelor solide este porozitatea lor care variază cu numeroşi factori, printre care natura, compoziția chimică şi modul de elaborare, prelucrările şi tratamentele chimice, mecanice sau termice ale materialelor considerate. Chiar pentru metalele elaborate prin presare la cald, de exemplu prin forjare sau laminare, nu se poate vorbi de o compactitate absolută din cauza structurii atomilor care formează materia. Aceasta este concentrată în nucleele atomilor, separați de electronii respectivi prin distanțe foarte mari față de dimensiunile nucleelor. Această situație a îndreptățit pe fizicianul german Lenard să afirme că materia este formată din foarte puțină substanță şi foarte multe spații goale şi că de exemplu, într-un metru cub de platină volumul total al materiei abia ajunge la un milimetru cub. Dispariția electronilor ar permite ca materia să fie compusă numai din nuclee de atomi, să fie perfect compactă şi să aibă o greutate specifică considerabilă, situație care se prezintă în univers pentru aşa-numitele ,,stele pitice albe''. Astronomul Kuiper, care a descoperit una din aceste stele în 1934, a calculat că greutatea specifică a materiei , din care este alcătuită, ajunge la cifra considerabilă de 36 tone pe centimetru cub.

Revenind pe planeta noastră, la materialele solide întrebuințate în construcţia de maşini şi instalații, constatăm existența unei structuri granulare, apărută fie pe cale naturală, fie prin diverse prelucrări. Chiar sub această formă pe care am admite-o drept compactă, materia nu este întotdeauna utilizată astfel în procesele tehnologice industriale, ci uneori apare mai convenabil a pulveriza, de exemplu, un metal şi a confecționa apoi piese sau straturi acoperitoare prin aglomerarea pulberii din acest metal.

S-a ajuns astfel în această direcție la două importante domenii și anume metalurgia pulberilor și metalizarea prin pulverizare, la care putem atașa pulverizarea maselor plastice și pulverizarea materialelor ceramice.

Obiectul primului domeniu, acela al metalurgiei pulberilor este de a obține , prin presarea și sinterizarea pulberilor metalice, diverse piese sau materiale cu calități speciale, prezentînd avantaje tehnologice și economice asupra mijloacelor clasice ale metalurgiei prelucrătoare.

În ce privește al doilea domeniu, obiectivele sînt următoarele:

— Obținerea de straturi metalice pentru recondiționarea organelor de mașini ajunse la limita de uzură, sau repararea unor defecte de turnare sau prelucrări prin așchiere;

— Depunerea de straturi protectoare contra coroziunii sau uzurii prin abraziune sau erodare.

Deși metalurgia pulberilor este cunoscută de aproape 150 de ani iar metalizarea prin pulverizare de vreo 50, totuși abia în ultimele decenii s-au pus în evidență și în utilizare, pe scară largă industrială, în străinătate, aplicații de mare importanță și eficacitate economică. La noi în țară aceste chestiuni sînt cunoscute doar de cadrele tehnico-științifice din institutele de cercetări și institutele tehnice superioare și de cîteva elemente din institutele de proiectări și din producție. În ce privește aplicațiile metalurgiei pulberilor și ale metalizării prin pulverizare sîntem într-o fază incipientă de studii și cercetări de laborator și modeste aplicații în cîteva întreprinderi.

Din această cauză am considerat ca utilă redactarea referatului de față, care constituie o sinteză asupra posibilităților de aplicare, la ora actuală, a celor două domenii mai sus indicate a materialelor poroase, sinteză susceptibilă de a interesa și forurile conducătoare.

METALURGIA PULBERILOR

Evoluție

Metalele au fost uneori utilizate sub formă de pulberi încă din antichitate, pentru confecționarea de bijuterii și arme, prin sudarea granulelor metalice la forjă. În general însă, în cursul secolelor, s-au confecționat obiecte metalice mai mult prin turnare, metodă care s-a dovedit ineficace la apariția metalelor denumite refractare, cu puncte înalte de topire.

S-a recurs atunci, de pe la începutul secolului al XIX-lea la procedeele metalurgiei pulberilor, primul metal la care s-a aplicat fiind platina. Din pulberea acestui metal se obținea, cu ajutorul unui aditiv chimic, o pastă care, după comprimare și încălzire, permitea să se obțină diverse piese.

Se consideră că prima aplicație industrială a metalurgiei pulberilor a fost fabricarea de către Monetăria de Stat din Rusia, în 1826, a rublelor de platină, procedeu care a fost menținut timp de circa 40 de ani, fiind aplicat și în alte țări.

Prin același procedeu, al metalurgiei pulberilor, s-au elaborat în 1848 iridiul, în 1897 osmiul, iar în 1909 wolframul, în stare pură, sub formă de bare sau fire. Trebuie menționat că industria electrotehnică a fost aceea care a dat un puternic impuls metalurgiei pulberilor, prin apariția lămpilor cu incandescență, la care era absolută nevoie de fire din metale cu punct înalt de topire. Operația de trefilare, pentru a se obține astfel de fire din bare, provoca eforturi și o uzură excepțională asupra filierelor care trebuiau construite din diamant spre a putea rezista. Pentru a găsi un material mai puțin costisitor s-a recurs la elaborarea, prin procedeele metalurgiei pulberilor, a unor carburi metalice foarte dure, din care s-au confecționat filiere. S-a creat astfel, în ultimele decenii, industria aliajelor dure, după care au urmat pseudoaliajele pentru contacte electrice, cuzineții poroși, magneții din pulberi sinterizate și o gamă întreagă de piese pentru construcții de mașini.

S-au realizat progrese remarcabile și s-a ajuns la aplicarea pe scară, industrială de mari proporții, în străinătate, a metalurgiei pulberilor, în numeroase ramuri ale construcției de mașini și instalații.

Avantajele metalurgiei pulberilor

a) Posibilitatea de a obține metale sau pseudoaliaje care nu se pot elabora prin alte metode clasice. Pseudoaliajele se obțin din metale care nu sînt miscibile în stare topită, ca de exemplu cupru-wolfram sau dintr-un metal și un metaloid, cum ar fi cupru-grafit.

b) Se pot obține corpuri poroase cu o porozitate anumită și controlată și fără defectele care se întîlnesc în cazul turnării, ca de exemplu segregații, incluziuni de gaze sau impurități.

c) Metalurgia pulberilor permite elaborarea de materiale și piese de forme variate, prin procese tehnologice care au loc la temperaturi mult inferioare temperaturii de topire a metalului, sau în cazul pseudoaliajelor a componenților metalici din care sînt formate pulberile. Piesele care rezultă pot fi tratate termic prin cementare, îmbunătățire sau nitrurare.

d) Prin metodele metalurgiei pulberilor, de comprimare și sinterizare, a pulberilor, se pot obține piese care nu mai necesită prelucrări ulterioare pentru a ajunge la cotele nominale, deoarece precizia de elaborare, după sinterizare, ajunge pînă la 0,1 mm;

e) Metalurgia pulberilor prezintă o mare eficiență economică în cazul fabricației de produse în mare serie.

Ca probleme pe care le pune metalurgia pulberilor, mai ales pentru țările care nu au ajuns la o importantă dezvoltare industrială, putem cita costul relativ ridicat al pulberilor și necesitatea de a face investiții importante, care însă sînt amortizate curînd în fabricația de mare serie.

APLICAȚII ALE METALURGIEI PULBERILOR

A. ELABORAREA METALELOR ȘI ALIAJELOR REFRACTARE

Metalele care se topesc la temperaturi foarte înalte, ca de exemplu wolframul, molibdenul, tantalul și niobiul, precum și aliajele lor, neputîndu-se elabora prin topire și turnare, s-a recurs la metoda metalurgiei pulberilor. În primii ani ai secolului nostru se amesteca pulberea de wolfram cu produse organice, ca de exemplu dextrină sau gumă, realizîndu-se o pastă care era presată într-o filieră de diamant. Firele obținute erau uscate, apoi încălzite la temperaturi înalte pentru a elimina produsul organic, obținîndu-se filamente pentru lămpi.

Ulterior, începînd din 1909, s-a renunțat la produse organice și s-a adoptat metoda actuală a comprimării și sinterizării pulberilor, obținîndu-se bare a căror compactitate era mărită prin ciocănire, forjare sau laminare la temperatură înaltă. După aceste prelucrări rezulta un metal compact, omogen și cu foarte puține impurități, care putea fi trefilat obținîndu-se fire cu diametre foarte mici, pînă la 2 microni.

Pentru a se elabora aliaje ale metalelor refractare se amestecă pulberile lor în proporțiile dorite și se aplică metoda mai sus indicată, obținîndu-se aliaje,în cazul metalelor care sînt miscibile în stare topită, sau pseudoaliaje atunci cînd metalele componente nu sînt miscibile și deci nu pot forma aliaje prin topire.

B. ALIAJELE DURE

Este una din cele mai importante aplicații ale metalurgiei pulberilor în care se întrebuințează ca materiale de bază pulberi ale carburilor de wolfram, titan, molibden etc. și pulberea unui liant, în majoritatea cazurilor cobalt.

Constituenții mai sus indicați se obțin prin carburarea în cuptoare electrice, a unuia din metalele refractare, sau a unui oxid al acestora, cu ajutorul negrului de fum, sub punctul de topire al uneia din carburile WC, TiC, Mo_2, TaC etc. Acest procedeu, pus la punct acum vreo 40 de ani de K. Schroter, a fost continuu perfecționat prin lucrările lui V. A. Ivensen, I. M. Fedorcenko. M. I. Balșin și alții în U.R.S.S.

Aliajele dure au multiple aplicații în industria metalurgică și în special în tehnologia așchierii metalelor. D. R. Kieffer a indicat, pe baze statistice, procentele aproximative de mai jos, pentru diferitele aplicații [1]:

— Plăcuțe dure pentru aplicarea pe scule așchietoare 70%
— Armarea sculelor la utilajul de perforare și havare în mine 10%
— Confecționare de filiere și matrițe 10%
— Alte scule sau piese care trebuie să aibă o mare rezistență la uzură, ca de exemplu : diuze pentru furtunuri de sablare, vîrfuri de centrare la strunguri, suprafețe de contact al instrumentelor de măsură, cilindri de laminare specială etc. . .10%

O varietate specială de aliaje dure este aceea care cuprinde fragmente de diamant încorporate într-o pulbere de fier sau de oțel, constituind aşa-numitele aliaje cu diamant, foarte apreciate în lucrările de rectificare şi în prelucrarea sticlei.

În figura 1 se arată operaţia de rectificare a unui tampon din metal dur cu ajutorul unui disc abraziv constituit din aliaj cu diamant.

C. LAGĂRE DE ALUNECARE

a) *Cercetări în U.R.S.S.* Metalurgia pulberilor permite să se elaboreze cuzineţi cu bune proprietăţi de antifricţiune, prin presarea şi sinterizarea pulberilor de fier, bronz sau plumb, cu sau fără adaos de grafit, pentru următoarele utilizări : construcţii de maşini, motoare, autovehicule, avioane, aparate electrice, maşini-unelte, maşini agricole, aparate de ridicat şi transportat etc.

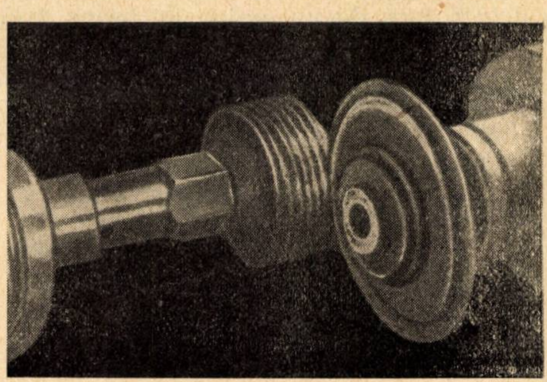


Fig. 1. — Rectificare cu un disc abraziv din aliaj cu diamant.

Studiul caracteristicilor funcţionale ale fierului grafitat poros a făcut obiectul a numeroase lucrări, dintre care se remarcă cele sovietice. Astfel, P. J. Bernev în studiul său *Coeficientul de frecare şi uzură a fierului grafitat poros* în funcţie de structura şi porozitatea materialului, ajunge la următoarele concluzii [2] :

— Coeficientul de frecare se micşorează pe măsura măririi procentului de grafit, pînă la o valoare minimă corespunzătoare unui conţinut de carbon de 2,5 . . . 3%, peste care coeficientul de frecare creşte ;

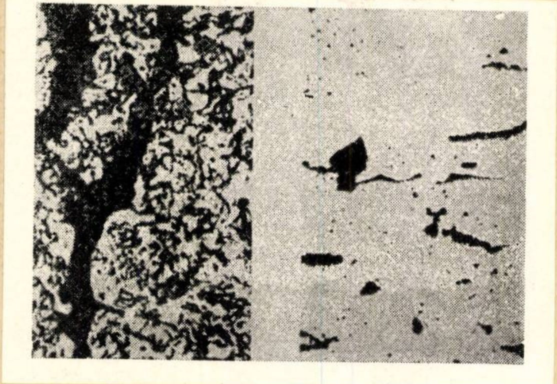
— Structura fierului poros mai favorabilă este acea perlito-feritică cu incluziuni de grafit, iar structura perlitică cu cementită liberă nu este indicată, deoarece cementita, fiind un constituent dur şi fragil, acţionează ca un abraziv şi măreşte coeficientul de frecare. În schimb, uzura este mai mare la fierul poros cu structura perlito-feritică ;

— Valorile coeficientului de frecare, precum şi uzura cresc o dată cu porozitatea, în timp ce presiunile medii admisibile scad ;

— Față de fierul poros, materialele antifricțiune compacte, ca de exemplu babbitul și bronzul au coeficienți de frecare mai mari și o uzură mai pronunțată.

În figura 2 se reproduc micrografiile care arată structura a două epruvete din fier poros, cu 5% grafit.

b) *Cercetări în R.P.R.* S-au întreprins studii și cercetări experimentale la Centrul de cercetări metalurgice al Academiei R.P.R. asupra fierului poros, efectuîndu-se sinterizări atît în hidrogen cît și în gaz metan și determinîndu-se structura, compoziția chimică, duritatea, porozitatea și rezistența la uzură a diferitelor eșantioane. Cele mai bune rezultate s-au obținut cu pulberea de fier sinterizată în hidrogen, găsindu-se o structură de ferită și incluziuni de oxizi, porozitatea 26%, duritatea medie 75 HB și uzura 0,20% față de un etalon de bronz fosforos [3].



a b

Fig. 2. — Micrografii de fier poros :

a — perlită + ferită + cementită ; atacată, × 500 ;
b — grafit + oxizi + pori ; nu este atacată, × 100.

Eșantioane de fier poros elaborate la Centrul de cercetări metalurgice al Academiei R.P.R. au fost încercate la Institutul de Mecanică Aplicată „Traian Vuia", de către colectivul de lubrificație, frecare și uzură, pentru determinarea caracteristicilor funcționale ca material antifricțiune.

Condițiile de experimentare în care s-a lucrat au fost următoarele :

— Diametrul interior nominal al cuzinetului. Cuzinetul-bucșă a fost ținut timp de 4 ore într-o baie de ulei la 130°C pentru impregnare.	36 mm
— Alungirea cuzinetului	0,7
— Microgeometria suprafeței	~0,0062 mm
— Lubrificația : ulei tip 305, presiune	1,5 at
— Jocul relativ	$\psi = 2{,}7$ ‰
— Interval de încărcare medie	$p_m = 40 \ldots 60$ kgf/cm²
— Viteza relativă a fusului	$V = 0{,}6 \ldots 1{,}6$ m/s.

S-au ridicat, la maşina de încercat lagăre a Institutului, curbele $p_m = f(V)$; $q_u = f(V)$ şi $p_m V = f(V)$ simbolurile avînd următoarele semnificări:

p_m — presiunea medie specifică, raportată la suprafaţa proiectată a cuzinetului;

V — viteza relativă a fusului;

q_u — debitul de ulei care trece prin lagăr.

Rezultatele obţinute sînt indicate în diagrama din figura 3.

În străinătate, fabricaţia şi utilizarea cuzineţilor obţinuţi prin sinterizare a luat un avînt considerabil. Într-o comunicare prezentată la Conferinţa internaţională asupra lubrificaţiei şi uzurii care a avut loc la Londra în 1957, se arată că în 1937 intrau zilnic în utilizare, pe plan mondial, circa un milion de cuzineţi poroşi.

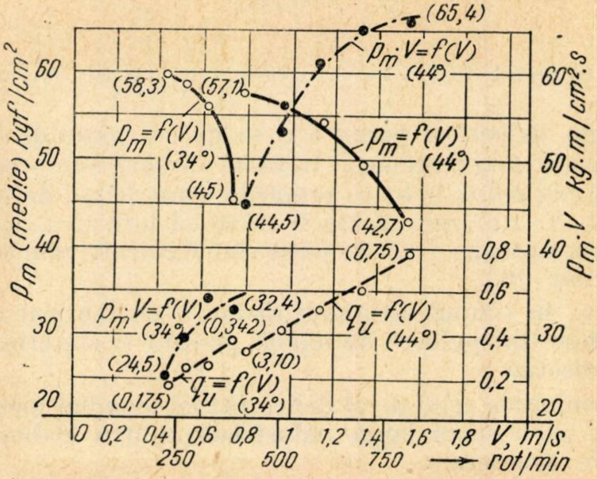


Fig. 3. — Diagrame care arată caracteristicile funcţionale ca material antifricţiune ale fierului poros.

Această cifră a crescut de 10 ori pînă în 1957, ceea ce denotă marile avantaje tehnico-economice ale lagărelor din metale sinterizate [4].

D. PRODUSE PENTRU INDUSTRIA ELECTROTEHNICĂ

În ultimii ani s-a aplicat şi în acest domeniu procedeele metalurgiei pulberilor, obţinîndu-se produse cu o puritate înaltă, după cum urmează:

a) Miezuri pentru bobine, constituite din ferite moi, utilizate în telefonie şi în industria de radio, pentru circuite de acord, filtre de înaltă frecvenţă etc. Aceste miezuri poroase sînt mai selective şi mai puţin voluminoase decît miezurile compacte.

b) Magneţi permanenţi din ferite dure care au eliminat o serie de inconveniente ale magneţilor din metale compacte, ca de exemplu: sensibilitatea la şocuri, dificultăţi de uzinare şi caracteristici mecanice reduse.

Magneții permanenți poroși au o structură mai fină și permit o fixare ușoară și sigură în diverse aparate, deoarece în masa magneților se pot incorpra piese mecanice cu rezistența dorită. Un tip foarte răspîndit de asemenea magneți este acela obținut prin presarea și sinterizarea unui amestec de pulberi din fier, nichel și aluminiu.

c) Contacte electrice care trebuie să aibă calități cu totul speciale mecanice și electrice. În acest scop s-au realizat pseudoaliaje din următoarele tipuri de pulberi:

— wolfram și cupru, sau cupru și argint.

— cupru și grafit sau bronz și grafit, realizîndu-se așa-numiții cărbuni metalo-grafitici.

d) Filamente de lămpi electrice, elemente de încălzire la cuptoarele electrice, perii colectoare etc. [1], [5].

E. DIFERITE PIESE PENTRU CONSTRUCȚII DE MAȘINI

Metalurgia pulberilor permite a se obține piese de formă complicată, cu o precizie mai mare decît în cazul turnării sub presiune sau ștanțării, și cu preț mai redus, în toate ramurile construcției de mașini, inclusiv armamentul. I. V. Abramov arăta în 1948 că într-un avion de bombardament modern, aproape 4 000 de piese sînt fabricate prin metodele metalurgiei pulberilor [6].

În S.U.A., în timpul ultimului război, s-au fabricat cîteva sute de milioane de piese din pulbere de alamă presată și sinterizată pentru focoasele de proiectile.

De la terminarea celui de-al doilea război mondial metalurgia pulberilor se aplică pe o scară largă industrială pentru elaborarea de piese în următoarele sectoare:

a) *Motoare termice.* În U.R.S.S și alte țări s-au obținut rezultate interesante cu segmenți de pistoane obținuți prin presarea unui strat de pulbere de cupru pe suprafața cilindrică exterioară a unui semifabricat din fontă, după cum rezultă dintr-un studiu *Segmenții de piston metaloceramici* de V. N. Gonciarova.

— Prin procedeele metalurgiei pulberilor se mai fabrică pistoane, locașuri de supape, palete de turbine cu gaze etc.

b) *Reactori nucleari.* Elaborarea de piese care trebuie să aibă o perfectă puritate a compoziției chimice și să reziste la temperaturi înalte în utilizări de lungă durată.

Realizarea de combustibili nucleari, de exemplu izotopul de uraniu 235, sub forma de bare sinterizate în loc de bare obținute prin turnare în vid [7].

c) *Diferite scule și piese rezistente la uzuri intense.* Instrumente pentru măsurarea de precizie, calibre, verificatoare, filiere, matrițe.

Materiale de fricțiune, discuri abrazive, discuri cu pulbere de diamant.

Filtre, amalgame dentare etc.

CERCETĂRI ŞI REALIZĂRI ÎN DOMENIUL METALURGIEI PULBERILOR

A. PE PLAN MONDIAL

a) *În U.R.S.S.* Studiile şi aplicaţiile metalurgiei pulberilor au luat un avînt excepţional în Uniunea Sovietică, unde presarea şi sinterizarea pulberilor metalice se execută de circa 150 de ani. Cercetările din ultimul timp au abordat atît teme fundamentale, cu caracter ştiinţific, cît şi teme tehnico-ştiinţifice care interesează producţia industrială.

Vom cita cîteva din aceste teme tratate într-o culegere publicată în traducere de I.S.R.S. [2].

— Stadiul actual al teoriei principalelor procese din metalurgia pulberilor.

— Sinterizarea, fluajul, relaxarea, recristalizarea şi alte fenomene determinate de autodifuziune în corpurile cristaline.

— Deformarea reţelei cristaline şi sinterizarea pulberilor metalice.

— Aliaje metaloceramice magnetice, moi.

— Cercetarea proprietăţilor fizice şi mecanice ale materialelor pe bază de fier, obţinute prin procedeul metalurgiei pulberilor.

— Coeficientul de frecare şi uzură a fierului grafitat poros.

— Lagăre poroase pe bază de fier, cu proprietăţi mecanice şi de antifricţiune îmbunătăţite.

— Segmenţi de piston metaloceramici.

— Executarea pieselor din aşchii de fontă.

b) *În ţările occidentale.* Cităm cîteva din datele prezentate la Conferinţa internaţională de lubrificaţie şi uzură, ţinută la Londra în 1957 :*

— Pentru lagăre poroase se utilizează fie pulbere de cupru şi cositor, cu sau fără grafit, fie pulbere de fier poros la care se adaugă procente de 2...25% pulbere de cupru. Piesele obţinute sînt impregnate, după sinterizare, cu un ulei special, prin tratare în vid.

— Porozitatea admisă ca optimă pentru cuzineţii sinterizaţi este cuprinsă între 25 şi 35%.

— Funcţionarea lagărelor poroase are loc în mai bune condiţii la turaţii mari şi viscozitate mai pronunţată a uleiului care favorizează ungerea hidrodinamică.

B. ÎN R.P.R.

La noi în ţară nu avem încă o industrie pentru elaborarea pulberilor metalice şi obţinerea de produse sinterizate, însă există colective de studii şi cercetări experimentale de laborator la Institutul politehnic Cluj, la Centrul de cercetări metalurgice al Academiei R.P.R. şi la I.C.E.M.

În luna noiembrie 1957 a avut loc o consfătuire pe ţară, la care s-au prezentat o serie de interesante referate, publicate într-o culegere la I.D.T. din care cităm cîteva [3].

Institutul Politehnic Cluj

— Cercetări în domeniul obţinerii şi utilizării pulberilor de fier.
— Cercetări asupra elaborării contactelor sinterizate pentru circuite electrice.
— Elaborarea discurilor abrazive prin sinterizarea cu lianţi metalici.

Centrul de cercetări metalurgice al Academiei R.P.R.

— Cercetări experimentale asupra sinterizării în gaz metan.
— Cuzineţi din fier poros cu proprietăţi de rezistenţă la uzură.

La Institutul de cercetări metalurgice (*I.C.E.M*)

— Cercetări pentru obţinerea pulberilor de metale neferoase pe cale mecanică şi folosirea lor în faza semi-industrială.
— Studii cu privire la presarea şi sinterizarea aliajelor dure pe bază de carbură de wolfram.

În ce priveşte documentarea trebuie să menţionăm monografia *Introducerea în metalurgia pulberilor* de Elena Lăbuşcă, publicată în 1957 de Editura Academiei R.P.R.

METALIZAREA PRIN PULVERIZARE

Evoluţie

Primele încercări de pulverizare a metalelor apar în ultimul deceniu al secolului trecut, pentru înlocuirea plăcilor de plumb de la acumulatori prin plăci de fier metalizate cu plumb pulverizat. La acea epocă pulverizarea se făcea pe cale mecanică, prin acţiunea forţei centrifuge asupra unui metal topit, sau antrenînd acest metal printr-un curent de vapori.

Ulterior s-a trecut la utilizarea metalului de aport sub formă de pulbere sau sîrmă, aceasta din urmă fiind cea mai frecventă formă actuală de utilizare a metalului care se pulverizează.

Pentru producerea energiei termice, destinate a topi metalul de bază, se utilizează, în majoritatea cazurilor, metoda oxiacetilenică sau dispozitive electrice.

Intrarea în domeniul industrial al metalizării prin pulverizare este legată de numele inginerului elveţian M. U. Schoop, care acum vreo 50 de ani a pus la punct primul aparat oxigaz, din care derivă majoritatea metalizatoarelor actuale.

Diferitele tipuri de aparate pentru metalizarea prin pulverizare, aflate în prezent în exploatare în diverse ţări, sînt indicate mai jos :

I. *Aparate cu gaze ca sursă termică* (*aparate oxigaz*)

1. Aparate cu sîrmă ca material de aport.
2. Aparate cu pulberi ca material de aport.

II. *Aparate cu sursă termică electrică* (*electrometalizatoare*)

1. Cu arc electric.
2. Cu înaltă frecvenţă.
3. Cu jet de plasmă.

III. *Aparate speciale*

1. Aparate cu creuzet şi metal topit.
2. Aparate cu trei sîrme.
3. Aparat cu cameră de ardere, fără aer comprimat.

AVANTAJE ŞI DEFICIENŢE

A. AVANTAJE

Metalizarea prin pulverizare prezintă o serie de avantaje importante asupra altor metode de obţinere a acoperirilor protectoare, după cum se arată mai jos :

a) *Asupra tuturor celorlalte metode*

— Posibilitatea de a obţine pseudoaliaje din metale care nu sînt miscibile în stare lichidă şi deci nu pot forma aliaje în stare topită cum sînt de exemplu aluminiul şi fierul.

— Costul mult mai redus, atît pentru investiţiile impuse de realizarea bazei materiale, cît şi pentru procesele tehnologice.

— Nu necesită un personal numeros.

b) *Asupra metalizării prin cufundare în metal topit*

— Evită consumaţia exagerată de metal.

— Permite metalizarea suprafeţelor oricît de mari.

— Se poate aplica şi la corpuri nemetalice, ca de exemplu : lemnul, hîrtia, textilele, betonul etc.

c) *Asupra metalizării galvanice*

— Posibilitatea de a realiza mult mai rapid, prin pulverizare, straturi metalice de grosimi mai mari, decît prin depuneri galvanice.

— Posibilitatea de a obţine şi depuneri de aluminiu, metal care nu se pretează la realizarea de straturi galvanice.

— Metalizarea prin pulverizare nu este limitată de dimensiunile căzilor de galvanizare.

B. DEFICIENŢE

a) Rezistenţă redusă la întindere, încovoiere şi şocuri a straturilor metalice depuse prin pulverizare.

b) În straturile metalizate nu se pot tăia filete sau danturi, iar găurirea trebuie făcută cu precauţii speciale.

c) Piesele metalizate nu pot fi prelucrate prin deformaţii plastice.

d) Metalizarea prin pulverizare degajă praf metalic şi vapori nocivi care impun o ventilaţie energică, necesară de altfel şi în cazul instalaţiilor galvanotehnice.

APLICAŢII ALE METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE

I. Recondiţionarea şi repararea organelor de maşini

Este unul din cele mai importante domenii de aplicaţie a metalizării prin pulverizare şi permite realizarea de mari economii prin recuperarea de piese care înainte de aplicarea acestui procedeu erau trimise la fier vechi.

Vom expune cîteva exemple mai frecvente de recondiţionări şi reparaţii ale unor organe de maşini.

A. MAŞINI ŞI MOTOARE ENERGETICE

a) Arbori cotiţi şi axe de toate categoriile. Recondiţionarea fusurilor de arbori cotiţi a motoarelor de toate categoriile reprezintă cel mai important procent din volumul lucrărilor de recondiţionare.

b) Diverse piese şi accesorii de motoare termice, în afară de arbore cotit, care se pot vedea în figura 4 pentru un motor de autovehicul.

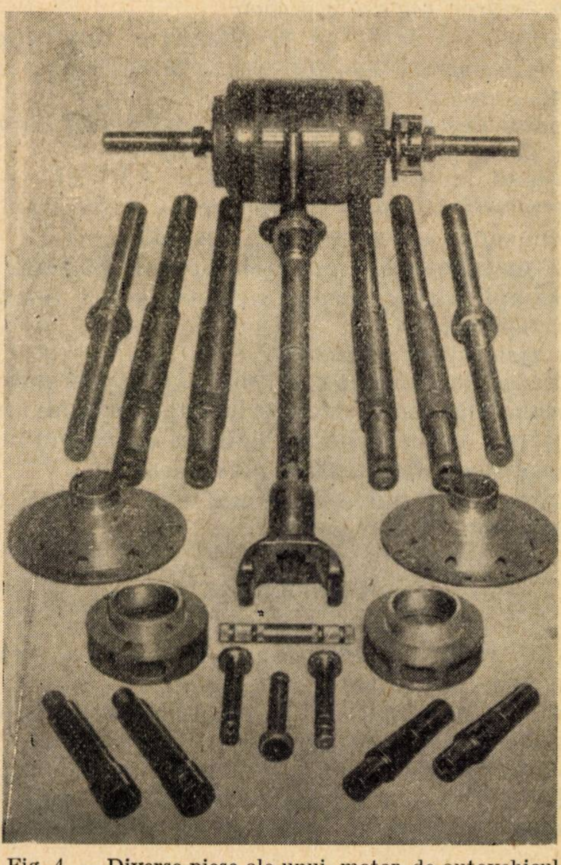


Fig. 4. — Diverse piese ale unui motor de autovehicul care se recondiţionează prin metalizare.

c) Arbori de turbine hidraulice şi cu aburi, osii de locomotive şi vagoane, arbori port-elice de nave etc.

d) Pistoane de motoare şi pompe.

B. MAŞINI-UNELTE ŞI ALTE CATEGORII DE MAŞINI

În numeroase ţări, printre care în primul rînd U.R.S.S., se practică pe o scară largă recondiţionarea prin metal pulverizat a maşinilor-unelte, în special strunguri, aplicîndu-se la următoarele piese: fusurile axelor principale şi ale altor axe, ghidajele săniilor, suprafeţele de reazem ale plăcii păpuşii mobile, etc.

O fabrică sovietică de cauciuc a recondiţionat rotorul de la un malaxor, precum şi axele şi bucşele pieselor de vulcanizat, iar alte întreprinderi au metalizat arbori şi lagăre de la maşini de forjat, de la laminoare etc.

C. EXECUTAREA DE REPARAŢII PRIN PULVERIZARE DE METAL

a) Remedierea unor defecte, ca de exemplu retasuri sau sufluri ale unor piese obţinute prin turnare, sau ale unor defecte de prelucrare prin aşchiere.

b) Repararea unor blocuri de motoare răcite cu apă la care s-au produs crăpături în timpul iernii, din cauza îngheţului.

D. ALTE CATEGORII DE RECONDIŢIONĂRI

a) *Metalizarea preventivă.* Pentru a uşura operaţiile de recondiţionare prin metalizare, în unele ţări, ca de exemplu R.D.G., se practică metalizarea preventivă la piesele noi de fusuri sau axe, care sînt finisate la un diametru inferior celui nominal, completîndu-se diferenţa ca un strat de oţel pulverizat, prelucrat apoi prin strunjire şi rectificare.

b) *Metalizarea prin procedeul „Colmonoy”.* Permite să se obţină straturi foarte compacte şi cu mare rezistenţă la coroziune şi uzură, materialul de aport fiind constituit din pulberi de nichel, crom, bor etc. amestecate în anumite proporţii. După depunerea stratului, acesta este încălzit pînă la temperatura care dă plasticitate stratului, care se sudează la piesa de bază, după care este prelucrat pînă la cotele nominale.

II. Protecţia suprafeţelor metalice

A. PROTECŢIA CONTRA COROZIUNII

O altă utilizare a metalizării prin pulverizare, aplicată foarte mult în străinătate, este formarea de straturi protectoare din metale neferoase pulverizate, pentru protecţia suprafeţelor metalice contra diferitelor forme de coroziune, după cum se arată mai jos.

a) *Protecţia contra coroziunii atmosferice.* Coroziunea suprafeţelor metalice constituie o adevărată calamitate în economia mondială, provocînd imense pagube care, se cifrează, de exemplu în S.U.A., la circa 8 miliarde dolari anual.

Dintre numeroasele forme ale coroziunii cea mai frecventă este cea atmosferică, pentru evitarea căreia se depun straturi protectoare din zinc sau aluminiu, prin pulverizare.

b) *Protecția instalațiilor aflate în contact cu apa.* În anul 1922 o poartă a unei ecluze de pe canalul St. Denis din Paris, a fost metalizată cu zinc pulverizat, această lucrare constituind prima încercare de a înlocui vopselele prin protecția cu metal pulverizat contra coroziunii date de contactul cu apa. În anul 1955, deci după 33 de ani de utilizare, poarta de ecluză a fost scoasă, cu prilejul unor lucrări de reparații capitale ale canalului, găsindu-se că stratul protector era încă în bună stare, cu excepția cîtorva mici porțiuni.

Alte porți de ecluze metalizate între 1930—1935 s-au comportat tot atît de bine [8].

Se protejează, cu straturi de zinc sau aluminiu pulverizat, acoperite cu vopsele sau bitum, elemente ale instalațiilor de la hidrocentrale, ca de exemplu conducte forțate, vane, rețele de presiune etc.

O protecție satisfăcătoare se obține prin straturi de metale pulverizate și în cazul instalațiilor aflate în contact cu apa de mare, ca de exemplu carenele navelor, geamanduri, pontoane etc.

c) *Protecția contra coroziunii chimice.* Se execută prin depunerea unui strat de plumb pulverizat, cu o grosime de 0,3...0,4 mm, care se acopere în cursul anilor cu o pojghiță de sulfat de plumb rezistentă la acțiunea unor agenți agresivi ca acidul sulfuric, soluții de sulfat de zinc și magneziu etc. Cercetări făcute în R.P. Polonă au stabilit că un astfel de strat protector are aceeași eficacitate ca un înveliș din tablă de plumb, însă permite a se realiza economii din acest metal pînă la 70% [9].

În industria petrolieră se protejează contra coroziunii chimice, în interior, rezervoare fixe și vagoane-cisterne prin pulverizare de zinc.

În industria alimentară se metalizează cu aluminiu rezervoarele destinate stocajului și autocisternele pentru transportul unor alimente lichide ca de exemplu laptele și berea. Pentru alte produse lichide, ca vinul sau apa potabilă, nu se recomandă metalizarea, ci pulverizarea de polietilenă care nu comunică nici un gust dezagreabil acestor lichide.

Vasele destinate pentru pregătirea hranei calde, la restaurante sau cantine, se protejează în interior cu cositor pulverizat.

B. PROTECȚIA LA TEMPERATURI ÎNALTE

Oxidarea oțelului și fontei la temperaturi înalte constituie un grav inconvenient în metalurgie, deoarece oxizii formați se desprind prin alternanțele de încălzire și răcire, precum și prin acțiunea șocurilor mecanice.

Metalizarea prin pulverizare permite evitarea acestui fenomen de coroziune la cald, efectuîndu-se alitări prin aluminiu pulverizat în loc de procedeele clasice de cufundare a pieselor în aluminiu topit sau încălzirea acestora în cutii împreună cu pulbere de aluminiu.

Alitarea prin pulverizare se aplică astăzi foarte mult în străinătate pentru oțeluri carbon, cu procent pînă la 0,25% carbon și pentru oțeluri aliate cu procent ridicat de nichel și crom, aplicîndu-se la piese de forme variate, ca de exemplu :

— Cutii de cementare, oale pentru topirea modelelor fuzibile la turnarea de precizie, recipiente pentru călire, retorte de încălzire, încărcătoare de furnale, conducte de furnale sau cubilouri, grătare pentru focare şi diferite cuptoare, tuburi şi colectoare de evacuare, palete de turbine cu gaz, supape de evacuare etc.

— Piese mari, ca de exemplu corpuri sudate ale exhaustoarelor de fum, sau conducte prin care trec gaze la temperaturi peste 500°C.

Alitarea protejează pînă la temperaturi de circa 900°C, după care, pentru rezistenţa la temperaturi superioare, se recurge la depunerea prin pulverizare a unui strat complex de nichel şi crom, urmat de un alt strat de aluminiu.

Nu mai este necesar, ca la alitare, tratamentul termic al recoacerii de difuziune, deoarece la prima încălzire aluminiul se topeşte şi este absorbit de structura aliajului Ni—Cr.

În lagărul socialist alitarea prin pulverizare este intens aplicată în U.R.S.S. şi R.P. Polonă. În această ultimă ţară s-a renunţat la importul oţelurilor refractare şi se utilizează oţeluri aliate pentru piesele supuse la temperaturi înalte [10].

III. Lagăre din metale depuse prin pulverizare

După cum s-au realizat cuzineţi sinterizaţi ca aplicaţie a metalurgiei pulberilor, în ultimii ani au apărut lagăre din metale şi pseudo-aliaje depuse prin pulverizare.

Vom cita cîteva din realizările mai importante, în acest domeniu, ale cîtorva ţări din lagărul socialist :

A. *În U.R.S.S.* Rezultatele obţinute cu lagăre din metale şi pseudo-aliaje depuse prin pulverizare au fost expuse într-o comunicare a lui E. V. Antoşin la cel de-al doilea Congres internaţional de metalizare prin pulverizare, ţinut la Birmingham (Anglia) în 1958, din care cităm următoarele date [11] :

a) Un pseudo-aliaj compus din 75% oţel şi 25% cupru a rezistat la presiuni specifice pînă la 300 kgf/cm^2 şi viteze relative pînă la 6 m/s.

b) Rezultate bune s-au obţinut utilizînd ca materiale antifricţiune oţel pulverizat sau straturi obţinute prin pulverizare simultană de oţel şi aluminiu, cupru, nichel sau plumb. Un strat format din 50% oţel şi 50% aluminiu s-a comportat foarte bine la presiuni specifice pînă la 150 kgf/cm^2 şi viteze relative de la 3 la 5 m/s.

c) Prof. L. V. Krasnicenko a obţinut rezultate interesante cu aşa-numitele *cupluri inversate* în care cuzinetul este confecţionat din oţel dur, călit şi rectificat, iar fusul arborelui este acoperit, prin pulverizare, cu un strat de oţel sau pseudo-aliaj. Datorită faptului că la cuplurile inversate uzura fusului se produce pe toată suprafaţa şi este mai uniformă, durata de funcţionare este considerabil sporită în comparaţie cu cuplurile obişnuite.

Aplicaţiile mai sus indicate au permis realizarea unor însemnate economii de metale neferoase, din cele utilizate curent la elaborarea aliajelor antifricţiune prin turnare.

B. *În R.D.G.* S-au efectuat cercetări experimentale cu cuzineţi avînd corpul din oţel sau fontă, iar interiorul din straturi obţinute prin pulverizare de bronz, aliaje de Al—Si, sau bronz cu adaos de grafit. Acești cuzineți metalizați au dat deplină satisfacție pentru presiuni specifice pînă la 250 kgf/cm^2 și viteze periferice pînă la 5 m/s. S-a remarcat influența favorabilă a adaosului de grafit pentru transmiterea mai bună a eforturilor chiar în cazul unei ungeri insuficiente. În cazul unor încercări făcute la frecare uscată s-a constatat că lagărele obținute prin pulverizare de metal se rodează mai bine decît cele din metale turnate [12].

C. *În R.S. Cehoslovacă.* Studiul experimental al lagărelor obținute prin pulverizare de metal s-a făcut în comparație cu unele lagăre elaborate din aliaje antifricțiune turnate, cu compoziție chimică apropiată, după cum reiese din exemplul trecut în tabela 1.

Tabela 1

Aliaje turnate și pseudoaliaje obținute prin pulverizare	Încercări sub sarcină progresivă		Încercări la frecare uscată pînă la gripare		
	sarcină specifică maximă suportată kgf/cm^2	temperatura finală la sarcina maximă °C	durata funcționării pînă la gripare		temperatura în momentul gripării °C
			min	s	
Bronz de plumb turnat	110	140	3	15	170
Pseudo-aliaj Cu50%—Pb 50%	130	180	9	37	210

Un pseudo-aliaj Al 50% — Pb 50% a suportat o sarcină specifică de trei ori mai mare decît o compoziție de plumb, în condiții satisfăcătoare de funcționare [13].

D. *În R.D. Polonă.* Dintre materialele antifricțiune depuse prin pulverizare cele mai frecvent utilizate sînt pseudo-aliajele Cu—Pb în proporție de 1 : 1 și alama denumită Ms60. Din acestea se confecționează cuzineți pentru lagăre de la diferite tipuri de mașini, motoare, mașini-unelte, precum și straturi pentru fusuri de la cupluri inversate. Lucrările publicate de diferiți cercetători, precum și statisticile arată că prin utilizarea acestor pseudo-aliaje s-au realizat economii de metale neferoase deosebit de mari, ajungînd pînă la 90% față de aliajele antifricțiune turnate.

E. *Cercetări inițiate în R.P.R.* Colectivul de metalizare prin pulverizare al Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia'' al Academiei R.P.R. a efectuat cercetări experimentale de laborator în domeniul lagărelor din metale și pseudo-aliaje depuse prin pulverizare, utilizînd metodologia adoptată de colectivul de lubrificație, frecare și uzură al Secției teoria mașinilor și expusă într-o serie de lucrări fundamentale [14], [15].

S-au elaborat cuzineți sub formă de bucșe, cu aceleași dimensiuni ca și cei din fier poros, din straturi depuse prin pulverizare și anume oțel, pseudo-aliaje cupru-oțel și pseudo-aliaj aluminiu-oțel.

Caracteristicile funcționale antifricțiune ale acestor materiale au fost studiate la mașina de încercat lagăre a institutului, constatîndu-se rezultate deosebit de interesante la cercetările făcute cu bucșe obținute prin pulverizare de oțel cu procent redus de carbon și cu următorii parametri :

— Jocul relativ	$\psi = 1{,}75^{0}/_{00}$
— Viteza relativă tangențială	$V = 1 \ldots 6$ m/s
— Încărcarea medie pe cuzinet	$p_m = 20 \ldots 180$ kgf/cm²
— Temperaturile de referință a cuzineților la care s-au ridicat diagramele $p_m = f(V)$	45°C și 60°C
— Alimentare cu ulei 305, sub presiunea de	1,5 kgf/cm².

Rezultatele obținute la temperatura de 45°C sînt indicate în diagrama din figura 5 în comparație cu acelea ale cuzineților din fier poros și ale cîtorva cuzineți din aliaje antifricțiune obținute prin turnare. [15].

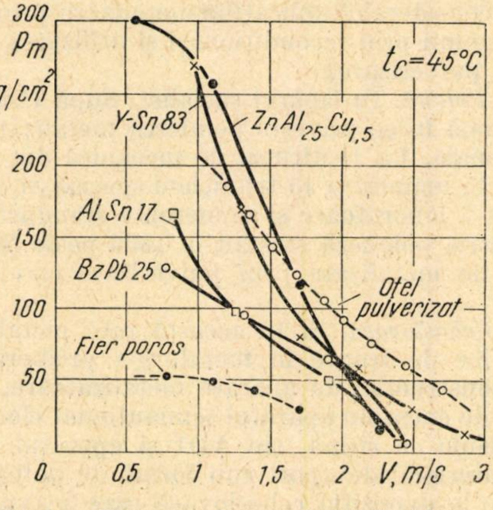


Fig. 5. — Diagrame ale caracteristicilor funcționale ca materiale antifricțiune ale fierului poros, oțelului pulverizat și cîtorva aliaje turnate pentru lagăre.

Se constată că cuzinetul din oțel pulverizat se comportă mai bine decît cel din fier poros la toate turațiile și poate suporta la turații înalte sarcini specifice mai mari decît majoritatea aliajelor antifricțiune turnate care fuseseră încercate anterior.

Colectivul I.M.A. a pus în evidență și faptul că cuzinetul din oțel pulverizat rezistă mai bine și la frecare uscată decît cuzineții din aliaje turnate. Astfel din tabela indicată la paragraful C. reiese că un cuzinet din bronz de plumb, turnat, a gripat la încercarea de frecare uscată după 3 minute și 15 secunde. Suprimîndu-se ungerea cu ulei în cursul încercărilor unui cuzinet din oțel pulverizat, acesta a mai funcționat 40 de minute, deci de circa 13 ori mai mult.

STADIUL ACTUAL AL METALIZĂRII PRIN PULVERIZARE

Considerînd acum ansamblul dezvoltării metalizării prin pulverizare în diferite țări, situația se prezintă în rezumat după cum urmează :

A. *În străinătate*

a) *În U.R.S.S.* Uniunea Sovietică a acordat — ca și altor domenii ale tehnicii avansate — o atenție deosebită metalizării prin pulverizare, după cum reiese din următoarele date :

Se construiesc anual circa 2 000 aparate de metalizare prin pulverizare, din care 70% sînt electrometalizatoare, iar 30% aparate cu gaze.

S-au realizat progrese remarcabile prin construirea aparatelor cu înaltă frecvență, a aparatelor cu trei sîrme, a celor cu înaltă productivitate și a celor pentru pulverizarea de mase plastice și pulberi ceramice.

S-au extins considerabil aplicațiile metalizării prin pulverizare, realizîndu-se mari economii prin recondiționări și utilizarea lagărelor cu materiale depuse prin pulverizare.

b) *În R.P. Polonă.* În lagărul socialist, după U.R.S.S. al doilea loc îl ocupă R.P. Polonă în ce privește ponderea metalizării prin pulverizare în economia națională. La Institutul de mecanică din Varșovia, există o întreagă secție cu 15 ingineri și 45 tehnicieni specialiști, precum și o bogată bază materială cu 7 laboratoare și numeroase standuri de lucrări experimentale. În industria poloneză existau în 1956 peste 500 întreprinderi cu instalații proprii de metalizare prin pulverizare care lucrează pe scară industrială.

c) *În R.S. Cehoslovacă.* Și în această țară metalizarea prin pulverizare ocupă un loc de frunte în metalurgia prelucrătoare, dîndu-se o atenție specială construcției de aparate metalizatoare, din care unele se exportă, cum sînt de exemplu aparatul semiautomat electric tip EMP-2-57, aparatul oxiacetilenic cu sîrmă, tip AD1 și aparatul oxiacetilenic AP4, care utilizează materialul de aport sub formă de pulberi. Aceste aparate au fost prezentate la expoziția cehoslovacă care a avut loc la București, în luna mai 1962.

d) *În R.D. Germană.* Metalizarea prin pulverizare este aplicată de mulți ani în această țară care a acordat un deosebit interes atît cercetărilor cît și aplicațiilor. În 1956 Institutul Central de tehnica sudării din Halle (Saale) a organizat primul Congres internațional de metalizare prin pulverizare, care s-a bucurat de un mare succes prin participări importante din țările socialiste și cele occidentale.

Referatele prezentate la acest congres și publicate în No. 4/1957 al revistei „Schweisstechnik" constituie o prețioasă documentare pentru toți cei care se preocupă de metalizare prin pulverizare.

e) *În țările occidentale.* Metalizarea prin pulverizare se aplică intens în numeroase țări printre care Franța, Anglia, R.F.G., Austria și S.U.A. dîndu-se preferință aparatelor de metalizare tip oxigaz. În Anglia a avut loc, la Birmingham, în 1958, al doilea Congres internațional de metalizare prin pulverizare, la care au participat și cîteva țări din lagărul socialist.

B. *În R.P.R.* Datorită activității desfășurate la I.M.A., iar în sectorul agrotehnic și de I.C.M.E.A., s-au început în ultimii ani aplicații ale metalizării prin pulverizare la unele întreprinderi din care cităm următoarele :

a) Atelierele mecanice ale Ministerului Agriculturii, în special cel de la Ciulnița, pentru recondiționarea organelor uzate de la utilajul agricol și mai ales a arborilor cotiți de la motoarele de tractoare.

b) Întreprinderi care aplică metalizarea pe scară industrială dintre care menționăm pe următoarele :

— Uzinele metalurgice ,,1 Mai'' care posedă un atelier de metalizare prin pulverizare excelent dotat cu material de calitate și încadrat cu personal de nivel internațional ca pregătire profesională. Datorită acestui fapt atelierul trebuie să facă față nu numai lucrărilor interne, ci și numeroaselor solicitări de la alte întreprinderi din R.P.R. soluționînd cele mai delicate probleme de metalizare.

— Întreprinderi ca Uzina mecanică ,,Poiana'' din Cîmpina, Atelierele I.T.B. și Uzinele ,,23 August'' din București, care realizează importante economii prin recondiționări de organe de mașini uzate, în lucrări de mare serie.

— Întreprinderi care posedă instalații de metalizare prin pulverizare și aplică această metodă pentru lucrări eventuale, cum sînt Uzinele ,,Steagul Roșu'' din Brașov, ,,Automatica'' din București, Uzina mecanică ,,Teleajen'' din Ploiești, Combinatul chimic ,,Borzești'', Uzina ,,Năvodari'' și altele.

În privința utilajului, majoritatea întreprinderilor mai sus arătate utilizează electrometalizatorul construit în serie la uzinele I.O.R. Trebuie să menționăm o interesantă realizare a Institutului de tehnologia construcțiilor de mașini și electrice (I.T.C.M.E.) la care un colectiv a proiectat un aparat de metalizare oxiacetilenic, din care s-au construit cîteva exemplare ca prototip. La omologare s-au obținut rezultate foarte bune de funcționare, nu numai cu acetilenă, ci și cu gaz metan, fapt care va decide fabricarea în serie a metalizatorului.

PULVERIZAREA MASELOR PLASTICE

Este cunoscut avîntul excepțional pe care l-a luat domeniul maselor plastice, a căror elaborare a impus crearea de importante fabrici în numeroase țări industriale.

Aceste produse, foarte variate și cu multiple calități, pot fi utilizate atît ca materie primă pentru fabricarea de piese, care în multe cazuri pot înlocui pe cele metalice, cît și sub forma de straturi acoperitoare, cu următoarele obiective :

— Pentru protecția contra coroziunii,

— Straturi care să reziste la uzură,

— Pentru obținerea de izolări electrice.

Pulverizarea maselor plastice este destul de delicată, deoarece acestea nu au, ca metalele, un punct precis de topire, ci trec în cursul încălzirii, printr-o stare de înmuiere progresivă. Aerul comprimat întîlnește, în loc de picături lichide ale metalului topit, o pastă pe care o transformă în fire și apoi într-un strat compact, după răcirea materialului de aport. Acesta se realizează sub forma inițială de pulbere sau pastă, fapt care a dat naștere la două tipuri de aparate oxiacetilenice pentru obținerea de straturi acoperitoare. Aceste aparate sînt destul de complicate și unele din ele au o construcție specială pentru anumite materiale plastice, cum este de exemplu bitumul.

H. Schwarz, într-o comunicare prezentată la cel de-al doilea Congres internațional de metalizare prin pulverizare a definit următoarele mase plastice ca susceptibile de a fi pulverizate, cu bune rezultate tehnico-științifice :

1. Policlorură de vinil
2. Poliamidă B.
3. Rylsan sau nylon,
4. Polietilenă,
5. Polimetacrilați,
6. Rășini epoxidice,
7. Polistirenă,
8. Cauciuc polifosforos,
9. Bitum.

Procedeul de acoperire cu mase plastice are interesante avantaje și perspective, putîndu-se realiza importante economii prin înlocuirea, în multe cazuri, a metalelor cu unul din produsele mai sus indicate. De aceea, este necesar a i se da atenție și în țara noastră.

PULVERIZAREA MATERIALELOR CERAMICE

Dezvoltarea tot mai accentuată a utilizării motoarelor cu reacție, a rachetelor, sateliților artificiali ai pămîntului și a navelor cosmice, a ridicat o serie de importante probleme, printre care și pe aceea a realizării unor straturi cu excepționale calități de rezistență la temperaturi înalte, la mari ecarturi de temperaturi, la coroziune și eroziune.

Astfel de straturi se pot obține numai prin pulverizarea unor materiale ceramice, cum sînt de exemplu următoarele :

— Oxizi, ca oxidul de aluminiu, oxidul de crom, sau zirconiu, cobalt, toriu etc.

— Compuși cu mare refractaritate ca : silicatul de zirconiu, aluminatul de magneziu, carbura de zirconiu, de titan sau wolfram etc.

— Amestecuri metaloceramice, denumite și cermeți.

Materialele acestea, avînd puncte de topire foarte înalte, impun utilizarea unor aparate de pulverizare speciale și anume a unuia din următoarele tipuri :

— aparate oxiacetilenice de construcție specială,

— aparate cu cameră de explozie,

— aparate cu jet de plasmă.

În ce privește materialul de aport, acesta se poate prezenta sub una din următoarele două forme și anume : pulberi sau baghete. Procedeul care utilizează baghete din materiale ceramice se numește „Rokide".

Pulverizarea materialelor ceramice are următoarele domenii de aplicaţii :

— Protecţie eficace la temperaturi înalte a organelor de la motoarele cu reacţie cum sînt camerele de combustie, paletele şi rotoarele de turbine etc.

— Rachete, sateliţi şi nave cosmice, la care se face o izolare termică a suprafeţelor exterioare, pentru a reduce diferenţa mare de temperatură între zona expusă la soare şi conul de umbră al pămîntului, prin care trec alternativ vehiculele cosmice mai sus indicate.

— Diverse utilizări industriale pentru protecţia unor organe de maşini, ventilatoare şi conducte prin care trec gaze cu temperaturi foarte înalte.

CONCLUZII ŞI PROPUNERI

În referatul de faţă s-au expus importantele posibilităţi de aplicare a metalurgiei pulberilor şi a metalizării prin pulverizare, precum şi a pulverizării de mase plastice şi materiale ceramice.

În domeniul metalurgiei pulberilor s-a lucrat intens între cele două războaie mondiale, după cum se poate constata din faptul că în Germania existau în 1943 cîteva fabrici cu o capacitate totală de 60 000 tone anual pentru elaborarea pulberilor de fier. În prezent, se constată, din date statistice, că în 1959 s-au consumat în S.U.A. şi Canada circa 36 000 tone de pulbere de fier, din care circa 50% pentru fabricarea de piese necesare construcţiei de maşini.

Uniunea Sovietică a prevăzut, în planul de 7 ani, elaborarea a 70 000 tone pulberi metalice anual.

Aplicaţiile metalurgiei pulberilor preocupă forurile superioare şi în R.P.R. pentru extinderea celor cîteva realizări organizate pe scară semiindustrială. Pe lîngă una din marile uzine metalurgice funcţionează o secţie pentru elaborarea de piese sinterizate din pulberi de bronz grafitat şi fier grafitat.

Elaborarea de pulberi de cupru şi fier se va organiza pe o amplă bază în anul viitor, după tehnologia indicată de I.C.E.M., iar pe lîngă o întreprindere metalurgică se va organiza şi producţia de metale dure care actualmente se importă.

În domeniul metalizării prin pulverizare, precum şi în acela al pulverizării de mase plastice şi materiale ceramice, sînt necesare importante iniţiative şi realizări pentru a ne apropia de nivelul ţărilor din lagărul socialist cu potenţial industrial comparabil cu acela din R.P.R.

În primul rînd se simte nevoia unei întreprinderi cu profil de aplicaţii ale acestor metode, aşa cum există în alte ţări socialiste. Organizarea şi în R.P.R. a unei industrii cu asemenea specific ne-ar permite să nu mai recurgem la firme străine cînd se impune executarea unor lucrări de metalizare de mare anvergură, cum ar fi conducte şi instalaţii hidrotehnice, suprafeţe metalice de mari dimensiuni în construcţii de uzine etc.

Ţinînd seama de aceste consideraţii, apreciem ca oportună realizarea unui complex industrial pentru metalurgia pulberilor şi pulverizarea de metale, mase plastice şi materiale ceramice, cu aproximativ următoarea schemă generală de organizare:

I. *Metalurgia pulberilor*
  1. *Elaborarea de pulberi*:
    — pulbere de fier,
    — pulberi de metale neferoase.
  2. *Fabricaţia de materiale şi piese sinterizate*
    — metale dure,
    — cuzineţi poroşi,
    — contacte electrice şi magneţi,
    — diverse.

II. *Aplicaţiile pulverizării de materiale*
  1. *Metalizarea prin pulverizare*
    — recondiţionări şi reparaţii,
    — protecţia contra coroziunii,
    — lagăre metalizate,
    — diverse aplicaţii.
  2. *Alte genuri de pulverizare*
    — pulverizarea de mase plastice,
    — pulverizarea de materiale ceramice.

III. *Anexe tehnice*
  1. Laboratoare,
  2. Standuri şi grupuri mobile pentru aplicaţii,
  3. Ateliere mecanice.

Avem speranţa că prin realizarea acestui complex se va umple un mare gol resimţit în sectorul metalurgiei prelucrătoare din R.P.R. şi se vor putea rezolva, cu o serioasă eficienţă tehnico-economică, numeroase probleme care concură la accelerarea înfăptuirii bazei materiale a construcţiei socialismului în ţara noastră.

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПРИМЕНЕНИЕ ПОРОШКОВОЙ МЕТАЛЛУРГИИ И МЕТАЛЛИЗАЦИИ РАСПЫЛЕНИЕМ В МАШИНОСТРОЕНИИ

РЕЗЮМЕ

Настоящий реферат представляет собой краткий синтез развития и применения порошковой металлургии и металлизации распылением, к которым добавлено распыление пластмасс и керамических материалов.

Что касается исследований, представлены лишь результаты, полученные в ИПМ в отношении рабочих характеристик пористого железа и распыленной стали, считающихся хорошими материалами для покрытия трущихся поверхностей, задача, являющаяся актуальной в области пористых поверхностей.

В работе показано развитие во многих социалистических странах порошковой металлургии и металлизации распылением. В заключение высказывается предложение, чтобы и в РНР осуществлялся промышленный комплекс по использованию достижений этой области.

MÉTHODES MODERNES ET APPLICATIONS DE LA MÉTALLURGIE DES POUDRES ET DE LA MÉTALLISATION PAR PULVÉRISATION DANS LA CONSTRUCTION DES MACHINES ET DES INSTALLATIONS

RÉSUMÉ

L'article représente un aperçu rapide sur l'évolution et les applications de la métallurgie des poudres et de la métallisation par projection, ainsi que celles de la pulvérisation des matières plastiques et céramiques.

En ce qui concerne les recherches, on a donné uniquement les résultats des travaux entrepris à l'Institut de Mécanique Appliquée «Traïan Vuia» de l'Académie de la République Populaire Roumaine sur les caractéristiques, comme matériels antifriction, du fer fritté et de l'acier pulvérisé. En effet, ce problème présente un intérêt particulier à l'heure actuelle, dans le domaine des surfaces métalliques poreuses.

L'article met en évidence les progrès réalisés dans certains pays socialistes par la métallurgie des poudres et la métallisation par projection et conclut en proposant la création d'un complexe industriel pour la mise en valeur des applications connues dans ces domaines.

BIBLIOGRAFIE

1. D. R. Kieffer, D. W. Hotop, *Métallurgie des Poudres*. Dunod, Paris, 1947.
2. P. I. Bernev, *Coeficientul de frecare şi uzură a fierului grafitat poros. Metalurgia pulberilor*. I.S.R.S., Bucureşti, 1956.
3. * * * *Metalurgia pulberilor. Culegere de referate*. I.D.T., Bucureşti, 1959.
4. V. T. Morgan and A. Cameron, *Mechanism of lubrification in porous metal bearings*. Conference on lubrication and wear 1st — 3rd Oct. 1957, Paper *89*. Institution of Mechanical Engineers, London.
5. Elena Lăbuşcă, *Introducere în metalurgia pulberilor*. Ed. Acad. R.P.R., 1957.
6. I. V. Abramov, *Căile progresului tehnic în industria sovietică a construcţiilor de maşini*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
7. * * * *Die Pulvermetallurgie in der Reaktortechnik*. Revista Metall (R.F.G.), **13**, *5*, mai (1959).
8. F. Hedde, *Die Entwicklung des Metallspritzens in Frankreich*. Schweisstechnik, *4* (1957).
9. Z. Kowalski, *Über einige Anwendungen metallgespritzter Überzüge in der chemischen und der Nahrungsmittelindustrie*. Schweisstechnik, *4* (1957).
10. T. Drazkiewicz und St. Gebalski, *Zunderschutz durch Spritzalitieren*, Schweisstechnik, *4* (1957).
11. E. V. Antoshin, *Tools and Research of Metal Spraying in the U.S.S.R.* Second International Metal Spraying Conference, Birmingham, England 29th September — 3rd, October, 1958.
12. E. Kretzschmar, *Cercetarea lagărelor de alunecare, combinate prin pulverizarea mecanică*. I.D.T., Bucureşti, *47464*.
13. K. Kolar, *Straturi de alunecare aplicate prin metalizare şi caracteristicile lor*. Strojirenstvi, 7(1958); *Metalizarea prin pulverizare. Culegere de material documentar*. I.D.T., Bucureşti, 1959.
14. Gh Vasilca, P. Freund, *Studii experimentale asupra unor materiale antifricţiune de înlocuire pentru lagărele de alunecare*. St. cerc. mec. apl., **VII**, *3* (1956).
15. Al. Nica, *Studiul comparativ al materialelor antifricţiune*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *2* (1962).

RECENZII

ALEX. SELEŞTEANU, D. ŞTEFĂNESCU, VL. MUNTEANU, *Maşini energetice*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1962, 482 p.

După o prezentare succintă în primele cinci capitole a elementelor de bază din construcţia de maşini energetice (mişcarea fluidelor, fluxul de forţe, materiale, exploatare) în capitolul 6 se prezintă elemente de calcul şi construcţie. Materialul este sistematizat în două mari grupe: maşini cu mişcare alternativă şi maşini cu mişcare de rotaţie; în continuare, se tratează o serie de aspecte specifice maşinilor energetice: etanşarea, distribuţia, elemente de cuplare.

În capitolul 7 se prezintă diferitele tipuri de maşini energetice, constituind astfel elementul principal al cărţii.

Se prezintă problemele specifice calculului şi construcţiei turbinelor cu apă, apoi turbinele cu aburi şi gaze, compresoare, maşini cu aburi, motoare eoliene.

În capitolul următor se prezintă diversele aparate termice: aparate de schimb de căldură, aparate de ardere, cazane etc.

În sfîrşit, în ultimul capitol se aruncă o privire asupra instalaţiilor termice: instalaţii cu abur, instalaţii de turbine cu gaze şi în continuare motoare cu ardere internă, transformatoare de căldură şi de turaţie.

Materialul prezentat este foarte bine sistematizat, diversele scheme şi tabele din text uşurînd considerabil expunerea. Probabil că din consideraţii de economie de spaţiu, autorii au renunţat să ilustreze metodele de calcul prezentate cu cîte un exemplu numeric, ceea ce ar fi contribuit credem, la o mai bună demonstraţie a eficienţei lor.

Prezentarea într-un volum compact a principalelor probleme legate de calculul şi construcţia maşinilor termice, în lumina celor mai noi metode şi practici din acest domeniu, este cît se poate de bine venită, punîndu-se în felul acesta la îndemîna inginerilor mecanici şi energetici un îndreptar pe cît de competent, pe atît de util.

Al. Nica

Д. Е. ДОЛИДЗЕ, *Некоторые вопросы нестационарного течения вязкой жидкости* (*Unele probleme ale mişcării nestaţionare ale fluidelor vîscoase*) — Изд. Акад. Наук Грузинской ССР, Тбилиси, 1960, 322 p.

În carte se tratează din punct de vedere matematic, cu ajutorul metodelor potenţialelor şi ecuaţiilor integrale o serie de mişcări nestaţionare ale fluidelor vîscoase. După un scurt capitol (I) introductiv în care se prezintă ecuaţiile Navier-Stokes, condiţiile iniţiale şi la limită, teoreme de existență și unele metode de aproximare a ecuațiilor de mișcare, se examinează în capitolul II mișcările bidimensionale (mișcări lente cu neglijarea forțelor de inerție, cazul general al scurgerilor nestaționare plane etc). Unele cazuri particulare, mai simple, de mișcări bidimensionale sînt tratate în capitolul III (mișcări mărginite de pereți plani sau cilindrici solizi sau permeabili, mișcarea în stratul limită etc.), după care, în capitolul IV se abordează studiul mișcărilor nepermanente tridimensionale. În sfîrșit, un capitol special (V) este consacrat anumitor situații limită de mișcări nestaționare (comportarea mișcărilor pentru $t \to \infty$).

În lucrare se analizează mai puțin dezvoltarea aplicațiilor practice efective pînă la studii numerice și mai mult o serie de aspecte legate de existența și unicitatea soluțiilor, de elaborarea unor metode de tratare generale etc. O parte destul de însemnată din lucrare se bazează pe cercetări proprii ale autorului publicate în special în periodicele Academiei Republicii Gruzia, ca de exemplu problema existenței soluției pentru mișcările în stratul limită, mișcare nestaționară între pereți solizi, mișcarea radială în difuzoare, rotația unei sfere și a unui disc în fluid vîscos, mișcări cu frontiere permeabile etc. Lucrarea se adresează specialiștilor în mecanica fluidelor vîscoase și celor care se ocupă cu ecuații cu derivate parțiale și ecuații integrale.

V. N. Constantinescu

* * * *Труды конференции по теории пластин и оболочек* (Lucrările conferinței de teoria plăcilor plane și curbe), Акад. Наук СССР, Казанский филиал, Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина, Казань, 1961, 428 pag.

Între 24 și 29 octombrie 1960 a avut loc la Kazan, sub auspiciile Filialei din Kazan a Academiei de științe a U.R.S.S. și a Universității de stat din Kazan, o conferință asupra teoriei plăcilor plane și curbe ; această conferință s-a ținut în urma hotărîrilor Consiliului științific al Academiei de științe a U.R.S.S. cu privire la importanta problemă a bazelor științifice a rezistenței și plasticității materialelor. S-au prezentat un număr de 102 conferințe de sinteză și de comunicări, dintre care 65 sînt publicate în culegerea scoasă cu această ocazie, celelalte lucrări apărînd în diferite publicații de specialitate.

Cu toate că lucrările publicate au un caracter matematic accentuat, calculele efectuate sînt duse — în general — pînă la posibilități de aplicare practică, ceea ce a constituit scopul conferinței, de altfel.

Unele din lucrări sînt dedicate problemei plăcilor plane subțiri. Astfel P.V. Borovskii aplică metoda rețelelor la calculul plăcilor plane în formă de paralelogram. N. P. Fleișman calculează plăcile plane prevăzute cu nervuri de rigidizare curbilinii ; I. G. Teregulov se ocupă de problema plăcilor plane de grosime variabilă. A. B. Kordașenko studiază unele probleme dinamice pentru plăci în formă de pană și de sector. Unii autori atacă probleme cu caracter aeroelastic ; astfel B. P. Makarov se ocupă de flaterul neliniar al plăcilor plane încastrate. În alte articole sînt tratate probleme de stabilitate clasică a plăcilor plane (valoarea lor) sau se consideră plăcile plane în domeniu elastoplastic sau plastic ; menționăm lucrarea lui Iu. R Lepik, care se ocupă de deformațiile mari ale plăcilor plane circulare în domeniu plastic rigid.

Alte lucrări prezentate sînt dedicate unor metode de calcul ce se pot adapta atît la probleme de plăci plane cît și la probleme de plăci curbe subțiri. Astfel V. V. Bolotin tratează aplicarea metodelor asimptotice în teoria vibrațiilor plăcilor plane și curbe subțiri ; I. T. Selezov se ocupă de propagarea undelor în asemenea plăci subţiri iar V. V. Bolotin, în altă lucrare, tratează unele probleme dinamice ale termoelasticităţii.

Cele mai multe din articole sînt însă dedicate problemelor pe care le pun plăcile curbe subţiri. Astfel, N. V. Ahvlediani se ocupă de echilibrul unor acoperişuri de beton armat, L.M. Balabanov prezintă problemele generale ale staticii plăcilor curbe groase, V. N. Bulgakov aplică metode numerice de calcul pentru plăcile subţiri toroidale, E. F. Burmistrov consideră plăcile curbe cilindrice ortotrope iar Iu. V. Gavrilov se ocupă de vibraţiile proprii ale plăcilor cilindrice subţiri circulare. Stabilitatea dinamică a plăcilor curbe subţiri este studiată de V. Ţ. Gnuni. S. N. Kan determină eforturi din temperatură în cazul plăcilor conice subţiri circulare. Probleme de stabilitate dinamică atacă şi G. V. Mişenkov şi B. I. Slepov. O.A. Frolov se ocupă de concentrări de eforturi în cazul plăcilor cilindrice subţiri iar Iu. Iu. Şveiko face consideraţii de ordin aeroelastic în problema flaterului, tot pentru asemenea plăci subţiri.

Lucrările menţionate mai sus sînt numai cîteva din cele publicate, ele arătînd varietatea de preocupări ale multor cercetători din toate colţurile Uniunii Sovietice. Prin aceste lucrări s-a subliniat necesitatea efectuării unor cercetări sistematice în diferite domenii, folosind un aparat matematic modern, calculele fiind — pe cît posibil — duse pînă la forme de aplicare practică. De asemenea, s-au pus probleme din cele mai moderne, atît în ceea ce priveşte natura materialului din care sînt alcătuite plăcile cît şi în ceea ce priveşte modul de acţionare al acestora.

În felul acesta culegerea editată la Kazan este deosebit de utilă cercetătorilor din domeniul plăcilor plane şi curbe subţiri, atît prin informaţiile ştiinţifice pe care le aduce cît şi prin orientarea pe care o dă.

P. P. Teodorescu

Труды Московского ордина Ленина Энергетического института (Lucrările Institutului energetic din Moscova vol. XXXV. Hidroenergetica), Moscova, 1961, 252 p.

Acest volum al *Lucrărilor Institutului energetic din Moscova* redactat de prof. dr. T. Zolotarev, cuprinde unele rezultate ale cercetărilor ştiinţifice efectuate de personalul catedrei de hidroenergetică a Institutului. Problemele tratate în cele 12 articole se pot grupa în jurul următoarelor teme principale :

a) Fundamentarea metodelor de alegere a parametrilor hidrocentralelor funcţionînd în sistem sau în cascadă.

b) Căi de îmbunătăţire a metodelor de exploatare a uzinelor hidroelectrice. Problemele reglajului şi stabilităţii.

c) Perspectivele utilizării maşinilor de calcul electronice în hidroenergetică.

Prima temă foarte actuală, în particular pentru ţara noastră, este tratată sub următoarele aspecte :

— *Calculul puterii instalate într-o cascadă de hidrocentrale funcţionînd în sisteme energetice complexe* (V. V. Semenov), *Caracteristicile dezlocuirii combustibilului de către energia hidraulică* (L. A. Karol) ; *Influenţa parametrilor echipamentului asupra indicilor economici ai hidrocentralei* (I. A. Jejelenco).

Dintre articolele legate de cea de-a doua temă, trebuie citate în primul rînd cele ale prof. T. Zolotarev şi colaboratorilor săi care tratează o idee relativ nouă şi în orice caz prea puţin folosită pînă acum în hidroenergetică şi anume, utilizarea prognozelor hidrologice pentru întocmirea graficelor dispecer.

Într-un alt articol se prezintă un plan interesant de studiu al influenței reglajului turbinelor asupra stabilității sistemului, prin experimentare pe un model electronic al sistemului energetic.

Ultima temă este poate cea mai interesantă. În ultimii ani în mai multe țări se pun la punct metode de folosire a mașinilor de calcul electronice pentru rezolvarea problemelor energetice.

În general, calculele hidroenergetice sînt legate de explicitarea unei funcții foarte complicate, de mai multe variabile

$$F(N\ Q_c,\ H\ \eta\ Q_r\ w,\ P,\ t) = 0,$$

în care — $N\ Q_c$, H, η sînt, respectiv, puterea, debitul și căderea și randamentul centralei,

— Q_r, debitul afluent,

— w, volumul lacului de acumulare,

— P, sarcina în sistem,

— t, timpul.

În plus, la efectuarea calculelor numerice mai trebuie să se țină seama și de următorii factori :

a) prognoza stocului rîului (lunară, anuală),

b) cerințele generale puse de exploatare (sistemul energetic și celelalte folosințe, agricultura, navigația),

c) caracteristicile de exploatare ale construcțiilor hidrotehnice și echipamentului.

Toate acestea fac ca în cele mai multe cazuri soluția optimă să se determine pe baza comparării mai multor variante și creează dificultățile de calcul cunoscute. În legătură cu aceste dificultăți este suficient să arătăm că problema frecventă a calculului regimului nepermanent în bieful aval în cazul reglajului diurn, numai pentru un grafic de sarcină, necesită munca de 30 de zile a unui calculator calificat.

Deși manifestarea concretă a dificultăților este destul de mult dependentă de condițiile locale, totuși o metodă principială generală de rezolvare a unora din probleme s-ar putea găsi. Astfel se pot distinge trei direcții principale de aplicare a tehnicii de calcul în hidroenergetică.

Prima este determinarea regimului optim de funcționare al hidro- și termocentralelor într-un sistem complex.

A doua direcție se referă la proiectarea unor construcții hidroenergetice, unde mașinile analogice se pot folosi, de exemplu pentru calculul eforturilor în baraje arcuite, pentru calculul infiltrației prin și pe sub baraje pentru calculul unor rețele de canale pentru calculul regimurilor nepermanente la centrale etc. A treia direcție este de cea mai mare perspectivă și se referă la calculele de gospodărire a apelor și exploatare a lacurilor de acumulare și a echipamentului uzinelor hidroelectrice.

Un caz particular interesant de rezolvare a unei astfel de probleme este tratat în articolul lui A. I. Serișev.

E. Răzvan

Труды Московского ордена Ленина энергетического института (Lucrările Institutului energetic din Moscova. Vol. XXXVI. Hidraulica și construcții Hidrotehnice), Moscova, 1961, 220 p.

Volumul cuprinde un număr de 16 articole reflectînd rezultatele unor studii de hidraulică și construcții hidrotehnice efectuate de personalul catedrelor de specialitate ale Institutului hidrotehnic din Moscova, în următoarele direcții :

a) Fundamentarea metodelor de calcul și execuție a unor construcții hidrotehnice (noi tipuri de uzine hidroelectrice, praguri de anrocamente realizate în curent, canale neprizmatice).

b) Probleme hidraulice ale blocului turbinei, echipamentului hidrodinamic (agregate orizontale sau verticale, stavilele și grătarele uzinelor hidroelectrice).

c) Probleme de modelare hidro- și aerodinamică a curenților cu suprafață liberă precum și a blocurilor turbinelor.

Dintre lucrările din prima grupă cităm articolul prof. dr. V. G. Aivazian și ing. Pîstogov, care expun rezultatele unor studii privind un tip de baraj de greutate evidat. Ideea autorilor este de a reduce subpresiunile prin fundarea discontinuă a barajului. Golul realizat în talpa de fundație la contactul cu roca are efectul unui adevărat dren, care anulează subpresiunea toată aval de el. Desigur că realizarea unui astfel de profil duce la modificări însemnate în starea de eforturi, studiul acestora este obiectul principal al lucrării. Determinarea eforturilor s-a făcut experimental, pe modele structurale folosindu-se metode de măsură electrotensometrice.

Metodica este destul de expeditivă, dar precizia sa nu depășește 5—10%. În concluzii sînt formulate recomandări de calcul, cu aplicații la un baraj real de 126 m înălțime, fundat pe stîncă. Economia de beton realizată față de profilul gravitațional este de circa 25 %.

Nu este analizată influența variației temperaturii asupra stării de eforturi, precum și a diferenței modulelor de elasticitate dintre baraj și fundație.

Tipul de baraj preconizat pare rațional în cazul unor construcții fundate pe stîncă.

O a doua lucrare extrem de interesantă este cea a prof. dr. Izbaș și colab. intitulată *Bazele hidraulice ale execuției barajelor de anrocamente colmatate cu nisip*. Ideia este de a combina avantajele anrocamentelor (stabilitate suficientă la profilele relativ compacte) cu cele ale materialelor fine (etanșeitatea).

Pentru a evidenția actualitatea acestei idei este suficient să amintim că un asemenea tip de baraj s-a adoptat pentru amenajarea de la Assuan pe Nil. Problema nouă și dificilă este determinarea condițiilor în care este posibilă colmatarea artificială, a parametrilor care influențează, a căilor optime de realizare etc. În articol sînt expuse rezultatele unor studii experimentale a diferitelor căi de colmatare (prin gravitate, infiltrație sau aluvionare) și stabilitate, relații empirice între parametrii care guvernează fenomenul.

În două note, I. V. Lebedev aduce o contribuție importantă la calculul hidraulic al albiilor îngustate artificial de incintele șantierelor, respectiv de batardourile de execuție. Studiul este dus pînă la faza elaborării unor grafice de calcul care permit determinarea celor mai importanți parametri ai scurgerii, respectiv adîncimea contractată h_c și căderea de nivel z'.

Dintre lucrările referitoare la a doua direcție de cercetare merită citate două lucrări ale lui S. K. Maslennicov care analizează calitățile energetice și constructive ale blocurilor de turbine echipate cu agregate monobloc orizontale. Calitățile energetice analizate pe baza caracteristicilor universale ale agregatelor apar evident superioare celor obișnuite cu ax vertical: ele au randamente sporite și o stabilitate mai mare la variația căderii. Calitățile constructive rezultă din analiza comparativă a dimensiunilor blocului. Turbinele monobloc permit, în particular fundarea la o cotă superioară și necesită blocuri de dimensiuni mai reduse.

Adoptarea tipurilor de construcții și echipamente preconizate este evident actuală, însă este condiționată și de rezolvarea corespunzătoare problemelor electromecanice ale agregatelor monobloc precum și de studii suplimentare efectuate pe cîteva instalații cu caracter experimental la scară naturală.

În această grupă, mai menționăm un articol privind metode hidraulice de curățire a grătarelor uzinelor hidroelectrice (autor S. I. Egorsin) și altul privind studiul în laborator al unui tip de bloc turbină, combinat cu goliri și deversori (autor S. K. Maximov).

În sfîrşit, cîteva lucrări tratează probleme hidraulice cu caracter mai general. Dintre acestea, menţionăm în special pe cele ale lui B. T. Emţev:

— Una intitulată *Analiza calitativă a mişcării fluidelor grele în albii neprizmatice* prezintă o interesantă generalizare a ecuaţiei mişcării în albii prizmatice. Din discuţia ecuaţiei se stabilesc şi formele posibile ale curbelor de remuu pentru diverse forme de albii.

O a doua lucrare se referă la posibilitatea modelării cu aer a scurgerilor cu nivel liber. Pornind de la ecuaţia mişcării neuniforme a apei într-o albie cu nivel liber (în cazul plan) şi de la ecuaţia mişcării aerului într-o conductă (cu viteze suficient de mici pentru a se neglija compresibilitatea). Se deduc condiţiile de similitudine ale celor două mişcări.

În general, articolele din volumul recenzat oferă o imagine a preocupărilor foarte variate ale personalului catedrei de hidraulică şi construcţii hidrotehnice de la MEI sub conducerea prof. dr. S. V. Izbaş.

E. Răzvan

HANS KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik* (Mecanica neliniară), Springer-Verlag, Berlin /Göttingen/ Heidelberg, 1958, XI + 684 p., 229 fig.

În descrierea matematică a diverselor fenomene care formează obiectul mecanicii, se ajunge la stabilirea unor ecuaţii diferenţiale care sînt fie liniare, fie neliniare. În realitate însă cele mai multe probleme ale căror ecuaţii au caracter liniar sînt neliniare deoarece la formularea ecuaţiilor au fost efectuate aproximaţii care conduc la linearizare. Acest procedeu are avantajul de a evita dificultăţile de rezolvare a ecuaţiilor neliniare, menţinîndu-se o precizie care în multe cazuri este suficientă. Totuşi, creşterea preciziei, care este cerută de aplicaţiile în tehnica modernă, precum şi necesitatea de a se studia unele efecte care nu pot fi cuprinse de teoriile liniare, au condus la o reluare a bazelor teoretice în sensul stabilirii unor ecuaţii neliniare şi al studierii lor. Aceste consideraţii generale se aplică în mod special la două ramuri ale mecanicii şi anume elastostatica şi teoria vibraţiilor. Cartea profesorului Hans Kauderer se referă chiar la aceste două domenii, pe care le priveşte însă din puncte de vedere diferite. Se ştie astfel că în elastostatică neliniaritatea se poate introduce atît prin considerarea termenilor neliniari în expresiile deformaţiilor cît şi prin adoptarea unei relaţii neliniare între tensiuni şi deformaţii. În carte este tratat numai acest de-al doilea aspect, în special pe baza cercetărilor autorului şi ale colaboratorilor săi. În ceea ce priveşte teoria neliniară a vibraţiilor, aceasta este prezentată sub aspecte mai generale şi mai cuprinzătoare, ocupînd astfel peste trei sferturi din întregul volum.

Prima parte, dedicată elastostaticii, conţine un capitol cu caracter general, privitor la relaţia între tensiuni şi deformaţii adoptată şi la ecuaţiile care rezultă precum şi unele consideraţii în legătură cu rezolvarea acestora. În capitolele următoare, se tratează problema stării de tensiuni plane şi a încovoierii, stările de tensiune axial-simetrice, torsiunea barelor cilindrice de secţiune arbitrară şi încovoierea plăcilor subţiri.

Partea a doua începe cu prezentarea problemei vibraţiilor cu un grad de libertate. Sînt studiate mai întîi mişcările autonome (la care timpul nu apare explicit în ecuaţiile diferenţiale) şi anume vibraţiile conservative, cele amortizate şi cele autoexcitate. În cadrul mişcărilor eteronome (ale căror ecuaţii diferenţiale conţin explicit timpul) se tratează vibraţiile forţate şi cele excitate parametric. Urmează apoi vibraţiile cu mai multe grade de libertate şi în primul rînd cele cu două grade de libertate, conservative şi forţate. În încheiere, se consideră şi vibraţiile cu un număr infinit de grade de libertate, autonome şi eteronome.

Scrisă la un nivel matematic corespunzător, cartea prof. Kauderer ni se pare valoroasă atît pentru acei ce se ocupă de probleme de cercetare cît şi pentru aplicaţiile posibile în diverse probleme practice. Ne referim în special la partea privitoare la teoria vibraţiilor neliniare, care conţine într-adevăr o tratare foarte cuprinzătoare a problemelor.

T. Oroveanu

BRUNO ECK, *Technische Strömungslehre* (Hidrodinamica tehnică). Sechste neubearbeitete Auflage (Ediţia a şasea revizuită), Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg, 1961, XI, 453 p. + 454 fig.

Dezvoltarea rapidă a mecanicii fluidelor în ultimele decenii a condus şi la obţinerea unor rezultate deosebit de importante pentru aplicaţiile în tehnică. În tratate, se acordă de obicei o mai mare atenţie problemelor teoretice şi chiar dacă se precizează utilitatea practică a unora dintre ele, nu se poate merge pînă la amănunte în această direcţie. Cartea lui Bruno Eck, ajunsă la a şasea ediţie, are meritul de a pune accentul pe latura tehnică a mecanicii fluidelor, aşa cum o arată chiar titlul. Lăsînd la o parte mult din aparatul matematic ce însoţeşte de obicei un text de hidrodinamică, autorul recurge la demonstraţii simple, adîncind mai mult aspectul fizic al fenomenelor şi dînd un mare număr de date şi indicaţii pentru diferite aplicaţii.

Primul capitol conţine o scurtă prezentare a principalelor rezultate din hidrostatică. Mult mai amplu, capitolul al doilea este consacrat dinamicii fluidelor ideale. Urmează un capitol care conţine consideraţii asupra scurgerii fluidelor reale şi un altul în care se prezintă problema desprinderii. Pe rînd sînt tratate apoi mişcarea corpurilor solide în medii fluide şi scurgerea în jurul paletelor şi profilelor. Despre mijloacele prin care se poate evita desprinderea se vorbeşte într-un capitol separat. După o scurtă prezentare a problemei cavitaţiei, urmează capitolul consacrat expunerii noţiunilor de dinamica gazelor. În încheiere, volumul conţine capitolul privitor la măsurătorile tehnice în curenţii de fluid.

Volumul este bogat ilustrat, cu desene şi fotografii de bună calitate şi cu diagrame utile pentru calcule.

Mai puţin utilă pentru cei ce doresc să înveţe mecanica fluidelor, deoarece nu adînceşte într-o măsură suficientă aspectele teoriei, lucrarea lui Bruno Eck este valoroasă pentru cei ce urmăresc problemele experimentale, în special pentru aplicaţii tehnice şi într-o oarecare măsură şi pentru cercetare ştiinţifică.

T. Oroveanu

R. C. JOHNSON, *Optimum Design of Mechanical Elements* (Proiectarea optimă a elementelor mecanice). John Wiley Inc., New York, London, 1961, 535 p.

Lucrarea are ca scop prezentarea unei *metode optime* de proiectare a organelor de maşini care urmăreşte selecţionarea materialului şi a parametrilor geometrici astfel ca efectele dăunătoare să fie reduse la minimum, iar cele favorabile mărite la maximum, fără ca prin aceasta să se influenţeze în mod negativ celelalte cerinţe funcţionale.

Pentru atingerea acestui scop, autorul prezintă după capitolul de introducere, 1, elementele de lucru, fizice şi matematice. Astfel, capitolul 2 conţine o scurtă prezentare a metodelor matematice elementare, care pot fi folosite în proiectare; în capitolul 3 se analizează efectele erorilor de prelucrare asupra calității produselor. Problema metodelor matematice este reluată în capitolul 4, completată de astădată cu relațiile date de mecanica analitică, analogia electromecanică etc.

Un interes deosebit îl prezintă capitolele 5 și 6, tratînd respectiv problema proprietăților mecanice ale materialelor în lumina teoriilor din rezistența materialelor și considerații statistice asupra coeficientului de siguranță. Această ultimă problemă este minuțios analizată, dîndu-se indicații pentru principalele cazuri ce pot apărea în practică, criterii pentru alegerea coeficientului de siguranță în funcție de pericolul pe care-l prezintă abaterile de prelucrare, alegerea coeficientului de siguranță cînd o eventuală rupere ar avea consecințe grave ș.a.m.d.

Capitolul 7 prezintă metoda de proiectare optimă : se clasifică relațiile matematice de bază, se prezintă cazurile specifice de proiectare optimă și, în concluzie, o privire matematică generală asupra proiectării optime.

Următoarele șase capitole conțin exemple de aplicare practică a metodei expuse. Se tratează astfel cazul organelor supuse la solicitări axiale, axele de torsiune, cazul grinzilor și arborilor cu solicitări combinate. În continuare, se tratează problema proiectării optime a angrenajelor, arcurilor elicoidale, lagărelor, frînelor etc.

Prin amploarea materialului prezentat și grija manifestată pentru introducerea unui bagaj fizico-matematic de înalt nivel în tratarea problemelor de proiectare, lucrarea reține atenția inginerului mecanic și poate constitui un sprijin eficace în activitatea de proiectare.

Al. Nica

NATIONAL PHYSICAL LABORATORY, *Boundary layer effects in aerodynamics.* Proceedings of a Symposium, held at the National Physical Laboratory, on 31 st March & 1 st April 1955 — /London Her Majesty's Office, 1955. (Efectele stratului limită în aerodinamică. Lucrările simpozionului ținut la Laboratorul național de fizică, 31 martie—1 aprilie 1955).

Această lucrare este o culegere de 9 conferințe prezentate de diverși specialiști recunoscuți, cu ocazia Simpozionului dedicat temei *Efectele stratului limită în aerodinamică,* ținut de N P L la Teddington, Anglia, în martie 1955.

Se găsesc, de asemenea, rezumatele discuțiilor ce au urmat fiecărei conferințe. Rezultatele prezentate, noi pentru anul 1955, îmbrățișează un cîmp vast de aplicații ale stratului limită în aerdinamică și dau o imagine a stadiului actual al cercetărilor respective. Subiectele prezentate se referă la următoarele probleme.

A. Stratul limită tridimensional. Sînt examinate chestiunile de extremă importanță ca : definirea desprinderii pentru stratul limită tridimensional cu ajutorul liniilor limită la perete (prof. Timman), cu rezultate teoretice și experimentale privind stratul limită laminar pe elipsoid cu incidență ; de asemenea este tratat stratul limită pe un corp axial simetric extrem de lung (G. M. M. Lighthill) cu aplicații la rezistența la înaintare a firelor ; în sfîrșit se studiază stabilitatea stratului limită tridimensional (Gregory, Stuart, Walker) cu aplicații la aripa în săgeată și la discul rotitor, urmărindu-se confruntarea rezultatelor experimentale ale tehnicii chinaoclay cu soluțiile teoretice asimptotice ale ecuației Orr-Sommerfeld.

B. Caracteristici aerodinamice legate de structura straturilor limită. Într-o lucrare definită drept crucială pentru mecanismul tranziției, Schubauer și Klebanoff atestă și descriu evoluția spoturilor turbulente ca domenii de turbulență complet izolate de regiunea laminară înconjurătoare. Influența viscozității asupra scurgerilor în jurul sistemelor portante este examinată de Küchemann, care arată forme interesante de vîrtejuri și regiuni de desprindere izolate pe aripile în săgeată. Într-un studiu detaliat, Pankhurst arată influența succiunii asupra caracteristicilor de portanță și rezistență ale aripilor prevăzute cu instalații speciale de absorbție și suflaj, cu avantajele aerodinamice și dezavantajele economice respective.

C. *Strat limită supersonic.* Într-o primă lucrare (Young și Kirkby) se deduce teoretic pe baza ecuației de impuls a stratului limită, expresia frecării în regim laminar și turbulent pentru un profil supersonic rombic, dîndu-se numeroase tabele și diagrame. O altă chestiune importantă considerată de Gadd și Holder este aceea a interacțiunii dintre unda de șoc și stratul limită supersonic cu influențe asupra distribuției de presiuni. O minuțioasă descripție calitativă este bazată pe un material experimental deosebit de bogat. De asemenea, într-o conferință consacrată fenomenelor locale de desprindere datorite punctelor de viteză critică în regim transonic, H. Pearcey examinează calitativ problema în legătură cu modificarea locală a distribuției de presiuni și a reatașării stratului limită. Sînt arătate numeroase fotografii și desene ilustrînd vizual aspectul scurgerii în aceste regiuni critice și se propun unele scheme de interpretare.

Lectura acestor conferințe permite să se desprindă următoarele aspecte :

a) Abundența datelor experimentale în sprijinul unor ipoteze emise sau unor aproximații de calcul.

b) Caracterul de înalt nivel aplicativ al problemelor studiate, în sensul că ideile teoretice urmărite și observațiile efectuate precum și interpretările deduse sînt concentrate către obiective precise ; determinarea unor caracteristici globale (frecare, transfer etc.), sau a unui mecanism intim de dezvoltare a mișcării (tranziție, interacțiune unde de șoc-strat limită).

c) Valoarea deosebită a unor cercetări care au constituit puncte de plecare pentru direcții noi de interpretare a fenomenelor din stratul limită (de ex. studiul asupra mecanismului tranziției care a fundat experimental existența și dezvoltarea spoturilor turbulente).

d) Importanța acordată studierii și cunoașterii stratului limită în scurgerile compresibile, unde au fost arătate influențe hotărîtoare asupra scurgerii potențiale, în special la scurgerea transonică și cea hipersonică. Discuțiile ce urmează fiecărei lucrări permit să se lărgească orizontul lectorului, cu analogiile și observațiile făcute de participanți. Această culegere solicită interesul matematicianului (problemele integrării ecuației strat limită tridimensional, ale stabilității scurgerii), al fizicianului (problema tranziției de la mișcarea laminară la cea turbulentă) cît și al inginerului de specialitate, pentru care toate subiectele tratate sînt izvor de cercetare și aplicații practice.

Șt. N. Săvulescu

NATIONAL PHYSICAL LABORATORY, *Cavitation in Hydrodynamics* (Cavitația în hidrodinamică). London : Her Majesty's Stationery Office, 1956.

Cartea conține referatele prezentate la primul simpozion internațional de cavitație în hidrodinamică, ținut la National Physical Laboratory (Anglia) între 14—17 septembrie 1955. Simpozionul a cuprins 6 secții, în cadrul cărora au fost făcute 21 de comunicări, precedate de un referat introductiv al lui J. F. Allan, intitulat *Dare de seamă critică asupra progreselor recente în studiul cavitației.* Diferitele secțiuni au fost intitulate : *Factorii care determină începutul cavitației, Tehnici experimentale, Efecte de scară, Efecte asupra caracteristicilor hidrodinamice (ale* *profilelor*), *Avariile datorite cavitației*. O anexă conține 4 scurte informări privind *Cavitația ultrasonică*.

Referatele, prezentate de specialiști de la National Physical Laboratory, cît și străini (sovietici americani, germani etc.), se remarcă prin rezultatele experimentale deosebit de bogate, privind toate aspectele fenomenului de cavitație ; un spațiu larg este acordat aparatajului pentru măsurarea diferiților parametri. Sînt de asemenea interesante și încercările de a considera aspectul teoretic al fenomenului.

Lucrarea constituie o contribuție prețioasă la studiul cavitației, fenomen important în tehnică.

Dan Gh. Ionescu

Vocabulary of mechanics in five languages (Vocabular de mecanică în cinci limbi). Pergamon Press, Oxford—London, New York—Paris, Wydawnictwa Naukowo Techniczne Warszawa, 1962, 190 p.

Dicționarele tehnice polilingve reprezintă instrumente de lucru permanente, de un real folos pentru cercetător, documentalist sau traducător.

Numărul mereu crescînd al termenilor tehnici, ca urmare a progresului rapid, pe care știința și tehnica îl cunoaște azi, mărește și mai mult necesitatea existenței unor dicționare în mai multe limbi pe domenii de specialitate, care să cuprindă termenii cei mai moderni și actuali. Apariția unei astfel de publicații — auxiliar prețios pentru informare și documentare științifică — este întotdeauna primită cu un interes special de toți lucrătorii din diferitele ramuri tehnico-științifice.

Vocabularul de mecanică — în 5 limbi — tipărit recent în R.P. Polonă de către Pergamon Press Ltd. și Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, reprezintă astfel o contribuție valoroasă adusă fondului de publicații din acest sector.

Volumul de față este redactat în limbile engleză, franceză, rusă, germană, polonă. La alcătuirea acestui dicționar s-au folosit în cea mai mare parte lucrările efectuate în acest scop cu ani în urmă, de către regretatul prof. M. T. Huber — revizuite apoi de către Comisia pentru terminologia mecanică a Comitetului de standardizare polonez, ajutat de personalul științific al Secției de tehnologie tehnică.

Principiul urmat în prezentarea materialului, numerotarea termenilor și clasificarea lor ține seama de recomandările Organizației internaționale de standardizare. De asemenea, au fost consultate instituții de specialitate din alte țări, astfel încît, termenii înregistrați în dicționar sînt în conformitate și cu terminologia țărilor respective.

O trăsătură principală, care trebuie subliniată, este aceea că, nu se dau numai termenii corespunzători din celelalte limbi, ci aceștia sînt precedați de definiții concise, dar complete în limba engleză. În acest fel, dicționarul are un caracter explicativ, de o deosebită utilitate, iar cel care îl folosește are posibilitatea, atunci cînd nu este sigur asupra termenului căutat, să aleagă forma exactă. Astfel, caracterul acestei publicații nu este numai indicativ ci și de referință — ceea ce îi mărește și mai mult utilitatea.

Dicționarul, ca formă de prezentare, cuprinde două părți. În prima parte sînt definiți termenii respectivi, în limba engleză avînd și traducerile în celelalte 4 limbi. Partea a doua cuprinde indexele termenilor în cele cinci limbi, respectiv cinci indexe. În cadrul acestor indexe termenii au o dublă aranjare. Astfel, toți termenii sînt înregistrați în ordine strict alfabetică în plus termenii formați din două cuvinte sînt înregistrați alfabetic, avînd ca subtitlu cuvîntul calificativ respectiv. Acest sistem de prezentare ușurează mult consultarea.

Dicționarul cuprinde două ramuri ale mecanicii, anume : *mecanica teoretică și rezistența materialelor.*

În prima grupă sînt tratate capitolele de analiza vectorială, conceptele fundamentale ale mecanicii teoretice, cinematica unui punct, cinematica solidului rigid, mișcarea relativă, conceptele de bază ale dinamicii, lucru și energie, statica, cinematica unui sistem material, vibrații etc.

Grupul privind rezistența materialelor cuprinde principii de bază, eforturi și deformații, încercări de materiale, teorii ale rezistenței, bare, grinzi, membrane, plăci, flambaj, vibrații, șoc etc.

Dicționarul polilingv de mecanică, care face obiectul acestei recenzii, se adresează tuturor lucrătorilor din domeniul mecanicii teoretice și rezistenței materialelor, de la studenți la ingineri și cercetători, reprezentînd un foarte util instrument în activitatea de informare și documentare științifică și în același timp un mijloc de îmbogățire și perfecționare a cunoștințelor în diferite limbi.

Publicația de față umple un gol resimțit în acest domeniu și credem că această inițiativă atît de lăudabilă va fi continuată prin publicarea unor volume îmbrățișînd și celelalte domenii ale mecanicii.

D. Pavelescu

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

— Trudî Moskovskogo Energheticeskogo Instituta, Vîp. XXXIII, 1960.
— Trudî Instituta Neftehimeceskoi i Gazovoi Promîșlennosti, Vîp. 36, 1965.
— Trudî Iadernoi Fiziki, Akademia Nauk Kazahskoi S.S.R., Alma-Ata, t. 4, 1961.
— Mihail Polievktovici Kostenko, Izdat. Akademii Nauk SSSR., Moskva, 50 p., 1962.
— Problemî procinosti v mașinostroenii, t. 7, 1962.
— Trudî Leningradskogo Korablestroitelnogo Instituta, Vîp. XXXIII, XXXIV, 1961.
A. A. Besniakov, Fizika Proțesa Prokatki, Akademia Nauk Kazahskoi S.S.R., Alma Ata, 192 p., 1962.
— Dokladî — Akademia Nauk Armianskoi S.S.R., t. XXXIV, *1*, *2*, 1962.
— Trudî Kazanskogo Filiala Akademii Nauk SSSR, Seria Fiziko-Matematiceskaia, *2*, 1962.
— Istoria Tehniki. Bibliograficeskii Ukazatel 1951—1955 Izdat. Akademii Nauk SSSR, Moskva, 390 p., 1961.
Ia. F. Pleșkov, *Regulirovanie recinogo stoka* (Vodohoziaistvennîe rascetî), Ghidrometeorologhiceskoe Izdatelstvo, Leningrad, 395 p., 1961.
V. V. Lebedev, *Ghidrologhia i ghidrometria v zadaciah*, Ghidrometeorologhiceskoe Izdatelstvo Leningrad, 695 p., 1961.
M. M. Protodiakonov, *Opredelenie maksimalnogo stoka poverhnostnîh vod s malîh vodosborov.* Ghidrometeorologhiceskoe Izdatelstvo, Leningrad, 169 p., 1960.
— Stroitelnaia Mehanika i rasciot Soorujenia, *2*, 1962.
— Prikladna Mehanika, t. VIII, *1*, 1962.
— Godișnik na naucino-elektrotehniceskia Institut, vol. VIII, cărțile *I—IV*, 1960.
— Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, *3*, 1962.
— Proceedings of Vibration Problems, *4*, 1961.
— Prace a studie, 14, 1961.
— Informationsdienst Technische Universität Dresden, ,,Angewandte Mechanik'' — Strömungslehre, *5*, 1962.
— Physica status solidi, vol. II, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, 1962.
— Polish Technical Abstracts, *1*, 1962.
— Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität, Dresden, t. 11, *1*, 1962.
— Przeglad Prac Naukowych i budawczych, *9*, 1962.
— Przeglad Mechaniczny, vol. XXI, *8*, 1962.
— L'Industrie Lourde Tchécoslovaque, *5*, 1962.
— Acta Technica CSAV, *2*, 1962.

— Freiburger Forschungshefte, *105*, 1961.
— Isotopentechnik, *4*, 1962.
— The Review of the Polish Academy of Sciences, *1*, 1962.
— Jarmüvek, *3*, *4*, *5*, 1962.
— Zdravotni Technika a vzduchotechnika, t. 5, *1*, 1962.
— Jenaer Rundschau, *2*, 1962.
— GEP, *5*, 1962.
— Canadian Journal of Mathematics, vol. XIV, *2*, 1962.
— Technique et Science Aéronautiques, *2*, 1962.
— The Bulletin of the Faculty of Engineering Giza-Egipt, 1957–1958, 1958–1959.
— G. Kaminoto, T. Akamatsu, T. Hasegawa, *Triple-diaphragm type hypersonic shock tunnel*, Current Paper 1, January, — Department of Aeronautical Engineering — Kyoto University, 1962.
— Reports of the Institute of High Speed Mechanics, Tohoku University, Vol. 13, 1961/1962.
— J. Nilsson, *On the structure of weak interactions*, Transactions of Chalmers University of Technology *258*, 1962.
— Bo K. O. Lundberg, *Is supersonic aviation compatible with the sound development of civil aviation*?
Memorandum PE-12, Aeronautical Research Institute of Sweden, 1962.
— Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, vol. 28, *2*, 1962.
— VDI-Forschungsheft, *490*, 1962.
— Aircraft Engineering, *399*, May 1962.
— Journal of the British Interplanetary Society, vol. 18, *8*, 1962.
— Scientific Lubrication, *5*, 1962.
— Revue de l'Institut Français du Pétrole, *4*, 1962.
— Orientation Technique, Nov. 1961.
— Proceedings of the Swedish Geotechnical Institute, *20*, 1962.
— The Aeronautical Quarterly, t. XIII, *2*, 1962.
— Revue Générale des Sciences pures et appliquées, LXIX, *1–2*, 1962.
— Automatisierung, *5*, 1962.
— The Journal of the Astronautical Sciences, IX, *1*, 1962.
— Mathematical Reviews, vol. 23, *3A*, *3B*, 1962.
— Instrument Practice, *3*, 1962.
— International Journal of Mechanical Sciences, vol. I, *1*, *2/3*, *4*, 1960; vol. II, *1/2*, *3*, 1960; vol. III, *1/2*, *3*, *4*, 1961.
— Hydraulics Research Paper, 1, 2, 1962.
(Hydraulics Research Station D.S.I.R. Wallingford, Anglia).
— III Conferenza aeronautica italo-francese „Leonardi da Vinci" 1957.
— Journal of Mathematics and Mechanics, II, *2*, 1962.
— The Physics of Fluids, vol. 5, *2*, *3*, 1962.
— La Recherche Aéronautique, *87*, 1962.
— Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, vol. 175, *7*, *8*, *9*, *10*, *11*, *12*, *13*, *14*, *15*, *16*, *17*, 1962.

Pentru a vă asigura o colecţie completă şi primirea la timp a revistei, reînnoiţi abonamentul dv. pentru anul 1963.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, AGENŢIILE POŞTALE, FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

6
ANUL XIII
1962

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

1963 APR 29

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

- ACADEMICIAN N. PROFIRI
- A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
- GR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R. ;
- R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti ;
- N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti ;
- M. ARCAN, şef secţie, Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
APARE DE 6 ORI PE AN
Redacţia : INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"
Str. Const. Mille 15, tel. 17.34.09

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA"

STUDII ȘI CERCETĂRI DE
MECANICĂ APLICATĂ

6

ANUL XIII

1962

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Revista

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general științific și reflectare în practică.*
- Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei numite chestiuni.*
- Referate științifice și tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observații și discuții asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*
- Recenzii *asupra cărților și studiilor romîne sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- *Astrodinamică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spațiale cu meteoriții, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea și captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*
- *Aeromecanică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacție, ventilație, aeromotori).*
- *Hidromecanică (hidraulică, construcții hidrotehnice, irigație, turbine și pompe, amenajări hidraulice).*
- *Construcții de mașini (cinematica și dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul mașinilor, automatizare, studiul suprafețelor, tehnologia mediilor solide continue).*
- *Mecanică generală (rezistența materialelor, elasticitate, plasticitate, vibrații și șocuri, stabilitate, analogii electrice și hidraulice).*
- *Statica și dinamica construcțiilor (metode pentru calculul static și dinamic al construcțiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executarea lucrărilor de construcții).*
- *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului și a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmărește stimularea activității științifice precum și difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toți specialiștii din țară și de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă și clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părțile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar și citeț cu cerneală. Figurile și graficele se vor desena în tuș pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar și în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrșitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariție, iar pentru revistă se va indica și numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză și germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleași norme sînt valabile și pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, București, str. C. Mille nr. 15, raionul „16 februarie”.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIII, nr. 6 1962

SUMAR

STUDII

Pag.

M. MIŞICU, Structuri reologice 1357
P. P. TEODORESCU, Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în coordonate curbilinii oarecare. II. Stare de solicitare 1387
CRISTIAN TEODOSIU, Rezolvarea problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare 1409
MARCEL TANNENBAUM, Teoria statistică a proprietăţilor deformative ale betonului 1425
MIRCEA MIHĂILESCU, Teoria de încovoiere la învelitori cilindrice cu rază de curbură variabilă 1453
CRISTEA MATEESCU, Probleme de profilare economică a construcţiilor hidrotehnice (Profiluri optime hidraulice) 1463
N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU şi P. ANTONESCU, Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate 1483
CHR. PELECUDI şi R. C. BOGDAN, Sinteza mecanismelor cu came la prescrierea valorilor arcelor de came 1541
A. CHIŞU, D. MAROŞ, T. ALBU, G. HULPE, D. MATEIŞANU, A. DALY şi A. SZABO, Contribuţii asupra cercetării uzurii roţilor dinţate cu ajutorul izotopilor radioactivi 1549
ST. SĂVULESCU, GH. DARIE şi V. TOMA, Aspecte tridimensionale ale tranziţiei provocate de un jet de intensitate mică pe o placă plană în scurgere incompresibilă. I. 1557
CONSTANTIN IAMANDI, Asupra similitudinii saltului hidraulic 1591
AL. MARINESCU, Vibraţiile palelor rotoarelor reactive de elicopter 1601

NOTE

EMERIC DEUTSCH, Torsiunea unor bare prismatice cu secţiuni asimetrice 1615
RECENZII 1623
INDEX ALFABETIC PE 1962 1633

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Журнал

,,ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ"

публикует:

● Оригинальные исследования *высокого уровня, представляющие общий научный интерес, связанный с практикой.*

● Заметки (*краткие работы*) *оригинального характера, представляющие уточнение некоторого вопроса.*

● Научные и технические рефераты, *в которых излагаются: современное состояние определенной задачи с выявлением нового подхода к ней, замечания и обсуждения некоторых работ по прикладной механике.*

● Резенции на *румынские или зарубежные книги и исследования. В журнале публикуются работы по следующим специальностям:*

● *Астродинамика (оптимальные траектории, расчет орбит или отрезков орбит, оптимальная межорбитальная теплопередача, удар космических экипажей о метеориты, полет в разреженной атмосфере, возвращение в плотную атмосферу, торможение и аэродинамическое улавливание космического экипажа).*

● *Аэромеханика (механика жидкостей и газов, аэродинамика, газодинамика, механика самолета, аэроупругость, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, термоаэродинамика реактивных двигателей, вентиляция, ветродвигатели).*

● *Гидромеханика (гидравлика, гидромеханические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства.*

● *Машиностроение (кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механика сплошных твердых сред).*

● *Общая механика (сопротивление материалов, упругость, пластичность, вибрация и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).*

— Статика и динамика сооружений (методы статистического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, механика грунтов, устойчивость грунтов, методы производства строительных работ.

— Техника измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в механике).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных специалистов и зарубежных сотрудников.

★

Статьи должны быть написаны в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений (относящихся к уже известным частям проблемы).

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала, формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует делать китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Литература, цитированная в тексте, должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, заглавие, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов — и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста, для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском языке или же на русском, французском, английском или немецком языках. Резюме должно составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных сотрудников, редактированным на русском, английском, французском или немецком языках.

Рукописи препровождаются по адресу: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район 15 февраля.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XIII, № 6 1962

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ Стр.

М. МИШИКУ, Реологические структуры 1357
П. П. ТЕОДОРЕСКУ, К плоской задаче теории упругости в некоторых криволинейных координатах. II. Напряженное состояние 1387
К. ТЕОДОСИУ, Решение плоской задачи теории упругости в случае произвольных массовых сил 1409
МАРЧЕЛ ТАННЕНБАУМ, Статистическая теория деформативных свойств бетона 1425
МИРЧА МИХАЙЛЕСКУ, Теория изгиба применительно к цилиндрическим оболочкам с переменным радиусом кривизны 1453
КРИСТЯ МАТЕЕСКУ, Вопросы экономического расчета гидротехнических сооружений 1463
Н. И. МАНОЛЕСКУ, И. ЕРЧАНУ и П. АНТОНЕСКУ, Область применения кинематических методов исследования плоских шарнирных механизмов 1483
Х. ПЕЛЕКУДИ и Р. К. БОГДАН, Синтез кулачковых механизмов для установления кривизны профиля кулачков 1541
А. КИШУ, Д. МАРОШ, Т. АЛБУ, Г. ХУЛПЕ, Д. МАТЕЙШАНУ, А. ДАЛИ, АРПАД САБО, К определению износа зубчатых колес при помощи радиоактивных изотопов 1549
ШТ. СЭВУЛЕСКУ, Г. ДАРИЕ и В. ТОМА, Трехмерные аспекты перехода, создаваемого слабой струей на плоской пластинке при несжимаемом истечении 1557
КОНСТАНТИН ЯМАНДИ, О подобии гидравлического прыжка 1591
АЛ. МАРИНЕСКУ, Вибрация лопастей реактивных роторов вертолетов . . . 1601

ЗАМЕТКИ

ЭМЕРИК ДЕЙЧ, Кручение призматических стержней с асимметричным сечением 1615
РЕЦЕНЗИИ 1623
АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ за 1962 год 1633

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Le périodique

«STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ»
(ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE)

publie:

● *des* études originales *à caractère hautement scientifique, recherches fondamentales d'intérêt général, orientées vers l'activité pratique*;

● *des* notes (*communications brèves*) *à caractère général, ou constituant une mise au point d'une certaine question*;

● *des* exposés scientifiques et techniques *où l'on expose: l'état actuel d'un certain problème, en soulignant son aspect nouveau; des remarques et discussions concernant certains travaux de mécanique appliquée*;

● *des* notes bibliographiques *au sujet des livres et des études roumains et étrangers.*

Les domaines de spécialité de la revue sont les suivants:

● *astrodynamique* (*réalisation des trajectoires optimums, calcul des orbites, ou des segments d'orbites, obtention du transfert interorbital optimum, impact des véhicules spatiaux avec les météorites, orbites synchrones, astrorelativité, vol en atmosphère raréfiée, retour dans l'atmosphère dense, freinage et saisie aérodynamique d'un véhicule cosmique*).

● *aéromécanique* (*mécanique des fluides, aérodynamique, dynamique des gaz, mécanique de l'avion, aéroélasticité, aérodynamique des moteurs à combustion interne, thermo-aérodynamique des moteurs à réaction, ventilation, aéromoteurs*);

● *hydromécanique* (*hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines hydrauliques et pompes*);

● *constructions mécaniques* (*cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des machines, automation, étude des surfaces, technologie des milieux solides continus*);

● *mécanique générale* (*résistance des matériaux, élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques*);

● *statique et dynamique des constructions* (*méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilite des terrains, méthodes d'exécution des travaux de construction*);

● *technique des mesures* (*appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radioactifs en technique*).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires en publiant, dans ce but, les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

★

Les articles seront rédigés dans un style concis et clair, étant évitées les introductions trop longues concernant les données connues des problèmes.

Les manuscrits seront envoyés en trois exemplaires, dactylographiés, aux formules écrites, de manière lisible, à l'encre. Les figures, ainsi que les diagrammes, seront tracés à l'encre de Chine sur du papier calque. On utilisera le nombre de figures strictement indispensable.

Les références bibliographiques seront mentionnées à la fin de l'article. On y indiquera le nom de l'auteur, le titre de l'ouvrage, le tome, la page, le lieu de la parution et, pour les périodiques on ajoutera le numéro auquel on se réfère. On ne fera pas mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé en roumain ou, éventuellement, en russe, français, anglais ou allemand (environ une page pour 20 pages dactylographiées de texte).

Les mêmes normes sont valables pour les collaborateurs étrangers, qui peuvent rédiger leurs travaux en russe, anglais, français ou allemand.

Les manuscrits seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée «Traian Vuia», 15, str. Constantin Mille, Bucarest, Roumanie.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XIII, nº 6 1962

SOMMAIRE

ÉTUDES Page

M. MIŞICU, Rheologische Strukturen 1357
P. P. TEODORESCU, Sur le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes quelconques. II. Etat de sollicitation 1387
CRISTIAN TEODOSIU, Solving of the plane problem of the theory of elasticity in the case of arbitrary body forces 1409
MARCEL TANNENBAUM, Théorie statistique des propriétés déformatives du béton 1425
MIRCEA MIHAILESCU, Bending theory of cylindrical shells of variable curvature radius 1453
CRISTEA MATEESCU, Problems of the economical design of hydraulic structures 1463
N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU and P. ANTONESCU, Range of applicability of the methods of kinematic investigation of plane hinged mechanisms 1483
CHR. PELECUDI and R. C. BOGDAN, Synthesis of cam mechanisms at the prescribing of the values of cam arcs 1541
A. CHIŞU, D. MAROŞ, T. ALBU, G. HULPE, D. MATEIŞANU, A. DALY and A. SZABO, Contributions to the investigation of the wear of toothed wheels by using radioactive isotopes 1549
ST. SĂVULESCU, GH. DARIE and V. TOMA, Three-dimensional aspects of the transition caused by a low intensity jet on a flat plate in incompressible flow . . . 1557
CONSTANTIN IAMANDI, On the similarity of hydraulic jump 1591
AL. MARINESCU, Vibrations des pales des rotors réactifs d'hélicoptère 1601

NOTES

EMERIC DEUTSCH, Torsion des barres prismatiques à sections asymétriques . . . 1615
REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1623
INDEX ALPHABÉTIQUE POUR L'ANNÉE 1962 1633

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

STUDII

STRUCTURI REOLOGICE

DE

M. MIŞICU 1)

§ 4. DENSITĂŢI TENSORIALE

Prin definiţie, elementele spaţiilor $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^*_P$, $[\mathfrak{T}_P] \otimes \ldots \otimes [\mathfrak{T}^*_P] \otimes \ldots \otimes [\mathfrak{T}^*_P]$ au un caracter de operatori (neliniari) care, aplicaţi anumitor elemente co- şi contravariante determină invarianţi în $P \in V_n$. Izolarea formală a elementelor acestor spaţii în expresia invarianţilor respectivi trebuie să se facă în concordanţă cu modul lor de construcţie şi caracterul lor operator. Pentru aceasta sînt necesare o serie de indicaţii suplimentare în raport cu teoria infinitezimală.

1. *Spaţiul* $[\mathcal{F}(V_n)]$. Fie elementele $p^1, \ldots, p^\iota, \ldots; q^1, \ldots, q^\iota, \ldots$ etc. $\iota \in I$, I fiind o mulţime de indici cel mult numărabilă iar p, q putînd fi în particular elemente în E (sau E_p, E_s) şi în general fiind concepute ca elementele unor *cortegii*2) notate $[p]$, $[q]$ sau $[p^\iota]$, $[q^\iota]$. $\iota \in I$.

Vom mai considera în general funcţiile f^ι de elementele unor cortegii: $f^\iota[p]$, $\iota \in I$; $f^\iota([p], [q])$ etc. În particular fie $f^\iota = \varphi^\iota \in \mathcal{F}(V_n)$ de clasă C^u, $u > 1$, inversabile într-un domeniu $\Omega \in V_n$ (conform § 1.7 regulate) astfel ca $\varphi^\iota[p] = p^{\iota'} = p'^\iota$, $\iota \in I$ să constituie un cortegiu $[\varphi] \in [\mathcal{F} \cdot (V_n)]$. Vom spune că elementele cortegiului $[\varphi]$ sînt elemente ale spaţiului $[\mathcal{F}(V_n)]$. Notaţia cortegială a fost utilizată în § 3. 5. 6. la definirea sistemelor de repere şi corepere, a elementelor spaţiilor $\mathfrak{T}_P$, $\mathfrak{T}^*_P$ etc. indicîndu-se la § 3. 5. 6 un mod particular de definire a operaţiilor q- contravariante şi r- covariante. În cele ce urmează vom considera însă cazul mai general al operaţiilor definite în $[\mathcal{F}(V_n)]$.

---

1) Acest articol reprezintă continuarea articolului apărut în Revue de Mécanique Appliquée. No. 4, 1962 pag. 723—749 în raport cu care se fac referinţele bibliografice şi numerotarea aliniatelor.

2) В. А. Успенский, *Лекции о вычислимых функциях*, физматгиз, 1960.

Peste elementele din $[\mathcal{F}(V_n)]$ considerăm organizate operațiile $\pm$ și $\cdot$ astfel ca să fie satisfăcute condițiile

$$[f] + [g] = [f^1 \pm g^1, f^2 \pm g^2, \dots],$$

$$[f] \cdot [g] = [f^1 g^1; f^2 g^2, \dots].$$

2. *Spațiul* $[\mathcal{X}]$*- vectorial.* Fie elementele d- vectoriale $d\,(f^{\iota};\, p^1, p^2, \dots;\, q^1, q^2, \dots) = X_{p^1, p^2, \dots;\, q^1, q^2, \dots} f^{\iota}$, $\iota \in I$.
Conform celor precedente acestea se transcriu astfel

$$d\,(f^{\iota};\; [p];\; [q]) = X_{[p],\,[q]}\, f^{\iota}.$$

Atunci vom mai putea considera un spațiu denumit $[d]$- vectorial care se introduce cu ajutorul acelorași proprietăți ca și spațiul d-vectorial (§ 2.3) avînd elementele

$$d\,([f];\; [p];\; [q]) = [d\,(f^{\iota};\; [p];\; [q]).$$

După cum s-a arătat în § 3 (5, 6), în cazul definirii unei baze de repere se reproduc pentru acestea proprietățile aplicației $X_{p,\,-} \in \mathcal{X}$ și φ'. De asemenea, în mod asemănător se deduc o serie de proprietăți și pentru elementele $X_{[p],\,[-]}$ constituente ale spațiului denumit $[\mathcal{X}]$-vectorial :

$$d\,(f;\; [p];\; [q]) = X_{[p],\,[q]}\, f,$$

$$d\,([f];\; [p];\; [q]) = [X_{[p],\,]q]}\, f^{\iota}], \iota \in I.$$

De asemenea o dată cu aplicația $p'^{\iota} = \varphi^{\iota}\,[p]$, $\iota \in I$ se introduce cortegiul aplicațiilor $[\varphi']$ astfel ca

$$X_{[p],\,[q]}\, \varphi^{\iota}\,[p] = (\varphi'^{\iota}_{[p]}\cdot)\,[q]$$

sau

$$X_{[p],\,[q]}\,[\varphi'^{\iota}\,(p)] = [\varphi'^{\iota}_{[p]}\,[q]] = [\varphi'^{\iota}_{[p]}]\,[q].$$

Pentru elementele spațiului $\mathcal{X}$- vectorial, proprietatea de *fuziune*

$$(\varphi'^{\iota}_{[p]}\cdot)\,[q] - (\varphi'^{\iota}_{[p]}\cdot)\,[r] = (\varphi'^{\iota}_{[p]+[r]}\cdot)\,[[q] - [r]], \; \iota \in I$$

sau

$$[\varphi'_{[p]}\cdot]\,[q] - [\varphi'_{[p]}\cdot]\,[r] = [\varphi'_{[p]+[r]}\cdot]\,[[q] - [r]]$$

se demonstrează analog ca la § 3.3. (luînd $f = \varphi$)

$$d\,([f], [p], [q]) - d\,([f], [p], [r]) - d\,([f], [p] + [r], [q] - [r]) =$$

$$= X_{[p],\,[q]}\,[\varphi\,(p)] - X_{[p],\,[r]}\,[\varphi\,(p)] = [\varphi'_{[p]}\cdot]\,[q] - [\varphi'_{[p]}]\,[r] =$$

$$= X_{[p]+[r],\,[q]-[r]}\,[\varphi\,(p)] \text{ etc.}$$

Relația de *difuziune* se scrie

$$(\varphi'^{i}_{[p]}\cdot)\,[r] - (\varphi'^{i}_{[s]}\cdot)\,[r] = X_{[s].\,[p]-[s]}\,(\varphi'^{i}_{[-]}\cdot)\,[r].$$

3. *Indici operanți.* Pentru simplificarea notațiilor și specificarea elementelor din $\mathfrak{T}_P$, $\mathfrak{T}^*_P$ etc. separate de elementele complimentare (co- și contravariante) cu care intervin în exprimarea invarianților de diferite ordine vor fi utilizate ***sisteme de indici operanți***, notați $[i]$, $[j]$, ... ; $[\alpha]$, $[\beta]$, ... $\in I$, definiți cu ajutorul relațiilor

$$(\quad)_{[i]} = (\quad)_i\ [\quad]^i\ (= [\quad]^i\,(\quad)_i)$$

(de exemplu $(\quad)_{[i]}V^i = (\quad)_i\,[V^i]$).

Prin sumă și diferență operantă se înțeleg operațiile

$$(\quad)_{(\ )i\underset{[j]}{+}}\ V^j = (\quad)_{(\ )i\underset{j}{+}}\ [V^j] = (\quad)_{(\ )i+V^i}\ [V^j] =$$

$$= (\quad)_{(\ )i+V^i}\ [\quad]^i\ [V^j].$$

Prin sistemul de indici operanți $[i_P]$,..., $[\alpha_P[\in I_P$; $[j_Q]$,..., $[\beta_Q]\in I_Q$ $(P, Q \in V_n)$ se definesc indicii caracterizînd aplicații ale elementelor din $\mathfrak{T}_P$, $\mathfrak{T}_Q$, $\mathfrak{T}^*_P$, $\mathfrak{T}^*_Q$ etc. conform relațiilor

$$(\quad)_{[^i P]} = (\quad)_i\,[\quad]^i_P,\ (\quad)_{[^i Q]} = (\quad)_i\,[\quad]^i_Q,$$

$$(\quad)^{[^i P]} = (\quad)^i\,[\quad]_{i_P},\ (\quad)^{[^i Q]} = (\quad)^i\,[\quad]_{i_Q}\ \text{etc.}$$

Cu acestea legea de transformare a elementelor din $\mathfrak{T}_P$ se scrie

$$p^{\alpha'} = (\varphi'^{\alpha'}_{[\beta]}\cdot)\,p^{\beta} = (\varphi'^{\alpha'}_{[\beta]}\cdot)\,[p^{\beta}],$$

iar conform § 3.5 transformarea φ' verifică relațiile

$$(\varphi'^{\beta'}_{[\alpha]}\cdot)\,(\varphi'^{\alpha}_{[\gamma']}\cdot) = \delta^{\beta'}_{\gamma'}\ ;\ (\varphi'^{\beta}_{[\alpha']}\cdot)\,(\varphi'^{\alpha'}_{[\gamma]}\cdot) = \delta^{\beta}_{\gamma}.$$

Coreperele și reperele, în sens generalizat vor satisface condițiile de transformare

$$\theta^{\alpha} = (\varphi'^{\alpha}_{[\beta']}\cdot)\ \theta^{\beta'}\ ;\ e_{[\alpha]} = e_{[\beta']}\,(\cdot\,\varphi'^{\beta'}_{[\alpha]})$$

$$(r_{[\alpha]} = X_{[\alpha].\,[-]^{\alpha}}f = d\,(f, [p^{\alpha}], [\quad]^{x}))$$

$$e_{[\alpha]}\ \theta^{\alpha} = e_{[\alpha]}\ [\theta^{\alpha}] = \text{invariant}.$$

Elementele $q_{[\alpha]}$ din $\mathfrak{T}^*_P$ vor satisface în general condiția de transformare :

$$W_{[\alpha]} = W'_{[\beta']}\,(\cdot\,\varphi'^{\beta'}_{[\alpha]}).$$

Produselor $[\mathfrak{T}_P]\otimes[\mathfrak{T}_P]\otimes$ ... considerate la § 3.7 le va corespunde elementele $T^{\alpha 1 \ldots \alpha l \ldots} = V^{\alpha 1} \ldots V^{\alpha j} \ldots$, $V^{\alpha j} \in \mathfrak{T}_P$, care se transformă conform relației

$$T^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_l \ldots} = (\varphi'^{\alpha'_1}_{[\beta_1]}\cdot) \ldots (\varphi'^{\alpha'_l}_{[\beta_l]}\cdot) \ldots V^{\beta_1} \ldots V^{\beta_l} \ldots$$

în care s-au utilizat indicii operanți.

În general, un tensor de tip $(I, 0)$ va fi caracterizat în cadrul mai larg al operaţiilor definite în $[\mathcal{F}(V_n)]$ cu ajutorul notaţiei cortegiale prin legea de transformare

$$T^{\alpha'_1 \cdots \alpha'_l \cdots} = (\varphi'^{\alpha'_1}_{[\beta_1]} \cdot) \ldots (\varphi'^{\alpha'_l}_{[\beta_l]} \cdot)\, T^{\beta_1 \cdots \beta_l \cdots}, \; l \in I .$$

În mod asemănător, considerînd produsele $[\mathfrak{T}^*_P] \otimes [\mathfrak{T}^*_P] \otimes \ldots$ şi elementele $W_{[\alpha_1]}, \ldots, W_{[\alpha_l]}, \ldots \in \mathfrak{T}^*_P, l \in I$ se definesc tensorii $T_{[\alpha_1], \ldots, [\alpha_l], \ldots} = W_{[\alpha_1]} \ldots W_{[\alpha_l]} \ldots$ care se transformă astfel $T_{[\alpha_1], \ldots [\alpha_l], \ldots} = W_{[\beta'_1]} \ldots W_{[\beta'_l]} \ldots (\cdot \varphi'^{\beta'_1}_{[\alpha_1]}) \ldots (\cdot \varphi^{1\beta'_l}_{[\alpha_l]}) \ldots$ Prin tensor de tip $(0, I)$ în sens generalizat se vor înţelege atunci tensori care se transformă conform legii

$$T_{[\alpha_1] \ldots [\alpha_l] \ldots} = T_{[\beta'_1] \ldots [\beta'_l] \ldots} (\cdot\, \varphi'^{\beta'_1}_{[\alpha_1]}) \cdots (.\varphi'^{\beta'_l}_{[\alpha_l]}) \ldots$$

În § 3.7 au fost introduse şi alte tipuri de produse tensoriale. Transcrierea lor în notaţia utilizînd indicii operanţi este avantajoasă.

De exemplu, definind cu ajutorul elementelor α — vectoriale:

$$T' = d(\varphi p; [p]; d([\varphi p]; [p]; d([\varphi p], \ldots; d([\varphi p], [p], [T]) \ldots)$$

aplicaţia $T \rightarrow T'$ în urma transformării $[p] \rightarrow [\varphi p]$ în $P \in V_n$ a elementelor din $\mathfrak{T}_P \otimes [\mathfrak{T}_P \otimes [\ldots \otimes [\mathfrak{T}_P] \ldots]$ se obţine pentru acestea condiţia de transformare

$$T^{\alpha'_1 [\alpha'_2 \ldots [\alpha'_l \ldots] \ldots]} = (\varphi'^{\alpha'_1}_{[\beta_1]} \cdot) [(\varphi'^{\alpha'_2}_{[\beta_2]} \cdot) \ldots [(\varphi'^{\alpha'_l}_{[\beta_l]} \cdot) \ldots] \ldots] \cdot [T^{\beta_1 [\beta_2 \ldots [\beta_l \ldots [] \ldots}]$$

$$= [\varphi'^{\alpha'_1}_{[\beta_1]} \cdot] [(\varphi'^{\alpha'_2}_{[\beta_2]} \cdot) \ldots (\varphi'^{\alpha'_l}_{[\beta_l]} \cdot) \ldots]\, T^{\beta_1 [\beta_2 \ldots [\beta_l \ldots] \ldots]}$$

a tensorilor ce vor fi denumiţi de tipul $([I], 0)$.

În mod analog, pornind de la elementele d- vectoriale $Td(p, [\varphi p], [-])\, d([p], [\varphi p], [-]) \ldots d([p], [\varphi p], [-]$ se obţine legea de transformare

$$T'_{[\beta'_1 \ldots [\beta'_l \ldots] \ldots]} = T_{[\alpha_1 \ldots [\alpha_l \ldots] \ldots]} [\cdot\, \varphi'^{\alpha_1}_{[\beta'_1]}, [\cdot \varphi'^{\alpha_2}_{[\beta'_2]}, \ldots [\cdot\, \varphi'^{\alpha_l}_{[\beta'_l]} [-] \ldots] =$$

$$= T_{[\alpha_1 \ldots [\alpha_l \ldots] \ldots]} (\cdot\, \varphi'^{\alpha_1}_{[\beta'_1]}, \ldots (\cdot\, \varphi'^{\alpha_l}_{[\beta'_l]}\,) \ldots), \; l \in I.$$

a elementelor produselor $\mathfrak{T}^*_P \otimes [\ldots \otimes [\mathfrak{T}^*_P] \ldots]$ denumiţi tensori de tipul $(0, [I])$.

În sfîrșit, tensorii de tipul $([I], [I])$ sînt conform § 3.7 și celor precedente caracterizați de transformarea

$$T^{\alpha'_1\,[\alpha'_2\dots[\alpha'_l\dots]\dots]}_{\beta'_1\dots[\beta'_l\dots]} = (\varphi'^{\alpha'_1}_{[\gamma_1]}\cdot)\,[(\varphi'^{\alpha'_2}_{[\gamma_2]}\cdot)\,[\dots(\varphi'^{\alpha'_l}_{[\gamma_l]}\cdot)\dots]\cdot$$

$$\cdot\, T^{\gamma_1[\dots[\gamma_l\dots]\dots]}_{[\delta_1\dots[\delta_l\dots]\dots]}(\cdot\,\varphi'^{\delta_1}_{[\beta'_1]}\dots(\cdot\,\varphi'^{\delta_l}_{[\beta'_l]})\dots).$$

Un tensor de tipul (I, I) va fi caracterizat de transformarea

$$T^{\alpha'_1,\dots,\alpha'_l,\dots}_{[\beta'_1],\dots,[\beta'_l],\dots} = (\varphi'^{\alpha'_1}_{[\gamma_1]}\cdot)\dots(\varphi'^{\alpha'_l}_{[\gamma_l]}\cdot)\dots T^{\gamma_1\dots\gamma_l\dots}_{[\delta_1]\dots[\delta_l]\dots}(\cdot\,\varphi'^{\delta_1}_{[\beta'_1]})\dots(\cdot\,\varphi'^{\delta'_l}_{[\beta'_l]})\dots$$

Un asemenea tensor este de exemplu $W_{\beta_1}\dots W_{\beta_l}\dots V^{\alpha_1}\dots V^{\alpha_l}\dots$

Este clar în acest din urmă caz că dacă $\alpha_l = \beta_m$ atunci are loc o *contractare* a cortegiilor în sensul dat de egalitățile

$$T^{\alpha_1\dots\alpha_l\dots}_{[\beta_1]\dots[\beta_m]\dots} = W_{[\beta_1]}\dots W_{[\beta_m]}\dots V^{\alpha_1}\dots V^{\alpha_l}\dots =$$

$$= W_{[\beta_1]}\dots W_{[\beta_{m-1}]} W_{[\beta_{m+1}]}\dots V^{\alpha_1}\dots V^{\alpha_{l-1}} V^{\alpha_{l+1}}\dots W_{\beta_m} V^{\alpha_l} =$$

$$= T^{\alpha_1\dots\alpha_{l-1},\,\alpha_{l+1},\dots}_{[\beta_1],\dots,[\beta_{m-1}],\,[\beta_{m+1}],\dots}$$

deoarece $W_{\beta_m} V^{\alpha_l}$ are în acest caz un caracter invariant și nu intervine în legea de transformare a tensorului.

Prin produs operant covariant al unui scalar s cu un tensor $T^{\alpha_1\dots\alpha_l\dots}_{[\beta_1]\dots[\beta_l]}$ se înțelege operația

$$s \underset{\beta_1}{\times} T^{\alpha_1\dots\dots\alpha_l\dots\dots}_{[\beta_1]\dots[\beta_l]\dots} = T^{\alpha_1\dots\alpha_l\dots\dots}_{[\beta_1]\dots[\beta_l]\dots}(s\,-)^{\beta_i}.$$

De exemplu

$$s \underset{i}{\times} W_i = W_i\,[s]\,;\; s \underset{i}{\times} W_i\,V^i = W_i\,[s\,V^i].$$

Prin produs operant contravariant al unui scalar s cu un tensor T se definește operația

$$s \overset{\alpha_i}{\times} T^{\alpha_1\dots\dots\alpha_l\dots\dots}_{[\beta_1],\dots[\beta_l]\dots} = (s)_{[\alpha_i]}\,T^{\alpha_1\dots\alpha_l\dots\dots\dots}_{[\beta_1],\dots,[\beta_l],\dots}$$

De exemplu

$$s \overset{i}{\times} V^i = (s)_i\,V^i\,;\; s \overset{i}{\times} W_i\,V^i = (s\,W_i)\,[V^i].$$

4. *n- vectori.* Vom considera produsul tensorial a n vectori q- contravarianți $[V_1]\otimes\dots\otimes[V_n]$ vectorii $V_l,\ l = 1,\dots,n$ avînd în raport cu un sistem de repere și corepere date în elementele $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$,... ale unei acoperiri cu vecinătăți ale lui $P\in V_n$, $(P\in\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}\wedge\dots)$ componentele

$V_l^{\alpha_l}, l = 1, \dots n$. Elementele matricii asociate acestui produs tensorial şi anume a matricii $\| V_l^{\alpha_l} \|$ determină o varietate cu n dimensii pe care o vom denumi volum n-dimensional în $[\mathfrak{T}_p]\underbrace{\otimes \dots \otimes}_{\text{de n ori}}[\mathfrak{T}_p]$ orientat.

Aceste elemente se definesc prin relaţia $V^{\beta_1 \dots \beta_n} = \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} V^{\alpha_1}_{1} \dots V^{\alpha_n}_{n}$ (fără sumare) unde $\varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \pm 1$ dacă permutarea $\binom{\beta_1 \dots \beta_n}{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ este pară, respectiv impară $= 0$ dacă $\beta_1, \dots, \beta_n$ şi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ au cel puţin 2 elemente identice $(\beta_l = \beta_m)$ şi vor fi denumiţi n-vectori q-contravarianţi. Aceşti n-vectori au un caracter antisimetric fiind caracterizaţi prin următoarea condiţie de transformare a indicilor $V^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n} V^{\beta_1 \dots \beta_n}$ (fără sumare).

Într-adevăr, $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n} V^{\beta_1 \dots \beta_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n} \cdot \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\gamma_1 \dots \gamma_n} \cdot V^{\gamma_1 \dots \gamma_n} =$ $= \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\gamma_1 \dots \gamma_n} V^{\gamma_1 \dots \gamma_n} = V^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, deoarece $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n} \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_n}_{\gamma_1 \dots \gamma_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\gamma_1 \dots \gamma_n}$.

Astfel introduşi, n-vectorii nu diferă de mărimile analoge din cadrul teoriei infinitezimale decît prin sensul q-contravarianţei.

Vom mai nota

$$[V] = \sum_{\alpha} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} V^{\alpha_1}_{1} \dots V^{\alpha_n}_{n} = [V_1 \dots V_n] = \begin{vmatrix} V_1^{i_1} \cdots\cdots V_n^{i_1} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ V_1^{i_n} \cdots\cdots V_n^{i_n} \end{vmatrix}$$

În cazul unei aplicaţii φ definite în $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \wedge \dots$ avem atunci condiţia de transformare:

$$[V] = [V_1 \dots V_n] = \sum_{\alpha} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (\varphi'^{\alpha_1}_{[\beta_1']} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha_n}_{[\beta_n']} \cdot) V^{\beta_1'}_{1} \dots V^{\beta_n'}_{n}.$$

Dacă $V_l^{\beta_l'} = \delta^{\beta_l'}_{i_l} V^{i_l}, l = 1, \dots, n$ (caz în care $V^{i_1 \dots i_n} = V^{i_1} \dots V^{i_n}$) atunci

$$[V] = \sum_{\alpha} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (\varphi'^{\alpha_1}_{[i_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha_n}_{[i_n]} \cdot)\, V^{i_1} \dots V^{i_n}$$

şi în general

$$[V] = \sum_{\alpha} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (\varphi'^{\alpha_1}_{[\beta_1']} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha_n}_{[\beta_n']} \cdot)\, \varepsilon^{\beta_1' \dots \beta_n'}_{i_1 \dots i_n} V^{i_1 \dots i_n} =$$

$$= \sum_{\alpha} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (\varphi'^{\alpha_1}_{[i_1']} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha_n}_{[i_n']} \cdot)\, V^{i_1 \dots i_n}.$$

Vom nota

$$|\varphi'^{p}_{p'}| = \sum_{\alpha} \varepsilon^{i'_1\dots i'_n}_{\alpha_1\dots\alpha_n}(\varphi'^{\alpha_1}_{[i'_1]}\cdot)\dots(\varphi'^{\alpha_n}_{[i'_n]}\cdot).$$

Indicii notați prin litere latine sînt afectați ca și mai sus șirurilor crescătoare $i_1 < \dots < i_n$.

Observăm că $|\varphi'^{p}_{p'}|$ se mai scrie

$$|\varphi'^{p}_{p'}| = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \varepsilon^{\alpha'_1\dots\alpha'_n}_{i_1\dots i_n}(\varphi'^{i_1}_{[\alpha'_1]}\cdot)\dots(\varphi'^{i_n}_{[\alpha'_n]}\cdot).$$

În mod analog se deduce formula

$$|\varphi'^{p'}_{p}| = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \varepsilon^{i_1\dots i_n}_{\alpha'_1\dots\alpha'_n}(\varphi'^{\alpha'_1}_{[i_1]}\cdot)\dots(\varphi'^{\alpha'_n}_{[i_n]}\cdot),\ i_1 < i_2 < \dots < i_n$$

și în mod echivalent

$$|\varphi'^{p'}_{p}| = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{i'_1\dots i'_n}(\varphi'^{i'_1}_{[\alpha_1]}\cdot)\dots(\varphi'^{i'_n}_{[\alpha_n]}\cdot),\ i, < \dots < i_n.$$

Vom denumi $|\varphi'^{p}_{p'}|$ *determinantul operator* al aplicației φ. Este clar că în cazul teoriei infinitezimale acesta este chiar determinantul funcțional al transformărilor de coordonate.

Vom nota prin $D = \sum\limits_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \varepsilon^{i_1\dots i_n}_{\alpha_1\dots\alpha_n} D^{\alpha_1}_{[i_1]} D^{\alpha_n}_{[i_n]}$ un *determinant operator* în general. Produsul $D_1\,[D_2]$ a doi determinanți operatori

$$D_1 = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \varepsilon^{i_1\dots i_n}_{\alpha_1\dots\alpha_n} D^{\alpha_1}_{[i_1]}\dots D^{\alpha_n}_{[i_n]}$$

$$D_2 = \sum_{\beta_1,\dots,\beta_n} \varepsilon^{i_1\dots i_n}_{\beta_1\dots\beta_n} D^{\alpha_1}_{[i_1]}\dots D^{\alpha_n}_{[i_n]},\ i_1 < \dots < i_n$$

se definește conform relației

$$D_1\,[D_2] = \frac{1}{n\,!}\sum_{\alpha_1,\dots\alpha_n} \varepsilon^{i_1\dots i_n}_{\alpha_1\dots\alpha_n} D^{\alpha_1}_{1[i_1]}\dots D^{\alpha_n}_{1[i_n]}\sum_{\beta_1,\dots\beta_n} \varepsilon^{\beta_1\dots\beta_n}_{i_1\dots i_n} D^{i_1}_{2[\beta_1]}\dots D^{i_n}_{2[\beta_n]} =$$

$$= \frac{1}{n\,!}\sum_{\alpha_1,\dots\alpha_n}\sum_{\beta_1,\dots\beta_n} \varepsilon^{\beta_1,\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_n} D^{\alpha_1}_{1[i_1]}\, D^{i_1}_{2[\beta_1]}\dots D^{\alpha_n}_{1[i_n]}\, D^{i_n}_{2[\beta_n]}.$$

În cele de mai sus s-a ținut seama de identitatea

$$\varepsilon^{i_1\dots i_n}_{\alpha_1\dots\alpha_n}\,\varepsilon^{\beta_1\dots\beta_n}_{i_1\dots i_n} = \varepsilon^{\beta_1\dots\beta_n}_{\alpha_1\dots\alpha_n}\ \text{(fără sumare)}.$$

Din definițiile date decurge următoarea consecință :

Determinantul operator al aplicației φ satisface condițiile

$$|\,\varphi'^{p'}_{p}\,| \cdot [\,|\,\varphi'^{p}_{p'}\,|\,] = |\,\varphi'^{p}_{p'}\,| \cdot [\,|\,\varphi'^{p'}_{p}\,|\,] = 1.$$

DEMONSTRAȚIE : se calculează $|\,\varphi'^{p}_{p'}\,| \cdot [\,|\,\varphi'^{p'}_{p}\,|\,] =$

$$= \frac{1}{n\,!} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n}} \varepsilon^{\beta'_1 \dots \beta'_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (\varphi'^{\alpha_1}_{[i'_1]} \cdot)(\varphi'^{i'_1}_{[\beta'_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha_n}_{[i'_n]} \cdot)(\varphi'^{i'_n}_{[\beta'_n]} \cdot) =$$

$$= \frac{1}{n\,!} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta'_1, \dots, \beta'_n}} \varepsilon^{\beta'_1 \dots \beta'_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \delta^{\alpha_1}_{\beta'_1} \dots \delta^{\alpha_n}_{\beta'_n} = \frac{1}{n\,!} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \\ \beta'_1, \dots, \beta'_n}} \varepsilon^{\beta'_1 \dots \beta'_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 1$$

deoarece

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \sum_{\beta'_1, \dots \beta'_n} \varepsilon^{\beta'_1 \dots \beta'_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = n\,!$$

În mod analog se demonstrează și a doua relație.

5. *Simbolii lui Kronecker operanți.* Vom considera simbolii utilizați în cele precedente $\varepsilon^{i_1, \dots, i_m}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}, \varepsilon^{\beta_1, \dots, \beta_m}_{j_1, \dots, j_m}$, (indicii notați cu litere latine fiind presupuși ordonați crescător $i_1 < i_2 < \dots < i_m$; $j_1 < j_2 < \dots < j_m$) precum și $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_m}\, \varepsilon_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = \pm 1$ (dacă permutarea $\binom{1 \dots m}{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ e pară respectiv impară), $= 0$ (dacă $m > n$ sau cel puțin doi indici sînt egali).

Prin simbolii lui Kronecker operanți se definesc elementele

$$\varepsilon_{[\alpha_1 \dots \alpha_m]} = (\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_m})\, \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_m} (\quad)^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$$

$$\varepsilon^{[\alpha_1 \dots \alpha_m]} = (\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_m})\, \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_m} (\quad)_{\alpha_1 \dots \alpha_m} .$$

Cu ajutorul acestei definiții se notează sumele în $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ în care apar simbolii lui Kronecker.

De asemenea se notează simbolii operanți

$$\varepsilon^{[i_1 \dots i_m]}_{[\alpha_1 \dots \alpha_m]} = (\sum_{\alpha_1, \dots \alpha_m})\, \varepsilon^{i_1 \dots i_m}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} (\quad)^{\alpha_1 \dots \alpha_m}$$

$$\varepsilon^{[\alpha_1 \dots \alpha_m]}_{[i_1 \dots i_m]} = (\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_m})\, \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{i_1 \dots i_m} (\quad)_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$$

precum și

$$\delta^{\alpha}_{[\beta]} = \delta^{\alpha}_{\beta} (\quad)^{\beta},\ \delta^{[\alpha]}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} (\quad)_{\alpha} .$$

Vom mai nota

$$\varepsilon^{[\alpha_1 \dots \alpha_l]}_{[\beta_1 \dots \beta_m]} = \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_l \\ \beta_1 \dots \beta_m}} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_l}_{\beta_1 \dots \beta_m} (\quad)^{\beta_1 \dots \beta_m} (\quad)_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \varepsilon^{[\alpha_1 \dots \alpha_l]}\, \varepsilon_{[\beta_1 \dots \beta_m]} .$$

Este clar că

$$\varepsilon^{[\alpha_1\dots\alpha_n]}_{[\beta_1\dots\beta_n]} = \pm \sum (\quad)_{\alpha_1\dots\alpha_n}(\quad)^{\beta_1\dots\beta_n}$$

după cum permutarea $\binom{\alpha_1\dots\alpha_n}{\beta_1\dots\beta_n}$ este pară sau impară și $= 0$ dacă $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; $\beta_1, \dots, \beta_n$ conțin respectiv cel puțin doi indici identici.

Observație. Cu ajutorul simbolurilor lui Kronecker se introduc analog ca în cazul teoriei infinitezimale relațiile caracterizînd tensori q- contravarianți antisimetrici și r- covarianți antisimetrici:

$$T^{[i_1]\dots[i_m]} = \varepsilon^{i_1\dots i_m}_{\lambda_1\dots\lambda_m} T^{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}$$

$$T^{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]} = \varepsilon^{\lambda_1\dots\lambda_m}_{i_1\dots i_m} T^{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}.$$

6. *Densitatea tensorială.* O densitate tensorială în $P \in V_n$, notată $D^{\alpha_1\dots\alpha_l}_{[\beta_1]\dots[\beta_m]}$ de l ori q- contravariantă și de m ori r- covariantă, de pondere s, definită în raport cu un sistem de repere și corepere în elementele $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \dots$ ale unei acoperiri cu vecinătăți ale lui P ($P \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \wedge \dots$) este caracterizată de transformarea:

$$D^{\alpha'_1\dots\alpha'_l}_{[\beta'_1]\dots[\beta'_m]}\,|\varphi'^{p'}_{p}|^s =$$

$$= (\varphi'^{\alpha'_1}_{[\gamma_1]}\cdot)\dots(\varphi'^{\alpha'_l}_{[\gamma_l]}\cdot)\, D^{\gamma_1\dots\gamma_l}_{[\delta_1]\dots[\delta_m]}\,(\cdot\,\varphi'^{\delta_1}_{[\beta'_1]}\cdot)\dots(\cdot\,\varphi'^{\delta_m}_{[\beta'_m]})$$

$|\varphi'^{p'}_{p}|$ fiind determinantul operator al aplicației φ.

Exemple. Fie $\varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_m}$, $\varepsilon_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ simbolii lui Kronecker $= \pm 1$ (dacă permutarea $\binom{1\dots m}{\alpha_1\dots\alpha_m}$ e pară respectiv impară) și $= 0$ (dacă $m > n$ sau cel puțin doi indici sînt identici).

$\varepsilon_{[\alpha_1\dots\alpha_n]}$ este o densitate tensorială r- covariantă de n ori, de pondere $+1$ în raport cu orice aplicație φ în $P \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \wedge \dots$.

DEMONSTRAȚIE. Deoarece $\varepsilon^{i_1\dots i_m}\varepsilon^{\alpha_1\dots\alpha_m} = \pm 1$ dacă permutarea $\binom{i_1\dots i_m}{\alpha_1\dots\alpha_m}$ este pară respectiv impară și $= 0$ dacă $m < n$ sau cel puțin doi indici i_j, i_k sau α_j, α_k sînt identici, rezultă $\varepsilon^{i_1\dots i_m}_{\alpha_1\dots\alpha_m} = \varepsilon^{i_1\dots 1_m}\varepsilon_{\alpha_1\dots\alpha_m}$

iar

$$|\varphi'^{p'}_{p}| = \sum_{\alpha'_1\dots\alpha'_n} \varepsilon^{i_1\dots i_n}_{\alpha'_1\dots\alpha'_n}(\varphi'^{\alpha'_1}_{[i_1]}\cdot)\dots(\varphi'^{\alpha'_n}_{[i_n]}\cdot) =$$

$$= \sum_{\alpha'_1\dots\alpha'_n} \varepsilon^{i_1\dots i_n}\,\varepsilon_{\alpha'_1\dots\alpha'_n}(\varphi'^{\alpha'_1}_{[i_1]}\cdot)\dots(\varphi'^{\alpha'_n}_{[i_n]}\cdot).$$

De asemenea, deoarece $(\varepsilon_{i_1 \dots i_m})^2 = +1$ afară de cazul cînd $m > n$, sau cel puțin doi indici $i_j \cdot i_k$ sînt identici, din relația precedentă decurge egalitatea

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \,|\, \varphi'^{p'}_{p} \,|\, (\quad)^{i_1 \dots i_n} = \sum_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} \varepsilon_{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} (\varphi'^{\alpha'_1}_{[i_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha'_n}_{[i_n]} \cdot),$$

sau, utilizînd simbolii operanți

$$\varepsilon_{[i_1 \dots i_n]} \,|\, \varphi'^{p'}_{p} \,| = \varepsilon_{[\alpha'_1 \dots \alpha'_n]} (\varphi'^{\alpha_1}_{[i'_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha'_n}_{[i'_n]} \cdot).$$

Același rezultat se obținea pornind de la formula

$$|\, \varphi'^{p}_{p'} \,| = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varepsilon^{i'_1 \dots i'_n}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (\varphi'^{\alpha_1}_{[i'_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha_n}_{[i'_n]} \cdot) =$$

$$= \varepsilon_{i'_1 \dots i'_n} \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (\varphi'^{\alpha_1}_{[i'_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha_n}_{[i'_n]} \cdot)$$

sau

$$\varepsilon_{[i'_1 \dots i'_n]} \,|\, \varphi'^{p}_{p'} \,| = \varepsilon_{[\alpha_1 \dots \alpha_n]} (\varphi'^{\alpha_1}_{[i'_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{\alpha_n}_{[i'_n]} \cdot).$$

$\varepsilon^{[\alpha_1 \dots \alpha_n]}$ *este o densitate tensorială q-contravariantă de n ori, de pondere* -1 *în raport cu orice aplicație* φ *în* $P \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \wedge \dots$.

DEMONSTRAȚIE. În mod asemănător se deduce

$$|\, \varphi'^{p}_{p'} \,| = \sum_{\alpha_1, \dots \alpha_n} \varepsilon^{\alpha'_1 \dots \alpha'_n}_{i_1 \dots i_n} (\varphi'^{i_1}_{[\alpha'_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{i_n}_{[\alpha'_n]} \cdot) =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \, \varepsilon^{\alpha'_1 \dots \alpha'_n} (\varphi'^{i_1}_{[\alpha'_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{i_n}_{[\alpha'_n]} \cdot)$$

sau

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \,|\, \varphi'^{p}_{p'} \,| = \varepsilon^{[\alpha'_1 \dots \alpha'_n]} (\varphi'^{i_1}_{[\alpha'_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{i_n}_{[\alpha'_n]} \cdot) =$$

$$= (\varphi'^{i_1}_{[\alpha'_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{i_n}_{[\alpha'_n]} \cdot) \, \varepsilon^{\alpha'_1 \dots \alpha'_n}.$$

Pornind de la $|\, \varphi'^{p'}_{p} \,|$ se calculează

$$|\, \varphi'^{p'}_{p} \,| = \sum \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{i'_1 \dots i'_n} (\varphi'^{i'_1}_{[\alpha_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{i'_1}_{[\alpha_n]} \cdot)$$

sau

$$\varepsilon^{i'_1 \dots i'_n} \,|\, \varphi'^{p'}_{p} \,| = \varepsilon^{[\alpha_i \dots \alpha_n]} (\varphi'^{i'_1}_{[\alpha_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{i'_n}_{[\alpha_n]} \cdot) =$$

$$= (\varphi'^{i'_1}_{[\alpha_1]} \cdot) \dots (\varphi'^{i'_n}_{[\alpha_n]} \cdot) \, \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Ambele rezultate exprimă aceeaşi proprietate enunţată mai sus. $\varepsilon^{[\alpha_1 \ldots \alpha_n]}_{[\beta_1 \ldots \beta_n]}$ *este un tensor de n ori q- contravariant și n ori r- covariant.*

DEMONSTRAŢIE. Ţinînd seama, conform § 4.4 că

$$\varepsilon^{[\alpha_1 \ldots \alpha_n]}_{[\beta_1 \ldots \beta_n]} = \varepsilon^{[\alpha_1 \ldots \alpha_n]}\, \varepsilon_{[\beta_1 \ldots \beta_n]}$$

şi de proprietăţile precedente rezultă că $\varepsilon^{[\alpha_1 \ldots \alpha_n]}_{[\beta_1 \ldots \beta_n]}$ este o densitate tensorială de n ori q- contravariantă şi r- covariantă de pondere $1 - 1 = 0$, deci un tensor (tensorul lui Kronecker generalizat).

În cazul sistemelor de coordonate n- vectorii

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_n]}_{[\lambda_1 \ldots \lambda_n]}\, dx^{\lambda_1}_1 \ldots dx^{\lambda_n}_n = [dx^{i_1}_1 \ldots dx^{1_n}_n] = \begin{vmatrix} dx^{i_1}_1 \ldots dx^{i_n}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx^{i_n}_1 \ldots dx^{i_n}_n \end{vmatrix}$$

permit reprezentarea elementului de volum în V_n.

Dacă $T^{[i_1] \ldots [i_n]}$ este un tensor antisimetric iar $a_{[i_1] \ldots [i_n]}\, T^{[i_1] \ldots [i_n]}$ un invariant atunci vom spune că $a_{[i_1] \ldots [i_n]}$ este o formă antisimetrică pentru care $a_{[\lambda_1] \ldots [\lambda_n]} = \varepsilon^{i_1 \ldots 1_n}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}\, a_{[i_1] \ldots [i_n]}$.

§ 5. FORME EXTERIOARE

Teoria cartaniană a formelor exterioare corespunde în cadrul teoriei formelor F- diferenţiale unei teorii generalizate cu rol analog în problema geometrizării structurilor reologice. Elaborarea formelor şi a teoremelor corespunzătoare celor integrale şi diferenţiale permite analiza ulterioară a spaţiilor cu conexiune generalizate.

1. 1- *Forme.* Fie o acoperire Δ_p cu vecinătăţi $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ale lui $P \in V_n$, $(P \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \wedge \ldots)$. 0 1- *formă F- diferenţială în $P \in V_n$* sau în Δ_p este o aplicaţie a elementelor spaţiului $X\,(V_n)$ în $\mathcal{F} = \mathcal{F}\,(V_n)$ al funcţiilor F- diferenţiabile regulate pe V_n notată $\omega\,(X)$, $X_{[p]}$, $- \in [\mathcal{X}]\,(V_n)$. $\omega\,(X)$ este un element în $f_1\,(X_{[p],\,[-]}\, f_0) \in \mathcal{F}\,([\mathcal{X}]\mathcal{F})$ pentru f_0, $f_1 \in \mathcal{F}$, $p \in E$ sau (E_p, E_s).

Conform § 2.3, deoarece spaţiul $k^F = d$- vectorial este un E — modul unitar la stînga avînd elementele $\omega\,[q] = f_1\,(X_{[p],\,[q]}\, f_0)$, 1 — formele sînt caracterizabile de această proprietate a spaţiului d — vectorial şi în general şi de celelalte proprietăţi ale sale. Raportînd la acestea, vom spune că 1- formele formează un F- modul.

Din proprietăţile spaţiilor k, d, $\mathcal{X}$- vectoriale se deduc în cazul 1- formelor (F modulului), proprietăţile.

$$(\omega_1 + \omega_2)\,(X) = \omega_1\,(X) + \omega_2\,(X),$$

$$(f\,\omega)\,(X) = f\,(\omega\,(X)),$$

$$\omega_{[-]}([X]f + [Y]g) = \omega\,[X]f + \omega\,[Y]g.$$

0 *1-formă F-diferenţiabilă este* de clasă C^{v-1} de F-diferenţiabilitate în P respectiv Δ_p dacă componentele ei sînt de clasă C^{v-1} în Δ_p.

Fie o mulţime de 1-forme $\omega_\iota \in I$, $\iota \in I$, ordonată în raport cu mulţimea de indici I presupusă cel mult numărabilă, de clasă C^{v-1} în P respectiv $\Delta_p \in V_n$ şi independente (în cazul formelor liniare $P\,f\,a\,ff$ liniar independente). În baza definiţiei date, pentru $f_0 = \varphi p$, $f_1 = 1.$ ( ), $p \in E$ (sau E_p, E_s) vom putea echivala aceste 1-forme cu un sistem de repere e_ι cărora, totodată le vom asocia un sistem de corepere $q\alpha$ (sau θ^α) în Δ_p. Atunci pentru două sisteme de repere în $\mathcal{U}_P$, $\mathcal{V}_P$ vom avea în $\mathcal{U}_P \wedge \mathcal{V}_P$ transformarea $e' = e\,[\cdot\,\varphi']$ caracterizînd reperele în sens generalizat.

2. În cazul definirii sistemelor de coordonate, 1-formele se scriu:

$$\omega = \omega\, X_{[x^i],-}\, [dx^i] = f_1\, [d\, f_0]\,,$$

f_1 fiind funcţie de $[x^i]$ şi $f_0 \in \mathcal{F}\,(V_n)$. Deoarece $df = d\,(f;\,[x];\,[dx]) = X_{f,\,[x]}\,[dx]$

unde

$$X_{f,\,[x]} = d\,(f;\,[x];\,[\,-\,] = (\varphi^f_{[x]}\,\cdot)$$

1-formele se mai scriu în cazul definirii sistemelor de coordonate astfel:

$$\omega = a_{[i]}\,[dx^i]\,;\; a_{[i]} = f_1\,[\,X_{[x^i],\,[-]} f_0]$$

Este clar că $a_{[i]} \in \mathcal{F}\,[[X]\,\mathcal{F}]$.

Dacă d_1, d_2 sînt elemente ale spaţiului d-vectorial, satisfăcînd condiţia $d_1\,d_2\,x^i = d_2\,d_1\,x^i$, pentru orice sisteme de coordonate definite într-o vecinătate $\mathcal{U}_P$ ale lui $P \in V_n$ atunci

$$d_1\,d_2\,f = d_2\,d_1\,f$$

pentru orice funcţie $f \in \mathcal{F}\,(V_n)$ în $\mathcal{U}_P$.

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $df = f\,([x + dx]) - f\,([x])$ iar

$$d_1\,d_2\,f = f\,([x + d_2 x + d_1\,(x + d_2\,x)]) - f\,([\,x + dx]) - \\ - (f\,([x + dx]) - f\,([x]))$$

şi

$$d_1\,(x^i + d_2\,x^i) = d_1\,x^i + d_1\,d_2\,x^i$$

are loc relaţia

$$d_1\,d_2\,f - d_2\,d_1\,f = f\,([x + d_2 x + d_1 x + d_1 d_2 x]) - \\ - f\,([x + d_1 x + d_2 x + d_2\,d_1 x]) = 0.$$

Vom mai scrie această proprietate sub forma

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ d_1 x^i & d_2 x^i \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ d_1 f & d_2 f \end{vmatrix} = 0.$$

3. *m-forme antisimetrice.* Vom considera invarianții definiți la § 4.6 de forma $a_{[i_1]\ldots[i_m]}V^{i_1}\ldots V^{i_m}$; $a_{[i_1]\ldots[i_m]}$ sînt tensori de m-ori r-covarianți și care satisfac relația

$$a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} = \varepsilon^{[i_1\ldots i_m]}_{[\lambda_1\ldots\lambda_m]}\, a_{[i_1]\ldots[i_m]}$$

pentru orice sistem de indici ordonat $i_1 < \ldots < i_m$, $m \leqslant n$, n fiind dimensia varietății V_n și orice permutare a lui $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Asemenea tensori se numesc *m-forme antisimetrice* |6| în sens generalizat.

Prin o- forme în P se înțeleg scalarii definiți în P : a [ ] iar prin 1- forme vectorii r- covarianți, elemente ale spațiului $\mathfrak{S}^*_p$. Pentru $m > n$, m- formele sînt elemente nule.

Existînd n indici diferiți, vor exista C^m_n simboli ai lui Kronecker asociați m-formelor corespunzînd permutărilor. Următoarele proprietăți ale m- formelor antisimetrice (în sens, generalizat) sînt aceleași ca și în cadrul teoriei infinitezimale.

a) *Componentele m-formelor antisimetrice satisfac condiția de permutare a indicilor.*

$$\varepsilon^{[\lambda_1\ldots\lambda_m]}_{[i_1\ldots i_m]}\, a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} = m\,!\; a_{[i_1]\ldots[i_m]}$$

pentru orice permutare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, *a indicilor ordonați crescător* $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$.

Demonstrația se face absolut asemănător ca în cazul m-formelor teoriei continuumului |6| și anume formînd suma

$$\varepsilon^{[\lambda_1\ldots\lambda_m]}_{[i_1\ldots i_m]}\, a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} =$$

$$= \sum_{\lambda} \varepsilon^{[\lambda_1\ldots\lambda_m]}_{[i_1\ldots i_m]}\, \varepsilon^{[j_1\ldots j_m]}_{[\lambda_1\ldots\lambda_m]}\, a_{[j_1]\ldots[j_m]} = m\,!\; \varepsilon^{[j_1\ldots j_m]}_{[i_1\ldots i_m]}\, a_{[j_1]\ldots[j_m]} = m\,!\; a_{[i_1]\ldots[i_m]}\,.$$

b) *Componentele m- formelor antisimetrice se transformă conform relației*

$$a_{[\mu_1]\ldots[\mu_m]} = \frac{1}{m\,!}\, \varepsilon^{[\lambda_1\ldots\lambda_m]}_{[\mu_1\ldots\mu_m]}\, a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]}$$

pentru orice permutări de indici diferiți $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$; $\mu_1, \ldots, \mu_m$,

$$\varepsilon^{\lambda_1\ldots\lambda_m}_{\mu_1\ldots\mu_m} = \varepsilon^{\lambda_1\ldots\lambda_m}_{i_1\ldots i_m}\, \varepsilon^{i_1\ldots i_m}_{\mu_1\ldots\mu_m} \quad \text{(fără sumare)}$$

fiind tensorul lui Kronecker de m ori contravariant și de m ori covariant ($= +1$ pentru o permutare pară a indicilor $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ și $= -1$ în caz contrar, $= 0$ pentru $m > n$.

Această proprietate rezultă din definiție și a).

4. *Spațiul m- formelor exterioare.* O dată cu invarianții $a_{[i_1]\ldots[i_m]}V^{i_1}\ldots V^{i_m}$ se dau componentele acestora $a_{[i_1]\ldots[i_m]}$ în raport cu sistemul de vectori q- contravarianți $V^{i_1}, \ldots, V^{i_m}$; atunci vom spune că o

m- formă ω_m are componentele $a_{[i_1], \ldots, [i_m]}$ asociate în raport cu elementele unei baze de corepere $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_m}$ dacă ea se scrie în notația tensorială (§ 3.7)

$$\omega_m = a_{[\lambda_1] \ldots [\lambda_m]} e^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e^{\lambda_m} = a_{[\lambda_1] \ldots [\lambda_m]} [e^{\lambda_1}] \otimes \ldots \otimes [e^{\lambda_m}].$$

Înlocuind $a_{[\lambda_1] \ldots]\lambda_m]}$ cu ajutorul exprimării echivalente § 5.3. a și sumînd în raport cu cele m ! permutări $(\lambda_1 \ldots \lambda_m)$ ale indicilor $(i_1 \ldots i_m)$ și în raport cu cele C_n^m cortegii $i_1 \ldots i_m$ se deduce extinzînd procedeul de demonstrație al teoriei infinitezimale |6| :

$$\omega_m = \sum_{C_n^m} \sum_{m!} \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}^{i_1 \ldots i_m} a_{[i_1] \ldots [i_m]} [e^{\lambda_1}] \otimes \ldots \otimes [e^{\lambda_m}].$$

Notînd tensorul în sens generalizat de m ori q- contravariant

$$e^{[i_1] \ldots [i_m]} = \varepsilon_{[\lambda_1 \ldots \lambda_m]}^{[i_1 \ldots 1_m]} [e^{\lambda_1}] \otimes \ldots \otimes [e^{\lambda_m}] = \sum_{m!} \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}^{i_1 \ldots i_m} [-]_{i_1 \ldots i_m} [e^{\lambda_1}] \otimes \ldots \otimes [e^{\lambda_m}]$$

se obține următoarea formulare a m- formelor : $\omega_m = a_{[i_1] \ldots [i_m]} e^{[i_1] \ldots [i_m]}$ sumarea făcîndu-se în raport cu cele C_n^m cortegii $i_1 \ldots i_m$.

În alți termeni, m- forma ω_m definită în $P \in V_n$ este o aplicație $\mathfrak{T}_P \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{\text{de } m \text{ ori}} \mathfrak{T}_P \rightarrow \mathcal{D}_P^m \in \mathfrak{T}_P^m \in \mathcal{F}(V_n)$ fiind un spațiu dual iar $\mathcal{D}_P^m$ un subspațiu al său astfel ca să fie îndeplinite condițiile :

— Fiecare element din $\mathcal{D}_P^{(m)}$ constituie o aplicație liniară a C_n^m elemente $e^{[i_1] \ldots [i_m]}$ formînd un sistem independent în raport cu funcțiile $\mathcal{F}(V_n)$ o dată cu $[e^{\lambda_1}] \otimes \ldots \otimes [e^{\lambda_m}]$. Spațiul $\mathcal{D}_P^m$ are dimensia C_n^m și elementele bazei $e^{[i_1] \ldots [i_m]}$.

Prin proprietatea de *reductibilitate* a m- formelor vom înțelege faptul că dacă menținem $m - 1$ corepere fixe, devine o 1- formă. În cazul m- formelor teoriei infinitezimale proprietatea de reductibilitate revine la aceea de multiliniaritate. Prin *valorificarea* unei m- forme exterioare în raport cu un sistem de repere se înțelege considerarea următoarelor relații :

$$\omega = a_{[\lambda_1] \ldots [\lambda_m]} V^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V^{\lambda_m} = a_{[i_1] \ldots [i_m]} V^{[i_1] \ldots [i_m]} ; \; V^{[i_1] \ldots [i_m]} =$$

$$= \sum_{m!} \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}^{i_1 \ldots i_m} [\quad]_{i_1 \ldots 1_m} [V^{\lambda_1}] \otimes \ldots \otimes [V^{\lambda_m}] = \begin{vmatrix} [V_1^{i_1}] \ldots [V_m^{i_1}] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [V_1^{i_m}] \ldots [V_1^{i_m}] \end{vmatrix}.$$

Pentru $V^i = e^i$ se obține tensorul considerat mai sus.

5. *Produs exterior.* Produsul exterior al formei $\omega_1 \in \mathcal{D}_P^{(m_1)}$ cu forma $\omega_2 \in \mathcal{D}_P^{(m_2)}$ este $m_1 + m_2$ — forma $\pi = \omega_1 \wedge \omega_2$ definită în modul următor:

Dacă formele ω_1 şi ω_2 au componentele $a^1_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_{m1}]}$ şi $a^2_{[\mu_1]\ldots[\mu_{m2}]}$, forma π are componentele

$$\pi_{[\nu_1]\ldots[\nu_{m1}][\nu_{m_1+m_2}]} = \frac{1}{m_1!\,m_2!}\,\varepsilon^{\lambda_1\ldots\lambda_{m1}\mu_1\ldots\mu_{m2}}_{\nu_1\ldots\ldots\ldots\nu_{m1+m2}}\,a^1_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_{m1}]}\,a^2_{[\mu_1]\ldots[\mu1_{m2}]}$$

Vom nota acest produs

$$\pi = \omega_1 \wedge \omega_2 .$$

Spre deosebire de teoria infinitezimală în definiţia produsului exterior în sens generalizat se utilizează sensul operant al formelor şi notaţia cortegială.

Ţinînd seama de proprietăţile spaţiilor $[\mathfrak{S}^m_P]$ se deduc următoarele proprietăţi ale produsului exterior în sens generalizat, comune cu cele ale produsului în cadrul teoriei infinitezimale.

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$$

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3$$

$$(k\,\omega_1) \wedge \omega_2 = k\,(\omega_1 \wedge \omega_2) = \omega_1 \wedge (k\,\omega_2)$$

(k fiind o 0- formă)

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

$$\omega_2 \wedge \omega_1 = \frac{1}{m_1!\,m_2!}\,\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{m2}\lambda_1\ldots\lambda_{m1}}_{\nu_1\ldots\ldots\ldots\nu_{m_1+m_2}}\,a^2_{[\mu_1]\ldots[\mu_{m2}]}\,a^1_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_{m_1}]}$$

sau

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{m_1 m_2}\,\omega_2 \wedge \omega_1$$

deoarece

$$\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_{m2}\lambda_1\ldots\lambda_{m1}}_{\nu_1\ldots\ldots\ldots\nu_{m1+m2}} = (-1)^{m_1 m_2}\,\varepsilon^{\lambda_1\ldots\lambda_{m1}\mu_1\ldots\mu_{m2}}_{\nu_1\ldots\ldots\ldots\nu_{m1+m2}}.$$

În cazul formelor impare

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\,\omega_2 \wedge \omega_1,\ \omega \wedge \omega = 0.$$

6. *Produsul exterior a m 1-forme.* Produsul formelor ω^i, $i = 1, \ldots, m$ se defineşte printr-o extindere analogă a produsului în sensul teoriei infinitezimale. În particular, dacă ω_i sînt 1- forme produsul lor exterior se va scrie $\pi = \omega^1_1 \wedge \ldots \wedge \omega^{m-1} \wedge \omega^m$.

Dacă $\omega^i = [e^i]$, e^i fiind elementele unei baze de repere, atunci produsul exterior al formelor ω^i, $i = 1, \ldots, n$ admite următoarea formulare

$$\pi = [e^{i_1}] \wedge [e^{i_2}] \wedge \ldots \wedge [e^{i_m}] = e^{[i_1]\ldots[i_m]} .$$

DEMONSTRAȚIE. Formînd produsul exterior al *1*- formelor $[e^i]$ și observînd că $[e^i] = \delta^i_\mu\, [e^\mu] = [\,\delta^i_\mu\, e^\mu]$, se deduce în baza definiției produsului exterior că m- forma π are componentele

$$\pi_{[\lambda_1]\,\ldots\,[\lambda_m]} = \delta^{i_1}_{[\mu_1]} \ldots\ \delta^{i_m}_{[\mu_m]}\, \varepsilon^{\mu_1\,\ldots\,\mu_m}_{\lambda_1\,\ldots\,\lambda_m} = \varepsilon^{i_1\,\ldots\,i_m}_{[\lambda_1\ldots\,\lambda_m]}\,.$$

Deoarece după cum s-a stabilit

$$e^{[i_1]\,\ldots\,[i_m]} = \sum_{m\,!} \varepsilon^{i_1\,\ldots\,i_m}_{\lambda_1\ldots\,\lambda_m} [\quad]_{i_1\,\ldots\,i_m} [e^{\lambda_1}] \otimes \ldots \otimes [e^{\lambda_m}] =$$

$$= \sum_{m\,!} \varepsilon^{i_1\ldots\,i_m}_{[\lambda_1\ldots\,\lambda_m]}\, \varepsilon^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e^{\lambda_m},$$

rezultă că $\pi_{[\lambda_1]\,\ldots\,[\lambda_m]}$ sînt componentele tensorului în sens generalizat $e^{[i_1]\,\ldots\,[i_m]}$ în raport cu baza $e^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes e^{\lambda_m}$.

Elementele spațiului $\mathcal{D}^m_P$ admit următoarea exprimare

$$\omega_m = \frac{1}{m\,!}\, a_{[\lambda_1]\,\ldots\,[\lambda_m]}\, e^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e^{\lambda_m}\,;\ e^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e^{\lambda_m} = \varepsilon^{\lambda_1\,\ldots\,\lambda_m}_{i_1\,\ldots\,i_m}\, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_m}$$

(sumarea se face în raport cu toate valorile indicilor $\lambda_1 \ldots \lambda_m$)

DEMONSTRAȚIE. În baza proprietății precedente și a definiției spațiului $\mathcal{D}^m_P$ (§ 5.4) se deduce relația

$$\omega_m = a_{[i_1]\,\ldots\,[i_m]}\, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_m} = a_{[i_1]\,\ldots\,[i_m]}\ [e^{i_1}] \wedge \ldots \wedge [e^{i_m}]$$

(sumare în raport cu C^m_n combinații ale indicilor $i_1 \ldots i_m$).

Considerînd condiția dedusă la § 5.3

$$a_{[i_1]\,\ldots\,[i_m]} = \frac{1}{m\,!}\, \varepsilon^{\lambda_1\,\ldots\,\lambda_m}_{i_1\,\ldots\,i_m}\, a_{[\lambda_1]\,\ldots\,[\lambda_m]}$$

(sumare în raport m permutări ale indicilor $\lambda_1 \ldots \lambda_m$) se obține următoarea exprimare pentru forma ω_m

$$\omega_m = \frac{1}{m\,!}\, \varepsilon^{[\lambda_1\ldots\,\lambda_m]}_{[i_1\ldots\,i_m]}\, a_{[\lambda_1]\,\ldots\,[\lambda_m]}\ e^{i_1} \wedge \ldots\ \wedge e^{i_m} = \frac{1}{m\,!}\, a_{[\lambda_1]\,\ldots\,[\lambda_m]}\ e^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e^{\lambda_m}\,;$$

$$e^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e^{\lambda_m} = \varepsilon^{\lambda_1\,\ldots\,\lambda_m}_{i_1\,\ldots\,i_m} (\quad)_{\lambda_1\,\ldots\,\lambda_m}\ e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_m}$$

(fără sumare) și în definitiv formula enunțată.

Remarcăm că suma $a_{[\lambda_1]\ldots\,[\lambda_m]}\, e^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e^{\lambda_m}$ se face pentru toate valorile λ după cum decurge din definiția lui $e^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge e^{\lambda_m}$.

În cazul infinitezimal formula se reduce la cea cunoscută

$$\omega_m = \frac{1}{m\,!}\, a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}\, e^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e^{\lambda_m}$$

unde

$$e^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e^{\lambda_m} = \varepsilon^{\lambda_1 \dots \lambda_m}_{i_1 \dots i_m}\, e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_m}$$

este antisimetrică.

Valoarea formelor ω. Fie tensorii (generalizați) $t^{[i_1]\dots[i_m]}$ antisimetrici și de m ori q- contravariant. Prin valoarea formei $\omega_m\,(t)$ în raport cu tensorul $t^{[i_1]\dots[i_m]}$ se înțelege scalarul $\omega_n\,(t) = a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}\, t^{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}$ (sumare în raport cu C_n^m combinații ale indicilor $\lambda_1, \dots, \lambda_m$) care constituie o aplicație $t \rightarrow \omega_n\,(t)$ a spațiului $[\mathcal{T}_P^m]$ — tensorilor pe cîmpul scalarilor.

În particular, pentru $t^{[i_1]\dots[i_m]} = \varepsilon^{i_1 \dots i_m}_{\mu_1 \dots \mu_m}\,[V^{\mu_1}]\dots[V_1^{\mu_m}]$ se obține o aplicație a spațiului m- vectorilor $\underbrace{[\mathcal{T}_P] \otimes \dots \otimes [\mathcal{T}_P]}_{\text{de } m \text{ ori}}$ pe cîmpul scalarilor.

7. *Forme exterioare F- diferențiale.* O formă exterioară F- diferențială de grad m (sau o m- formă $\boldsymbol{F}$- diferențială de clasă C^u, în domeniul $\triangle \subseteq V_n$ (V_n fiind de clasă C^v, $v \geqslant 3$) este un cîmp de m- forme de clasă C^u definit în $\triangle$. De exemplu o 0- formă e un cîmp de scalari în $\triangle$.

Conform § 4.6, dacă $\triangle$ admite acoperiri cu vecinătăți $\mathcal{U}$ înzestrate cu repere atunci o m- formă $\boldsymbol{F}$- diferențială este dată de relația

$$\omega = \frac{1}{m\,!}\, a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}\, e^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e^{\lambda_m},\quad a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]} \text{ fiind de clasă } C^u.$$

În cazul sistemelor de coordonate locale definite într-un domeniu incluzînd $\triangle$, m- forma raportată la acesta este

$$\omega = \frac{1}{m\,!}\, a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_m}.$$

Exemplu. Dacă f este o 0- formă pe $\triangle$ atunci

$$d\,(f, [p], [q]) = X_{[p],[q]}\, f = d_{[p],[q]}\, f$$

constituie 0 1- formă asociată lui f. Dacă în vecinătatea $\mathcal{U}$ a acoperirii pe $\triangle$ se definesc sisteme locale de coordonate, atunci $df = d\,(f; [x]; [dx]) = (\varphi'^{f}_{[dx]}]\,[dx])$ (conform § 4.2). $(\varphi'^{f}_{[dx]})$ reprezintă componentele covariante ale 1- formei în raport cu sistemul local de coordonate.

Raportînd $\boldsymbol{F}$- diferențiala la o *1*- formă e^λ, constituind un sistem local de repere atunci $df = (\varphi'^{f}_{[e^\lambda]})\,[e^\lambda]$.

Extinzînd definiția dată în calculul teoriei infinitezimale, se înțelege prin m- formă $\boldsymbol{F}$- diferențiabilă *dezvoltabilă* în $\triangle$, m- forma $\boldsymbol{F}$- diferențială pentru care orice acoperire $\mathcal{U}$ a domeniului $\triangle$ admite m- funcții de clasa C^{u+1} astfel încît $df_1 \wedge \ldots \wedge df_m$ în $\triangle$, definiția păstrînd caracterul intrinsec.

Definiția formală a m- formelor, antisimetrice, produsului exterior și formelor exterioare F- diferențiale își găsește o exemplificare în valorificările lor în $\mathcal{F}(V_n)$ în raport cu un sistem de repere. Astfel (§ 5.4), valorificarea m- formelor este dată de relația

$$V^{[i_1]\ldots[i_m]} = det\,|[V_k^{ij}]| = |[V_1], \ldots, [V_m]| = \begin{vmatrix} [V_1^{i_1}] \ldots [V_m^{i_1}] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [V_1^{i_m}] \ldots [V_m^{i_m}] \end{vmatrix};$$

$$\omega_m = a_{[i_1]\ldots[i_m]}\, det\,|[V_k^{i_j}]|\,; j, k = 1, \ldots, m.$$

Produsul exterior a m 1- forme se scrie atunci $\omega_m = det\,|a_{i_l}^s| \cdot$ $\cdot det\,|V_k^{i_j}| = [a_{[i_1]\ldots[i_m]} \cdot [V^{i_1}] \ldots [V^{i_m}]]$, etc. avînd componentele $[a_{il}^s]$; $s, l = 1, \ldots, m$.

Formele exterioare F- diferențiale admit atunci valorificări în $\mathcal{F}(V_n)$ ce se deduc în baza celor date pentru m- forme

$$\omega_m = \frac{1}{m\,!}\, det\,[a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]}]\, det\,|dx_j^{\lambda_i}|\,; i, j = 1, \ldots, m.$$

Formele exterioare F- diferențiale se realizează și cu ajutorul definirii F- diferențialelor succesive ale m- formelor care constituiesc extinderea corespunzătoare a diferențialelor formelor exterioare în teoria infinitezimală.

7. *F- diferențiale exterioare ale m- formelor.* În § 5.1 s-au introdus *1*- formele definite cu ajutorul F- diferențialelor *0*- formelor definite la § 5.3. În general, fiecărei m- forme ω_m i se asociază o $m + 1$- formă notată $D\omega_m$ numită F- diferențială exterioară a m- formei ω_m.

Astfel, diferențiala exterioară a *1*- formei se definește prin relația

$$D\omega\,(d) = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ \omega\,(d_1) & \omega\,(d_2) \end{vmatrix} = d_1\, \omega\,(d_2) - d_2\, \omega\,(d_1),$$

$$\omega\,(d) = f_1\,(df_0)\,; \quad f_0, f_1 \in \mathcal{F}\,(V_n).$$

Ținînd seama de proprietățile spațiului d- vectorial (§ 2.3) rezultă următoarea exprimare

$$D\omega\,(d) = \begin{vmatrix} f_1 + d_1 f_1 & f_1 + d_2\, f_1 \\ (d_1 f_0 + d_2\, d_1 f_0) & (d_2\, f_0 + d_1\, d_2 f_0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_1 & f_1 \\ (d_1 f_0) & (d_2 f_0) \end{vmatrix}$$

Dacă ω este o *1*- formă în $\mathcal{F} \times \mathcal{X}\,(V_n)$ avînd expresia $\omega = f_1 \cdot df_0$ atunci F- diferențiala sa exterioară este

$$D\omega\,(d) = \begin{vmatrix} f_1 & f_1 \\ d_2\, d_1 f_0 & d_1\, d_2 f_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 f_1 & d_2 f_1 \\ d_1 f_0 + d_2\, d_1 f_0 & d_2 f_0 + d_1\, d_2 f_0 \end{vmatrix}$$

iar dacă d satisface condiția $d_1\, d_2\, x^i = d_1\, d_2\, x^i =$ conform § 5.1. atunci

$$D\omega\,(d) = \begin{vmatrix} d_1 f_1 & d_2 f_1 \\ d_1 f_0 + d_2\, d_1 f_0 & d_2 f_0 + d_1\, d_2 f_0 \end{vmatrix} = [d f_1, \tilde{d} f_0]$$

Este evident că F- diferențiala exterioară a unei F- diferențiale exterioare a unei *0*- forme este nulă (pentru $f_1 = 1$, $D\omega\,(d) = 0$). F- diferențiala exterioară a unei *1*- forme în $\mathcal{F} \times \mathcal{X}\,(V_n)$ realizează o reprezentare a *2*- formelor diferențiale. Într-adevăr, F- diferențiala exterioară a *1*- formei $\omega\,(d) = a_{[i]}\,[dx^i] = f_1\,(d\, f_0)$ unde

$$a_{[i]} = f_1\,(X_{[x^i],\,[-]_i}\, f_0)$$

admite exprimarea următoare

$$D\omega\,(d) = \frac{1}{2\,!}\, a_{[i],\,[j]}\,[dx^i\, dx^j]$$

$$a_{[i]\,[j]} = \begin{vmatrix} X_{[x^i],\,[-]_i} & X_{[x^j],\,[-]_j} \\ a_{[i]} & a_{[j]} \end{vmatrix},\quad [dx^i\, dx^j] = \begin{vmatrix} d_1\, x^i & d_1\, x^j \\ d_2\, x^i & d_2\, x^j \end{vmatrix},$$

$$X_{[x^i],\,[-]_i}\, a_{[j]} = f_1\, X_{[x^i],\,[-]_i}\,(X_{[x^j],\,[-]_j}\, f_0) + X_{[x^i],\,[-]_i}\, f_1\, X_{[x^j]_1\,[-]_j}\, f_0 +$$

$$+ X_{[x^i],\,[-]_i}\, f_1\, X_{[x^k],\,[d_1 x^k]}\, X_{[x^j],\,[-]_j}\, f_0 .$$

DEMONSTRAȚIE. F- diferențiala exterioară a *1*- formelor se scrie, utilizînd definițiile date la § 4. 1, 2, 3 în modul următor

$$D\omega\,(d) = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ \omega\,(d_1) & \omega\,(d_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{[x^i],\,[d_1 x^i]} & X_{[x^j],\,[d_2 x^j]} \\ a_{[x^j]}\,[d_1\, x^i] & a_{[x^j]}\,[d_2 x^j] \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} X_{[x^i],\,[-]_i} & X_{[x^j],\,[-]_j} \\ a_{[x^i]} & a_{[x^j]} \end{vmatrix}\, d_1 x^i\, d_2 x^j = \frac{1}{2\,!} \begin{vmatrix} X_{[x^i],\,[-]_i} & X_{[x^j],\,[-]_j} \\ x_{[x^i]} & a_{[x^j]} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 x^i & d_1 x^j \\ d_2 x^i & d_2 x^j \end{vmatrix}.$$

În cele de mai sus

$$d_1\,\omega\,(d_2) = f_1\, d_1\, d_2 f_0 + d_1 f_1\,(d_2 f_0 + d_1\, d_2 f_0) = (f_1\, X_{[x^i],\,[-]_i}\,(X_{[x^j],\,[-]_j}\, f_0) +$$

$$+ X_{[x^i],\,[-]_j}\, f_1 \cdot X_{[x^j],\,[-]_j}\, f_0 + X_{[x^i],\,[-]_i}\, f_1 \cdot X_{[x^k],\,[d_1 x^k]}\, X_{[x^j],\,[-]_j}\, f_0)\, d_1 x^i\, d_2 x^j =$$

$$= X_{[x^i],\,[-]_i}\, a_{[x^j]}\, d_1 x^i\, d_2\, x^j .$$

Forma $a_{[i]\,[j]}$ este o *2*- formă γ- covariantă și este asociată F- diferențialei exterioare a unei *1*- forme.

În mod analog, F- diferenţiala exterioară a unei 2- forme $\frac{1}{2!}$ $a_{[i]\,[j]}\,[dx^i\,dx^j] = \omega_2(d_1, d_2)$ în $\mathcal{F} \times \mathcal{X} \times \mathcal{F} \times \mathcal{X} \times \mathcal{F}(V_n)$ este

$$D\omega_2 = d_1\,\omega_2(d_2, d_3) + d_2\,\omega_3(d_3, d_1) + d_3\,\omega_1(d_1, d_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ f_2\,d_1 & f_2\,d_2 & f_2\,d_3 \\ f_1\,d_1\,f_0 & f_1\,d_2\,f_0 & f_1\,d_3\,f_0. \end{vmatrix}$$

iar în general vom avea de considerat m- formele

$$\omega_m(d_1, \dots, d_m) \text{ în } \underbrace{\mathcal{F} \times \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{F}}_{\text{de } m \text{ ori}} \times \mathcal{X} \times \mathcal{F}(V_n)$$

date de relaţia

$$\omega_m(d_1, \dots, d_m) = \begin{vmatrix} f_m\,d_1 & \dots & f_m\,d_m \\ f_{m-1}\,d_1 & \dots & f_{m-1}\,d_m \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1\,d_1\,f_0 & \dots & f_1\,d_m\,f_0 \end{vmatrix} =$$

şi F- diferenţialele lor

$$D\omega_m = \begin{vmatrix} d_1 & \dots & d_{m+1} \\ f_m\,d_1 & \dots & f_m\,d_{m+1} \\ f_{m-1}\,d_1 & \dots & f_{m-1}\,d_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1\,d_1\,f_0 & \dots & f_1\,d_{m+1}\,f_0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i}\, d_{i}\,\omega_{1,\dots,\hat{i},\dots,m+1} \qquad (i, < \dots < i_{m+1})$$

unde

$$\omega_{1,\dots,\hat{i},\dots,m+1} = \omega(d_1, \dots, \hat{d}_1, \dots, d_{m+1})$$

simbolul $\hat{d}_i$ arătînd că în cortegiul $[d]$ se omite d_i. Este clar că $f_{m+1}\,D\omega_m = \omega_{m+1}$ cu $f_{m+1} \in F(V_n)$.

Se deduce imediat extinderea unei proprietăţi demonstrate mai sus pentru $m = 2$.

F- diferenţiala exterioară a unei F- diferenţiale exterioare a unei m- forme (în $\underbrace{\mathcal{F} \times \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{F}}_{\text{de } m \text{ ori}} \times \mathcal{X} \times \mathcal{F}(V_n)$) *este nulă*:

$$D\,D\,\omega_m = 0$$

dacă

$$d_i\,d_j\,x^k = d_j\,d_i\,x^k.$$

DEMONSTRAŢIE. Se calculează

$$D\,D\,\omega_m = \begin{vmatrix} d_1 & \dots\dots\dots\dots & d_{m+2} \\ d_1 & \dots\dots\dots\dots & d_{m+2} \\ f_m\, d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_m\, d_{m+2} \\ f_{m-1}\, d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_{m-1}\, d_{m+2} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ f_1\, d_1\, f_0 & \dots\dots\dots\dots & f_1\, d_{m+2}\, f_0 \end{vmatrix}$$

În baza lemei demonstrate mai sus, pentru $f \in \mathcal{F}\,(V_n)$, $d_1 d_2 f = d_2 d_1 f$. Aplicînd proprietatea aceasta determinantului de mai sus, se obţine condiţia $DD\omega_m = 0$.

De asemenea, se deduce proprietatea :

F- diferenţiala exterioară $D\omega_m$ *are expresia* :

$$D\omega_m = \begin{vmatrix} d_1 f_{m-1}\,(1 + d_1) & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1}\, f_m\,(1 + d_{m+1}) \\ d_1 & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1} \\ f_{m-1}\, d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_{m-1}\, d_{m+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ f_2\, d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_2\, d_{m+1} \\ f_1\, d_1\, f_0 & \dots\dots\dots\dots & f_1\, d_{m+1}\, f_0 \end{vmatrix}$$

dacă

$$d_i\, d_j\, x^k = d_j\, d_i\, x^k \ ;\ i, j, k = 1, 2, \dots, \mathrm{n}.$$

DEMONSTRAŢIE

$$D\omega_m = \begin{vmatrix} (f_m + d_1 f_m)(1 + d_1) & \dots\dots\dots\dots & (f_m + d_{m+1} f_m\,(x)\,(1 + d_{m+1}) \\ d_1 & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1} \\ f_{m-1}\, d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_{m-1}\, d_{m+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ f_2\, d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_2\, d_{m+1} \\ f_1\, d_1\, f_0 & \dots\dots\dots\dots & f_1\, d_{m+1}\, f_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_m & \dots\dots\dots\dots & f_m \\ d_1 & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1} \\ f_{m-1}\, d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_{m-1}\, d_1 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ f_2\, d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_2\, d_{m+1} \\ f_1\, d_1\, f_0 & \dots\dots\dots\dots & f_1'\, d_{m+1}\, f_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 f_m (1 + d_1) & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1} f_m (1 + d_{m+1}) \\ d_1 & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1} \\ f_{m-1} d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_{m-1} d_{m+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ f_2 d_1 & \dots\dots\dots\dots & f_2 d_{m+1} f_0 \\ f_1 d_1 f_0 & \dots\dots\dots\dots & f_1 d_{m+1} f_0 \end{vmatrix} + f_m DD\omega_{m+1}$$

Deoarece $DD \ \omega_{m-1} = 0$ se obține exprimarea dată. Acest rezultat poate fi formulat astfel:

F- diferențiala exterioară $D \omega_m$ se scrie

$$D\omega_m = [df_m (1 + d), \dots, df_m (1 + d), df_0]$$

unde

$$[df_m (1 + d), \dots, df_1 (1 + d), df_0] =$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 f_m (1 + d_1) & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1} f_m (1 + d_{m+1}) \\ d_1 f_{m-1} (1 + d_1) & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1} f_{m-1} (1 + d_{m+1}) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ d_1 f_1 (1 + d_1) & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1} f_1 (1 + d_{m+1}) \\ d_1 f_0 & \dots\dots\dots\dots & d_{m+1} f_0 \end{vmatrix}$$

DEMONSTRAŢIE. Deoarece pentru $m = 1$ proprietatea este adevărată (cf. exprimării diferențialei exterioare a 1-formelor dată mai sus) și deoarece dacă este adevărată pentru $m - 1$ se deduce din proprietatea precedentă că

$D\omega_m = \sum (-1)^i D\omega_{1, \dots, \hat{i}, \dots m-1} = [df_m (1 + d), \dots, df_1 (1 + d), df_0]$, rezultă cele de mai sus.

Este clar că $\omega_m = f_m D\omega_{m-1} = f_m [df_{m-1} (1 + d), \dots, df_1 (1 + d), df_0$. De asemenea, deoarece $d_i f_j = X_{[x^k][-]_k} f_j d_i x^k$ avem

$$\omega_m = \frac{1}{m!} a_{[\lambda_1][\lambda_2]\dots[\lambda_m]} dx^{\lambda} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_m}$$

$$a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]} = f_m [X_{[x^{\lambda_1}][-]_{\lambda_1}} f_{m-1} (1 + d), \dots, X_{[x^{\lambda_{m-1}}][-]_{\lambda_{m-1}}} f_1 (1 +$$

$+ d) X_{[x]^{\lambda m}[-]_{\lambda m}} df_0] \, dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_m}$ fiind valorificată prin $[dx^{\lambda_1} \dots dx^{\lambda_m}]$

iar

$$D \ \omega_m = \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_m}_{i_0 \dots\dots i_m} d_{\lambda_0} \omega_{\lambda_1 \dots \lambda_m} = \frac{1}{m!} \partial_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]} dx^{\lambda_0} \wedge dx^{\lambda_1} \dots \wedge dx^{\lambda_m} =$$

$$= \frac{1}{m!} [D_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]} dx^{\lambda_1} \dots dx^{\lambda_m}] = \frac{1}{m!} D_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]} \wedge dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_m}$$

cu

$$\partial_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} = X_{[x^{\lambda_0}][-]_{\lambda_0}} f_m (1 + d_{\lambda_0}) [X_{[x^{\lambda_1}[-]\lambda_1} f_{m-1} (1 + d) \ldots$$

$$\ldots X_{[x^{\lambda m-1}][-1]_{\lambda_{m-1}}} f_1 (1 + d) X_{[x^{\lambda_m}][-]_{\lambda_m}} df_0]$$

$$D_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} = \partial_{\lambda_0} a_{[\lambda_1\ldots[\lambda_m]} dx^{\lambda_0}.$$

Vom denumi $D_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]}$ *F- diferențiala exterioară* a m- formei $a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]}$ iar $\partial_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]}$ *F- derivata* exterioară a aceleiași forme.

Este clar că pentru $dx^{\lambda_i} = f_{\lambda_i}$; $i=1, 2, \ldots, m-1$, avem $a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} =$

$$= f_m [\,{}_{\lambda_0}(1 + d), \ldots, {}_{\lambda_{m-1}}(1 + d), (\quad)_{\lambda_m}]$$

$D_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} = d_{\lambda_0} f_m (1 + d_{\lambda_0})\ [{}_{\lambda_0}(1 + d), \ldots, {}_{\lambda_{m-1}}(1 + d), (\quad)_{\lambda_m}]$ iar în cazul infinitezimal, $a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} = f_m$.

Reprezentarea dată pentru $D\omega_m$ — care este considerată în raport cu un sistem local de coordonate în o vecinătate $\mathcal{U}$ a lui V_n — poate fi modificată observînd că

$$\omega_m = \frac{1}{m\,!} \partial_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} dx^{\lambda_0} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_m} =$$

$$= \frac{1}{m\,!} \frac{1}{(m+1)\,!} \varepsilon^{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_m}_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_m} \partial_{\lambda_0} a_{\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} dx^{\mu_0} \wedge \ldots [dx^{\mu_m}.$$

Această nouă exprimare este

$$D\omega_m = \frac{1}{(m+1\,!)} b_{[\mu_0]\ldots[\mu_m]} dx^{\mu_0} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_m}$$

unde

$$b_{[\mu_0]\ldots[\mu_m]} = \frac{1}{m\,!} \varepsilon^{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_m}_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_m} \partial_{\lambda_0} a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]}.$$

F- diferențiala exterioară a m- formelor Ω, Ω_1, Ω_2, $\ldots$, *combinații lineare de m- forme satisface condițiile*

1). $D(\Omega_1 + \Omega_2) = d\,\Omega_1 + d\,\Omega_2$

2). Dacă $s \in \mathcal{F}(V_n)$ este scalar, atunci

$$D(s\,\Omega) = [ds\,(1 + d), \omega_m] + s\,D\,\omega_m$$

unde

$$[\mathrm{ds}\,(1 + d)\,\omega_m] = \frac{1}{m\,!} [\mathrm{ds}\,(1 + d)\, a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_m}] = ds \wedge \omega_m.$$

DEMONSTRAŢIE. E suficient de a considera o m- formă ω_m reprezentată în raport cu un sistem local de coordonate într-o vecinătate $\mathcal{U}$:

$$D(s\,\omega_m) = \frac{1}{m\,!} D(sa_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_m}) =$$

$$= (1/m\,!)\, D_{\lambda_0} (sa_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]} \wedge dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_m}) .$$

dar

$$D_{\lambda_0} (sa_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_m]}) = d(sf_m)(1+d)\,[X_{[x^{\lambda_1}][-]_{\lambda_1}} f_m (1+d) \ldots$$

$$\ldots X_{[x^{\lambda_{m-1}}][-]_{\lambda_{m-1}}} f_1 (1+d)\, X_{[x^{\lambda^m}][-]_{\lambda_m}} df_0]$$

şi deci

$$D(s\,\omega_m) = ds\,(1+d)\,\omega_m] + sD\,\omega_m .$$

3). Dacă ω_m este o m_1- formă iar ω_{m_2} *o* m_2- formă, atunci

$$D(\omega_{m1} \wedge \omega_{m_2}) = [D\,\omega_{m_1} (1+d)\,\omega_{m_2}] + (-1)^{m_1}[(+\;d)\;\omega_{m_1}, D\,\omega_{m_2}]$$

$$\text{sau } D(\omega_{m_1} \wedge \omega_{m_2}) = D\,\omega_{m_1} \wedge \omega_{m_2} + (-1)^{m_1}[1+d)\,\omega_{m_1} D\,\omega_{m_2}]$$

unde se mai notează

$$[D\,\omega_{m_1}(1+d),\, \omega_{m_2}] = D\,\omega_{m_1} \wedge \omega_{m_2}\,;\; [(1+d)\,\omega_{m_1},\, D\,\omega_{m_2}] = \omega_{m_1} \wedge D\omega_{m_2}$$

DEMONSTRAŢIE. Vom presupune reprezentările în raport cu un sistem local de coordonate

$$\omega_{m_1} = (1/m_1\,!)\, a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_{m_1}]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_{m_1}}$$

$$\omega_{m_2} = (1/\mathrm{m}^2\,!)\, b_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_{m_2}]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_{m_2}} .$$

Atunci, în baza § 5.5,

$$\omega_{m_1} \wedge \omega_{m_2} = (1/\mathrm{m}_1\,!)\;(1/m_2\,!)\, a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_{m_1}]}\, b_{[\mu_1]\ldots[\mu_{m_2}]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{m_2}} =$$

$$= (f_m [df_{m-1}(1+d)\ldots df_1(1+d)\,df_0])(g_m[dg_{m-1}(1+d)\ldots dg_1(1+d)\,dg_0])$$

unde

$$a_{[\lambda_1]\ldots[\lambda_{m_1}]} = [f_{m_1} X_{[x^{\lambda_1}][-]_{\lambda_1}} (1+d)\, f_{m-1} \ldots X_{[x^{\lambda_{m_1}}][-]_{\lambda_{m_1}}} f_0]$$

$$b_{[\mu_1]\ldots[\mu_{m_1}]} = [g_{m_2} X_{[x^{\mu_1}][-]_{\mu_1}} (1+d)\, g_{m-1} \ldots X_{[x^{\mu_{m_2}}][-]_{\mu_{m_2}}} g_0].$$

Ținînd seama de proprietățile lui D și ale lui d se deduce pentru F-diferențiala exterioară a produsului exterior $\omega_{m_1} \wedge \omega_{m_2}$, în mod succesiv șirul de relații

$$\begin{aligned}
D(\omega_{m_1} \wedge \omega_{m_2}) &= D(f_{m_1}[d f_{m_1-1}(1+d) \ldots df_1(1+d)\, d f_0] \cdot \\
&\cdot g_{m_2}[dg_{m_2-1}(1+d) \ldots dg_1(1+d)\, dg_0]) = \\
&= [D\,\omega_{m_1}(1+d), \omega_{m_2}] + [dg_{m_2}(1+d), \omega_{m_1}, [dg_{m_2-1}(1+d) \ldots \\
&\ldots dg_1(1+d)\, dg_0]] = [D\omega_{m_1}(1+d), \omega_{m_2}] + \\
&+ [dg_{m_2}, \omega_{m_1}, [dg_{m_2-1}(1+d) \ldots dg_1(1+d)\, dg_0]] + \\
&+ [dg_{m_2}, \omega_{m_1} d\,[dg_{m_2-1}(1+d) \ldots dg_1(1+d)\, dg_0]] + \\
&+ [dg_{m_2}, d\omega_{m_1}(1+d)[dg_{m_2-1}(1+d) \ldots dg_1(1+d)\, dg_0]] = \\
&= [D\omega_{m_1}(1+d), \omega_{m_2}] + (-1)^{m_1}[\omega_{m_1}, dg_{m_2}(1+d)[dg_{m-2}(1+d) \ldots \\
&\ldots dg_1(1+d)\, dg_0]] + (-1)^{m_1}[d\omega_{m_1-1}\, dg_{m_1}(1+d)[dg_{m-2}(1+d) \ldots \\
&\ldots dg_1(1+d)\, dg_0]] = [D\omega_{m_1}(1+d), \omega_{m_2}] + \\
&+ (-)^{m_1}([\omega_{m_1}, D\omega_{m_2}] + [d\omega_{m_1}, D\,\omega_{m_2}]) = \\
&= (D\omega_{m_1}, (1+d)\,\omega_{m_2}) + (-1)^{m_1}[(1+d)\,\omega_{m_1}, D\omega_{m_2}].
\end{aligned}$$

Vom defini m- forme dezvoltabile în sens generalizat: m- formele avînd structura unor F- diferențiale exterioare $D\omega$ astfel cum au fost definite mai sus în $D(\mathcal{F} \times \mathcal{X} \ldots \mathcal{F} \times \mathcal{X}\, \mathcal{F}(V_n))$. Este clar că această definiție extinde cea introdusă la § 5.6.

Utilizînd proprietățile demonstrate, vom da următoarea definiție:

F-diferențiala exterioară a unei m-forme ω_m *este operația D care asociază acestei m-forme* ω_m, *m + 1-forma avînd proprietățile 1), 2), astfel ca F-diferențiala exterioară a fiecărei m-forme dezvoltabile în sens generalizat să fie nulă.*

Această definiție introdusă cu ajutorul a 3 axiome, păstrează, ca și în cazul teoriei infinitezimale |6| caracterul intrinsec, deoarece nu recurge la un anumit sistem de repere. De asemeni definiția determină și operația D, după cum rezultă din considerarea m-formelor definite cu ajutorul unui sistem de coordonare, date într-o vecinătate $\mathcal{U}$:

$$\omega_m = (1/m\,!)\, a_{[\lambda_1] \ldots [\lambda_m]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda m},$$

pentru care s-a arătat mai sus modul de determinare a lui $D\omega_m$ unică în raport cu un sistem local de coordonate.

În ceea ce privește satisfacerea celor 3 axiome date în definiție, observăm că prima a fost de fapt enunțată anterior, fiind de demonstrație imediată (în baza proprietăților spațiului d-vectorial, a doua rezultă de asemeni din proprietățile demonstrate anterior 2) și, prin particularizare 3)). A treia axiomă rezultă satisfăcută în baza celor demonstrate mai sus. Într-adevăr, atît în cazul *1*-formelor cît și în cazul m-formelor s-a arătat că $DD\omega_m = 0$ și deci $D\omega = 0$ dacă ω este dezvoltabilă în sens generalizat. Ea se verifică conform proprietății 3), luînd Ω_1 *1*-formă iar Ω_2 o m-formă dezvoltabilă în sens generalizat.

În expresia F-diferențialei exterioare stabilită mai sus $D\omega_m = (1/(m+1)\,!)\, b_{[\mu_0]\dots[\mu_m]}\, dx^{\mu_0} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m}$ $b_{[\mu_0]\dots[\mu_m]}$ este denumit *tensorul antisimetric de valență $m+1$, în sens generalizat.*

Mai definim prin *F-derivată exterioară* în raport cu $[x^\lambda]$, în o vecinătate $\mathcal{U}$, a m-formei.

$$\partial_{\lambda_0}\, \omega_m = (1/m\,!)\, \partial^{[\lambda_0]}\, a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_m}$$

unde $\partial_{[\lambda_0]}\, a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}$ a fost definită mai sus ca F-derivata exterioară a m-formei antisimetrice $a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}$.

Este clar că

$$D\omega_m = \partial_{[\lambda_0]}\, dx^{\lambda_0} \wedge \omega_m.$$

În cazul valorificării F-diferențialei exterioare în raport cu un cîmp local de m-vectori, $V_0, \dots, V_m$ atunci, ca mai sus

$$D\omega\,(V_0, \dots, V_m) = \frac{1}{m\,!}\, \varepsilon^{\lambda_0\dots\lambda_m}_{\mu_0\dots\mu_m}\, \partial_{\lambda_0}\, a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}\, \underset{0}{V}^{\lambda_0} \dots \underset{0}{V}^{\lambda_m} =$$

$$= \frac{1}{m\,!} \sum_{i=1}^{m} (-1)^i\, \partial_{\lambda_0}\, g_{[\mu_0]\dots[\hat{\mu}_i]\dots[\mu_m]}\, \underset{i}{V}^{\mu_i}\, \underset{0}{V}^{\mu_0} \dots \hat{\underset{i}{V}}^{\mu_i} \dots \underset{m}{V}^{\mu_m}$$

(semnul ^ suprimînd indicele de sub el).

8. *m-Forme induse de reprezentarea* φ. Fie φ o reprezentare $V_n \to V'_n$ de clasă C^u, $u \geqslant 1$ și ω_m o m-formă exterioară în raport cu un sistem local de coordonate în V'_n:

$$\omega_m = (1/m\,!)\, a_{[i'_1]\dots[i'_m]}\, dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_m}.$$

Prin $\varphi^*\omega_m$ vom nota originalul lui ω_m prin aplicația φ, de imagine ω_m în raport cu un sistem local de coordonate:

$$\varphi^*\omega_m = (1/m\,!)\, a_{[i_1]\dots[i_m]}([x])\, dx^{i'_1}[x] \wedge \dots dx^{i'_m}[x] =$$

$$= (1/m\,!)\, a_{[i_1]\dots[i_m]}([x])\, (\varphi'^{i'_1}_{[\lambda_1]}\cdot) \cdots (\varphi'^{i'_m}_{[\lambda_m]}\cdot) \cdots dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_m}.$$

Vom nota

$$a_{[i_1]\dots[i_m]}([x]) = \varphi^*\, a_{[i_1]\dots[i_m]}$$

de unde

$$\varphi^*\, \omega_m = \frac{1}{m\,!} (\varphi^*\, a_{[i_1]\dots[i_m]})\, (\varphi'^{i'_1}_{[\lambda_1]}\cdot)\, dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge (\varphi'^{i_m}_{[\lambda_m]})\, dx^{\lambda_m}$$

$\varphi^*\,\omega_m$ este *m-forma indusă* de aplicația $\varphi: V_n \to V'_n$ din ω_m în V_n.

Se verifică imediat proprietățile1)

$D(\varphi^*\,\omega) = \varphi^*\, D\omega$

$\varphi^*(\omega_{m_1} \wedge \omega_{m_2}) = \varphi^*\,\omega_{m_1} \wedge \varphi^*\,\omega_{m_2}$.

---

1) În cazul infinitezimal s-a demonstrat |12| că

1. Dacă ω_m e pară (simetrică) atunci și $\varphi^*\,\omega_m$ e simetrică iar dacă ω_m e de clasă C^u iar φ' de clasă C^{u+1} atunci $\varphi^*\,\omega_m$ e de clasă C^u

2. Suportul formei $\varphi^*\,\omega_m$ e conținut în suportul formei ω_m.

9. *m-Forme închise.* O m-formă închisă ω este m-forma a cărei F-diferențială exterioară e nulă. Este clar că $D\omega_m$ este o asemenea formă, deoarece $DD\,\omega_m = 0$.

Prin F-diferențiala exterioară în raport cu coordonata x^n a unei m-forme ω_m reprezentată în raport cu un sistem local de coordonate într-o vecinătate $\mathcal{U}$ se înțelege diferența m-formelor:

$$D_n\,\omega_m = D\omega_m - D_{\hat{n}}\,\omega_m = (D - D_{\hat{n}})\,\omega_m .$$

D fiind F-diferențiala exterioară în raport cu $[x^\lambda]$, $\lambda \in I_n = (1, 2, \dots n)$ iar $D_{\hat{n}}$ în raport cu $[x^{\hat{\lambda}}]$, $\hat{\lambda} \in I_{n-1}$, $I_{n-1} = (1, 2, \dots n-1)$.

Prin F-derivata unei forme antisimetrice $a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}$ reprezentată în raport cu un sistem local de coordonate în $\mathcal{U}$, referitor la x^n, se înțelege operația $\partial_n\, a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_m]}$ definită cu ajutorul relației

$$\partial_n\, a_{[\lambda_1]\dots[\lambda_n]}\; dx^n \wedge \omega = (\partial_{\lambda_0} - \partial_{\hat{\lambda}_0})\, a_{[\hat{\lambda}_1]\dots[\lambda_n]} \wedge \omega .$$

Este clar că

$$D_n\,\omega_m = \partial_n\; dx^n \wedge \omega_m$$

conform celor de la aliniatul precedent.

Vom defini prin m-formă independentă de o coordonată arbitrară x^n, în raport cu F-derivarea exterioară, m-forma ω_m pentru care $D_n\,\omega_m = D\omega_m - D_{\hat{n}}\omega_m = 0$.

Consecință. $(D_n\,\omega_m)_{dx^n=0} = 0$.

Dacă ω este o m-formă definită în raport cu un sistem local de coordonate, într-o vecinătate $\mathcal{U} \in V_n$ închisă în $\mathcal{U}$ și care nu conține pe dx^n, atunci ea este independentă de coordonata x^n în raport cu F-derivarea exterioară.

DEMONSTRAȚIE. Fie ω o asemenea m-formă închisă în $\mathcal{U}$ $(D\omega = 0)$ care nu conține pe dx^n. Atunci $D\omega = \partial_\lambda\, dx^\lambda \wedge \omega = 0$, $\lambda \in I_n$; $D_{\hat{n}}\,\omega = \partial_{\hat{\lambda}}\; dx^\lambda \wedge \omega$, $\hat{\lambda} \in I_{\hat{n}}$ $D_n\,\omega = \partial_n\, dx^n \wedge \omega$.

Se deduce $D_n\,\omega + D_{\hat{n}}\omega = 0$. Deoarece $D_{\hat{n}}\;\omega$ nu conține pe dx^n iar $D_n\omega = 0$ pentru $dx^n = 0$ (conform consecinței de mai sus) rezultă că: în mod separat $D_n\;\omega = D_{\hat{n}}\;\omega = 0$.

Doua forme ω, ω' sînt egale în $\mathcal{U}$ în raport cu F-produsul exterior dacă

$$\omega \wedge \omega'' = \omega' \wedge \omega''$$

ω'' fiind o m-formă arbitrară.

O m-formă ω este F-integrabilă în $\mathcal{U}$ dacă F-derivata ei exterioară în raport cu o coordonată, arbitrară x^λ este în $\mathcal{U}$ egală cu o altă formă ω' în raport cu produsul exterior $= \partial_\lambda\,\omega = \omega'$ iar ω poate fi determinată ca suma între o formă arbitrară satisfăcînd condiția $\partial_n\,\omega = 0$ și o formă determinată de ω'. (În cadrul teoriei infinitesimale se poate lua ca vecinătate $\mathcal{U}$ cubul $(x^\lambda) < 1$ în R^n.)

Dacă ω *este o m-formă închisă în vecinătatea* $\mathcal{U}$ *atunci în* $\mathcal{U}$ *există* m *- 1 - forma* π_{m-1} *astfel ca* $D\pi_{m-1} = \omega$ *dacă* $\pi^{\hat{\lambda}}_{m-1}$, $\lambda \in I_n$ *este F-integrabilă.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $D\omega = 0$ şi reprezentarea m-formei ω_m în raport cu un sistem local de coordonate x^λ, $\lambda \in I_n$ într-o vecinătate $\mathcal{U}$:

$$\omega_m = \frac{1}{m\,!}\, a_{[\lambda_1] \ldots [\lambda_m]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_m},\ \lambda \in I_n .$$

Vom nota $\omega_0 = \omega|_{x^n = x^n_0}$ în raport cu valorificarea lui ω în $E\,(E^*_p, E_s)$ şi vom pune

$$\omega = \Omega^n + \Omega^{\hat{n}},\ \Omega^n = \omega - \Omega^{\hat{n}},\ \Omega^{\hat{n}} = \frac{1}{m\,!}\, a_{[\hat{\lambda}_1] \ldots [\hat{\lambda}_m]}\quad dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_m}$$

$\hat{\lambda}_n, \ldots \hat{\lambda}_m \in I_{m-1}$

astfel că

$$\Omega_n |\, x^n = x^n_0 = 0 \text{ şi deci } \omega_0 = \Omega^n |x^n = x^n_0 .$$

Fie de asemeni o m-1 formă π închisă în $\mathcal{U}$ ($D\pi = 0$) şi să punem

$$\pi = \pi^n + \pi^{\hat{n}},\ \pi^n = \pi - \pi^{\hat{n}},\ \pi = \frac{1}{(m+1)\,!}\, b_{[\lambda_1] \ldots [\lambda_m+1]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_m}$$

$$D^{\hat{n}} = \frac{1}{(m+1)\,!}\, b_{[\hat{\lambda}_1] \ldots [\hat{\lambda} m+1]}\, dx^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\lambda_m+1};\ \hat{\lambda}_1, \ldots, \in I_{n-1} .$$

Presupunem π astfel construită încît $D^{\pi^{\hat{n}}}_n = D\pi^{\hat{n}} - D^{\hat{n}}\, \pi^{\hat{n}} = \Omega^n -$

$$- D\pi^n, (D\pi^{\hat{n}} - D^{\hat{n}}\, \pi^{\hat{n}}|_{x^n = x^n_0} = 0) \text{ şi } \pi^{\hat{n}}|_{x^n = x^n_0} = \pi_0, D\pi_0 = \omega_0$$

π^n fiind deocamdată arbitrară.

E clar ca $\chi = D\pi - \omega = D^{\hat{n}}\, \pi^{\hat{n}} - \Omega^n$ are următoarele proprietăţi : nu conţine pe dx^n şi este închisă în $\mathcal{U}$ deoarece $D\chi = DD\pi - D\omega = 0$. Sîntem atunci în condiţiile lemei precedente, în baza căreia rezultă că χ este independent de x^n în raport cu F-derivarea. Deoarece se observă că pentru $x^n = x^n_0$ avem $\chi\,|_{x^n = x^n_0} = 0$ şi deci $\chi = 0$.

Posibilitatea construcţiei date se demonstrează prin inducţie : π, ω sînt forme în raport cu n coordonate iar $D\pi - \omega = 0$ rezultă din o condiţie analogă pentru formele ω_0, π_0 în raport cu n-1 coordonate. Pentru $n = 1$, procedeul revine la considerarea formelor de o variabilă :

$$d\omega = (\varphi' \cdot)\, \omega\, [dx] = \omega'\, [dx] = d\, \Sigma\, \beta\,[dx]\,;\ \Sigma\, \beta\ [dx] =$$

$$= \Sigma\, (\beta\, [x + dx] - \beta\, [x])\,;\ d \Sigma\, \beta\, [dx] = \sum_{x}^{x+dx} \beta\, [dx].$$

Este de observat că $\Omega - \Omega^{\hat{n}}$ ca diferență între o formă în raport cu $dx^1, \ldots, dx^n$ și o formă în raport cu $dx^1, \ldots, dx^{n-1}$ și care pentru $dx^n = 0$ e nulă, se mai scrie $[dx^n\,(1 + d), \widetilde{\Omega}] = dx^n \wedge \widetilde{\Omega}$ și analog $\pi^n = \pi - \pi^{\hat{n}} = dx^n \wedge \tilde{\pi}$. Atunci conform legii de F-diferențiere $D\pi^n = D\,dx^n \wedge \tilde{\tilde{\pi}} - dx^n \wedge D\tilde{\pi} = - dx^n \wedge D\tilde{\pi}$.

Pe de altă parte $D\pi^{\hat{n}} - D^{\hat{n}}\pi^{\hat{n}} = \partial_n\,dx^n \wedge \pi^{\hat{n}}$ satisface condiția $\partial_n\,dx^n \wedge \pi^{\hat{n}} = dx^n \wedge \widetilde{\Omega} + dx^n \wedge \widetilde{D\pi}$ care, în baza definiției egalității a 2 forme în raport cu produsul exterior se mai scrie $\partial_n\,\pi^{\hat{n}} = \widetilde{\Omega} + D\tilde{\pi}$.

Deoarece, prin ipoteză $\pi^{\hat{n}}$ este F-integrabilă în $\mathcal{U}$ rezultă posibilitatea construcției utilizate.

În cazul teoriei infinitezimale, în R^n, această proprietate se reduce la o teoremă a lui H. Poincaré.

Primită la redacție la 9 august 1962

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

РЕЗЮМЕ

В работе излагаются, в продолжение, элементы, касающиеся тензориальных плотностей и внешних форм в рамках рассматривавшегося ранее расширения.

RHEOLOGISCHE STRUKTUREN

ZUSAMMENFASSUNG

In Forsetzung einer früheren Arbeit werden die Elemente der tensoriellen Dichten und der äußeren Formen im Rahmen der in oben erwähnter Arbeit betrachteten Erweiterung dargestellt.

BIBLIOGRAFIE[1]

1. E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*. Paris, Hermann, 1922 ; Gostehizdat, 1940 ; *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géometriques*. Paris, Hermann, 1945 ; *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*. Ann. de l'Ecole Normale Sup., **3**, *16* (1899).
2. C. П. ФИННИКОВ, *Метод внешних форм Картана*. Огиз, Москва-Ленинград, 1948.
3. FROBENIUS, *Über das Pfaffsche Problem*. J. für Math., **82**, 230—315 (1877).
4. T. Y. THOMAS, *Differential systems*. 1937.
5. HASSLER WHITNEY, *Geometric Integration Theory*. Princeton University Press, 1957 ; Izadt. Inostran. Lit., Moscova, 1960.

---

[1] Trimiterile din text se referă şi la bibliografia din prima parte a lucrării apărută în St. cerc. mec. apl., **13**, *3* (1962).

ASUPRA PROBLEMEI PLANE A TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE CURBILINII OARECARE

II. STARE DE SOLICITARE

DE

P. P. TEODORESCU[1])

În cele ce urmează vom studia problemele legate de starea de solicitare (stare de tensiune și stare de deformație) în problema plană a teoriei elasticității (cu referire specială la cazul unei stări de tensiune plană) în coordonate curbilinii oarecare[2]).

2. STARE DE TENSIUNE

Vom considera drept componente ale tensorului tensiune componentele normală și tangențială la curbele coordonate $\xi = \text{const}$ și $\eta = \text{const}$, folosind notațiile din figura 1—spre deosebire de lucrările în care se iau componente paralele cu tangentele la cele două linii de coordonate. În felul acesta, cele două componente ale tensiunii într-un punct, corespunzătoare unui element de linie dat, capătă o semnificație fizică bine precizată.

Tensorul tensiune va avea deci forma

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_\xi & \tau_{\eta\xi} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_\eta \end{Bmatrix}, \qquad (2.1)$$

nefiind, în general, simetric în raport cu diagonala principală.

2.1. *Variația tensiunilor în jurul unui punct.* Fie un element infinit mic MAB, în formă de triunghi curbiliniu, decupat din grinda perete și acționat ca în figura 1. Folosim pentru tensiuni convențiile de semne obișnuite.

---

[1]) Facultatea de matematică și mecanică, Universitatea București.

[2]) Folosim notațiile introduse și rezultatele obținute în prima parte a acestei lucrări [6].

În cadrul micilor deformații, putem aproxima arcele de curbă care reprezintă laturile triunghiului MAB prin corzile corespunzătoare. Putem folosi astfel aceleași metode de calcul pe care le-am utilizat în cazul coordonatelor carteziene oblice [4], adaptîndu-le în consecință.

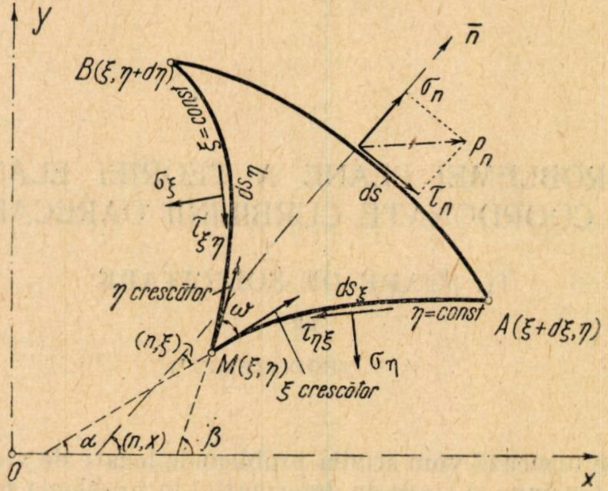


Fig. 1

Astfel, tensiunile tangențiale vor trebui să verifice relația

$$\tau_{\xi\eta} - \tau_{\eta\xi} = (\sigma_\xi - \sigma_\eta)\operatorname{cotg}\omega \tag{2.2}$$

care, ținînd seama de (1.15) și (1.25), se mai poate scrie sub forma

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)(\tau_{\xi\eta} - \tau_{\eta\xi}) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)(\sigma_\xi - \sigma_\eta) \tag{2.2'}$$

sau sub forma

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)(\tau_{\xi\eta} - \tau_{\eta\xi}) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)(\sigma_\xi - \sigma_\eta) = 0. \tag{2.2''}$$

Tensiunile corespunzătoare unei direcții oarecare (n, ξ) vor fi date de

$$\begin{aligned}\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \frac{1}{2}(\sigma_\xi - \sigma_\eta)\cos 2(n, \xi) + \tau_{\eta\xi}\sin 2(n, \xi) + \\ + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\operatorname{cotg}\omega\cos^2(n, \xi),\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_\xi - \sigma_\eta)\sin 2(n, \xi) - \tau_{\eta\xi}\cos 2(n, \xi) + \\ + \frac{1}{2}(\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\operatorname{cotg}\omega\sin 2(n, \xi).\end{aligned} \tag{2.3'}$$

Relațiile de trecere de la componetele tensorului tensiune în coordonate carteziene ortogonale la cele în coordonate curbilinii oarecare se vor obține, prin particularizare, sub forma

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\beta - \tau_{xy}\sin 2\beta,\\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha,\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\eta} &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\beta - \tau_{xy}\cos 2\beta,\\ \tau_{\eta\xi} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha.\end{aligned} \tag{2.4'}$$

Eliminînd tensiunile σ_x, σ_y, τ_{xy} între aceste relații, regăsim relația (2.2) pe care trebuie să o verifice componentele tensorului tensiune T_σ. Rezolvînd în raport cu σ_x, σ_y, τ_{xy}, putem scrie și relațiile de trecere de la tensiunile în coordonate curbilinii oarecare la cele în coordonate carteziene rectangulare

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{\sin\omega\sin(\alpha+\beta)}\Big[\sigma_\xi\cos^2\alpha - \sigma_\eta\cos^2\beta +\\ &\quad + \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\omega}(\tau_{\xi\eta}\sin 2\alpha + \tau_{\eta\xi}\sin 2\beta)\Big],\\ \sigma_y &= \frac{1}{\sin\omega\sin(\alpha+\beta)}\Big[-\sigma_\xi\sin^2\alpha + \sigma_\eta\sin^2\beta +\\ &\quad + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\omega}(\tau_{\xi\eta}\sin 2\alpha + \tau_{\eta\xi}\sin 2\beta)\Big],\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sin 2\omega}(\tau_{\xi\eta}\sin 2\alpha + \tau_{\eta\xi}\sin 2\beta). \tag{2.5'}$$

Deci starea de tensiune în jurul unui punct este complet determinată cînd se cunosc componentele tensorului tensiune (2.1).

Eliminînd pe $\tau_{\xi\eta}$ între relațiile (2.2), (2.5) și (2.5'), mai putem scrie

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{\sin^2\omega}[\sigma_\xi\cos^2\alpha - \sigma_\eta\cos\beta\cos(\alpha-\omega) + 2\tau_{\eta\xi}\cos\alpha\cos\beta\sin\omega],\\ \sigma_y &= \frac{1}{\sin^2\omega}[\sigma_\xi\sin^2\alpha - \sigma_\eta\sin\beta\sin(\alpha-\omega) + 2\tau_{\eta\xi}\sin\alpha\sin\beta\sin\omega],\\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\sin^2\omega}[(\sigma_\xi - \sigma_\eta)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{\eta\xi}\sin(\alpha+\beta)\sin\omega].\end{aligned} \tag{2.6}$$

De asemenea, eliminînd pe $\tau_{\eta\xi}$ între aceleași relații, rezultă

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{1}{\sin^2\omega}[-\sigma_\xi \cos\alpha\cos(\beta+\omega)+\sigma_\eta\cos^2\beta+2\tau_{\xi\eta}\cos\alpha\cos\beta\sin\omega],\\
\sigma_y &= \frac{1}{\sin^2\omega}[-\sigma_\xi\sin\alpha\sin(\beta+\omega)+\sigma_\eta\sin^2\beta+\\
&\quad +2\tau_{\xi\eta}\sin\alpha\sin\beta\sin\omega],\\
\tau_{xy} &= \frac{1}{\sin^2\omega}[-(\sigma_\xi-\sigma_\eta)\sin\beta\cos\beta+\tau_{\xi\eta}\sin(\alpha+\beta)\sin\omega].
\end{aligned}\tag{2.6'}$$

Făcînd semisuma relațiilor (2.6) și (2.6′), obținem în definitiv

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \operatorname{cosec}\omega[\sigma_\xi\cos\alpha\sin\beta-\sigma_\eta\sin\alpha\cos\beta+\\
&\quad +(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})\cos\alpha\cos\beta],\\
\sigma_y &= \operatorname{cosec}\omega[-\sigma_\xi\sin\alpha\cos\beta+\sigma_\eta\cos\alpha\sin\beta+\\
&\quad +(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})\sin\alpha\sin\beta],
\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \frac{\operatorname{cosec}\omega}{2}[-(\sigma_\xi-\sigma_\eta)\cos(\alpha+\beta)+\\
&\quad +(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})\sin(\alpha+\beta)].
\end{aligned}\tag{2.7'}$$

Anulînd derivatele în raport cu (n, ξ) ale funcțiilor (2.3) și (2.3′), se obțin valorile extreme ale tensiunilor. Astfel direcțiile principale vor fi date de

$$\operatorname{tg} 2(n, \xi) = \frac{2\tau_{\eta\xi}}{\sigma_\xi-\sigma_\eta+(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})\operatorname{cotg}\omega}. \tag{2.8}$$

După cum se poate verifica ușor, tensiunile tangențiale sînt nule pentru aceste unghiuri (n, ξ).

Ținînd seama de formula (2.8), formula (2.3) dă expresiile tensiunilor normale principale sub forma

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,2} &= \frac{1}{2}(\sigma_\xi+\sigma_\eta)+\frac{1}{2}(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})\operatorname{cotg}\omega\pm\\
&\quad\pm\frac{1}{2}\sqrt{[\sigma_\xi-\sigma_\eta+(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})\operatorname{cotg}\omega]^2+4\tau_{\eta\xi}^2}.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

Suma tensiunilor normale principale este un invariant dat de

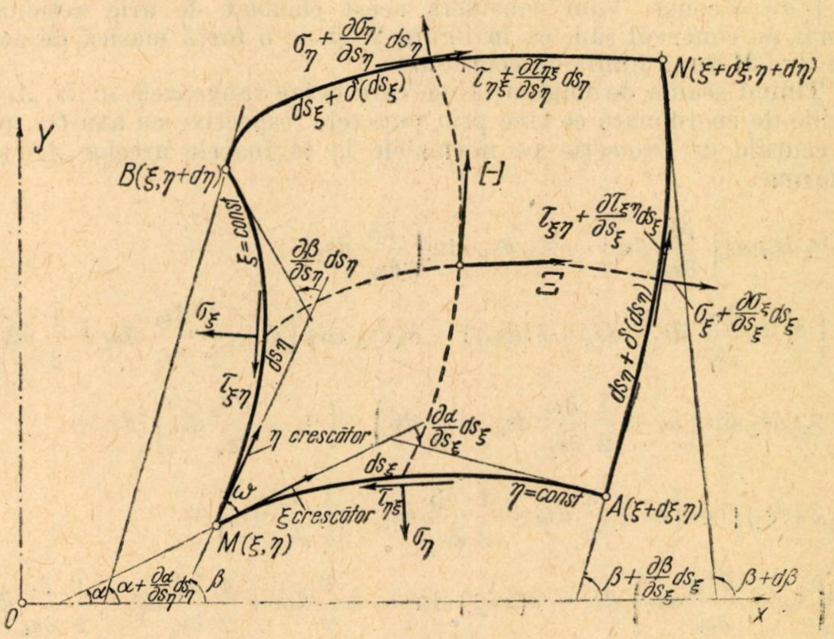
$$I_1 = \sigma_1+\sigma_2 = \sigma_\xi+\sigma_\eta+(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})\operatorname{cotg}\omega. \tag{2.10}$$

De asemenea, produsul acestor două tensiuni este un invariant de forma

$$I_2 = \sigma_1\, \sigma_2 = \sigma_\xi\, \sigma_\eta - \tau^2_{\eta\xi} + \sigma_\eta\, (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{cotg} \omega. \qquad (2.11)$$

Tensiunile normale principale vor fi deci rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$\sigma^2 - I_1\, \sigma + I_2 = 0. \qquad (2.12)$$



$\sigma_\eta + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial s_\eta} ds_\eta$
$ds_\xi + \partial(ds_\xi)$
$\tau_{\eta\xi} + \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial s_\eta} ds_\eta$
$N(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$
y
$B(\xi, \eta + d\eta)$
H
$\tau_{\xi\eta} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial s_\xi} ds_\xi$
$\xi = const$
$\frac{\partial \beta}{\partial s_\eta} ds_\eta$
Ξ
σ_ξ
ds_η
$ds_\eta + \partial(ds_\eta)$
$\sigma_\xi + \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial s_\xi} ds_\xi$
$\tau_{\xi\eta}$
η crescător
$\frac{\partial \alpha}{\partial s_\xi} ds_\xi$
ds_ξ
ω
$\eta = const$
ξ crescător
$\tau_{\eta\xi}$
$A(\xi + d\xi, \eta)$
$M(\xi, \eta)$
σ_η
α
$\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial s_\eta} ds_\eta$
β
$\beta + \frac{\partial \beta}{\partial s_\xi} ds_\xi$
$\beta + d\beta$
0
x

Fig. 2

Pentru direcțiile corespunzătoare bisectoarelor direcțiilor principale se obțin tensiunile tangențiale extreme

$$\tau_{\text{extr}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{[\sigma_\xi - \sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{cotg} \omega]^2 + 4\, \tau^2_{\eta\xi}}. \qquad (2.13)$$

Ținînd seama de (2.8) și (2.9) și de formula

$$\operatorname{tg} 2\, (n, \xi) = \frac{2 \operatorname{tg} (n, \xi)}{1 - \operatorname{tg}^2 (n, \xi)},$$

găsim cu ușurință că

$$\operatorname{tg} (n, \xi) = \frac{\sigma_{1,2} - \sigma_\xi - (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}) \operatorname{cotg} \omega}{\tau_{\eta\xi}}, \qquad (2.14)$$

relație care determină unghiurile corespunzătoare celor două direcții principale.

Folosind aceste rezultate, se pot scrie cu ușurință ecuațiile liniilor izostatice, traiectoriile tensiunilor tangențiale extreme etc.

2.2. *Ecuații de echilibru elastic.* Pentru a vedea ce se întîmplă cînd trecem de la un element de linie ce trece printr-un punct la un alt element de linie ce trece printr-un punct infinit vecin, va trebui să scriem ecuațiile de echilibru ale unui element infinit mic (fig. 2), decupat din grinda perete și mărginit de liniile de coordonate $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, $\xi + d\xi = \text{const}$ și $\eta + d\eta = \text{const}$. Vom considera acest element de arie acționat de tensiuni pe conturul său, ca în figura 2, și de o forță masică de componente Ξ și H după liniile de coordonate.

Ținînd seama de unghiurile pe care le fac tangentele în M, A, B, N la liniile de coordonate ce trec prin punctele respective cu axa Ox, putem scrie ecuțiile de proiecție pe normalele la mijloacele arcelor AN și NB sub forma

$$\begin{aligned}
&-\sigma_\xi\, ds_\eta \cos\left(\frac{\partial\beta}{\partial s_\xi}\, ds_\xi\right) - \tau_{\xi\eta}\, ds_\eta \sin\left(\frac{\partial\beta}{\partial s_\xi}\, ds_\xi\right) + \\
&+\left(\sigma_\xi + \frac{\partial\sigma_\xi}{\partial s_\xi}\, ds_\xi\right)[ds_\eta + \delta(ds_\eta)] + \sigma_\eta\, ds_\xi \cos\left(\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial s_\xi}\, ds_\xi + \frac{1}{2}\, d\beta\right) - \\
&-\tau_{\eta\xi}\, ds_\xi \sin\left(\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial s_\xi}\, ds_\xi + \frac{1}{2}\, d\beta\right) - \left(\sigma_\eta + \frac{\partial\sigma_\eta}{\partial s_\eta} ds_\eta\right)[ds_\xi + \\
&+\delta\,(ds_\xi)]\cos\left(\omega + \frac{1}{2}\, d\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial s_\xi} ds_\xi - \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{ds_\eta}\, ds_\eta\right) + \\
&+\left(\tau_{\eta\xi} + \frac{\partial\tau_{\eta\xi}}{\partial s_\eta} ds_\eta\right)[ds_\xi + \delta(ds_\xi)]\sin\left(\omega + \frac{1}{2}\, d\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial s_\xi} ds_\xi - \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta}\, ds_\eta\right) + \\
&+\Xi\, ds_\xi\, ds_\eta \sin\omega \sin\left(\omega + \frac{1}{2}\, d\omega - \frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial s_\xi}\, ds_\xi\right) = 0, \\
&-\sigma_\eta\, ds_\xi \cos\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta}\, ds_\eta\right) + \tau_{\eta\xi}\, ds_\xi \sin\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta}\, ds_\eta\right) + \left(\sigma_\eta + \frac{\partial\sigma_\eta}{\partial s_\eta}\, ds_\eta\right)[ds_\xi + \delta(ds_\xi)] + \\
&+\sigma_\xi\, ds_\eta \cos\left(\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial s_\eta}\, ds_\eta - \frac{1}{2}\, d\alpha\right) - \tau_{\xi\eta}\, ds_\eta \sin\left(\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial s_\eta} ds_\eta - \right. \\
&\left. -\frac{1}{2}\, d\alpha\right) - \left(\sigma_\xi + \frac{\partial\sigma_\xi}{\partial s_\xi} ds_\xi\right)[ds_\eta + \delta\,(ds_\eta)]\cos\left(\omega + \frac{1}{2}\, d\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial s_\xi}\, ds_\xi - \right. \\
&\left. -\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta} ds_\eta\right) + \left(\tau_{\xi\eta} + \frac{\partial\tau_{\xi\eta}}{\partial s_\xi} ds_\xi\right)[ds_\eta + \delta(ds_\eta)]\sin\left(\omega + \frac{1}{2}\, d\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial\beta}{\partial s_\xi}\, ds_\xi - \right. \\
&\left. -\frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta}\, ds_\eta\right) + \mathrm{H}\, ds_\xi\, ds_\eta \sin\omega \sin\left(\omega + \frac{1}{2}\, d\omega - \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial s_\eta}\, ds_\eta\right) = 0,
\end{aligned}$$

unde $\delta(ds_\xi)$ şi $\delta(ds_\eta)$ sînt variaţiile elementelor de arc ds_ξ, respectiv ds_η, date de formulele (1.31). Neglijînd infiniţii mici de ordin superior şi introducînd razele de curbură, date de (1.27′), şi razele ρ'_ξ, ρ'_η, date de (1.29), se obţin ecuaţiile de echilibru elastic în coordonate curbilinii oarecare sub forma

$$\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial s_\xi}+\sin\omega\frac{\partial\tau_{\eta\xi}}{\partial s_\eta}-\cos\omega\frac{\partial\sigma_\eta}{\partial s_\eta}+\frac{\operatorname{cosec}\omega}{\rho'_\eta}(\sigma_\xi-\sigma_\eta)+$$

$$+\frac{2}{\rho'_\xi}\tau_{\xi\eta}+\Xi\sin^2\omega=0, \tag{2.15}$$

$$\sin\omega\frac{\partial\tau_{\xi\eta}}{\partial s_\xi}-\cos\omega\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial s_\xi}+\frac{\partial\sigma_\eta}{\partial s_\eta}-\frac{\operatorname{cosec}\omega}{\rho'_\xi}(\sigma_\xi-\sigma_\eta)+\frac{2}{\rho'_\eta}\tau_{\eta\xi}+\mathrm{H}\sin^2\omega=0.$$

Observăm că aceste ecuaţii fundamentale se puteau obţine şi pe altă cale, plecînd de la ecuaţiile de echilibru scrise în coordonate carteziene

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0,\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0,\end{aligned} \tag{2.16}$$

unde X, Y sînt componentele forţei masice; se folosesc relaţiile (2.7), (2.7′) de trecere de la componentele tensorului tensiune în coordonate curbilinii oarecare la componentele tensorului tensiune în coordonate carteziene ortogonale, operatorii diferenţiali (1.45), precum şi expresiile (1.27′) şi (1.29). Obţinem astfel ecuaţiile

$$\frac{\cos\alpha+\sin\beta\sin\omega}{2\sin^2\omega}\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial s_\xi}-\frac{\cos\alpha\cos\omega}{2\sin^2\omega}\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial s_\eta}-\frac{\cos\beta\cos\omega}{2\sin^2\omega}\frac{\partial\sigma_\eta}{\partial s_\xi}+$$

$$+\frac{\cos\beta-\sin\alpha\sin\omega}{2\sin^2\omega}\frac{\partial\sigma_\eta}{\partial s_\eta}+\frac{\cos\beta}{2\sin\omega}\frac{\partial}{\partial s_\xi}(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})+$$

$$+\frac{\cos\alpha}{2\sin\omega}\frac{\partial}{\partial s_\eta}(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})+\frac{1}{2\sin^3\omega}\left[\frac{\cos\alpha}{\rho_\eta}-\frac{\cos\beta}{\rho_\xi}+\frac{\cos(\alpha-\omega)}{\rho'_\xi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(\beta+\omega)}{\rho'_\eta}\right](\sigma_\xi-\sigma_\eta)+\frac{1}{\sin^3\omega}\left(\frac{\cos\alpha}{\rho'_\xi}+\frac{\cos\beta}{\rho'_\eta}\right)(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})+$$

$$+\Xi\cos\alpha+\mathrm{H}\cos\beta=0,$$

$$\frac{\sin\alpha-\cos\beta\sin\omega}{2\sin^2\omega}\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial s_\xi}-\frac{\sin\alpha\cos\omega}{2\sin^2\omega}\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial s_\eta}-\frac{\sin\beta\cos\omega}{2\sin^2\omega}\frac{\partial\sigma_\eta}{\partial s_\xi}+$$

$$+\frac{\sin\beta+\cos\alpha\sin\omega}{2\sin^2\omega}\frac{\partial\sigma_\eta}{\partial s_\eta}+\frac{\sin\beta}{2\sin\omega}\frac{\partial}{\partial s_\xi}(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})+$$

$$+\frac{\sin\alpha}{2\sin\omega}\frac{\partial}{\partial s_\eta}(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})+\frac{1}{2\sin^3\omega}\left[\frac{\sin\alpha}{\rho_\eta}-\frac{\sin\beta}{\rho_\xi}+\frac{\sin(\alpha-\omega)}{\rho'_\xi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(\beta+\omega)}{\rho'_\eta}\right](\sigma_\xi-\sigma_\eta)+\frac{1}{\sin^3\omega}\left(\frac{\sin\alpha}{\rho'_\xi}+\frac{\sin\beta}{\rho'_\eta}\right)(\tau_{\xi\eta}+\tau_{\eta\xi})+$$

$$+\Xi\sin\alpha+\mathrm{H}\sin\beta=0,$$

observînd că între componentele forței masice în coordonate carteziene ortogonale și componentele corespunzătoare în coordonate curbilinii oarecare există relațiile

$$X=\Xi\cos\alpha+\mathrm{H}\cos\beta, \qquad (2.17)$$

$$Y=\Xi\sin\alpha+\mathrm{H}\sin\beta.$$

Eliminînd pe Ξ sau pe H între aceste ecuații și ținînd seama de (1.30) și (2.2), regăsim ecuațiile de echilibru (2.15).

Ținînd seama de (1.28), putem scrie aceste ecuații și cu ajutorul coordonatelor (ξ, η).

2.3. *Coordonate curbilinii izogonale.* În particular, în cazul coordonatelor curbilinii izogonale avem

$$\rho'_\xi=\rho_\xi, \quad \rho'_\eta=\rho_\eta, \qquad (2.18)$$

ecuațiile (2.15) transformîndu-se în consecință. În cazul coordonatelor carteziene oblice ($1/\rho_\xi = 1/\rho_\eta = 0$; $s_\xi = \xi$, $s_\eta = \eta$) se obțin ecuațiile

$$\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi}+\sin\omega\frac{\partial\tau_{\eta\xi}}{\partial\eta}-\cos\omega\frac{\partial\sigma_\eta}{\partial\eta}+\Xi\sin^2\omega=0,$$

$$\sin\omega\frac{\partial\tau_{\xi\eta}}{\partial\xi}-\cos\omega\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_\eta}{\partial\eta}+\mathrm{H}\sin^2\omega=0, \qquad (2.19)$$

pe care le-am dedus anterior [4].

2.4. *Coordonate curbilinii ortogonale.* În special, în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale este valabilă o relație de simetrie pentru tensiunile tangențiale

$$\tau_{\xi\eta}=\tau_{\eta\xi} \qquad (2.20)$$

iar pentru variația tensiunilor în jurul unui punct obținem relațiile

$$\sigma_n=\frac{1}{2}(\sigma_\xi+\sigma_\eta)+\frac{1}{2}(\sigma_\xi-\sigma_\eta)\cos 2(n,\xi)+\tau_{\xi\eta}\sin 2(n,\xi),$$

$$\tau_n=\frac{1}{2}(\sigma_\xi-\sigma_\eta)\sin 2(n,\xi)-\tau_{\xi\eta}\cos 2(n,\xi), \qquad (2.21)$$

de aceeaşi formă ca şi cele în coordonate carteziene ortogonale; putem deci aplica toate rezultatele cunsocute în acest caz [5].

Relaţiile de trecere de la componentele tensorului tensiune în coordonate carteziene ortogonale la cele în coordonate curbilinii ortogonale vor deveni

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha,\\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha,\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \tag{2.22'}$$

iar relaţiile inverse se scriu

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) + \frac{1}{2}(\sigma_\xi - \sigma_\eta)\cos 2\alpha - \tau_{\xi\eta}\sin 2\alpha,\\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) - \frac{1}{2}(\sigma_\xi - \sigma_\eta)\cos 2\alpha + \tau_{\xi\eta}\sin 2\alpha,\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_\xi - \sigma_\eta)\sin 2\alpha + \tau_{\xi\eta}\cos 2\alpha. \tag{2.23'}$$

De asemenea, ecuaţiile de echilibru (2.15) se scriu în coordonate curbilinii ortogonale sub forma dată de G. Lamé [1]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial s_\xi} + \frac{\partial\tau_{\xi\eta}}{\partial s_\eta} + \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{\rho_\eta} + 2\frac{\tau_{\xi\eta}}{\rho_\xi} + \Xi = 0,\\ &\frac{\partial\tau_{\xi\eta}}{\partial s_\xi} + \frac{\partial\sigma_\eta}{\partial s_\eta} - \frac{\sigma_\xi - \sigma_\eta}{\rho_\xi} + 2\frac{\tau_{\xi\eta}}{\rho_\eta} + \mathrm{H} = 0.\end{aligned} \tag{2.24}$$

În cazul în care alegem ca linii de coordonate traiectoriile tensiunilor normale principale, obţinem ecuaţiile lui J. C. Maxwell [2], [3] (tensiunile tangenţiale sînt nule)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_1}{\partial s_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} + \Xi = 0,\\ &\frac{\partial\sigma_2}{\partial s_2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} + \mathrm{H} = 0.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Dacă liniile de coordonate sînt traiectoriile tensiunilor tangențiale extreme[1]), obținem ecuațiile (tensiunile normale corespunzătoare sînt semisuma tensiunilor normale principale)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_3'}{\partial s_3} + \frac{\partial \tau_3}{\partial s_{3'}} + 2\frac{\tau_3}{\rho_3} + \Xi = 0, \\ &\frac{\partial \tau_3}{\partial s_3} + \frac{\partial \sigma_3'}{\partial s_{3'}} + 2\frac{\tau_3}{\rho_{3'}} + \mathrm{H} = 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Ecuațiile (2.25) și (2.26) sînt utile în integrarea aproximativă, de-a lungul traiectoriilor tensiunilor principale, cînd se folosesc metode fotoelastice.

2.5. *Coordonate curbilinii armonice.* În cazul unor coordonate curbilinii armonice (ξ, η), ecuațiile de echilibru (2.15) capătă forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} - \frac{1}{h}\left[\frac{\partial h}{\partial \xi}(\sigma_\xi - \sigma_\eta) + 2\frac{\partial h}{\partial \eta}\tau_{\xi\eta}\right] + \frac{1}{h}\Xi = 0, \\ &\frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{h}\left[\frac{\partial h}{\partial \eta}(\sigma_\xi - \sigma_\eta) - 2\frac{\partial h}{\partial \xi}\tau_{\xi\eta}\right] + \frac{1}{h}\mathrm{H} = 0, \end{aligned} \tag{2.27}$$

unde h este parametrul diferențial de ordinul întîi al lui Lamé, dat de (1.62).

3. STARE DE DEFORMAȚIE

Pentru a studia starea de deformație, în cazul problemei plane a teoriei elasticității în coordonate curbilinii oarecare, vom introduce întîi vectorul deplasare și apoi tensorul deformație specifică.

3.1. *Deplasări.* Punctul din planul median, care coincide, înainte de deformație, cu punctul geometric M (ξ, η), se va găsi, după deformație, în punctul M^*. Componentele vectorului deplasare $\overline{MM^*}$, după liniile de coordonate $\eta = \mathrm{const}$ și $\xi = \mathrm{const}$ (tangentele la aceste linii în punctul M) vor fi (fig. 3) u_ξ și u_η. Putem scrie cu ușurință, prin proiecții pe axele Ox și Oy, relațiile care exprimă componentele vectorului deplasare în coordonate carteziene în funcție de componentele vectorului deplasare în coordonate curbilinii oarecare, sub forma

$$\begin{aligned} u &= u_\xi \cos\alpha + u_\eta \cos\beta, \\ v &= u_\xi \sin\alpha + u_\eta \sin\beta. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Putem calcula și relațiile inverse

$$\begin{aligned} u_\xi &= \operatorname{cosec}\omega\,(u \sin\beta - v\cos\beta), \\ u_\eta &= \operatorname{cosec}\omega\,(-u\sin\alpha + v\cos\alpha). \end{aligned} \tag{2.28'}$$

---

[1]) Pentru care folosim indicii 3 și 3'.

3.2. *Deformații specifice.* Tensorul deformație specifică, simetric în raport cu diagonala principală, va avea forma

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi & \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta} & \varepsilon_\eta \end{Bmatrix}, \tag{2.29}$$

unde ε_ξ, ε_η sînt deformațiile specifice liniare (lungirile specifice) iar $\gamma_{\xi\eta}$ este deformația specifică unghiulară (lunecarea specifică), relativă la unghiul ω.

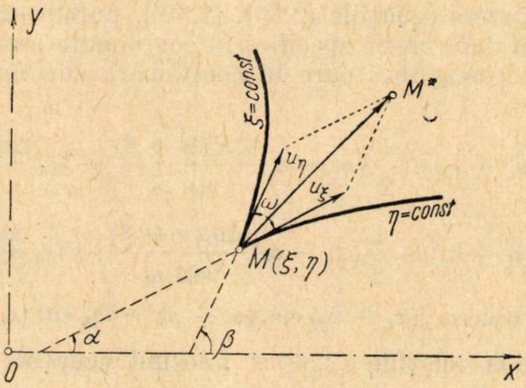


Fig. 3

Ținînd seama de formulele care exprimă deformațiile specifice corespunzătoare unei direcții oarecare cu ajutorul deformațiilor specifice ε_x, ε_y, γ_{xy}, în coordonate carteziene ortogonale [5], putem scrie

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha, \\ \varepsilon_\eta &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\beta + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\beta. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Observăm de asemenea că rotirile tangentelor la liniile de coordonate în punctul M vor fi date de

$$\gamma_\xi = \frac{\partial v}{\partial x}\cos^2\alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\sin^2\alpha,$$

$$\gamma_\eta = \frac{\partial v}{\partial x}\cos^2\beta + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\sin\beta\cos\beta - \frac{\partial u}{\partial y}\sin^2\beta.$$

Lunecarea specifică relativă la unghiul ω fiind dată de

$$\gamma_{\xi\eta} = \gamma_\xi - \gamma_\eta$$

şi ţinînd seama de relaţiile lui Cauchy

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.31}$$

obţinem deformaţia unghiulară

$$\gamma_{\xi\eta} = \sin\omega\,[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos(\alpha+\beta) + \gamma_{xy}\sin(\alpha+\beta)]. \tag{2.30'}$$

Rezolvînd invers ecuaţiile (2.30), (2.30′), putem exprima şi componentele tensorului deformaţie specifică în coordonate carteziene în funcţie de componentele corespunzătoare în coordonate curbilinii oarecare, sub forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) + \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\omega} - \gamma_{\xi\eta}\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\omega}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) - \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\omega} - \gamma_{\xi\eta}\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\omega}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\gamma_{xy} = -\operatorname{cosec}\omega\,[(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\cos(\alpha+\beta) - \gamma_{\xi\eta}\sin(\alpha+\beta)]. \tag{2.32'}$$

Pornind de la relaţiile (2.30) şi folosind ecuaţiile (2.31), obţinem

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\sin^2\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= \cos\alpha\left(\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \sin\alpha\left(\sin\alpha\frac{\partial v}{\partial y} + \cos\alpha\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

şi analog pentru ε_η. Cu ajutorul operatorilor (1.40), căpătăm

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\partial u}{\partial s_\xi}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial s_\xi}\sin\alpha, \\ \varepsilon_\eta &= \frac{\partial u}{\partial s_\eta}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial s_\eta}\sin\beta. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Analog, folosind şi relaţiile (1.41), putem scrie

$$\gamma_{\xi\eta} = -\frac{\partial u}{\partial s_\xi}\sin\alpha + \frac{\partial u}{\partial s_\eta}\sin\beta + \frac{\partial v}{\partial s_\xi}\cos\alpha - \frac{\partial v}{\partial s_\eta}\cos\beta. \tag{2.33'}$$

Pornind de la ecuaţiile (2.28) şi ţinînd seama de (1.27′) şi (1.29), putem scrie

$$\frac{\partial u}{\partial s_\xi} = \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\xi}\cos\alpha + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi}\cos\beta + \frac{u_\xi}{\rho_\xi}\sin\alpha + \frac{u_\eta}{\rho_\xi}\sin\beta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial s_\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\eta}\cos\alpha + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\eta}\cos\beta - \frac{u_\xi}{\rho'_\eta}\sin\alpha - \frac{u_\eta}{\rho_\eta}\sin\beta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial s_\xi} = \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\xi}\sin\alpha + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi}\sin\beta - \frac{u_\xi}{\rho_\xi}\cos\alpha - \frac{u_\eta}{\rho'_\xi}\cos\beta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial s_\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\eta}\sin\alpha + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\eta}\sin\beta + \frac{u_\xi}{\rho'_\eta}\cos\alpha + \frac{u_\eta}{\rho_\eta}\cos\beta.$$

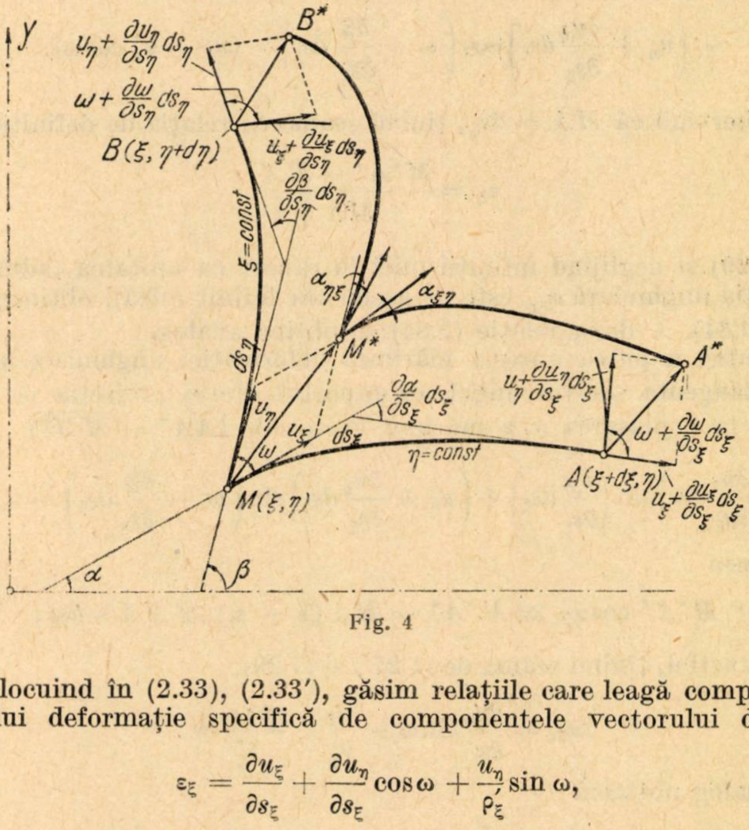

y
B*
$u_\eta + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\eta} ds_\eta$
$\omega + \frac{\partial \omega}{\partial s_\eta} ds_\eta$
$B(\xi, \eta + d\eta)$
$u_\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\eta} ds_\eta$
$\frac{\partial \beta}{\partial s_\eta} ds_\eta$
$\xi = const$
$\alpha_{\eta\xi}$
$\alpha_{\xi\eta}$
M*
A*
ds_η
$u_\eta + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi} ds_\xi$
$\frac{\partial \alpha}{\partial s_\xi} ds_\xi$
u_η
u_ξ
ds_ξ
ω
$\eta = const$
$\omega + \frac{\partial \omega}{\partial s_\xi} ds_\xi$
$A(\xi + d\xi, \eta)$
$u_\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\xi} ds_\xi$
$M(\xi, \eta)$
α
β

Fig. 4

Înlocuind în (2.33), (2.33′), găsim relaţiile care leagă componentele tensorului deformaţie specifică de componentele vectorului deplasare

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi}\cos\omega + \frac{u_\eta}{\rho'_\xi}\sin\omega,$$
$$\varepsilon_\eta = \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\eta} + \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\eta}\cos\omega + \frac{u_\xi}{\rho'_\eta}\sin\omega, \tag{2.34}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \left(\frac{\partial u_\xi}{\partial s_\eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi}\right)\sin\omega - \left(\frac{1}{\rho_\xi} + \frac{\cos\omega}{\rho'_\eta}\right)u_\xi - \left(\frac{1}{\rho_\eta} + \frac{\cos\omega}{\rho'_\xi}\right)u_\eta. \tag{2.34′}$$

Dar este mai interesant să ajungem la aceste rezultate în mod direct, studiind deformarea unui unghi elementar AMB din planul median (fig. 4), care — după deformație — devine $A^\star M^\star B^\star$. Putem scrie relația vectorială

$$\overline{M^\star A^\star} - \overline{MA} = \overline{AA^\star} - \overline{MM^\star}.$$

Proiectînd pe direcția deplasării u_ξ, obținem

$$M^\star A^\star \cos\alpha_{\xi\eta} - MA = \left(u_\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\xi} ds_\xi\right) \cos\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_\xi} ds_\xi\right) +$$
$$+ \left(u_\eta + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi} ds_\xi\right) \cos\left(\omega + \frac{\partial \beta}{\partial s_\xi} ds_\xi\right) - (u_\xi + u_\eta \cos\omega).$$

Observînd că $MA = ds_\xi$, ținînd seama de relația de definiție

$$\varepsilon_\xi = \frac{M^\star A^\star - MA}{MA} \tag{2.35}$$

și de (1.29) și neglijînd infiniții mici în raport cu unitatea (admitem că deformația unghiulară $\alpha_{\xi\eta}$ este de asemenea infinit mică), obținem prima relație (2.34). A doua relație (2.34) se obține analog.

Pentru a putea aprecia mărimea deformației unghiulare $\alpha_{\xi\eta}$, vom calcula tangenta acestui unghi, ca raportul dintre proiecția pe direcția normală la deplasarea u_ξ a mărimii vectoriale $(\overline{AA^\star} - \overline{MM^\star})$

$$\left(u_\xi + \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\xi} ds_\xi\right) \sin\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_\xi} ds_\xi\right) + \left(u_\eta + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi} ds_\xi\right) \sin\left(\omega + \frac{\partial \beta}{\partial s_\xi} ds_\xi\right) - u_\eta \sin\omega$$

și lungimea

$$M^\star A^\star \cos\alpha_{\xi\eta} \cong M^\star A^\star = MA\,(1 + \varepsilon_\xi) \cong MA = ds_\xi\,;$$

căpătăm astfel, ținînd seama de (1.27′) și (1.29),

$$\alpha_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi} \sin\omega - \frac{u_\xi}{\rho_\xi} - \frac{\cos\omega}{\rho'_\xi} u_\eta. \tag{2.36}$$

Analog obținem

$$\alpha_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\eta} \sin\omega - \frac{u_\eta}{\rho_\eta} - \frac{\cos\omega}{\rho'_\eta} u_\xi, \tag{2.36′}$$

de unde, ținînd seama de relația de definiție a lunecării specifice

$$\gamma_{\xi\eta} = \alpha_{\xi\eta} + \alpha_{\eta\xi}, \tag{2.35′}$$

regăsim relația (2.34′).

3.3. *Variația deformațiilor specifice în jurul unui punct.* În cadrul micilor deformații, putem aproxima arcele de curbă care constituie laturile unui unghi infinit mic prin corzile corespunzătoare. Astfel, lungirea specifică corespunzătoare unei direcţii oarecare $\bar{n}$ va fi dată de

$$\begin{aligned}\varepsilon_n = \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) + \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\cos 2(n,\xi) + \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta}\sin 2(n,\xi) - \\ - \left[\frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\sin 2(n,\xi) + \gamma_{\xi\eta}\sin^2(n,\xi)\right]\operatorname{cotg}\omega\end{aligned} \qquad (2.37)$$

iar lunecarea specifică corespunzătoare direcţiilor $\bar{n}$ şi $\bar{m}$, care fac între ele unghiul ω, se scrie sub forma (fig. 5)

$$\gamma_{nm} = -(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\sin 2(n,\xi) + \gamma_{\xi\eta}\cos 2(n,\xi). \qquad (2.37')$$

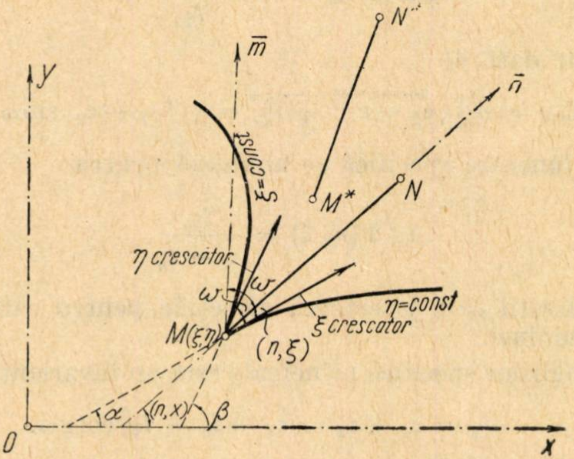


Fig. 5

Studiul deformaţiilor specifice în jurul unui punct $M(\xi,\eta)$ ne conduce la direcţiile principale $M1$, $M2$, date de

$$\operatorname{tg} 2(n,\xi) = \frac{\gamma_{\xi\eta} - (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\operatorname{cotg}\omega}{\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta + \gamma_{\xi\eta}\operatorname{cotg}\omega}. \qquad (2.38)$$

În acest caz, lunecarea specifică γ_{nm} nu se va anula, necorespunzînd unui unghi drept, fiind dată de

$$\gamma_{12} = \cos 2(n,\xi)\,[\gamma_{\xi\eta} - (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\operatorname{tg} 2(n,\xi)],$$

unde ţinem seama de (2.38); obţinem astfel

$$\gamma_{12} = \pm\sqrt{(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)^2 + \gamma_{\xi\eta}^2}\cos\omega, \qquad (2.39)$$

această lunecare anulîndu-se numai în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale ($\omega = \pi/2$) sau în punctele singulare, pentru care

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_\eta, \quad \gamma_{\xi\eta} = 0. \qquad (2.40)$$

Lungirile specifice principale vor fi date de

$$\varepsilon_{1.2} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta - \gamma_{\xi\eta}\operatorname{cotg}\omega \pm \operatorname{cosec}\omega\sqrt{(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)^2 + \gamma^2_{\xi\eta}}\right]. \qquad (2.41)$$

În acest caz, lunecarea specifică (2.39) se poate scrie sub forma

$$\gamma_{12} = \pm\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\sin 2\,\omega. \qquad (2.39')$$

Lunecarea specifică γ_{nm} capătă valori extreme pentru două direcții ortogonale precizate de

$$\operatorname{tg} 2\,(n,\,\xi) = -\frac{\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta}{\gamma_{\xi\eta}}, \qquad (2.42)$$

valori care sînt date de

$$\gamma_{\text{extr}} = \pm\sqrt{(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)^2 + \gamma^2_{\xi\eta}} = \pm\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin\omega. \qquad (2.43)$$

Această lunecare specifică se anulează pentru

$$\operatorname{tg} 2\,(n,\,\xi) = \frac{\gamma_{\xi\eta}}{\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta}, \qquad (2.44)$$

deci pentru direcții care bisectează direcțiile pentru care capătă valori maxime sau minime.

Suma lungirilor specifice principale este un invariant și va fi dată de

$$J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta - \gamma_{\xi\eta}\operatorname{cotg}\omega. \qquad (2.45)$$

Obținem un al doilea invariant sub forma

$$\begin{aligned} J_2 = \varepsilon_1\,\varepsilon_2 = \varepsilon_\xi\,\varepsilon_\eta - \frac{\gamma^2_{\xi\eta}}{4} - \frac{1}{4}[(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)^2\operatorname{cotg}\omega\, + \\ + 2\,(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta)\gamma_{\xi\eta}]\operatorname{cotg}\omega\,; \end{aligned} \qquad (2.45')$$

deci lungirile specifice principale vor fi date de ecuația de gradul al doilea

$$\varepsilon^2 - J_1\,\varepsilon + J_2 = 0. \qquad (2.46)$$

Ținînd seama de (2.38) și (2.41), obținem cu ușurință și

$$\operatorname{tg}(n,\,\xi) = \frac{2\,(\varepsilon_{1.2} - \varepsilon_\xi)}{\gamma_{\xi\eta} - (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\operatorname{cotg}\omega}. \qquad (2.47)$$

3.4. *Ecuația de continuitate.* Eliminînd pe u_ξ și pe u_η între (2.34), (2.34'), găsim ecuația de continuitate pe care trebuie să o verifice deformațiile specifice ε_ξ, ε_η, $\gamma_{\xi\eta}$. Eliminarea directă fiind dificilă, observăm că putem folosi ecuația de continuitate cunoscută din cazul coordonatelor carteziene ortogonale

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \, \partial y}; \tag{2.48}$$

aplicăm astfel operatorii (1.46), (1.46′) relațiilor (2.32), (2.32′), obținînd ecuația de continuitate în coordonate curbilinii oarecare într-o formă destul de complicată. Această formă neinteresînd în mod deosebit, observăm că — ținînd seama de ecuațiile de echilibru și de legea lui Hooke — suma deformațiilor specifice liniare ε_x și ε_y este dată de

$$\Delta\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{1-\mu^2}{E}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right), \tag{2.49}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală al lui Young, iar μ este coeficientul de contracție transversală al lui Poisson.

Rezultă că, ținînd seama de operatorii (1.45) și de relațiile de transformare (2.17), obținem

$$\begin{aligned}\Delta\,(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta - \gamma_{\xi\eta}\operatorname{cotg}\omega) = -\frac{1-\mu^2}{E}\Bigg\{\frac{\partial \Xi}{\partial s_\xi} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial s_\eta} + \\ + \operatorname{cosec}\omega\left[\left(\frac{\cos\omega}{\rho_\xi} + \frac{1}{\rho'_\eta}\right)\Xi + \left(\frac{\cos\omega}{\rho_\eta} + \frac{1}{\rho'_\xi}\right)\mathrm{H}\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.50}$$

unde operatorul lui Laplace este dat de (1.47).

În absența forțelor masice, invariantul J_1 este armonic și putem scrie

$$\Delta\,(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta - \gamma_{\xi\eta}\operatorname{cotg}\omega) = 0. \tag{2.51}$$

Ecuațiile (2.50) și (2.51) reprezintă ecuațiile de continuitate ale deformațiilor în coordonate curbilinii oarecare.

3.5. *Coordonate curbilinii izogonale.* Este interesant de remarcat că, în cazul unor coordonate curbilinii izogonale, relațiile care leagă componentele tensorului deformație specifică de componentele vectorului deplasare capătă forma

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi &= \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\xi} + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi}\cos\omega + \frac{u_\eta}{\rho_\xi}\sin\omega,\\ \varepsilon_\eta &= \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\eta} + \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\eta}\cos\omega + \frac{u_\xi}{\rho_\eta}\sin\omega,\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \sin\omega\left[\frac{\partial u_\xi}{\partial s_\eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi} - \frac{\delta\,(ds_\xi)}{ds_\xi\,ds_\eta}u_\xi - \frac{\delta\,(ds_\eta)}{ds_\xi\,ds_\eta}u_\eta\right], \tag{2.52′}$$

unde $\delta\,(ds_\xi)$, $\delta\,(ds_\eta)$ sînt variațiile elementelor de arc ds_ξ, respectiv ds_η, date de (1.31).

3.6. *Coordonate curbilinii ortogonale.* În cazul coordonatelor curbilinii ortogonale obţinem simplificări mai importante. Astfel, componentele vectorului deplasare în coordonate curbilinii ortogonale se exprimă cu ajutorul componentelor corespunzătoare în coordonate carteziene ortogonale prin relaţiile

$$\begin{aligned} u_\xi &= u\cos\alpha + v\sin\alpha, \\ u_\eta &= -u\sin\alpha + v\cos\alpha, \end{aligned} \tag{2.53}$$

relaţiile inverse fiind

$$\begin{aligned} u &= u_\xi\cos\alpha - u_\eta\sin\alpha, \\ v &= u_\xi\sin\alpha + u_\eta\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2.53'}$$

Relaţiile de tip Cauchy, care leagă deformaţiile specifice de deplasări, devin

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\xi} + \frac{u_\eta}{\rho_\xi}, \\ \varepsilon_\eta &= \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\eta} + \frac{u_\xi}{\rho_\eta}, \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial s_\eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial s_\xi} - \frac{u_\xi}{\rho_\xi} - \frac{u_\eta}{\rho_\eta}. \tag{2.54'}$$

Componentele tensorului deformaţie specifică în coordonate curbilinii ortogonale se exprimă în raport cu cele în coordonate carteziene ortogonale sub forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha, \\ \varepsilon_\eta &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha, \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\alpha + \gamma_{xy}\cos 2\alpha, \tag{2.55'}$$

relaţiile inverse fiind

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) + \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta}\sin 2\alpha, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) - \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta}\sin 2\alpha, \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\gamma_{xy} = (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\sin 2\alpha + \gamma_{\xi\eta}\cos 2\alpha, \tag{2.56'}$$

similare cu relațiile (2.22), (2.22′), (2.23), (2.23′) din cazul tensiunilor.

De asemenea, variația deformațiilor în jurul unui punct este dată de

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) + \frac{1}{2}(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\cos 2(n, \xi) + \frac{1}{2}\gamma_{\xi\eta}\sin 2(n, \xi), \\ \gamma_{nm} &= -(\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)\sin 2(n, \xi) + \gamma_{\xi\eta}\cos 2(n, \xi). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Aceste relații fiind de aceeași formă cu cele din cazul coordonatelor carteziene ortogonale, putem folosi în întregime rezultatele corespunzătoare [5].

Ecuația de continuitate (2.50) se scrie sub forma

$$\Delta(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) = -\frac{1-\mu^2}{E}\left(\frac{\partial \Xi}{\partial s_\xi} + \frac{\partial H}{\partial s_\eta} + \frac{\Xi}{\rho_\eta} + \frac{H}{\rho_\xi}\right), \tag{2.58}$$

operatorul lui Laplace fiind dat de (1.57). În lipsa forțelor masice, suma deformațiilor specifice liniare devine o funcție armonică

$$\Delta(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) = 0. \tag{2.59}$$

3.7. *Coordonate curbilinii armonice.* Relațiile de tip Cauchy, care leagă componentele tensorului deformație specifică de componentele vectorului deplasare capătă forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\varepsilon_\xi &= \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} - \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial \eta}u_\eta, \\ \frac{1}{h}\varepsilon_\eta &= \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} - \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial \xi}u_\xi, \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\frac{1}{h}\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \xi} - \frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}u_\xi + \frac{\partial h}{\partial \xi}u_\eta\right), \tag{2.60′}$$

în coordonate curbilinii (ξ, η), h fiind parametrul diferențial de ordinul întîi al lui Lamé.

Toate celelalte considerații făcute pentru coordonate curbilinii ortogonale rămîn valabile.

4. LEGEA LUI HOOKE

Vom admite că legea constitutivă a corpului elastic, omogen și izotrop considerat (relația între componentele tensorului tensiune și componentele tensorului deformație specifică) este liniară. În acest caz (cazul micilor deformații) ne putem referi în întregime la rezultatele obținute în cazul studiului problemei plane a teoriei elasticității în coordonate carteziene oblice [4].

Putem scrie astfel relațiile care leagă tensiunile de deformații specifice sub forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\xi - \mu\sigma_\eta + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\operatorname{cotg}\omega\right], \\ \varepsilon_\eta &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\eta - \mu\sigma_\xi + (\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi})\operatorname{cotg}\omega\right], \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{2G}(\tau_{\xi\eta} + \tau_{\eta\xi}), \tag{2.61'}$$

unde G este modulul de elasticitate transversală. Aceste constante elastice sînt legate prin relația

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{2.62}$$

Menționăm că relațiile (2.61), (2.61′) sînt valabile pentru cazul unei stări de tensiune plană. În cazul unei stări de deformație plană trebuie să înlocuim aceste constante cu constantele elastice generalizate

$$E_0 = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{1-\mu}. \tag{2.63}$$

Dacă admitem legea lui Hooke, se poate verifica cu ușurință că direcțiile principale ale tensorului deformație specifică coincid cu direcțiile principale ale tensorului tensiune.

În cazul coordonatelor curbilinii ortogonale legea lui Hooke devine

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{E}(\sigma_\xi - \mu\sigma_\eta), \\ \varepsilon_\eta &= \frac{1}{E}(\sigma_\eta - \mu\sigma_\xi), \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{G}\tau_{\xi\eta}, \tag{2.64'}$$

căpătînd aceeași formă ca și în cazul coordonatelor carteziene ortogonale.

Primită la redacție la 14 iunie 1962

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НЕКОТОРЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

II. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

РЕЗЮМЕ

Во второй части работы, вводя нормальные напряжения σ_ξ, σ_η и касательные напряжения $\tau_{\xi\eta} \neq \tau_{\eta\xi}$, определяются напряжения, соответствующие некоторому направлению (n, ξ) и изучаются их изменения, получая основные направления, главные нормальные напряжения и т.д. Устанавливаются также соотношения между составляющими тензора напряжения в прямоугольных декартовых координатах и соответствующие составляющие в некоторых криволинейных координатах. Уравнения упругого равновесия получаются аналогичным путем.

Вводя затем составляющие u_ξ и u_η вектора перемещения, удельные линейные деформации ε_ξ, ε_η и удельная угловая деформация $\gamma_{\xi\eta}$ выражаются в зависимости от соответствующих составляющих в прямоугольных декартовых координатах. Изучаются изменения удельных деформаций вокруг некоторой точки, определяются основные направления, главные удельные удлинения и т.д. Получаются также соотношения типа Коши, связывающие составляющие тензора удельной деформации с составляющими вектора перемещения и устанавливается уравнение непрерывности деформаций.

Как закон образования твердого упругого тела вводится закон типа Гука для плосконапряженного состояния и состояния плоской деформации.

Приводятся частные результаты, полученные для случая изогональных, прямоугольных и гармонических координат.

SUR LE PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES CURVILIGNES QUELCONQUES

II. ÉTAT DE SOLLICITATION

RÉSUMÉ

Dans la deuxième partie du travail, en introduisant les tensions normales σ_ξ, σ_η et les tensions tangentielles $\tau_{\xi\eta} \neq \tau_{\eta\xi}$, l'auteur détermine les tensions correspondant à une direction quelconque (n, ξ) et étudie leur variation. Il obtient ainsi les directions principales, les tensions normales principales, etc. On trouve aussi les relations entre les composantes du tenseur tension en coordonnées cartésiennes orthogonales et les composantes correspondantes en coordonnées curvilignes quelconques. Les équations d'équilibre élastique sont obtenues d'une manière analogique.

En introduisant ensuite les composantes u_ξ et u_η du vecteur déplacement, les déformations linéaires ε_ξ, ε_η et la déformation angulaire $\gamma_{\xi\eta}$, on exprime celles-ci en fonction des composantes correspondantes en coordonnées cartésiennes orthogonales. On étudie la variation des déformations autour d'un point et on détermine les directions principales, les déformations linéaires principales, etc. On obtient en outre les relations du type Cauchy entre les composantes du tenseur déformation et les composantes du vecteur déplacement et on établit l'équation de continuité des déformations.

Comme loi constitutive du corps solide élastique on introduit une loi du type Hooke pour un état de tension plane et pour un état de déformation plane.

On particularise les résultats obtenus pour les coordonnées isogonales, orthogonales et harmoniques.

BIBLIOGRAFIE

1. G. LAMÉ, *Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité*, Journal de Math. pures et appl., **VI**, 37 (1841).
2. J. C. MAXWELL, *On the Equilibrium of the Elastic Solids*. Trans. of the Roy. Soc. of Edinbourgh, **20**, I, 87 (1853).
3. — *On the Determination of the Pressures Which Act in the Interior of Transparent Solids From Observations of the Action of the Solid in Polarized Light*, Collected Papers, **I**, 68.
4. P. P. TEODORESCU, *Asupra problemei plane a elasticității în coordonate oblice*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *2*, 391 (1958).
5. — *Probleme plane în teoria elasticității*, **I**, Ed. Acad. R.P.R., București, 1961.
6. — *Asupra problemei plane a teoriei elasticității în coordonate curbilinii oarecare*. **I.** *Introducere. Preliminarii matematice*. St. cerc. mec. apl., **XIII**, *5*, 1233 (1962).

STUDII

REZOLVAREA PROBLEMEI PLANE A TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN CAZUL UNOR FORȚE MASICE OARECARE

DE

CRISTIAN TEODOSIU

Rezolvarea problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecare se poate reduce la rezolvarea aceleiași probleme în absența forțelor masice, cu condiția determinării unei soluții particulare a sistemului de ecuații al problemei plane și a modificării condițiilor la limită.

Încă din 1929, G. V. Kolosov [1] a indicat o metodă de construirea soluției particulare în cazul domeniului elastic simplu-conex și al forțelor masice, ale căror componente sînt funcții analitice de variabilele x, y. Această metodă a fost aplicată în unele cazuri particulare de F. Szelągovski [3].

În 1955, utilizînd funcția de tensiune, P. P. Teodorescu [4] iar apoi, independent, L. I.Diatlovițki [5] și M. Sokolovski [6], au redus problema găsirii soluției particulare a problemei plane în cazul domeniului elastic simplu-conex, la determinarea unei soluții particulare a unei ecuații biarmonice neomogene.

În cele ce urmează vom indica o metodă care permite determinarea soluției particulare a sistemului de ecuații al problemei plane, în cazul general al domeniului multiplu-conex și al unor forțe masice care satisfac condiții de regularitate foarte largi, prin integrale singulare bidimensionale în cazul general și prin determinări de primitive în cazul forțelor masice, ale căror componente sînt funcții analitice de coordonate.

1. ECUAŢIILE FUNDAMENTALE

În cazul problemei plane a teoriei elasticităţii, ecuaţiile de echilibru static, exprimate în tensiuni, în prezenţa forţelor masice, se scriu sub forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

unde am notat cu X şi Y componentele forţei masice pe unitatea de volum.

Sistemul (1) se poate pune sub forma echivalentă

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\sigma_y - \sigma_x + 2\, i\, \tau_{xy}) - \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_x + \sigma_y) = X - i\, Y, \tag{2}$$

unde

$$z = x + i\, y,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Între componentele tensiunii σ_x, σ_y, τ_{xy} şi cele ale deplasării u, v, în cazul corpurilor izotrope şi omogene, există relaţiile

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\, i\, \tau_{xy} = -4\mu \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{4\,\mu}{\varkappa - 1}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial \bar{z}}\right), \tag{4}$$

unde

$$U = u + i\, v,$$

$\varkappa = \dfrac{\lambda + 3\,\mu}{\lambda + \mu}$ în cazul stării de deformaţie plană, $\varkappa = \dfrac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu}$ în cazul stării de tensiune plană, iar λ şi μ sînt constantele lui Lamé.

Să introducem acum funcţia

$$\Phi = \mu\left(\frac{\vartheta}{\varkappa - 1} + \frac{2\, i\, \omega}{\varkappa + 1}\right), \tag{5}$$

unde

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Ţinînd seama că între U şi Φ există relaţia de legătură

$$2\,\mu \frac{\partial U}{\partial z} = \varkappa\, \Phi - \overline{\Phi}, \tag{6}$$

precum și de relațiile (3) și (4), putem pune ecuația (2) sub forma echivalentă

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2(\varkappa + 1)} F, \tag{7}$$

unde am notat $F = X + iY$.

Vom presupune că $F \in C_\alpha^n(\bar{D})$, deci că este o funcție continuă împreună cu derivatele ei parțiale pînă la ordinul n inclusiv ($n \geqslant 0$) iar derivatele de ordinul n sînt mărginite și satisfac o condiție Hölder de exponent α, $0 < \alpha \leqslant 1$, în $\bar{D}$. De asemenea, vom presupune că domeniul D ocupat de corpul elastic este mărginit și aparține clasei C_α^n, deci că frontiera lui este alcătuită dintr-un număr finit de curbe simple închise, fiecare fiind dată de o ecuație de forma $z = z(s)$, unde z este afixul punctului de pe curba respectivă, s este abscisa lui curbilinie, măsurată de la o origine fixată arbitrar pe acea curbă, iar $z(s)$ aparține clasei C_α^n.

În acest caz ecuația (7), care este echivalentă cu un sistem Cauchy-Riemann neomogen admite [9] soluția generală

$$\Phi = \varphi'(z) - \frac{1}{2(\varkappa + 1)} T_D F, \tag{8}$$

unde $\varphi(z)$ este o funcție oarecare monogenă în D, $\varphi'(z)$ este derivata ei în raport cu z, iar

$$T_D f = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Înlocuind acum în (6), obținem

$$\frac{\partial}{\partial z} \{2\mu U - \varkappa \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)}\} = -\frac{1}{2(\varkappa + 1)} (\varkappa T_D F - \bar{T}_D \bar{F}), \tag{9}$$

unde
$$\bar{T}_D f = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\bar{\zeta} - \bar{z}}.$$

Așa cum a arătat I. N. Vekua, dacă $f \in C_\alpha^n(\bar{D})$, atunci $T_D f$, $\bar{T}_D f \in C_\alpha^{n+1}(\bar{D})$ și deci ecuația (9) admite soluția generală

$$2\mu U = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)} \bar{T}_D T_D F + \frac{1}{2(\varkappa+1)} \bar{T}_D \bar{T}_D \bar{F}, \tag{10}$$

unde am notat cu $\psi(z)$ o funcție oarecare, monogenă în D.

Ținînd seama de (6) și (10), relațiile (3) și (4) se mai scriu

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\} + \frac{\varkappa}{1 + \varkappa} T_D \bar{F} - \\ - \frac{1}{1 + \varkappa} \Pi_D T_D F, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\} - \frac{1}{1 + \varkappa} (T_D F + \bar{T}_D \bar{F}), \tag{12}$$

unde
$$\Pi_D f = \frac{\partial T_D f}{\partial z} = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^2}, \tag{13}$$

iar dacă $f \in C^n_\alpha(\bar{D})$, atunci $\Pi_D f$ există în sensul valorii principale după Cauchy şi aparţine clasei $C^n_\alpha(\bar{D})$.

Se mai observăm că în cazul domeniului multiplu-conex, funcţiile $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ sînt în general, neuniforme. Întrucît însă dacă F este uniformă, atunci $T_D F$, $\bar{T}_D F$ şi $\Pi_D F$ sînt de asemenea uniforme, structura funcţiilor $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ se poate stabili ca în absenţa forţelor masice, urmînd raţionamentele lui N. I. Mushelişvili ([2], p. 122), în ipoteza că tensiunile sînt funcţii uniforme de punct.

Se obţine ([2], [7]) :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{m} (A_k z + \gamma_k) \ln (z - z_k) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{m} \gamma'_k \ln (z - z_k) + \psi_0(z), \end{aligned} \tag{14}$$

unde $\varphi_0(z)$ şi $\psi_0(z)$ sînt funcţii oarecare olomorfe (monogene şi uniforme) în D, z_k este un punct ales arbitrar în interiorul conturului C_k,

$$A_k = \frac{\mu \omega_k}{\pi(\varkappa + 1)}, \quad \gamma_k = \frac{2\mu\,(v'_k - i\,u'_k) - X_k + i\,Y_k}{2\,\pi\,(1 + \varkappa)},$$

$$\gamma'_k = \frac{2\,\mu\,(v'_k + i\,u'_k) + \varkappa\,(X_k - i\,Y_k)}{2\,\pi\,(1 + \varkappa)},$$

u'_k, v'_k, ω_k sînt caracteristicile distorsiunii aplicate unei tăieturi ce uneşte C_k cu C_{m+1} fără să intersecteze celelalte contururi, iar X_k şi Y_k sînt componentele rezultantei forţelor exterioare aplicate asupra conturului C_k (vezi § 7).

2. REZOLVAREA PROBLEMELOR LA LIMITĂ

Relaţiile (10), (11) şi (12) permit reducerea problemelor la limită fundamentale ale teoriei elasticităţii plane, în prezenţa forţelor masice, la cele corespunzătoare absenţei lor.

Pentru aceasta, să notăm cu $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$, $\tau_{xy}^{(1)}$, $u^{(1)}$, $v^{(1)}$ componentele cunoscute ale tensiunii şi deplasării convenţionale corespunzătoare soluţiei particulare a ecuaţiei (7), $\Phi_1 = -\frac{1}{2\,(\varkappa + 1)}\, T_D F$ şi cu $\sigma_x^{(0)}$, $\sigma_y^{(0)}$, $\tau_{xy}^{(0)}$, $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ componentele tensiunii respectiv deplasării convenţionale, care corespund soluţiei generale, $\Phi_0 = \varphi'(z)$, a ecuaţiei (7) pentru cazul $F = 0$, deci în absența forțelor masice. Cu aceste notații, relațiile (10), (11) şi (12) se mai scriu sub forma

$$2\,\mu\, U = \varkappa\, \varphi\,(z) - z\,\overline{\varphi'\,(z)} - \overline{\psi\,(z)} + 2\,\mu\, U^{(1)}, \tag{10'}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy} = 2\,\{\bar z\,\varphi''(z) + \psi'(z)\} + \sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2\,i\,\tau_{xy}^{(1)}, \tag{11'}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'\,(z)}\} + \sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}, \tag{12'}$$

unde am notat

$$2\,\mu\, U^{(1)} = 2\,\mu\,(u^{(1)} + i\,v^{(1)}) = -\frac{\varkappa}{2\,(1+\varkappa)}\,\overline{T}_D\, T_D\, F + \frac{2}{1+\varkappa}\,\overline{T}_D\,\overline{T}_D\,\overline{F},$$

$$\sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2\,i\,\tau_{xy}^{(1)} = \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,T_D\,\overline{F} - \frac{1}{1+\varkappa}\,\Pi_D\,T_D\,F, \tag{15}$$

$$\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} = -\frac{1}{1+\varkappa}\,(T_D\,F + \overline{T}_D\,\overline{F}).$$

În cazul primei probleme la limită fundamentale, vom folosi relația lui Kolosov

$$2\,(N - i\,T) = \sigma_x + \sigma_y - (\sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy})\; e^{2\,i\,\alpha}, \tag{16}$$

unde N şi T sînt componentele tensiunii exterioare, după normala n exterioară domeniului şi după tangenta la conturul C îndreptată spre stînga dacă se priveşte în lungul lui n, iar α este unghiul dintre n şi axa Ox măsurat de la aceasta din urmă. Ținînd seama de relațiile (11′), (12′) şi (15), obținem din (16) condiția la limită

$$\varphi'\,(t) + \overline{\varphi'(t)} - e^{2\,i\,\alpha}\,\{\overline{t}\,\varphi''\,(t) + \psi'\,(t)\} = N_0 - i\,T_0 = N - i\,T -$$
$$- (N_1 - i\,T_1), \text{ pe } C, \tag{17}$$

unde am notat cu $N_1 - i\,T_1$ valoarea la limită, cunoscută, a expresiei

$$-\frac{1}{2\,(1+\varkappa)}\,(T_D F + \overline{T}_D\,\overline{F}) - e^{2\,i\,\alpha}\left\{\frac{\varkappa}{2\,(1+\varkappa)}\,T_D\,\overline{F} - \frac{1}{2\,(1+\varkappa)}\,\Pi_D\,T_D F\right\}.$$

Observăm că rezolvarea primei probleme la limită fundamentale în prezența forțelor masice s-a redus la rezolvarea aceleiași probleme în absența forțelor masice, cu condiția modificării tensiunilor exterioare date pe frontiera lui D prin introducerea tensiunilor convenționale $N_1 - i\,T_1$.

După cum se știe, prima problemă la limită fundamentală poate avea soluție numai cu condiția ca vectorul rezultant și momentul rezultant al tensiunilor exterioare aplicate pe frontiera lui D să fie nule. Or, utilizînd formula lui Green și ținînd seama de relațiile care exprimă echilibrul corpului elastic sub acțiunea forțelor masice și a tensiunilor exterioare, obținem succesiv

$$R_x^{(0)} + i\,R_y^{(0)} = \int_C (\sigma_{nx}^{(0)} + i\,\sigma_{ny}^{(0)})\,ds = \int_C (\sigma_{nx} + i\,\sigma_{ny})\,ds - \int_C (\sigma_{nx}^{(1)} + i\,\sigma_{ny}^{(1)})\,ds =$$

$$= -\iint_D (X + i\,Y)\,dx\,dy - \int_C (\sigma_x^{(1)} + i\,\tau_{xy}^{(1)})\,dy - (\tau_{xy}^{(1)} + i\,\sigma_y^{(1)})\,dx =$$

$$= -\iint_D \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial y} + X \right) + i \left(\frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(1)}}{\partial y} + Y \right) \right\} dx\,dy = 0,$$

$$M^{(0)} = \int_C (x\sigma_{ny}^{(0)} - y\sigma_{nx}^{(0)})\,ds = \int_C (x\sigma_{ny} - y\sigma_{nx})\,ds -$$

$$- \int_C (x\sigma_{ny}^{(1)} - y\sigma_{nx}^{(1)})\,ds = -\iint_D (xY - yX)\,dx\,dy -$$

$$- \int_C (y\tau_{xy}^{(1)} - x\sigma_y^{(1)})\,dx + (x\tau_{xy}^{(1)} - y\sigma_x^{(1)})\,dy =$$

$$= -\iint_D \left\{ x\left(\frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^{(1)}}{\partial y} + X \right) - y\left(\frac{\partial \sigma_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial y} + Y \right) \right\} dx\,dy = 0,$$

ultimele transformări din relațiile de mai sus fiind justificate de faptul că $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$, $\tau_{xy}^{(1)}$ reprezintă o soluție particulară a sistemului (1).

În cazul celei de-a doua probleme la limită fundamentale, obținem din (10′)

$$\varkappa\,\varphi(t) - t\,\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu\,\{u(t) + i\,v(t)\} - 2\mu\,U^{(1)}(t), \text{ pe } C, \tag{18}$$

unde $u(t)$ și $v(t)$ reprezintă valorile date pe C ale componentelor deplasării, iar $2\mu\, U^{(1)}(t)$ reprezintă valoarea la limită, cunoscută, a expresiei

$$-\frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)}\,\bar{T}_D\,T_D\,F + \frac{1}{2(\varkappa+1)}\,\bar{T}_D\,\bar{T}_D\,\bar{F}.$$

Observăm că rezolvarea celei de-a doua probleme la limită fundamentale în prezența forțelor masice, s-a redus la rezolvarea aceleiași probleme în absența forțelor masice, cu condiția modificării condițiilor la limită pe frontiera lui D, prin introducerea componentelor deplasării convenționale $u^{(1)}$ și $v^{(1)}$.

În cele ce urmează ne vom ocupa de aplicarea teoriei generale expuse în § 1 și 2 în două cazuri particulare importante : cazul forțelor masice care derivă dintr-un potențial și cazul forțelor masice analitice în raport cu variabilele x și y.

3. CAZUL FORȚELOR MASICE CARE DERIVĂ DINTR-UN POTENȚIAL

Să presupunem că forțele masice derivă dintr-un potențial $V(x, y)$ uniform în domeniul D și aparținînd clasei $C_{\alpha}^{n+1}(\overline{D})$, $n \geqslant 0$. În acest caz componentele forței masice sînt date de relațiile

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{19}$$

și deci

$$F = X + i\,Y = -2\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \in C_{\alpha}^{n}(\overline{D}).$$

Ținînd seama de (19), putem pune ecuația (7) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\Phi - \frac{V}{\varkappa + 1}\right) = 0, \tag{20}$$

de unde obținem pentru Φ soluția generală

$$\Phi = \varphi'(z) + \frac{V}{\varkappa + 1}, \tag{21}$$

unde $\varphi(z)$ este o funcție oarecare monogenă în D, iar $\varphi'(z)$ este derivata ei în raport cu z.

Introducînd (21) în (6) și ținînd seamă că V este o funcție cu valori reale, obținem

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{2\mu U - \varkappa\,\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)}\right\} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}V,$$

de unde

$$2\mu U = \varkappa\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\bar{T}_D V, \tag{22}$$

unde $\psi(z)$ este o funcție oarecare, monogenă în D.

Înlocuind acum (22) în (3) și (4), obținem

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\,\tau_{xy} = 2\left\{\bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)\right\} - \frac{2(\varkappa - 1)}{\varkappa + 1}\Pi_D V, \tag{23}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right\} + \frac{4}{x + 1}V. \tag{24}$$

Condițiile la limită (17) și (18) își păstrează aceeași formă, cu deosebirea că prin $N_1 - iT_1$ trebuie să înțelegem acum valoarea la limită cunoscută pe C, a expresiei

$$\frac{2}{\varkappa + 1}V + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}e^{2i\alpha}\,\Pi_D V,$$

iar prin $2\mu\, U^{(1)}(t)$ valoarea la limită cunoscută, pe C, a expresiei

$$\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\overline{T}_D\, V.$$

4. CAZUL FORȚELOR MASICE CU COMPONENTE ANALITICE ÎN RAPORT CU VARIABILELE x ȘI y

După cum am văzut, construirea soluției problemei plane a teoriei elasticității în prezența forțelor masice presupune, în cazul general, calcularea unor integrale duble singulare, ceea ce uneori îngreunează calculele numerice. De aceea prezintă un mare interes cazul particular al forțelor masice ale căror componente sînt funcții analitice de variabilele x și y, întrucît în acest caz reducerea problemelor fundamentale la cazul absenței forțelor masice presupune numai calcularea primitivelor unor funcții analitice date.

De asemenea, studierea ecuației de tipul (7), în care membrul drept este funcție analitică de variabilele x și y este important și pentru că soluțiile unor astfel de ecuații permit să se aproximeze uniform soluția ecuației al cărei membru drept este o funcție continuă arbitrară ([8], § 7).

În cele ce urmează, vom presupune că $F\,(x,\, y) = X\,(x,\, y) + i\, Y\,(x,\, y)$ este o funcție analitică de variabilele x și y, într-un domeniu simplu conex D_0 cuprinzînd în întregime domeniul D[1]. În acest caz, funcția

$$\mathcal{F}\,(z,\, \bar{z}) = \int F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\, \frac{z-\bar{z}}{2\,i}\right) d\bar{z}$$

este uniformă și analitică în raport cu argumentele, pentru $z \in D_0$, $\bar{z} \in \overline{D}_0$ (aici $\overline{D}_0$ este simetricul domeniului D_0 față de axa reală)[2].

Pe de altă parte, avem evident

$$\frac{\partial\,\mathcal{F}\,(z,\, \bar{z})}{\partial\bar{z}} = F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\, \frac{z-\bar{z}}{2\,i}\right)$$

și, ca urmare, ecuația (7) se mai poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left\{\Phi + \frac{\mathcal{F}\,(z,\, \bar{z})}{2\,(\varkappa+1)}\right\} = 0,$$

deci admite soluția generală

$$\Phi = \varphi'\,(z) - \frac{\mathcal{F}(z,\, \bar{z})}{2\,(\varkappa+1)}. \qquad (25)$$

---

[1] În acest paragraf și în cele următoare, facem ipoteza că D este un domeniu finit multiplu-conex, mărginit de un număr finit de curbe simple închise rectificabile, fără puncte comune.

[2] $\mathcal{F}$ $(z,\, \bar{z})$ reprezintă aici integrala nedefinită în raport cu argumentul $\bar{z}$, z considerîndu-se fixat în mod arbitrar.

Urmînd aceeași cale ca în § 1, obținem succesiv

$$2\,\mu\,U = \varkappa\,\varphi(z) - z\,\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)}\int \mathcal{F}(z,\bar{z})\,dz + \\ + \frac{1}{2(\varkappa+1)}\int \overline{\mathcal{F}}(\bar{z},z)\,dz, \tag{26}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy} = 2\,\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\} + \frac{\varkappa}{\varkappa+1}\int \overline{F}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{\bar{z}-z}{2i}\right) d\bar{z} - \\ - \frac{1}{\varkappa+1}\int \frac{\partial F(z,\bar{z})}{\partial z}\,d\bar{z}, \tag{27}$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\,\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\} - \frac{1}{\varkappa+1}\{\mathcal{F}(z,\bar{z}) + \overline{\mathcal{F}}(\bar{z},z)\}.^{1)} \tag{28}$$

Condițiile la limită (17) și (18) își păstrează aceeași formă, cu deosebirea că prin $N_1 - iT_1$ trebuie să înțelegem acum valoarea la limită cunoscută, pe C, a expresiei

$$-\frac{1}{2(\varkappa+1)}\int \mathcal{F}(z,\bar{z}) + \overline{\mathcal{F}}(\bar{z},z)\} - e^{2i\alpha}\left\{\frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)}\int \overline{\mathcal{F}}(\bar{z},z)\,d\bar{z} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2(\varkappa+1)}\int \frac{\partial\,\mathcal{F}(z,\bar{z})}{\partial z}\,d\bar{z}\right\},$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

iar prin $2\,\mu\,U^{(1)}(t)$, valoarea la limită cunoscută, pe C, a expresiei

$$-\frac{\varkappa}{2(\varkappa+1)}\int \mathcal{F}(z,\bar{z})\,dz + \frac{1}{2(\varkappa+1)}\int \overline{\mathcal{F}}(\bar{z},z)\,dz.$$

5. REZOLVAREA PRIMEI PROBLEME LA LIMITĂ FUNDAMENTALE PENTRU COROANA CIRCULARĂ

Ca aplicație a rezultatelor indicate în paragraful precedent să studiem cazul unei coroane circulare supuse unor tensiuni exterioare date pe frontieră și unor forțe masice oarecare cu componente funcții analitice de x și y.

Presupunem deci că domeniul D este mărginit de două circumferințe concentrice C_1 și C_2, de rază R_1 și R_2 ($R_1 < R_2$). Presupunem de asemenea, că forțele masice pot fi dezvoltate după puterile pozitive ale variabilelor x și y într-o serie uniform convergentă în cercul $|z| < R_0$, $R_0 > R_2$

$$F(x,y) = X(x,y) + i\,Y(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{pq}\,x^p y^q,$$

---

1) Formulele (25)—(28) coincid, abstracție făcînd de notații, cu cele date de Kolosov [1] în cazul forțelor masice cu componente analitice, pentru domeniul elastic simplu-conex.

unde a_{pq} sînt constante complexe cunoscute. Înlocuind în această expresie

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \; y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

și ordonînd după puterile lui z și $\bar{z}$, obținem

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} z^m \bar{z}^n.$$

Utilizînd rezultatele din § 4 și notațiile din § 2, obținem succesiv

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2(\varkappa + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{mn}}{n+1} z^m \bar{z}^{n+1}, \tag{25'}$$

$$\begin{aligned} 2\mu U^{(1)} = & -\frac{\varkappa}{2(\varkappa + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{mn}}{(m+1)(n+1)} z^{m+1} \bar{z}^{n+1} + \\ & + \frac{1}{2(\varkappa + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{mn}}{(n+1)(n+2)} z^{n+2} \bar{z}^m, \end{aligned} \tag{26'}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2i\tau_{xy}^{(1)} = & \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{c}_{nm}}{m+1} z^n \bar{z}^{m+1} - \\ & - \frac{1}{2(\varkappa + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m c_{mn}}{(n+1)(n+2)} z^{m-1} \bar{z}^{n+2}, \end{aligned} \tag{27'}$$

$$\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} = -\frac{1}{\varkappa + 1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (c_{mn} z^m \bar{z}^{n+1} + \bar{c}_{mn} z^{n+1} \bar{z}^m). \tag{28'}$$

Pentru scrierea condiției la limită, vom observa că $N_1 - iT_1$ reprezintă în acest caz valoarea la limită a expresiei $\sigma_\rho^{(1)} - i\tau_{\rho\theta}^{(1)}$, unde ρ și θ sînt coordonatele polare iar $\sigma_\rho^{(1)}$ și $\tau_{\rho\theta}^{(1)}$ sînt componentele tensiunii convenționale în aceste coordonate. Avem deci :

$$2(\sigma_\rho^{(1)} - i\tau_{\rho\theta}^{(1)}) = \sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} - e^{2i\theta}(\sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2i\tau_{xy}^{(1)}). \tag{29}$$

Utilizînd relațiile (27′), (28′) și ținînd seama că $z = \rho e^{i\theta}$, $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, obținem din (29)

$$\sigma_\rho^{(1)} - i\tau_{\rho\theta}^{(1)} = -\frac{1}{2(\varkappa + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{m+n+1} \left\{ A_{mn} e^{i(m-n-1)\theta} + B_{mn} e^{-i(m-n-1)\theta} \right\}, \tag{30}$$

unde A_{mn} și B_{mn} sînt constante complexe cunoscute, date de relațiile

$$A_{mn} = \frac{c_{mn}(m+n+2)}{(n+1)(n+2)}, \; B_{mn} = \bar{c}_{mn} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{\varkappa}{m+1} \right).$$

Notînd $k = m - n - 1$, $j = m + n + 1$, putem scrie (30) sub forma

$$\sigma_\rho^{(1)} - i\,\tau_{\rho\theta}^{(1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} d_{jk}\, \rho^j e^{ik\theta} \tag{30'}$$

unde
$$d_{jk} = -\frac{1}{2(1+\varkappa)} \varepsilon_{jk} (a_{jk} + b_{jk}),$$

$$a_{jk} = A_{\frac{j+k}{2},\, \frac{j-k-2}{2}}, \quad b_{jk} = \overline{B}_{\frac{j+k}{2},\, \frac{2+k-j}{2}},$$

iar ε_{jk} este egal cu 1 sau 0 după cum j și k sînt de aceeași paritate sau de paritate diferită.

Din (30′) obținem, pe frontiera corpului elastic,

$$\sigma_\rho^{(1)} - i\,\tau_{\rho\theta}^{(1)} = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} B'_k\, e^{ik\theta}, & \text{pe } C_1 \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} B''_k\, e^{ik\theta}, & \text{pe } C_2 \end{cases}$$

unde

$$B'_k = \sum_{j=1}^{\infty} d_{jk}\, R_1^j, \quad B''_k = \sum_{j=1}^{\infty} d_{jk}\, R_2^j.$$

Tensiunile exterioare date pe C_1 și C_2 se pot dezvolta de asemenea în serii Fourier complexe ca funcții de unghiul θ, obținîndu-se

$$\sigma_\rho - i\tau_{\rho\theta} = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C'_k\, e^{ik\theta}, & \text{pe } C_1, \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C''_k\, e^{ik\theta}, & \text{pe } C_2. \end{cases}$$

Notînd $A'_k = C'_k - B'_k$, $A''_k = C''_k - B''_k$, condiția la limită (17) se scrie

$$\varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)} - e^{2i\theta} \{ \bar{t}\varphi''(t) + \psi'(t) \} = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} A'_k\, e^{ik\theta}, & \text{pentru } t \in C_1, \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} A''_k\, e^{ik\theta}, & \text{pentru } t \in C_2. \end{cases}$$

Utilizînd soluția dată pentru această problemă la limită de N. I. Mushelisvili ([2], p. 214) putem determina componentele tensiunii și ale deplasării din relațiile (10′), (11′) și (12′) dacă ținem seama de relațiile (26′), (27′), (28′).

6. CAZUL FORȚELOR MASICE DERIVÎND DINTR-UN POTENȚIAL ANALITIC ÎN RAPORT CU VARIABILELE x ȘI y

Relațiile dezvoltate în § 3 pot fi evident simplificate, dacă potențialul $V(x, y)$ din care derivă forțele masice este uniform și analitic într-un domeniu simplu-conex D_0, care cuprinde în întregime domeniul D. În acest caz, ținînd seama de (21) putem scrie ecuația (6) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{2\mu U - \varkappa\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\int V_0(z, \bar z)\,dz\right\} = 0, \qquad (31)$$

unde am notat cu $V_0(z, \bar z)$, funcția cu valori reale

$$V_0(z, \bar z) = V(x, y) = V\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right).$$

Ecuația (31) are soluția generală

$$2\mu U = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\int V_0(z, \bar z)\,dz \qquad (32)$$

care, înlocuită în (3) și (4) dă

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\{\bar z\varphi''(z) + \psi'(z)\} - \frac{2(\varkappa-1)}{\varkappa+1}\int\frac{\partial V_0}{\partial z}\,d\bar z, \qquad (33)$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\} + \frac{4}{1+\varkappa}V_0. \qquad (34)$$

Condițiile la limită (17) și (18) își păstrează aceeași formă, cu deosebirea că prin $N_1 - iT_1$ trebuie să înțelegem acum valoarea la limită cunoscută, pe C, a expresiei

$$\frac{2}{1+\varkappa}V_0 + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}e^{2i\alpha}\int\frac{\partial V_0}{\partial z}\,d\bar z$$

iar prin $2\mu U^{(1)}(t)$ valoarea la limită cunoscută, pe C, a expresiei

$$\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\int V_0\,dz.$$

Ca exemplu să considerăm cazul unui corp care se rotește uniform în jurul unei axe perpendiculare pe planul xOy și trecînd prin 0 ; în acest caz forța de inerție corespunzătoare unității de volum are componentele

$$X = \rho\omega^2 x, \quad Y = \rho\omega^2 y,$$

unde ω este viteza unghiulară, iar ρ reprezintă de data aceasta densitatea materialului.

Observînd că în acest caz $F = X + iY = \rho\omega^2 z$, iar $V_0(z, \bar z) = -\frac{\rho\omega^2}{2}z\bar z$ este o funcție întreagă în raport cu ambele argumente, deducem că sînt îndeplinite condițiile menționate la începutul acestui paragraf, oricare ar fi conexiunea domeniului D. Formulele (32) — (34) dau în acest caz

$$2\mu U^{(1)} = -\frac{\rho\omega^2(\varkappa-1)}{4(\varkappa+1)} z^2 \bar{z},$$

$$\sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2i\tau_{xy}^{(1)} = \frac{\rho\omega^2(\varkappa-1)}{2(\varkappa+1)} \bar{z}^2,$$

$$\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} = -\frac{2}{1+\varkappa} \rho\omega^2 z\bar{z}. \qquad (35)$$

Formulele (35) permit reducerea problemei la cazul absenței forțelor masice. Din ele se pot deduce pentru componentele tensiunii și deplasării convenționale (în cazul stării de deformație plană, de exemplu) expresiile

$$u^{(1)} = -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)} x(x^2+y^2),$$

$$v^{(1)} = -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)} y(x^2+y^2),$$

$$\sigma_x^{(1)} = -\frac{2\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)} \rho\omega^2(x^2+y^2) - \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)} \rho\omega^2 x^2,$$

$$\sigma_y^{(1)} = -\frac{2\lambda+\mu}{4(\lambda+2\mu)} \rho\omega^2(x^2+y^2) - \frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)} \rho\omega^2 y^2,$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = -\frac{\mu\rho\omega^2}{2(\lambda+2\mu)} xy,$$

expresii obținute pe altă cale de N. I. Mushelisvili ([2], p. 102).

7. EXTENSIUNI POSIBILE ALE PROBLEMEI STUDIATE

Formulele de bază stabilite în § 1, sînt valabile în condiții de regularitate mult mai largi pentru funcția F și domeniul D.

Astfel toate rezultatele menționate în § 1 în legătură cu integralele singulare $T_D F$ și $\Pi_D F$ rămîn valabile și în cazul domeniului infinit cu condiția ca $F \in L_p C_\alpha^n(E)$, $1 \leqslant p < 2$, unde am notat cu $L_p C_\alpha^n(E)$ intersecția spațiilor Banach $L_p(E)$ și $C_\alpha^n(E)$, $L_p(E)$ fiind spațiul funcțiilor p-sumabile în E, iar E planul complex ([9], p. 80).

Dacă ne limităm la ipoteza continuității tensiunilor, fără să impunem și continuitatea derivatelor lor, putem impune condiții mult mai largi lui F și D, dacă D este finit. Anume, vom presupune că $F \in L_p(\bar{D})$ $p > 2$.

În acest caz, $T_D\, F$ şi deci şi Φ aparţin clasei $C_\alpha\,(\bar{D})$ unde $\alpha = \frac{p-2}{p}$, $0<\alpha<1$. În ceea ce priveşte domeniul D, vom presupune că frontiera lui, C, este alcătuită dintr-un număr finit de contururi simple închise $C_1, C_2, \ldots, C_{m+1}$, fiecare contur fiind format dintr-un număr finit de arce de clasă C^1_α, iar unghiurile interioare în punctele anguloase ale acestor arce fiind de forma $\nu\pi$ unde $0 < \nu \leqslant 2$. Vom presupune de asemenea că C_{m+1} cuprinde în interiorul său toate celelalte contururi $C_1, \ldots, C_m$. În aceste condiţii se poate arăta [10] că domeniul D se poate reprezenta conform pe domeniul canonic Δ al planului complex ζ, mărginit de circumferinţele $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m+1}$ unde Γ_{m+1} este circumferinţa cercului unitate $|\zeta| = 1$, al cărei centru $(\zeta = 0)$ aparţine domeniului Δ, iar circumferinţele $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ se găsesc în interiorul lui Γ_{m+1}. Funcţia $z = \omega(\zeta)$ care realizează transformarea conformă aparţine în acest caz clasei $C^1_{\nu_1}(\Delta + \Gamma)$, unde $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_{m+1}$, iar $\nu_1 = \min\{\nu\}$, $\{\nu\}$ fiind mulţimea valorilor ν, corespunzătoare tuturor punctelor anguloase ale frontierei Γ.

Prin transformarea conformă, ecuaţia (7) devine

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\zeta}} = -\frac{1}{2(\varkappa + 1)}\,\overline{\omega'(\zeta)}\,F(\omega), \qquad (7')$$

iar $\omega'(\zeta) \cdot F(\omega) \in L_{p'}(\Delta + \Gamma)$, $2 < p' \leqslant p$ ([9], p. 149).

Observăm că prin transformarea conformă membrul drept al ecuaţiei (7) îşi păstrează clasa, iar domeniul transformat satisface condiţiile de regularitate impuse în § 1.

Mai mult decît atît, rezultatele lui A. Zygmund şi A. Calderon ([9], p. 88) ne asigură că sistemul (1) admite soluţie generalizată în sensul lui I. N. Vekua, chiar în cazul foarte general cînd $F \in L_p(E)$, $p > 1$. Trebuie menţionat însă că aceste generalizări de natură matematică trebuie însoţite de lărgirea ipotezelor de natură fizică asupra regularităţii tensiunilor şi deformaţiilor şi de stabilirea semnificaţiei fizice a noţiunii de soluţie generalizată a sistemului (1).

Primită la redacţie la 4 august 1962

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАССОВЫХ СИЛ

РЕЗЮМЕ

Решение плоской задачи теории упругости в случае произвольных массовых сил можно свести к решению той же задачи с отсутствием массовых сил, с условием определения частного решения системы уравнений плоской задачи и изменения граничных условий.

Автор указывает метод, позволяющий определить это частное решение в общем случае многосвязной области и произвольных массовых сил, удовлетворяющих очень широким условиям регулярности при помощи особых двухмерных интегралов в общем случае и определением неопределенных интегралов в случае массовых сил, составляющие которых являются аналитическими функциями от x и y. Указанные результаты обобщают результаты, полученные Колосовым [1] для случая односвязной области и массовых сил, составляющие которых являются аналитическими функциями от x и y.

Указанный метод применяется в двух частных случаях.

SOLVING OF THE PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY IN THE CASE OF ARBITRARY BODY FORCES

ABSTRACT

The solving of the plane problem of the theory of elasticity in the case of arbitrary body forces may be reduced to the solving of the same problem in the absence of body forces, provided that a particular solution of the system of equations of the plane problem is determined and the boundary condition are modified.

The author gives a method which permits the determination of this particular solution in the general case of a multi-connected region and body forces satisfying very broad regularity conditions, by two-dimensional singular integrals in the general case and by determinations of primitive functions in the case of body forces whose components are analytical functions of co-ordinates. The results obtained generalize those obtained by Kolosov [1] for the case of the simply-connected region and body forces whose components are analytical functions of co-ordinates.

The method is applied to two particular cases.

BIBLIOGRAFIE

1. G. V. Kolosov, *Sur l'extension d'un théorème de Maurice Lévy*. C.R. Paris, *188* (1929) 1593
2. Н. И. Мушелишвили, *Некоторые основные задачи математической упругости*. Москва, 1954.
3. F. Szelangovski, *Solution of the plane problem of the theory of elasticity in rectangular coordinates, body forces being taken into consideration*. Bull. Acad. Pol. Sci., **IV**, 2 (1956).
4. P. P. Teodorescu, *Calculul grinzilor pereți cu o singură deschidere, în caz general de rezemare și încărcare*. Ed. Min. Inv., București, 1955.
5. Л. И. Дятловицкий, *Приведение плоской задачи теории упругости с объемными силами к контурной задаче при произвольном распределении объемных сил*. Инж. сборник, **XXI**, 43 (1955).
6. M. Sokolowski, *Tarcze ortotropowe pod dzilaniem sil masowych*, Arch. mech. stos., **VII**, *4*, 427 (1955).

7. C. TEODOSIU, *Asupra rezolvării problemei plane a teoriei elasticității pentru domenii multiplu-conexe, cu ajutorul funcției lui Airy*. St. cerc. mat., **XII**, *2* (1961).

8. И. Н. ВЕКУА, *Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек.* Мат. Сб. **31 (73)**, *2* (1952).

9. — *Обобщенные аналитические функции.* Москва, I, 1961.

10. S. WARSCHAWSKI, *Über das Randverhalten, der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung*. Math. Zeitschr., **35**, *3 – 4* (1932).

TEORIA STATISTICĂ A PROPRIETĂȚILOR DEFORMATIVE ALE BETONULUI

DE

MARCEL TANNENBAUM[1]

1. PROPRIETĂȚILE DEFORMATIVE ALE BETONULUI SOLICITAT LA COMPRESIUNE CENTRICĂ

1.1. Cercetările efectuate în ultimul timp au arătat influența rigidității mașinilor de încercat asupra rezultatelor experimentale obținute pe probe de beton solicitate la compresiune centrică [1]. Încercarea cea mai elementară din practica cercetărilor asupra betonului reprezintă astfel în realitate un fenomen de interacțiune complexă dintre piesa de beton și mașina de încercat, iar rezultatele reflectă nu numai proprietățile mecanice ale betonului ci și cele ale ansamblului piesă-mașină.

1.2. Pentru a elimina influența condițiilor experimentale s-au utilizat de către diferiți cercetători mașini de încercat foarte rigide sau dispozitive-anexă care să împiedice eliberarea bruscă a energiei elastice acumulate în mașina de încercat.

În toate cazurile s-au obținut diagrame $\sigma - \varepsilon$ care prezintă un maximum urmat de o ramură descendentă. Ca exemplu se dau în figura 1 diagramele pentru betoane de vîrstă diferită la data încercării, iar în figura 2 diagrame pentru betoane de rezistență diferită, obținută prin varierea raportului *a/c* [2].

Concordanța tuturor acestor date experimentale obținute prin metode foarte diferite, ne arată că fenomenul înregistrat nu este efectul unor factori întîmplători ci reprezintă manifestarea unor proprietăți mecanice fundamentale ale betonului, legate de structura intimă a acestuia.

1.3. Descoperirea ramurii descendente în diagrama $\sigma - \varepsilon$ a betonului solicitat la compresiune are o deosebită importanță pentru înțelegerea mecanismului deformației sub încărcare a betonului. Acest fapt a fost scos în evidență de mulți autori, între care și A. A. Gozdev [3].

---

[1] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC).

În general, betonul a fost considerat drept un material elastic-vîscos-plastic, iar pentru exprimarea matematică a proprietăților sale deformative s-au propus diferite modele mecanice simplificate ale structurii reale a betonului. Aceste modele constau dintr-o grupare convenabilă, în serie sau în paralel, de mai multe corpuri Maxwell și Kelvin cu alte corpuri perfect elastice sau elastic-plastice. Toate aceste modele sînt capabile să descrie în mod satisfăcător comportarea betonului în timp sub încărcări de durată ; însă nici unul dintre aceste modele nu are posibilitatea de a descrie apariția ramurii descendente în diagrama $\sigma - \varepsilon$ a betonului.

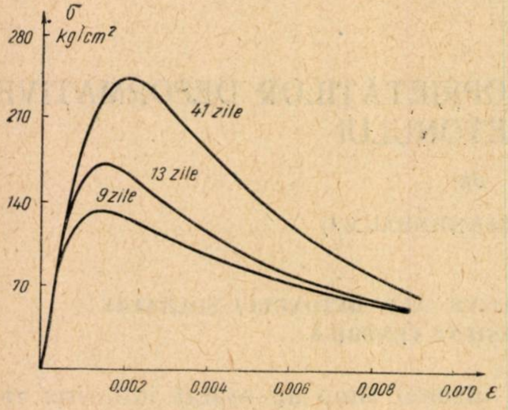


Fig. 1. — Diagrama $\sigma - \varepsilon$ pentru betoane de diferite vîrste (2)

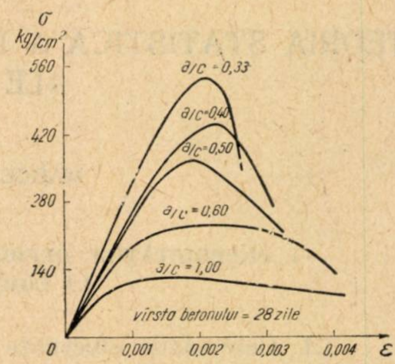


Fig. 2. — Diagrama $\sigma - \varepsilon$ pentru betoane de diferite rezistențe (2)

Ar rezulta în consecință că structura betonului este mai complexă și că manifestările cu caracter vîscos-plastic reprezintă numai un aspect al comportării betonului sub încărcări. Această concluzie este confirmată de o serie de încercări în care piese de beton au fost solicitate la compresiune centrică, cu regimuri diferite de aplicare a încărcării în timp.

În figura 3 s-au reprezentat rezultatele obținute de H. Rüsch [4] pentru prisme de beton încercate cu diferite viteze constante de creștere a deformației specifice. Cu cît este mai redusă viteza de creștere a deformației specifice, cu atît ies în evidență în mai mare măsură în comportarea betonului proprietățile cu caracter vîscos-plastic ale acestuia.

Pentru ușurința prezentării vom denumi în cele ce urmează în mod convențional proprietăți cu caracter plastic acele proprietăți ale betonului care au ca efect între altele apariția ramurii descendente în diagrama $\sigma - \varepsilon$ a betonului.

Termenul ,,plastic'' este utilizat aci în sensul general de deformație neelastică independentă de factorul timp ; nu trebue de aceea făcută confuzia cu sensul restrîns, de deformație nedefinită sub efort constant, specific cazului relativ excepțional al materialelor prezentînd palier de curgere.

1.4. R. L'Hermite [1] a încercat să extrapoleze cazul aplicării instantanee a încărcării pe baza interpretării datelor experimentale obținute în încercări la care încărcarea se aplică timp de 1 minut, apoi 10 minute, și așa în continuare pînă la 1 oră. Pentru fiecare caz în parte se înregistrează deformațiile neelastice, care se reprezintă apoi într-un grafic în funcție de durata de aplicare a încărcării. Punctele reprezentative se află pe o dreaptă care, după datele comunicate de unii autori, nu trece prin origină, adică intersectează axa ordonatelor într-un punct de valoare pozitivă (fig. 4). Aceasta înseamnă că există o deformație neelastică instantanee, care nu poate fi explicată prin proprietățile vîscos-plastice ale betonului. Dacă ne referim la nomenclatura utilizată mai sus, aceasta ar reprezenta deformația plastică pură a betonului.

Trebuie să fim atenți în folosirea termenului de deformație instantanee. Nu există deformații instantanee : există numai deformații cu viteză mare și foarte mare de creștere în cursul procesului de încărcare. Toate încercările la care ne referim s-au efectuat cu viteze nu prea mari de creștere a deformației. V. Nicolau [5] a arătat însă că, dacă se depășește o anumită valoare a acestei viteze, încep să se manifeste în structura betonului fenomene legate de inerția de transmitere a deformației și se schimbă modul de comportare a betonului.

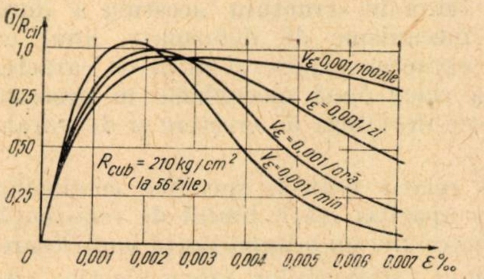


Fig. 3. — Influența vitezei de creștere a deformațiilor specifice asupra diagramei σ — ε (4).

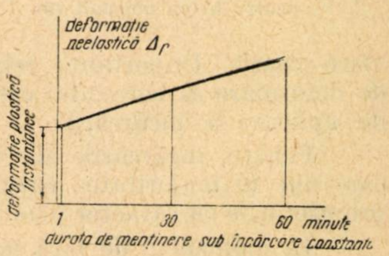


Fig. 4. — Determinarea prin extrapolare a deformației plastice instantanee (1)

Ca urmare, prin deformație instantanee plastică, în sensul extrapolării lui L'Hermite, trebuie să înțelegem acea deformație care apare sub o încărcare aplicată cu viteza cea mai mare de creștere pentru care nu încep încă să se manifeste fenomene interioare de inerție. Este evident că, în aceste condiții, nu poate exista deformație plastică pură, pentru că avem întotdeauna și o deformație vîscos-plastică, — chiar dacă este neglijabilă ca valoare, — corespunzătoare timpului finit în care se aplică încărcarea.

1.5. Încercări efectuate asupra pieselor de beton solicitate la întindere centrică au arătat că și în acest caz se obține o diagramă σ — ε cu maxim și ramură descendentă, dacă se creează condiții experimentale care să permită descărcarea betonului întins după depășirea deformației specifice corespunzătoare punctului maxim.

Ca exemplu se prezintă în figura 5 diagrama σ — ε obținută de V. V. Mihailov [6] în fibra extremă întinsă a unor elemente încovoiate de beton simplu turnate între două profile metalice.

În cazul solicitării la întindere centrică proprietățile vîscos-plastice ale betonului se manifestă în măsură redusă și ca urmare forma diagramei $\sigma - \varepsilon$ exprimă preponderența proprietăților plastice ale betonului.

Faptul că aceste proprietăți plastice se reflectă în mod analog în comportarea betonului la două solicitări cu caracter diametral opus, arată că mecanismul deformațiilor plastice este legat strîns de structura intimă a acestui material.

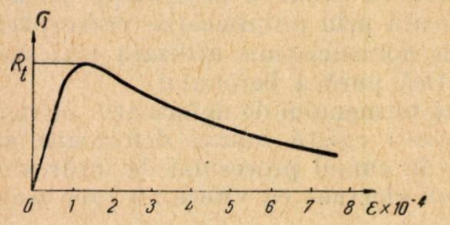


Fig. 5. — Diagrama $\sigma - \varepsilon$ la întindere pentru beton obișnuit (6).

1.6. Din analiza datelor experimentale se poate deci trage concluzia că proprietățile deformative ale betonului pot fi explicate în mod corespunzător numai dacă se admite existența în structura acestuia a două mecanisme de deformare, unul cu caracter plastic și altul cu caracter vîsco-plastic. Importanța relativă a celor două mecanisme în procesul de deformare al betonului este funcție de viteza de creștere și de durata de aplicare a încărcării.

Pentru încărcările de durată relativ redusă, specifice condițiilor care duc în majoritatea cazurilor la apariția stării limită de rezistență, proprietățile cu caracter plastic ale betonului au o importanță hotărîtoare.

În momentul de față mecanismul deformațiilor vîscos-plastice este mai bine studiat și există modele mecanice satisfăcătoare care să permită cuprinderea matematică a fenomenelor.

Studiul mecanismului deformațiilor plastice este însă abia într-o fază incipientă și nu s-au elaborat încă metode matematice pentru descrierea fenomenelor.

2. MECANISMUL DEFORMĂRII BETONULUI SUB ÎNCĂRCĂRI DE SCURTĂ DURATĂ

2.1. Datele de care dispunem în prezent asupra caracterului deformației betonului reprezintă în realitate o mulțime de caracteristici empirice, care nu explică însă esența fenomenelor și care nu sînt corelate între ele.

Cauza acestei diversități trebuie căutată în faptul că analiza proceselor deformative se limita numai la fenomenele macroscopice la scara piesei experimentale.

Ultimele rezultate obținute în fizica corpurilor solide arată că este necesară stabilirea unei deosebiri din punct de vedere principial între mărimile infinit mici matematice și fizice, respectiv stabilirea unei corelații între „punctul” matematic și părticica din materialul tehnic real care-i corespunde. Dacă în mecanica corpurilor solide se admite că legile matematic exprimate sînt valabile pentru $\varepsilon \to 0$, în realitate există o limită fizică dimensională pentru ε.

Din acest punct de vedere proprietățile mecanice ale corpurilor solide se pot grupa în 3 categorii, după caracteristicile dimensionale ale elementului minim la care sînt valabile ipotezele de calcul [7] :

1. Proprietăți macroscopice (de ordinul I) — care se opresc la elementul de dimensiunile minime pentru care nu se manifestă influența neomogeneităților locale (pori, granule, fisuri etc.).

2. Proprietăți microscopice (de ordinul II) — care se manifestă la nivelul cristalelor care compun oțelul sau al agregatului și gelului din structura betonului.

3. Proprietăți submicroscopice (de ordinul III) — care se manifestă la nivelul legăturilor moleculare sau atomice (rețeaua cristalină etc.). Proprietățile submicroscopice constituie obiectul fizicii atomice și, pentru moment, în studiul structurii betonului ele se iau în considerație numai în cazuri speciale, cînd intervin condițiile de hidratare ale granulelor de ciment.

Orice corp care este omogen la un nivel dat este de regulă neomogen la un nivel inferior și proprietățile de ordinul considerat pot fi ca atare deduse pe baza legilor statistice de distribuție ale proprietăților de ordin inferior.

În analiza macroscopică a fenomenelor, în cursul încercărilor mecanice ale corpurilor, se raportează dezvoltarea proceselor deformative la valorile medii ale eforturilor unitare în tot volumul supus solicitării. Acest mod de gîndire duce însă la o interpretare eronată, deoarece hotărîtoare nu sînt valorile medii, ci valorile maxime din mulțimea care compune media. Într-adevăr, acestea din urmă provoacă procese locale de deteriorare, care modifică esențial comportarea materialului în cursul încercării.

2.2. Aceste concluzii cu caracter principial ale fizicii corpurilor solide au fost verificate cu privire la beton prin cercetările lui O. I. Berg [8], care a studiat modificările microscopice în structura betonului în cursul procesului de încărcare pe piese prismatice solicitate la compresiune centrică.

În cursul procesului de încărcare, la atingerea unei valori date limită a efortului unitar mediu în piesă, R_m, apar pe suprafața prismei microfisuri dirijate paralel cu linia de acțiune a solicitării axiale. Aceste microfisuri se dezvoltă datorită depășirii deformației specifice limită la întindere a betonului pe o direcție perpendiculară pe linia de acțiune a solicitării axiale. Pe măsura creșterii solicitării microfisurile se extind pînă ce se atinge valoarea maximă a rezistenței betonului, — rezistența prismatică R_{pr}.

De asemenea, încercările lui F. A. Blakey și F. D. Beresford [9] au arătat că și în cazul întinderii ruperea este precedată de o deteriorare treptată a structurii betonului în cursul procesului de încărcare.

Toate aceste date reprezintă deci demonstrația experimentală a microneomogeneității structurii betonului.

2.3. S-a urmărit stabilirea unei legături funcționale între efortul unitar R_m la care se formează microfisurile în prisme solicitate la compresiune centrică și rezistența prismatică R_{pr} obținută pe aceleași prisme.

În figura 6 s-au reprezentat în coordonate semilogaritmice datele experimentale comunicate de O. I. Berg [8], completate cu datele mai noi ale lui G. N. Pisanko [10] pentru betoane de mărci superioare.

După cum se vede există o relație de legătură, care are un caracter logaritmic. Cu cît este mai mare rezistența betonului, cu atît este mai ridicată și limita relativă de apariție a microfisurilor.

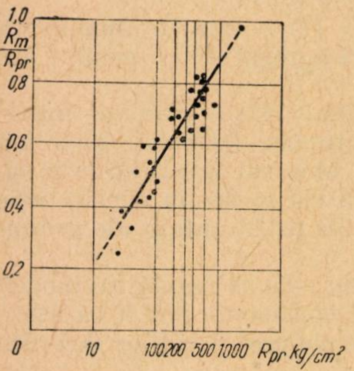


Fig. 6. — Relația între valoarea relativă a efortului unitar de apariție a microfisurilor R_m/R_{pr} și valoarea absolută a rezistenței betonului R_{pr} (8) (10).

Această concluzie experimentală nu poate fi explicată prin efectul îmbunătățirii caracteristicilor de rezistență ale materialului. Într-adevăr, rezistența la întindere crește relativ mai încet decît rezistența la compresiune, iar deformația specifică limită la întindere este aproape independentă de marca betonului. În consecință, pe baza acestor date, valoarea relativă a efortului unitar de apariție a microfisurilor ar trebui chiar să scadă o dată cu sporirea mărcii betonului.

Dacă interpretăm însă apariția microfisurilor ca un fenomen condiționat statistic, atunci apariția lor relativ mai tîrzie reprezintă numai expresia omogeneității mai ridicate a mulțimii statistice care caracterizează materialul considerat la nivelul proprietăților microscopice. Ori cu cît betonul are o rezistență mai ridicată, cu atît este și mai omogenă structura sa microscopică, fiind mai compact, cu mai puțini pori, cu o cantitate relativ mai mare de pastă de ciment care îmbracă mai uniform agregatele.

Legătura funcțională stabilită experimental exprimă deci dependența statistică a fenomenului de microfisurare de neomogeneitatea microstructurii betonului.

2.4. În cursul încercărilor la care s-a urmărit procesul de microfisurare pe piese solicitate la compresiune centrică, s-a înregistrat și dezvoltarea deformațiilor specifice ale betonului [8].

Pentru eforturi unitare relativ reduse, deformațiile specifice ar trebui să varieze practic liniar, corespunzător comportării elastice a betonului. Totuși, încă de la primele trepte se înregistrează și deformații cu caracter neelastic, a căror valoare crește o dată cu sporirea duratei de menținere a încărcării. Aceste deformații corespund proprietăților vîscos-plastice ale betonului.

După apariția primelor microfisuri se dezvoltă, în paralel cu deformațiile menționate mai sus, un alt tip de deformații neelastice, caracterizate prin faptul că apar chiar și în cazul în care viteza de încărcare este suficient de mare pentru ca deformațiile vîscos-plastice să fie neglijabile. În conformitate cu definiția de la punctul 1.3 aceste deformații corespund proprietăților plastice ale betonului.

Între apariția și dezvoltarea deformațiilor plastice și apariția și dezvoltarea microfisurilor există deci o interdependență, care se poate explica numai dacă ambele fenomene sînt considerate drept manifestarea acelorași caracteristici fundamentale ale materialului.

Mecanismul deformațiilor plastice trebuie în consecință exprimat printr-un model mecanic statistic care să reflecte structura microneomogenă a betonului.

3. MODELUL MECANIC STATISTIC AL BETONULUI

3.1. Dacă în elaborarea unei teorii statistice asupra ruperii corpurilor solide s-au realizat o serie de rezultate însemnate, concretizate în special în lucrările lui I. I. Frenkel, T. A. Kontorova și W. Weibull, în problema elaborării unei teorii statistice asupra deformării corpurilor solide nu s-a ajuns încă la soluții satisfăcătoare.

După datele din literatură, nu s-a studiat pînă în prezent un model mecanic statistic pentru deformația betonului. H. I. Cowan [11] arată posibilitatea de a se utiliza în cazul betonului un model mecanic statistic elaborat pentru studiul proprietăților deformative ale pieselor de lemn solicitate la întindere. El nu precizează însă condițiile în care acest model ar putea să exprime proprietățile mecanice reale ale diferitelor tipuri de betoane.

3.2. Începînd din momentul apariției primei microfisuri în punctul cel mai slab al elementului și pînă la distrugerea completă, fenomenele de deformație plastică ale betonului reprezintă un proces stochastic. Ruperile locale apar în primul rînd în punctele cele mai slabe și cele mai solicitate, al căror număr și ale căror proprietăți se pot caracteriza în cadrul mulțimii generale a punctelor care compun elementul cu ajutorul unei funcții de repartiție a probabilităților. Dezvoltarea în continuare a microfisurilor și fisurilor pentru fiecare treaptă ulterioară de încărcare depinde de asemenea de o oarecare funcție de repartiție a probabilităților, care se obține ca rezultat al încărcărilor anterioare.

În consecință, procesul deteriorării continue a structurii în cursul încărcării se poate trata ca un proces de tipul lanțului Markov. Cel mai simplu model al unui asemenea lanț îl constituie sistemul de bare reprezentat în figura 7. Proprietățile mecanice ale barelor se consideră variabile aleatoare.

Acest model a fost deja utilizat cu succes pentru rezolvarea unor probleme legate de condițiile de rupere ale betonului, de exemplu efectul de scară [12] [13], creșterea caracteristicilor de rezistență ale betonului solicitat la stări de eforturi neomogene (încovoiere, compresiune excentrică) în raport cu cele corespunzătoare stărilor de eforturi omogene (compresiune sau întindere axială) [13], [14]. Cu același model s-au soluționat și problemele mult mai complexe ale influenței factorului timp asupra ruperii betonului [15].

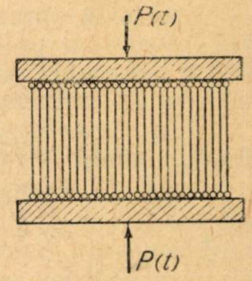


Fig. 7 — Modelul mecanic statistic al betonului.

Toate aceste rezultate justifică utilizarea aceluiași model și pentru problema stabilirii deformației betonului în procesul de încărcare.

3.3. Exprimarea matematică exactă a procesului de deformare pentru modelul considerat constituie o problemă rezolvată din punctul de vedere al aspectului pur formal [16]. Concretizarea sub formă cifrică a acestor rezultate necesită însă un aparat de calcul extrem de complicat.

În toate relațiile rolul fundamental îl au funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare la fiecare treaptă de încărcare. Ori nivelul de cunoaștere al proprietăților mecanice ale betonului nu ne permite stabilirea directă a acestor funcții. În practică se obișnuiește a se alege de la început o anumită funcție, — de cele mai multe ori pe considerentul ca forma ei algebrică să permită o simplificare importantă a calculelor, — și, din comparația rezultatului final cu datele experimentale, se verifică dacă funcția de repartiție inițial aleasă este corespunzătoare.

În aceste condiții, utilizarea unor mijloace matematice de calcul foarte precise este lipsită de eficacitatea practică, cît timp nu se poate asigura precizia necesară pentru parametrii pe baza cărora se efectuează calculul și este rațional a se merge pe linia unor simplificări radicale ale metodelor de calcul.

3.4. Cea mai esențială simplificare constă în a considera funcția aleatoare care caracterizează distribuția proprietăților elementelor componente ale modelului drept o funcție aleatoare staționară, adică a accepta că repartiția valorilor acestor proprietăți nu este influențată de procesul de încărcare. Apare evidentă aproximația introdusă prin această simplificare, deoarece apariția microfisurilor trebuie să aibă ca efect sporirea neomogeneității interne; în corpurile reale însă, dezvoltarea concomitentă inevitabilă a deformațiilor vîscos-plastice (curgere lentă și relaxare) are ca efect descărcarea punctelor mai încărcate sau mai slabe, deci reducerea neomogeneității. Este greu de a aprecia efectul final al acestor două acțiuni contrare, care diferă în funcție de viteza de încărcare, de valoarea relativă a treptei de încărcare și de marca betonului.

Această aproximație a fost deja utilizată de către N. N. Afanasiev [17] pentru o problemă asemănătoare, — determinarea pe baza statistică a diagramei $\sigma - \varepsilon$ pentru oțeluri care prezintă palier de curgere, — fără ca să influențeze în mod hotărîtor asupra rezultatelor finale.

În consecință, se consideră posibil a se accepta această simplificare fundamentală a relațiilor de calcul.

3.5. În analiza comportării modelului în cursul procesului de încărcare avem de-a face de fapt cu două cîmpuri de probabilitate, în interdependență funcțională. Avem pe de o parte cîmpul de probabilitate al proprietăților mecanice ale elementelor componente ale modelului; iar pe de altă parte cîmpul de probabilitate al eforturilor unitare produse de încărcarea exterioară în fiecare element în parte. Acest al doilea cîmp este în funcție în primul rînd de însăși proprietățile mecanice ale acestor elemente, adică de caracteristicile primului cîmp.

Analiza concomitentă a efectului ambelor cîmpuri este destul de dificilă, mai ales dacă ținem seama de numărul mare de posibilități de combinare. De aceea pare rațional a se lua în considerație pentru calculele practice cele două cazuri limită :

a) Distribuție uniformă a eforturilor unitare din elementele modelului sub efectul solicitării.

Acest caz corespunde situației cînd proprietățile mecanice ale elementelor sînt variabile aleatorii, în afara modulului de elasticitate care are aceeași valoare pentru toate elementele componente ale modelului.

b) Distribuție după o lege de repartiție oarecare a eforturilor unitare din elementele modelului sub efectul solicitării, iar toate elementele au aceeași rezistență limită la rupere.

Acest caz corespunde situației cînd toate proprietățile mecanice ale elementelor componente ale modelului au valori constante și egale între ele, iar în interiorul elementului există o distribuție de defecte de structură care are ca efect o distribuție corespunzătoare a eforturilor unitare.

Cazurile reale se încadrează între cazurile limită considerate, astfel încît prin analiza lor se poate cuprinde practic întreg domeniul de variabilitate al parametrilor cu caracter aleatoriu.

3.6. Într-o primă analiză se vor lua în considerație numai procese de încărcare care decurg destul de rapid pentru a se putea neglija practic efectul deformațiilor vîscos-plastice și în același timp nu atît de rapid încît să intervină fenomene legate de inerția de transmitere a deformației. În consecință, se vor obține diagramele $\sigma - \varepsilon$ corespunzătoare cazului idealizat al deformației plastice „pure” (instantanee).

În continuare, se va ține seama de efectul suprapunerii deformațiilor cu caracter vîscos-plastic, corespunzătoare unor încărcări aplicate într-un interval de timp definit.

4. STABILIREA DIAGRAMELOR TEORETICE $\sigma - \varepsilon$ LA COMPRESIUNE PE BAZA MODELULUI MECANIC STATISTIC AL BETONULUI, NEGLIJÎND EFECTELE CU CARACTER VÎSCOS-PLASTIC

4.1. În cazul în care se neglijează efectele cu caracter vîscos-plastic, modelul mecanic statistic al betonului se poate considera ca fiind alcătuit dintr-o mulțime de elemente perfect elastice ale căror proprietăți mecanice reprezintă variabile aleatoare, caracterizate prin funcții de repartiție date și care nu se modifică în cursul procesului de încărcare.

4.2. În primul caz limită se admite că, pentru o solicitare dată de compresiune centrică, avem același efort unitar în toate elementele componente ale modelului. Toate elementele prezintă același modul de elasticitate, iar rezistențele lor de rupere sînt distribuite după o lege de repartiție dată.

Pentru simplitatea calculului, reprezentăm curba de repartiție φ a rezistențelor în abscise reduse $p = \frac{\sigma_R}{R}$ unde σ_R este rezistența la rupere a unui element oarecare, iar R valoarea medie a distribuției mărimilor σ_R.

Considerăm că aria secțiunii piesei este egală cu unitatea, — în acest caz încărcarea exterioară va fi egală chiar cu efortul unitar macroscopic raportat la întreaga arie a secțiunii piesei, σ.

Fie o valoare oarecare a solicitării pentru care în elemente apare efortul unitar redus p. În acest caz vor ieși din lucru toate elementele cu rezistența la rupere mai mică decît p, al căror număr este egal cu probabilitatea P_p de realizare a acestui eveniment, respectiv cu suprafața hașurată din curba de repartiție a rezistențelor la rupere (fig. 8).

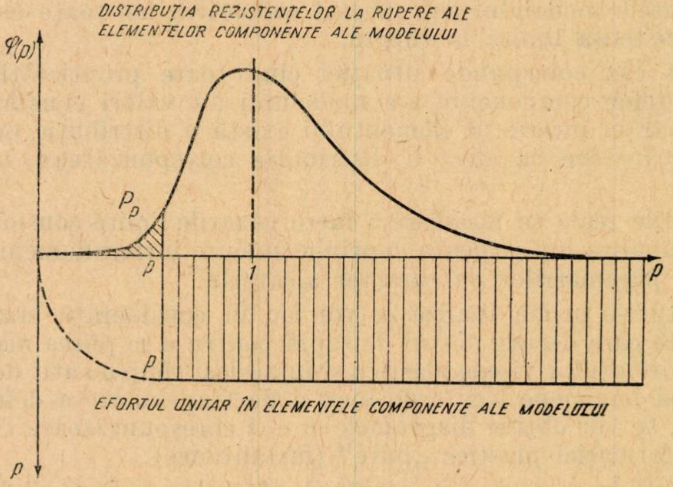

DISTRIBUȚIA REZISTENȚELOR LA RUPERE ALE ELEMENTELOR COMPONENTE ALE MODELULUI
φ(p)
P_p
p
1
p
p
EFORTUL UNITAR ÎN ELEMENTELE COMPONENTE ALE MODELULUI
p

Fig. 8. — Primul caz limită pentru stabilirea diagramei $\sigma - \varepsilon$ la compresiune a betonului pe baza modelului mecanic statistic.

Din aria secțiunii va rămîne numai porțiunea $1 - P_p$. Suma eforturilor unitare din această porțiune este egală cu valoarea solicitării exterioare, care reprezintă tocmai efortul unitar aparent macroscopic raportat la întreaga arie a secțiunii piesei, σ

$$\frac{\sigma}{R} = p\,(1 - P_p). \tag{1}$$

Deformația specifică corespunzătoare acestui efort unitar aparent macroscopic este egală cu deformația specifică a elementelor încărcate cu efortul unitar p, respectiv $\varepsilon = \frac{pR}{E}$. Pentru simplitatea calculului vom lucra cu deformații specifice reduse

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} = p, \tag{2}$$

unde ε_R este deformația specifică a elementului în cazul cînd efortul unitar este egal cu media R, $\varepsilon_R = \frac{R}{E}$.

Ca urmare, pentru obținerea diagramei $\sigma - \varepsilon$ este suficient să reprezentăm curba $p\ (1 - P_p) \div p$, unde P_p rezultă din legea de repartiție a rezistențelor elementelor componente ale modelului.

4.3. În al doilea caz limită se consideră modelul compus din elemente cu aceleași rezistențe la rupere R. Modelul este solicitat la compresiune centrică printr-un dispozitiv de încărcare cu deformație constantă. Datorită unor defecte distribuite întîmplător în structura modelului, se dezvoltă în model sub efectul acestei deformații impuse o stare de eforturi unitare care are în toate elementele secțiunii valori, distribuite după o lege de repartiție dată.

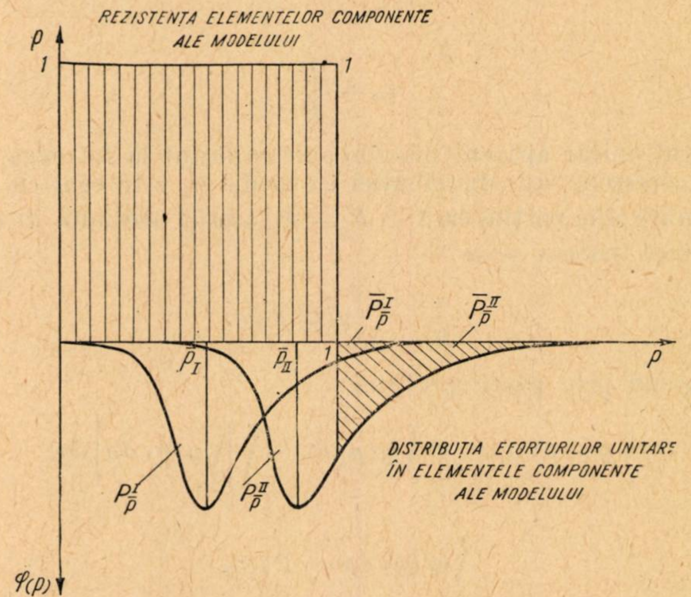

REZISTENȚA ELEMENTELOR COMPONENTE ALE MODELULUI
p
1
1
$\bar{P}_p^I$
$\bar{P}_p^{II}$
$\bar{p}_I$
$\bar{p}_{II}$
1
p
DISTRIBUȚIA EFORTURILOR UNITARE ÎN ELEMENTELE COMPONENTE ALE MODELULUI
P_p^I
P_p^{II}
φ(p)

Fig. 9. — Al doilea caz limită pentru stabilirea diagramei $\sigma - \varepsilon$ la compresiune a betonului pe baza modelului mecanic statistic.

Ca și în cazul precedent, curba de repartiție a eforturilor unitare φ se reprezintă în abscise reduse $p = \bar{\sigma}/R$ unde $\bar{\sigma}$ este efortul unitar dintr-un element dat, iar R rezistența la rupere a elementelor.

De asemenea, aria secțiunii piesei se consideră egală cu unitatea, — astfel încît încărcarea exterioară corespunzătoare deformației impuse piesei va fi egală chiar cu efortul unitar macroscopic, raportat la întreaga arie a secțiunii piesei.

Pentru o deformație impusă dată, curba de repartiție a eforturilor unitare din elementele modelului va avea o poziție determinată față de abscisa 1. Toate elementele pentru care $p > 1$ ies din lucru ; numărul lor este egal cu probabilitatea $\bar{P}_p$ de realizare a acestui eveniment, respectiv suprafața hașurată din curba de repartiție a eforturilor unitare (fig. 9).

Pe măsură ce sporește deformația impusă, curba de repartiție a eforturilor se deplasează către abscisa 1, astfel încît crește porțiunea din secțiune care iese din lucru (curbele I și II în fig. 9).

Încărcarea exterioară poate fi caracterizată prin media $\overline{p}$ a curbei de distribuție a eforturilor unitare care apar în secțiune ca efect al deformației impuse ε. Ca și în cazul precedent putem deci scrie $\varepsilon = \frac{\overline{p}R}{E}$, respectiv

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} = \overline{p} \tag{3}$$

unde

$$\varepsilon_R = \frac{R}{E}.$$

Efortul unitar aparent macroscopic raportat la întreaga arie a secțiunii, σ, corespunzător distribuției cu media $\overline{p}$, este egal cu suma eforturilor unitare din porțiunea $1 - \overline{P}_{\overline{p}} = P_{\overline{p}}$ a ariei secțiunii în care $p < 1$. În consecință putem scrie

$$\frac{\sigma}{R} = \int_0^1 \varphi(p)\, p\, dp. \tag{4}$$

Integrînd prin părți se obține

$$\int p\varphi(p)\, dp = p \int \varphi(p)\, dp - \int \left[\int \varphi(p)\, dp\right] dp.$$

Dar

$$\int \varphi(p)\, dp = P(p).$$

Deci

$$\frac{\sigma}{R} = p\, P(p)\Big|_0^1 - \int_0^1 P(p)\, dp$$

respectiv

$$\frac{\sigma}{R} = P_{\overline{p}} - \int_0^1 P(p)\, dp. \tag{5}$$

Ca urmare, pentru obținerea diagramei $\sigma - \varepsilon$ este suficient să reprezentăm curba $\left[P_{\overline{p}} - \int_0^1 P(p)\, dp\right] \div \overline{p}$, unde primul termen rezultă din legea de repartiție a eforturilor unitare în secțiune.

4.4. În mod curent se consideră că distribuția proprietăților mecanice microscopice poate fi aproximată cu o lege normală de repartiție, ceea ce a permis obținerea unor rezultate corespunzătoare în teoriile statistice asupra ruperii corpurilor solide.

În consecință, pentru obținerea diagramei $\sigma - \varepsilon$ în primul caz limită s-a considerat că rezistențele de rupere ale elementelor componente ale modelului sînt distribuite după o lege normală. Caracteristica acestei distribuții este coeficientul de variație $C_v = \sigma_0/R$, unde σ_0 reprezintă abaterea medie patratică. Valoarea coeficientului de variație crește o dată cu neomogeneitatea microscopică a corpului considerat.

În cazul distribuției normale se obișnuiește să se exprime abscisele în funcție de coeficientul de variație

$$p = 1 + n\,C_v,$$

unde n poate lua orice valori pozitive sau negative în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Ca urmare relațiile (1) și (2) se scriu

$$\frac{\sigma}{R} = (1 + n\,C_v)(1 - P_p), \qquad (6)$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} = 1 + n\,C_v. \qquad (7)$$

Valorile P_p rezultă din tabele în funcție de parametrul n [18].

În figura 10 s-au reprezentat diagramele $\sigma - \varepsilon$ obținute în acest mod pentru diferite valori ale coeficientului de variație C_v.

Pentru valori reduse ale coeficientului de variație forma diagramelor teoretice corespunde destul de bine cu diagramele experimentale pentru deformațiile plastice (fig. 1 și 2). Pentru valori ridicate ale coeficientului de variație corespondența este însă mai puțin satisfăcătoare.

Originea acestei necorespondențe constă în proprietatea curbei de repartiție a legii normale de distribuție de a avea un domeniu de variație de la $-\infty$ la $+\infty$, adică de a avea și valori negative.

Procentul de valori negative crește o dată cu coeficientul de variație, după cum rezultă din tabela 1.

Tabela 1

Procentul de valori negative în cazul distribuției normale

C_v	valori negative %
0,30	0,015
0,40	0,08
0,50	2,3
0,60	4,5
0,75	9,0
1,00	16,0

Ori valorile rezistențelor la rupere sînt prin esență mărimi pozitive și porțiunea negativă din curba de repartiție a distribuției normale este lipsită de sens fizic.

Distribuția normală nu este prin urmare potrivită pentru a descrie neomogeneitatea microscopică a corpurilor solide.

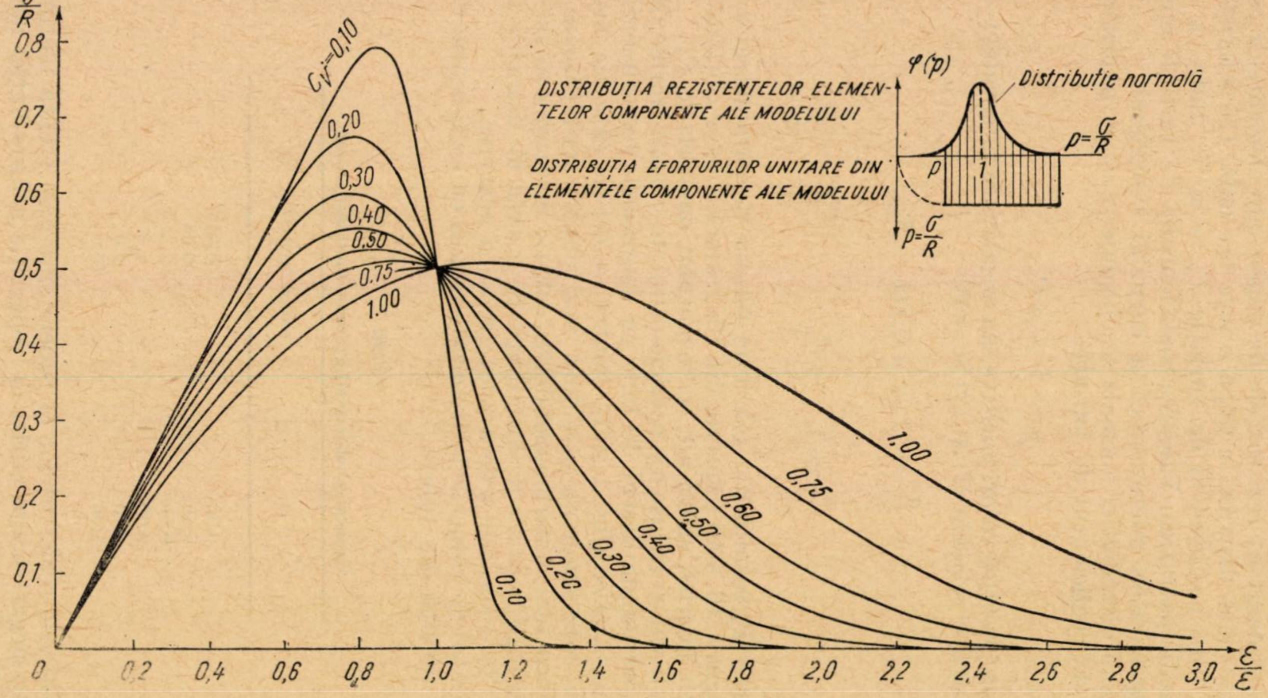


Fig. 10. — Diagrama σ— ε a modelului mecanic statistic al betonului — primul caz limită. Distribuție normală.

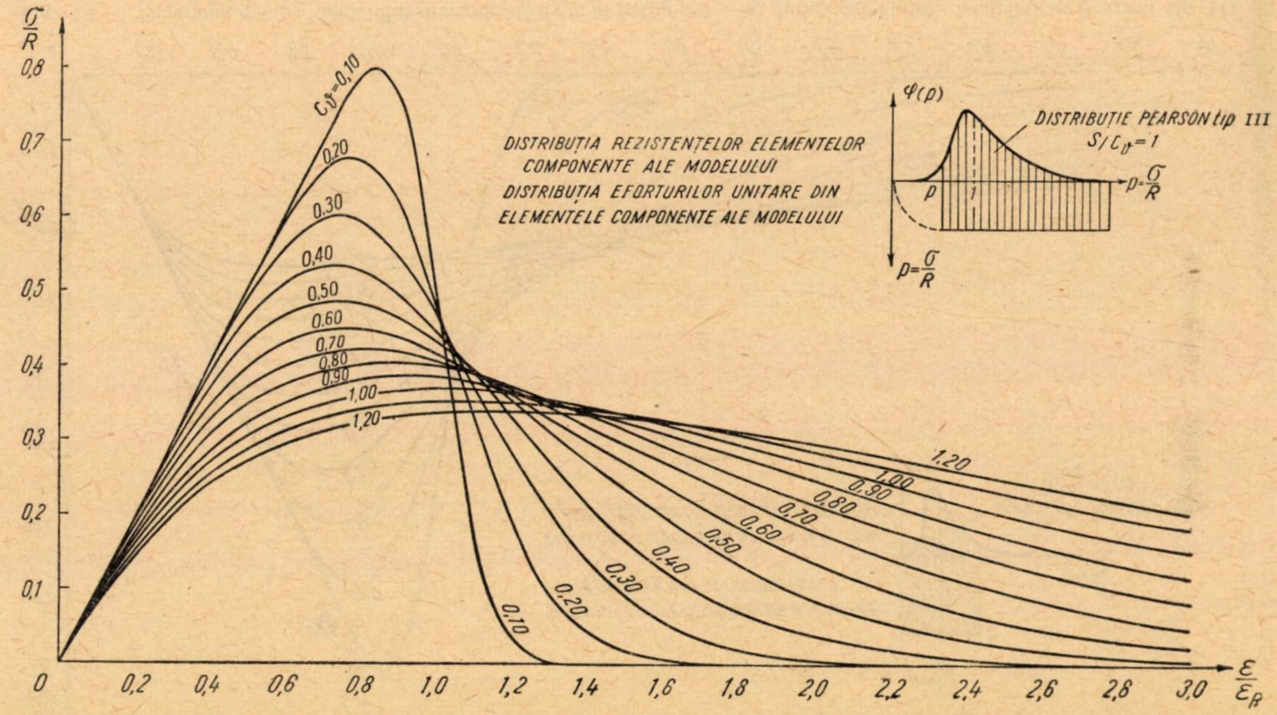


Fig. 11. — Diagrama $\sigma-\varepsilon$ a modelului mecanic statistic al betonului – primul caz limită. Distribuție Pearson tip III.

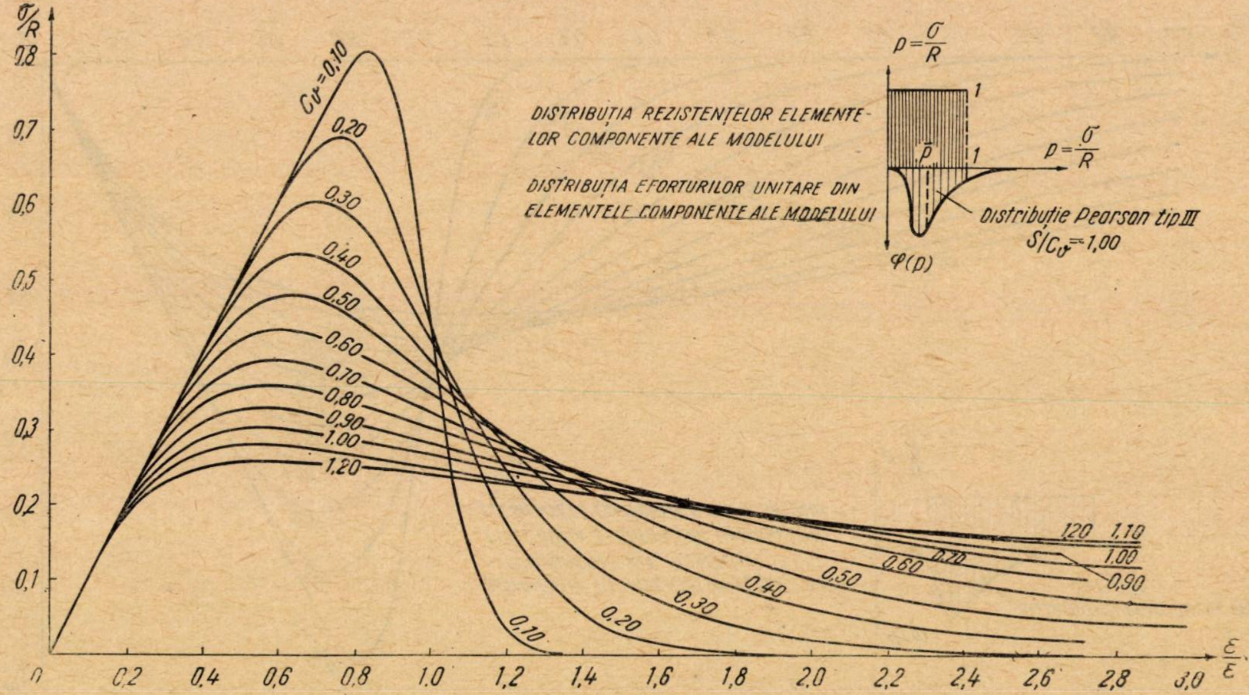


Fig. 12. — Diagrama σ — ε a modelului mecanic statistic al betonului — al doilea caz limită. Distribuție Pearson tip III.

4.5. O lege de repartiție curent utilizată în teoria statistică a corpurilor solide este cea corespunzătoare distribuției Pearson tip III. Curba de repartiție are numai valori pozitive și o anumită asimetrie dată (fig. 8). Caracteristicile acestei curbe au fost amănunțit analizate de către R. A. Muller [13].

Pentru studiul proprietăților mecanice ale betonului se consideră drept cea mai indicată curba care are asimetria S în raport constant față de coeficientul de variație C_v, respectiv $S/C_v =$ const. În acest mod se stabilește o relație funcțională între gradul de asimetrie al distribuției și neomogeneitatea interioară a materialului, ceea ce corespunde realității fizice a fenomenului.

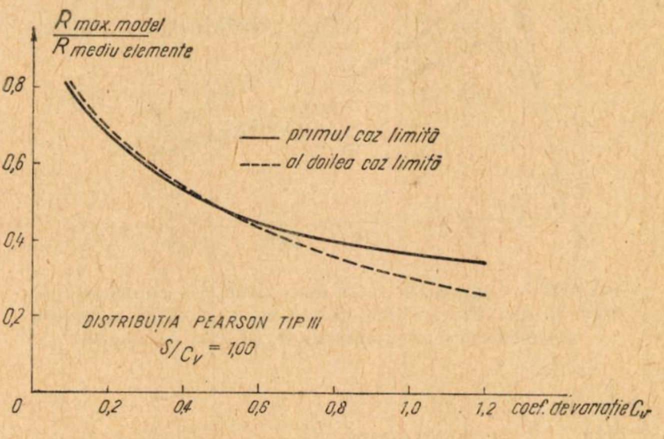


Fig. 13. — Reducerea rezistenței maxime a modelului mecanic statistic al betonului în raport cu rezistența medie a elementelor componente, în funcție de gradul de omogeneitate al structurii modelului.

Pentru calculele practice s-a folosit distribuția Pearson de tip III cu $S/C_v = 1,00$, pentru care există tabele de valori în funcție de coeficientul de variație C_v [13].

Diagramele $\sigma - \varepsilon$ obținute în această ipoteză s-au reprezentat în figura 11 pentru primul caz limită și în figura 12 pentru al doilea caz limită.

4.6. Deși în toate cazurile s-a considerat aceeași valoare pentru media rezistențelor elementelor componente ale modelului, rezistența modelului propriu-zis este mult mai redusă, diferența fiind cu atît mai mare cu cît este mai mare neomogeneitatea structurii modelului. În figura 13 s-a reprezentat pe baza datelor din figurile 11 și 12 variația raportului $R_{\text{max model}}/R_{\text{mediu elemente}}$, în funcție de coeficientul de variație C_v al curbei de repartiție. Rezultă influența hotărîtoare a omogeneității structurii asupra proprietăților mecanice ale betonului, fapt care confirmă și cantitativ necesitatea introducerii unor tehnologii care să asigure uniformitatea confecționării, îndesării și tratării ulterioare a betonului proaspăt.

Din comparația diagramelor pentru cele două cazuri limită, reprezentate în figurile 11 și 12, rezultă că diferențe apreciabile încep să se manifeste numai pentru coeficienți de variație ridicați. Diferențele se referă în special la forma porțiunii ascendente a diagramei și la poziția punctului de maxim pe diagramă.

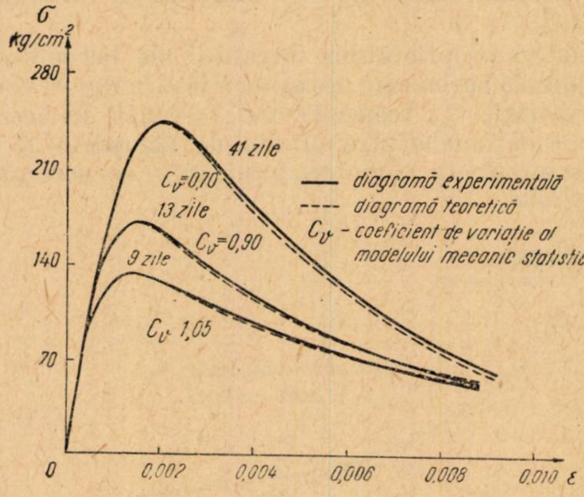


Fig. 14. — Comparație între diagramele σ — ε obținute pe modelul mecanic statistic al betonului și diagramele experimentale pentru betoane de diferite vîrste (2).

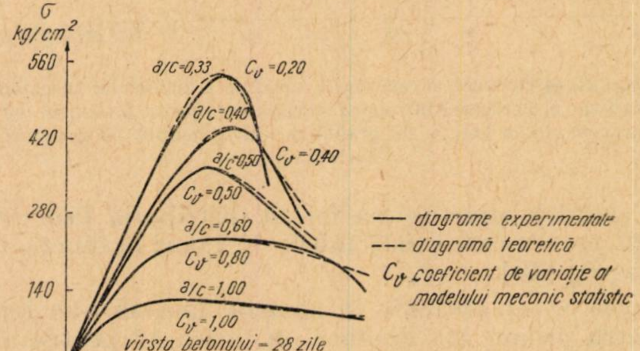


Fig. 15. — Comparație între diagramele σ — ε obținute pe modelul mecanic statistic al betonului și diagramele experimentale pentru betoane de diferite rezistențe (2).

Forma diagramelor experimentale din figurile 1 și 2 este cuprinsă între formele diagramelor teoretice corespunzătoare celor două cazuri limită, ceea ce justifică ipotezele simplificatoare introduse cu privire la cazurile limite considerate în calcul.

Pentru a urmări existența unei corespondențe între rezistența betonului și gradul de neomogeneitate a structurii acestuia, s-a încercat să se suprapună peste diagramele $\sigma - \varepsilon$ experimentale diagramele teoretice cele mai corespunzătoare ca formă.

În figurile 14 și 15 s-au trasat punctat diagramele teoretice, notînd în dreptul fiecăreia coeficientul respectiv de variație. Se constată o creștere evidentă a omogeneității structurii microscopice a betonului o dată cu marca și cu vîrsta acestuia, în concordanță cu datele experimentale referitoare la modul de formare al microfisurilor, analizate la punctul 2.3.

5. STABILIREA DIAGRAMELOR TEORETICE $\sigma - \varepsilon$ LA COMPRESIUNE PE BAZA MODELULUI MECANIC STATISTIC AL BETONULUI, ȚINÎND SEAMA ȘI DE EFECTELE CU CARACTER VÎSCOS-PLASTIC

5.1. Pentru a se ține seama de fenomenele cu caracter vîscos-plastic care se dezvoltă în beton sub acțiunea de durată a încărcărilor se poate utiliza același model mecanic statistic, dacă se admite că elementele componente ale modelului au proprietăți elastic-vîscos-plastice. În acest fel modelul capătă un caracter reologic statistic.

5.2. Proprietățile vîscos-plastice ale fiecărui element în parte pot să fie exprimate prin orice model reologic convenabil cunoscut din literatura de specialitate. Pentru stabilirea diagramei $\sigma - \varepsilon$ pe baza modelului mecanic statistic este însă mai comod să reprezentăm într-un mod nou proprietățile deformative vîscos-plastice.

În acest scop se va utiliza noțiunea de diagramă izocronă $\sigma - \varepsilon$, propusă de F. R. Shanley [19] pentru studiul fenomenelor de fluaj în construcții aviatice.

Diagramele izocrone $\sigma - \varepsilon$ rezultă din următorul mod de reprezentare al deformațiilor vîscos-plastice :

— se utilizează ca bază diagrama $\sigma - \varepsilon$ instantanee (definită în conformitate cu prevederile punctului 1.3);

— pentru fiecare valoare a efortului unitar se reprezintă deformația vîscos-plastică la intervale de timp convenabil alese;

— curbele obținute prin unirea punctelor care corespund aceluiași interval de timp reprezintă diagramele izocrone $\sigma - \varepsilon$ (fig. 16).

Diagramele izocrone $\sigma - \varepsilon$ constituie un instrument de lucru foarte util pentru studiul influenței deformației vîscos-plastice asupra comportării elementelor de construcție. În cazul de față aceste diagrame se folosesc ca mijloc de construire a diagramelor $\sigma - \varepsilon$ ale materialului vîscos-plastic pentru încărcare cu viteza constantă de deformare.

În acest scop se împarte procesul de încărcare în trepte $\Delta\varepsilon_t$, egale cu deformația corespunzătoare intervalului de timp pentru care s-au elaborat diagramele izocrone $\sigma - \varepsilon$.

Pe axa ε se separă intervale egale cu $\Delta\varepsilon_t$ și de la capătul fiecărui interval se ridică paralele cu axa ordonatelor. Efortul unitar σ pentru fiecare treaptă $\Delta\varepsilon_t$ rezultă din condiția ca deformația vîscos-plastică în intervalul de timp considerat să fie egală cu distanța dintre diagramele izocrone corespunzătoare (fig. 17).

5.3. În conformitate cu prevederile punctului 5.1, fiecare element component al modelului posedă proprietăți vîscos-plastice, definite printr-un ansamblu de diagrame izocrone. Deoarece într-o primă aproximație s-a considerat că toate elementele au aceleași proprietăți elastice, este indicat ca această aproximație să se extindă și asupra proprietăților vîscos-plastice.

În consecință, ansamblul de diagrame izocrone este același pentru toate elementele. Forma diagramelor izocrone trebuie să reflecte proprietățile vîscos-plastice specifice betonului și este ca atare indicat să se utilizeze pentru calculele practice izocrone determinate pe baza încercărilor de durată asupra pieselor de beton.

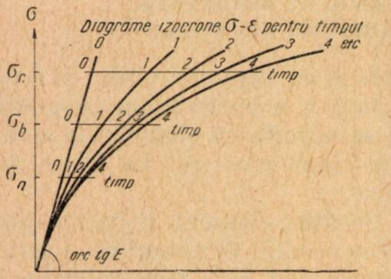


Fig. 16. — Construirea diagramelor izocrone σ — ε.

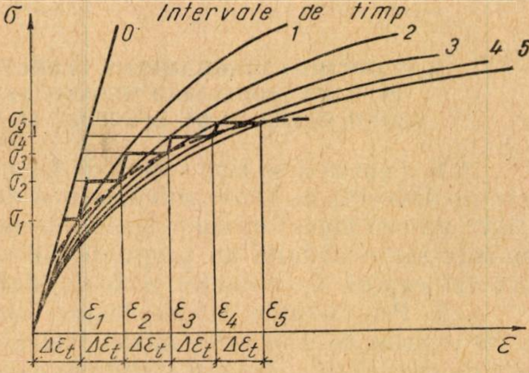


Fig. 17. — Construirea diagramei σ — ε pentru încărcare cu viteză constantă de deformare, cu ajutorul diagramelor izocrone σ — ε.

Dificultatea provine din faptul că puține încercări de durată s-au efectuat cu o variație destul de largă a eforturilor unitare, care să permită trasarea de diagrame izocrone. De asemenea, încărcarea maximă reprezintă în majoritatea cazurilor o fracțiune redusă din rezistența betonului, astfel încît diagramele izocrone nu se pot trasa decît pentru un domeniu restrîns de solicitare a betonului.

Pentru scopurile prezentei cercetări s-au supus unei prelucrări datele experimentale comunicate de Jones și Richart [20] și de N. I. Katin [21].

În figurile 18, 19, 20 s-au reprezentat diagramele izocrone obținute, în coordonate reduse (σ/R și $\varepsilon/\varepsilon_R$).

5.4. S-a luat drept bază de calcul un material al cărui model mecanic statistic este caracterizat printr-o distribuție Pearson tip III, avînd $S/C_v = 1{,}00$ și coeficientul de variație $C_v = 0{,}50$.

Diagramele $\sigma - \varepsilon$ pentru cazul deformațiilor plastice „pure” (încărcarea instantanee, definită în conformitate cu prevederile punctului 1.3) se extrag pentru cele două cazuri limită din fig. 11 și 12.

Se analizează trei viteze constante de deformare, definite în funcție de timpul în care se realizează deformația specifică ε_R, respectiv 1 minut, 1 zi și 100 zile.

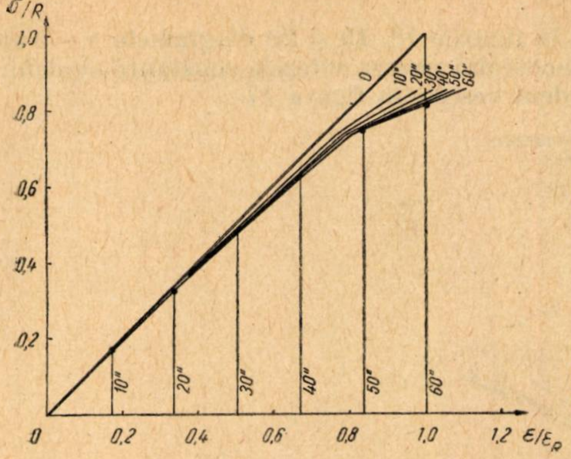
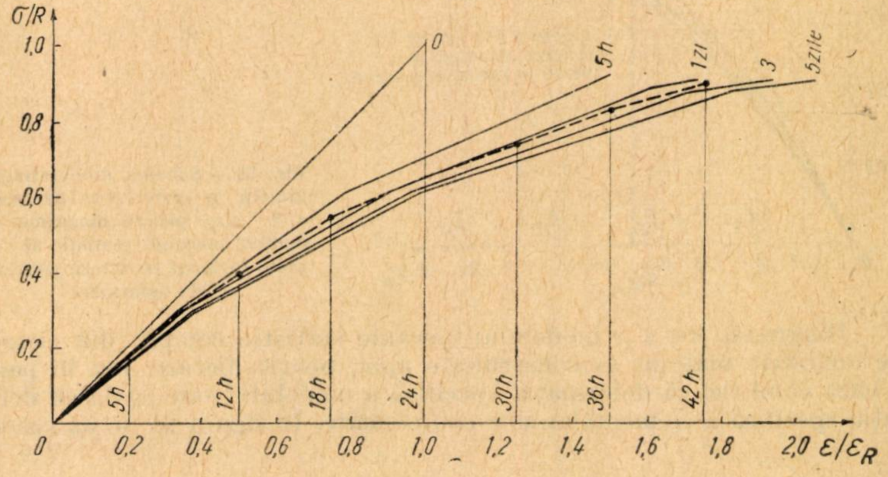


Fig. 18. — Diagrame izocrone de calcul pentru elementele componente ale modelului — Construirea diagramei $\sigma-\varepsilon$ pentru $v_\varepsilon = \varepsilon_R$/minut.

Fig. 19. — Diagrame izocrome de calcul pentru elementele componente ale modelului — Construirea diagramei $\sigma-\varepsilon$ pentru $v_\varepsilon = \varepsilon_R$/1 zi.

↓



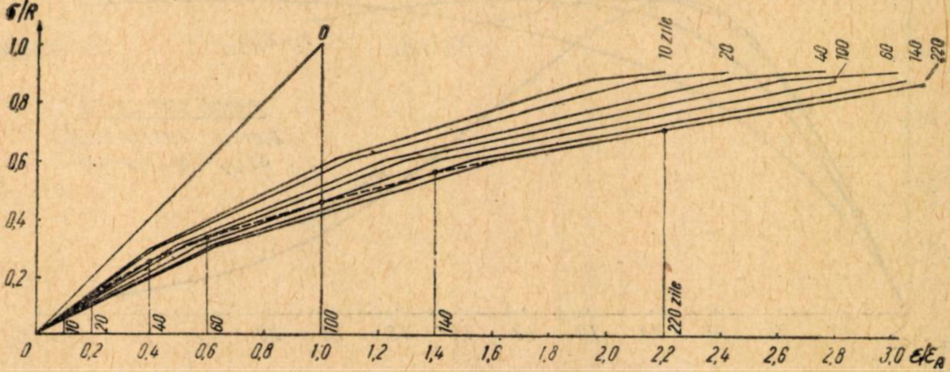


Fig. 20. — Diagrame izocrone de calcul pentru elementele componente ale modelului. Construirea diagramei $\sigma-\varepsilon$ pentru $v_\varepsilon = \varepsilon_R$/100 zile.

Mai întîi s-au construit în figurile 18, 19 şi 20 diagramele $\sigma-\varepsilon$ ale elementelor componente ale modelului pentru vitezele constante de deformare considerate după procedeul descris în figura 17.

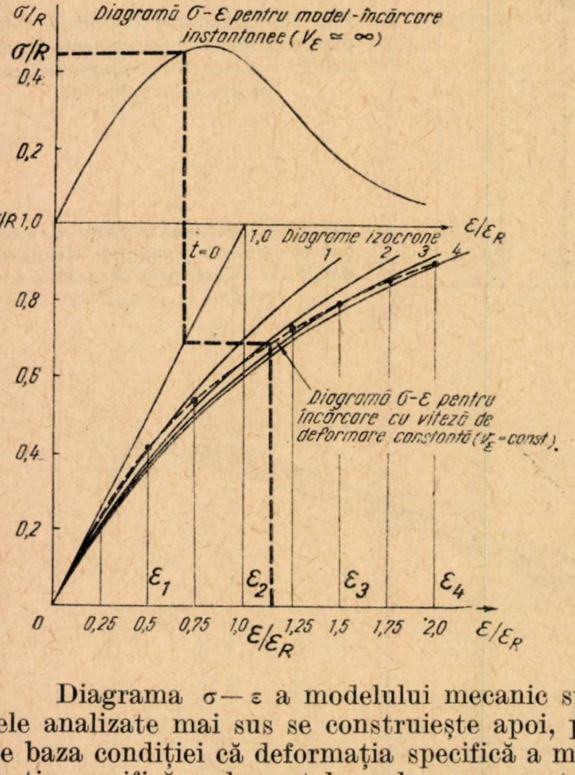


Fig. 21. — Schema de determinare grafică a perechilor de valori $\sigma/R-\varepsilon/\varepsilon_R$ pentru diagrama modelului mecanic statistic al betonului încărcat cu viteză constantă de deformare.

Diagrama $\sigma-\varepsilon$ a modelului mecanic statistic compus din elementele analizate mai sus se construieşte apoi, pentru fiecare caz în parte, pe baza condiţiei că deformaţia specifică a modelului este egală cu deformaţia specifică a elementelor sale componente. În figura 21 se dă schema

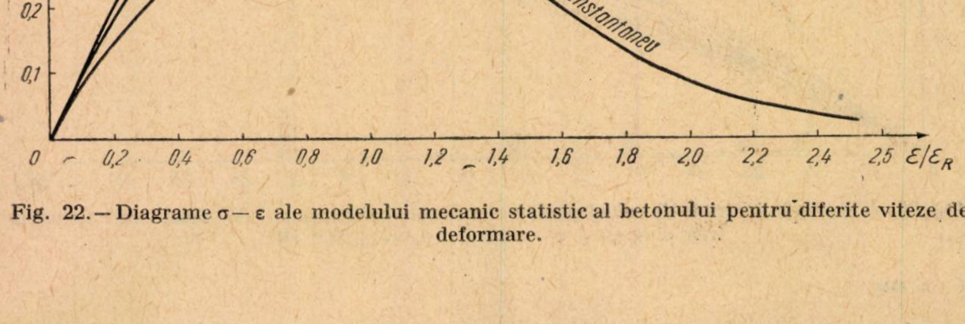


Fig. 22. — Diagrame $\sigma-\varepsilon$ ale modelului mecanic statistic al betonului pentru diferite viteze de deformare.

de determinare grafică a perechilor de valori $\sigma/R - \varepsilon/\varepsilon_R$ într-un caz oarecare. În figură s-a reprodus şi modul de trasare a diagramei $\sigma - \varepsilon$ pentru elementele componente ale modelului, folosind diagramele izocrone.

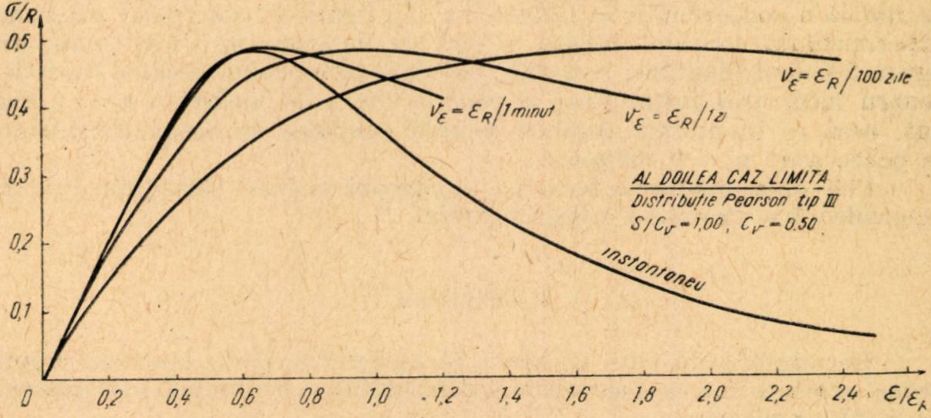


Fig. 23.—Diagrame $\sigma - \varepsilon$ ale modelului mecanic statistic al betonului pentru diferite viteze de deformare.

5.5. În figurile 22 şi 23 s-au trecut diagramele $\sigma - \varepsilon$ ale modelului mecanic statistic obţinute pentru cele două cazuri limită, în 4 ipoteze

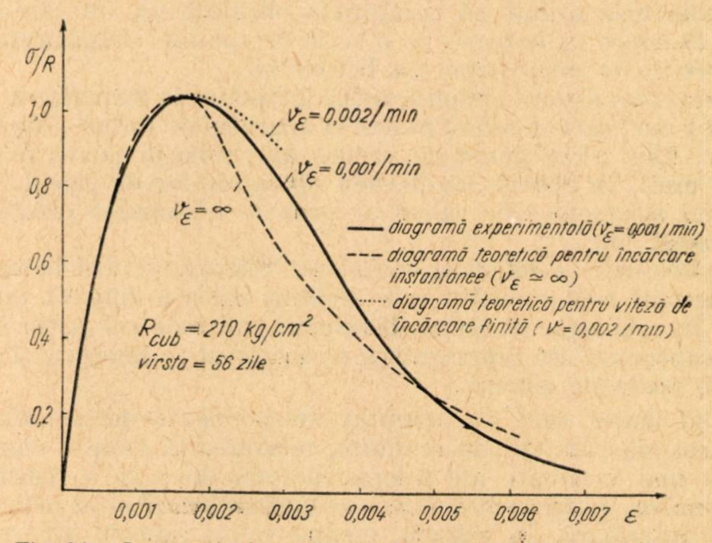


Fig. 24.—Comparaţie între diagramele $\sigma - \varepsilon$ obţinute pe modelul mecanic statistic al betonului şi diagrama experimentală, pentru viteza constantă de încărcare (4).

relative la viteze de încărcare : $v_\varepsilon \simeq \infty$ (încărcare instantanee), $v_\varepsilon = \varepsilon_R/1$ minut, $v_\varepsilon = \varepsilon_R/1$ zi şi $v_\varepsilon = \varepsilon_R/100$ zile.

Se confirmă constatarea făcută la punctul 1.3, unde se arată că proprietățile vîscos-plastice ale betonului ies în evidență pe măsură ce scade viteza de încărcare.

Comparația cu diagramele experimentale reprezentate în figura 3 ne indică o concordanță satisfăcătoare. În figura 24 s-a trecut diagrama experimentală corespunzătoare vitezei de încărcare $v_\varepsilon = 0{,}001/\text{min}$. din figura 3 și două diagrame teoretice, obținute pe modelul mecanic statistic : pentru încărcarea instantanee și pentru viteza de încărcare $v_\varepsilon = \varepsilon$ /minut, ceea ce în unități absolute pentru calitatea de beton considerată se poate scrie $v_\varepsilon = 0{,}002/\text{min}$.

Cele două diagrame teoretice încadrează în bune condițiuni ramura descendentă a diagramei experimentale.

6. CONCLUZII

Rezultatele obținute ne arată că modelul mecanic statistic propus poate exprima întreg mecanismul deformațiilor betonului, atît plastice cît și vîscos-plastice.

Pe baza acestui model se poate explica procesul de formare a microfisurilor anterior ruperii, apariția ramurii descendente în diagramele $\sigma - \varepsilon$, influența mărcii betonului asupra formei diagramei $\sigma - \varepsilon$ și asupra momentului apariției microfisurilor, modificarea formei diagramei $\sigma - \varepsilon$ sub efectul încărcărilor de durată.

Trebuie însă arătat că rezultatele obținute au un caracter strict calitativ, deoarece se bazează pe o serie de ipoteze simplificatoare esențiale cu privire la microstructura betonului.

Nu revenim asupra simplificărilor introduse în formularea matematică a problemei, care se referă numai la aparatul de calcul și nu la aspecte principiale. Din acest punct de vedere aproximația poate fi micșorată ori cît de mult, în contul complicării operațiunilor de calcul. Utilizarea unor mașini electronice de calcul ar permite eliminarea oricărei simplificări de acest fel.

Simplificările se referă la modelarea microstructurii betonului.

În primul rînd modelul este alcătuit dintr-o singură mulțime de elemente. În realitate, structura betonului cuprinde cel puțin două mulțimi interconectate, cea reprezentată de scheletul de agregate și cea reprezentată de pasta de ciment.

Într-al doilea rînd s-a acceptat independența deformației plastice de cea vîscos-plastică. Ori, în realitate, relaxarea în timp a eforturilor în elementele mai încărcate ale microstructurii duce la o redistribuire a microeforturilor, astfel încît acestea se uniformizează și se reduce neomogeneitatea interioară. În schimb, pentru valori ridicate ale solicitărilor se schimbă mecanismul deformațiilor vîscos-plastice, care accelerează dezvoltarea microfisurilor și fisurilor, ducînd la ruperea sub încărcarea de durată.

Această lipsă a modelului propus rezultă și din compararea diagramelor experimentale $\sigma - \varepsilon$ din figura 3 cu diagramele teoretice din figurile 22 şi 23. În cazul diagramelor experimentale se constată o scădere a efortului unitar din punctul de maxim al diagramelor o dată cu scăderea vitezei de încărcare. În cazul diagramelor teoretice modelul nu poate exprima deteriorarea structurii interioare sub efectul încărcărilor de durată şi valoarea maximului nu este influenţată de viteza de încărcare.

În concluzie, modelul mecanic statistic al betonului propus nu exprimă încă cu suficientă fidelitate structura complexă a acestui material. El permite însă lămurirea mecanismului care stă la baza proprietăţilor deformative ale betonului şi, sub forma prezentată, asigură descrierea calitativ justă a condiţionării fenomenelor din macrostructura betonului de către neomogeneitatea microstructurii acestuia.

Modelul poate fi completat cu alte tipuri de elemente pe lîngă cele considerate în prezent, grupate în subansambluri care să exprime, — atît prin legăturile dintre elementele subansamblului propriu-zis cît şi prin legăturile dintre subansambluri, — complexitatea reală a structurii betonului. În stadiul actual al cunoaşterii microstructurii betonului, cînd nu putem defini în mod direct legile de repartiţie ale neomogeneităţii acesteia, precizia cantitativă a modelului ar fi însă anulată de lipsa de precizie în ceea ce priveşte valorile caracteristicilor fizice ale materialului, fapt care ar reduce foarte mult utilitatea practică a unui asemenea model extrem de complicat.

Primită la redacţie la 26 iulie 1962

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМАТИВНЫХ СВОЙСТВ БЕТОНА

РЕЗЮМЕ

Указывается возможность моделирования деформации бетона в виде стохастического процесса. Допуская ряд упрощений, учитывающих современный уровень освоения основных параметров, характеризирующих структуру бетона, вычерчиваются диаграммы напряжения — деформация статистической модели, подверженной центральному сжатию.

Диаграммы показывают нисходящие ветви, форма которых сходна с получающимися при испытании бетонных призм.

Наблюдается зависимость формы этих диаграмм от однородности структуры бетона. Из сравнения с опытными данными можно придти к выводу, что повышенная прочность бетонов высших марок является в первую очередь функцией однородности их структуры.

Указывается возможность применения этой статистической теории также в случае реологических деформаций бетона под влиянием продолжительных нагрузок, применяя с этой целью понятие изохронной диаграммы $\sigma - \varepsilon$. Получаются диаграммы напряжения — деформация статистической модели для различных скоростей нагрузки, которые хорошо соответствуют опытным данным.

THÉORIE STATISTIQUE DES PROPRIÉTÉS DÉFORMATIVES DU BÉTON

RÉSUMÉ

L'auteur démontre qu'il est possible de modeler les phénomènes de déformation du béton durant le chargement sous forme d'un processus stochastique. Si l'on admet certaines simplifications qui tiennent compte du niveau actuel de la connaissance des paramètres fondamentaux qui caractérisent la structure du béton, on pourra tracer les diagrammes contrainte-déformation spécifique du modèle statistique sollicité à la compression centrique.

Ces diagrammes présentent une branche descendante et ressemblent aux enregistrements pris lors des essais sur des prismes de béton.

L'auteur fait remarquer que la forme de ces diagrammes dépend de l'homogénéité de la structure du béton. Leur comparaison avec les données expérimentales permet de conclure que la résistance plus forte des bétons de fabrication supérieure est due, en premier lieu, à l'homogénéité de leur structure.

L'auteur montre qu'il est en outre possible d'appliquer cette théorie statistique au cas des déformations rhéologiques du béton soumis à des essais de longue durée, pourvu que l'on utilise à cet effet la notion de diagramme isochrone $\sigma - \varepsilon$. On obtient ainsi, pour les diverses vitesses de chargement, les diagrammes contrainte-déformation spécifique du modèle statistique, qui correspondent dans de bonnes conditions aux données expérimentales.

BIBLIOGRAFIE

1. R. L'Hermite, *Idées actuelles sur la technologie du béton.* Paris, 1955.
2. E. Hognestad N. W., Hanson D. McHenry, *Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design.* Journal of the American Concrete Institute, **27**, *4* (1955).
3. А. А. Гвоздев, *Некоторые механические свойства бетона, существенно важные для строительной механики железобетонных конструкиий.* Исследование свойств бетона и железобетона. Труды НИИЖБ-АСиА, *4* (1959).
4. H. Rüsch, *Research Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete.* Journal of the American Concrete Institute, **32**, *1* (1960).
5. В. Николау, *Влияние скорости нагружения на прочность бетона,* Бетон и железобетон *3*, (1959).
6. В. В. Михайлов, *Растяжимость бетона в условиях свободных и связанных деформаций.* Исследование, прочность, пластичность и ползучесть строительных материалов, ЦНИПС, 1955.
7. С. Д. Волков, *Основы статистической теории прочности,* Некоторые проблемы прочности твердого тела, сборник статей АН СССР, 1959.
8. О. Я. Берг, *Исследование прочности железобетонных конструкций при воздействии на них многократно повторной нагрузки,* Исследование железобетонных мостовых конструкций. Труды ЦНИИС, *19* (1956).
9. F. A. Blakey, F. D. Beresford, *Strain Distribution in Concrete Beams.* Civil Engineering, **54**, 635 (1957).

10 Т. Н. ПИСАНКО, *Прочность и деформативность высокопрочных бетонов при сжатии.* Бетон и железобетон, *3* (1960).

11. H. J. COWAN, *Representation of the Inelastic Deformation of Concrete by Means of a Mechanical Model.* Nature, 1962.

12. Н. В. НИКИТИН, *Статистическая гипотеза прочности бетона.* Материалы к теории расчета конструкции по предельному состоянию, **II**, Москва, 1949.

13. Р. А. МУЛЛЕР, *Эффект масштаба в расчете прочности,* Исследования по строительной механике. ЦНИПС, 1954.

14. I. S. BLACKMAN, G. M. SHITH, L. E. YOUNG, *Stress Distribution Affects Ultimate Tensile Strength.* Journal of the American Concrete Institute, **30**, *6* (1958).

15. M. HORI, *Statistical Aspects of Fracture in Concrete.* Bulletin RILEM, *11* (1961).

16. В. В. БОЛОТИН, *Статистические методы в строительной механике.* Москва, 1961.

17. Н. Н. АФАНАСЬЕВ, *Статистическая теория усталостной прочности металлов.* Киев, 1953.

18. И. В. ДУНИН-БАРКОВСКИЙ, Н. В. СМИРНОВ, *Теория вероятности и математическая статистика в технике.* Москва, 1955.

19. F. R. SHANLEY, *Weight Strength Analysis of Aircraft Structures.* The RAND Corporation, New York, 1952.

20. O. WAGNER, *Das Kriechen unbewehrten Betons.* DAfS H 131 (1958).

21. И. И. КАТИН, *Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях.* Труды НИИЖБ—АСиА, *4* (1959).

STUDII

TEORIA DE ÎNCOVOIERE LA ÎNVELITORI CILINDRICE CU RAZĂ DE CURBURĂ VARIABILĂ

DE

MIRCEA MIHAILESCU

Învelitori cilindrice avînd arcul director cu rază de curbură variabilă, s-au construit la primele aplicații practice cu ideea de a înălța linia profilului transversal cît mai mult față de curba de presiune a încărcării, pentru a îmbunătăți modul de lucru al învelitorii pe direcția generatoarelor.

Astfel s-a justificat pe baza calculului în *teoria de membrană*, folosirea arcelor de *cicloidă* și *elipsă* simplificate constructiv și static în *profilul Zeiss-Dywidag* (fig. 1).

Crescînd importanța acestor forme pentru a mări siguranța și economia lor, a apărut necesitatea unui calcul mai riguros, completînd *teoria de memebrană* cu *teoria de încovoiere*.

Pe această cale s-au putut determina soluții numai la cilindrii circulari, ceea ce a condus pe unii proiectanți să se limiteze la folosirea exclusivă a profilelor circulare sau a unor combinații de asemenea profile.

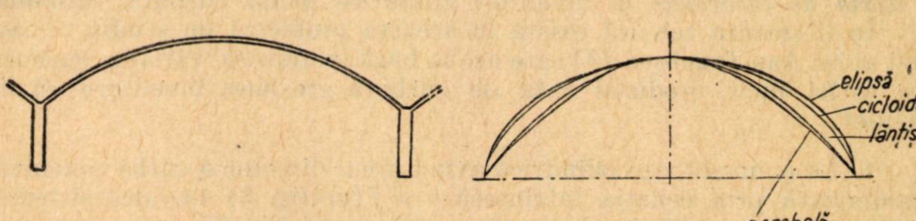


Fig. 1

Totuși într-o serie de situații cum sînt cele ale profilelor ondulate simetrice sau nesimetrice (fig. 2), pentru utilizarea mai bună a materialului, apare mai natural să se adopte o linie directoare cu variație continuă a curburii în locul unei combinații de arce de cerc, la care curbura are puncte de discontinuitate.

Pentru calculul cilindrilor cu rază de curbură variabilă se folosesc astăzi metode mai puțin riguroase decît *teoria de încovoiere* și anume *teoria de grindă* explicată pentru elemente de beton armat de *Lundgren* [1], sau metoda *Vlasov-Tezlaff* [2] care asimilează cilindrii cu suprafețe prismatice.

Aceste metode determină cu destulă precizie eforturile principale în sensul generatoarelor, dar neglijînd rigiditatea la răsucire a elementelor de placă, aproximează mai puțin satisfăcător eforturile în sens transversal, în special momentele încovoietoare pe direcția arcului, ale căror valori rezultă mult mai mari decît în realitate.

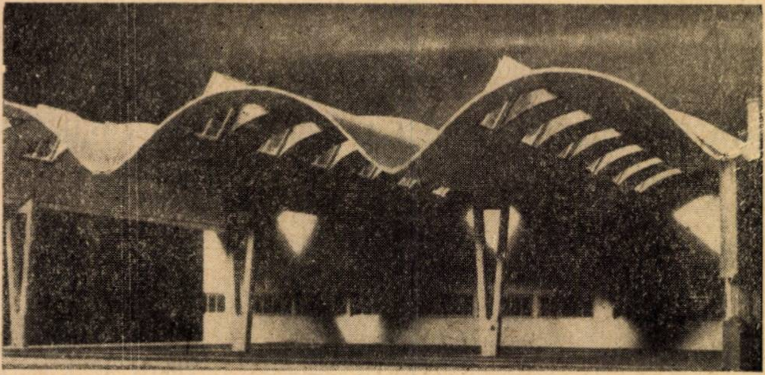


Fig. 2

Momentele transversale condiționează grosimea plăcii și implicit greutatea profilului de luat în calcul; determinîndu-le cu precizie se pot obține economiile specifice acestui gen de construcții.

În cele ce urmează voi arăta o cale pentru determinarea eforturilor în *teoria de încovoiere* la învelitori cilindrice avînd curbură variabilă.

În literatura tehnică există în această problemă un studiu remarcabil al lui Aas Jakobsen [3] care are la bază ipoteza că variația curburii este astfel încît produsul raza de curbură grosimea învelitorii să fie constant.

1. La o învelitoare cilindrică avînd arcul director o curbă continuă, caracterizată prin ecuația intrinsecă $r = f(y)$ (fig. 3) s-a ales sistemul de coordonate curbilinii ortogonal cu axa x pe direcția generatoarei, y în direcția arcului și $R(x, y)$ vectornl de poziție al suprafeței mediane.

În cadrul ipotezelor generale de calcul Love Kirchof [4] elementul de învelitoare este acționat de tensorul eforturilor axiale, tensorul momentelor încovoietoare, vectorul forțe tăietoare și vectorul încărcare

$$\mathbf{N} \equiv \begin{vmatrix} N^{xx} & N^{yx} \\ N^{xy} & N^{yy} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{M} \equiv \begin{vmatrix} M^{xx} & M^{yx} \\ M^{xy} & M^{yy} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \mathbf{X}\,(X, Y), Z \\ \mathbf{Q}\,(Q^{x} \cdot Q^{y}) \end{matrix}$$

Considerînd raportul $\frac{h}{r}$ mic față de 1, ipoteză introdusă cu succes de Jenkins [5], tensorii eforturilor axiale și momentelor devin simetrici.

2. Atribuind semnificația de vector operatorului lui Hamilton echilibrul elementului de suprafață se exprimă prin două ecuații vectoriale (echilibru la deplasare și rotire în sensul axelor x, y) și o ecuație scalară de legătură (proiecția pe direcția normalei la suprafață)

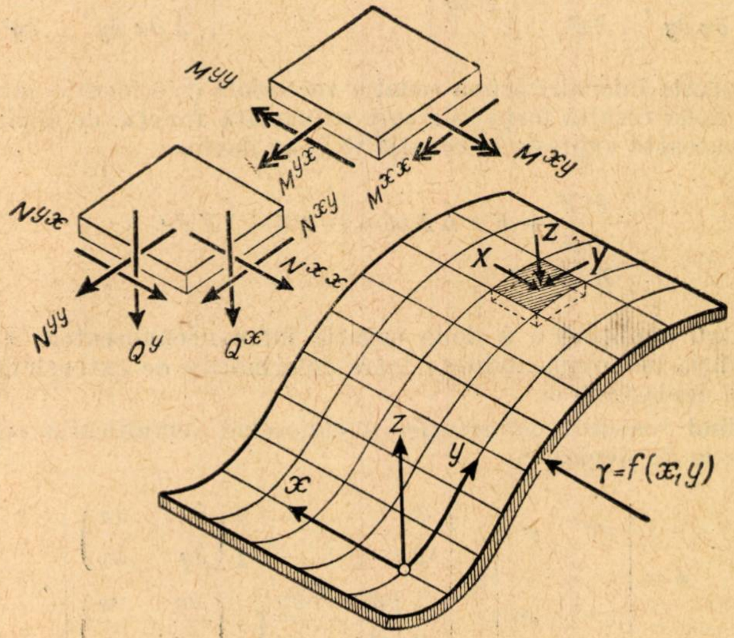


Fig. 3

$$\mathbf{N} \cdot \nabla + \mathbf{X} = 0, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{M} \cdot \nabla - \mathbf{Q} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{N^{vv}}{r} + \nabla \cdot \mathbf{Q} + Z = 0. \tag{3.1}$$

Din ecuațiile vectoriale se pot deduce imediat ecuațiile scalare pe direcțiile x și y. În total echilibrul se exprimă prin 5 ecuații scalare cu 8 necunoscute.

3. Pentru a pune în corespondență numărul de necunoscute cu numărul de ecuații se procedează astfel: se consideră eforturile axiale, derivatele secunde ale funcției de forțe F, la fel momentele încovoie-

toare şi de răsucire, derivatele secunde ale funcţiei de deplasare w pe direcţia normalei în fiecare punct la învelitoare conform ecuaţiilor

$$\mathbf{N} \equiv \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X\,dx, & -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \\ -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y\,dy \end{array} \right| ; \qquad \mathbf{M} \equiv EI \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{array} \right| .$$

Cu aceste înlocuiri prima ecuaţie vectorială este identic satisfăcută, iar din a doua rezultă forţa tăietoare exprimată funcţie de deplasare w; înlocuind această expresie în ecuaţia (3.1) ea devine

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + K\,r\,\Delta\Delta w = -r\,Z + \int Y\,dy. \qquad (2)$$
$$K = EI$$

Pentru a obţine o a doua ecuaţie între necunoscutele F şi w se scrie condiţia de compatibilitate între deformaţiile de extensiune ale suprafeţei şi deplasările ei.

Scriind tensorul deformaţiei şi cunoscînd semnificaţia componentelor funcţie de deplasări

$$\mathbf{e} \equiv \left| \begin{array}{cc} e^{xx} & e^{yx} \\ e^{xy} & e^{yy} \end{array} \right| \equiv \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), & \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{r}\right) \end{array} \right| ,$$

prin operaţii convenabile se obţine o nouă ecuaţie scalară

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{yy} - 2\,\frac{\partial^2 e^{xy}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{w}{r}\right).$$

Înlocuind deformaţiile prin eforturi conform legii lui Hooke, în care s-a neglijat contracţia transversală conform relaţiei :

$$\frac{N}{Eh} = e,$$

rezultă

$$\frac{1}{d}\,\Delta\Delta F - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{w}{r}\right) = 0. \qquad (3)$$

În cazul elementelor de beton armat, la care eforturile de compresiune sînt preluate de beton şi cele de întindere de armături, neglijarea contracției transversale nu este o aproximație, ci dimpotrivă o ipoteză care ne apropie de realitate.

4. În sistemul de două relații (2,3) eliminînd funcția F se obține o ecuație cu derivate parțiale de ordinul 8 cu coeficienți variabili în care funcția necunoscută este w

$$\Delta\Delta r\, \Delta\Delta w + \frac{d}{rk}\frac{d^{v} w}{dx^{v}} = -\Delta\Delta\left(rZ - \int Y\, dy\right). \tag{4}$$

Vom nota

$$\Delta\Delta\left(rZ - \int Y\, dy\right) = I.$$

Asupra funcției w se pot face o serie de precizări:

— Dacă învelitoarea este rezemată pe timpane rigide în planul lor, iar încărcarea este simetrică față de directoarea de mijloc, deplasarea w va fi nulă pe reazeme și va avea o variație simetrică de arcul de mijloc al învelitorii, ceea ce se exprimă dezvoltînd pe w și încărcarea în serie Fourier relativ la variabila x

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_i(y) \sin \lambda x \; ; \quad I = \sum_{n=1}^{\infty} I(y) \sin \lambda x \; ; \quad \lambda = \frac{\eta \pi}{l}. \tag{5}$$

Înlocuind expresia lui w și a încărcării în ecuația (4) se obține pentru fiecare termen al dezvoltării în serie, o ecuație diferențială, lineară neomogenă cu coeficienți variabili numai în raport cu y

$$\begin{aligned}
&\Phi^{)8)} r + 4\,\Phi^{(7)} r^{(1)} + \Phi^{(6)}[-4\lambda^2 r + 6 r^{(2)}] + \Phi^{(5)} - [12\lambda^2 r^{(4)} +\\
&+ 4 r^{(3)}] + \Phi^{(4)}[6\lambda^4 r - 14\lambda^2 r^{(2)} + r^{(4)}] + \Phi^{(3)}[12\lambda^4 r^{(1)} - 8\lambda^2 r^{(3)}] +\\
&+ \Phi^{(2)}[-4\lambda^6 r^{(1)} + 10\lambda^4 r^{(2)} - 2\lambda^2 r^{(4)}] + \Phi^{(1)}[-4\lambda^6 r^{(1)} + 4\lambda^4 r^{(3)}] +\\
&+ \Phi\left[\lambda^8 r - 2\lambda^6 r^{(2)} + \lambda^4 r^{(4)} + \frac{\lambda^4 d}{r\,k}\right] = I.
\end{aligned} \tag{6}$$

5. Să găsim mai întîi soluția generală a ecuației omogene, termenul liber fiind egal cu zero.

Vom dezvolta funcția $r\ (y)$ în serie de puteri în jurul punctului $y = 0$

$$r = a_0 + \frac{a_1}{1\,!}\, y + \frac{a_2}{2\,!}\, y^2 + \frac{a_3}{3\,!}\, y^3 + \dots$$

Pentru aceasta să ne oprim puțin atențiunea asupra razei de curbură.

Această funcție așa cum apare ea în practică este olomorfă, adică desfășurabilă în serii convergente în jurul oricărui punct (cazul directoarei arc de elipsă, arc de cicloidă, parabolă ş.a.) Derivînd seria de puteri a funcţiei $r = f(y)$ se obţin desfăşurările în serie a derivatelor

$$r^{(1)} = a_1 + a_2 y + \frac{a_3}{2\,!} y^2 + \dots$$

$$r^{(2)} = a_2 + a_3 y + \frac{a_4}{2\,!} y^2 + \dots$$

$$r^{(3)} = a_3 + a_4 y + \frac{a_5}{2\,!} y^2 + \dots$$

$$r^{(4)} = a_4 + a_5 y + \frac{a_4}{2\,!} y^2 + \dots$$

Efectuăm produsele exprimate pentru fiecare coeficient al derivatelor funcţiei w şi le ordonăm după puterile crescătoare ale lui y. Înmulţim ecuaţia 6 cu y^8 şi grupăm termenii astfel încît să avem lîngă fiecare derivată a funcţiei Φ, y la o putere egală cu ordinul de derivare

$$\begin{aligned}
&\Phi^{(8)} y^8 [a_{8.0} + a_{8.1} y + a_{8.2} y^2 + \dots] + \Phi^{(7)} y^7 [a_{7.1} y + a_{7.2} y^2 + a_{7.3} y^3 + \dots] + \\
&+ \Phi^{(6)} y^6 [a_{6.2} y^2 + a_{6.3} y^3 + a_{6.4} y^4 + \dots] + \Phi^{)5)} y^5 [a_{5.3} y^3 + a_{5.4} y^4 + \dots] + \\
&+ \Phi^{(4)} y^4 [a_{4.4} y^4 + a_{4.5} y^5 + \dots] + \Phi^{(3)} y^3 [a_{3.5} y^5 + a_{3.6} y^6 + \dots] + \\
&+ \Phi^{(2)} y^2 [a_{2.6} y^6 + a_{2.7} y^7 + \dots] + \Phi^{(1)} y \,[a_{1.7} y^7 + a_{1.8} y^8 + \dots] + \qquad (7) \\
&+ \varphi y^0 [a_{0.8} y^8 + a_{0.9} y^9] = 0.
\end{aligned}$$

Se observă că matricea coeficienţilor a_{ik} este triunghiulară.

Simbolic ecuaţia (7) se scrie sub forma de două sume

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Phi^{(k)} y^k a_{k.\lambda} y^\lambda = 0, \qquad (8)$$

în care k este ordinul de derivare iar λ este termenul dezvoltării în serie.

Această scriere se numeşte forma normală a lui *Frobenius* [6].

Vom căuta pentru funcţia necunoscută Φ o expresie pe care să o scriem tot sub formă de serie de puteri şi anume :

$$\Phi = y^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu y^\nu$$

ρ este puterea necunoscută care trebuie determinată,

b_ν sînt coeficienţi necunoscuţi.

Expresia se mai poate scrie

$$\Phi = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu y^{\rho+\nu}.$$

Să deducem în continuare derivatele ei.

Întrucît constantele se pot scrie simbolic astfel

$$\left|\begin{matrix}\rho+\nu\\0\end{matrix}\right| = 1 ; \left|\begin{matrix}\rho+\nu\\1\end{matrix}\right| 1\,! = \rho+\nu ; \left|\begin{matrix}\rho+\nu\\k\end{matrix}\right| k\,! = (\rho+\nu)(\rho+\nu-1)\ldots$$

$$\ldots(\rho+\nu-k+1).$$

Derivata de ordinul k are expresia

$$\Phi^{(k)} = \left|\begin{matrix}\rho+\nu\\k\end{matrix}\right| k\, b_\nu\, y^{\rho+\nu-k}\, y^k\, a_{k,\lambda}\, y^\lambda = 0.$$

Înlocuim această expresie în ecuaţia scrisă sub formă normală şi obţinem o relaţie în care apar termenii a trei sume

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\begin{matrix}\rho+\nu\\k\end{matrix}\right| k\,!\, b_\nu\, y^{\rho+\nu-k}\, y^k\, a_{k,\lambda}\, y^\lambda = 0. \tag{9}$$

Grupînd factorii y la diferite puteri, observăm că se poate scoate y în factor comun; în interiorul sumelor rămîn termenii în y la puterea sumată $\lambda+\nu = s$; λ şi ν fiind puterile lui y în cele două serii.

$$y^\rho \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\nu+0}^{\infty}\left|\begin{matrix}\rho+\nu\\k\end{matrix}\right| k\,!\, b_\nu\, y^s\, a_{k,s-\nu} = 0. \tag{10}$$

Pentru ca ecuaţia (10) să fie satisfăcută, trebuie ca coeficienţii fiecărei puteri a lui y să fie identic nuli; aceasta conduce la scrierea unui şir de ecuaţii de recurenţă între coeficienţii necunoscuţi b.

$$y^s \sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{s}\left|\begin{matrix}\rho+\nu\\k\end{matrix}\right| k\,!\, b_\nu\, a_{k,s-\nu} = 0. \tag{11}$$

Să scriem prima ecuaţie pentru $s = 0$, care multiplică pe y^0:

$$b_0 \sum_{k=0}^{n}\left|\begin{matrix}\rho\\k\end{matrix}\right| k\,!\, a_{k,0} = 0. \tag{12}$$

Ea conţine un singur coeficient nedeterminat b_0 şi se înmulţeşte cu şirul de 8 termeni scris simbolic:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\begin{matrix}0\\k\end{matrix}\right| k\,!\, a_{k,0} = 0. \tag{13}$$

Observăm că pentru clindrii aşa cum am arătat mai înainte, matricea coeficienţilor este triunghiulară; toţi termenii cu indice zero, exceptînd $a_{8,0}$, sînt nuli, în consecinţă ecuaţia devine

$$b_0 a_{8,0}\, \rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3)(\rho-4)(\rho-5)(\rho-6)(\rho-7) = 0, \tag{14}$$

care pentru a fi nulă ne conduce la 8 condiţii, care permit să precizăm 8 valori pentru ρ

$$\rho_1 = 0 ;\ \rho_2 = 1 ;\ \rho_3 = 2 ;\ \rho_4 = 3 :\ \rho_5 = 4 ;\ \rho_6 = 5 ;\ \rho_7 = 6 ;\ \rho_8 = 7.$$

Relația 14 se numește după Fuchs ecuația *fundamental determinanată.*

Într-adevăr, cunoscînd valorile ρ avem primii termeni a 8 serii fundamental distincte, multiplicate cu y^p, care sumate ne dau pe w

$$w = \sin\lambda x\{A\,[1+\mathcal{A}_1 y+\mathcal{A}_2 y^2+\ldots]+By\,[1+\mathcal{B}_1 y+\mathcal{B}_2 y^2+\ldots]$$
$$+\,Cy^2\,[1+\mathcal{C}_1 y+\mathcal{C}_2 y^2+\ldots]+Dy^3\,[1+\mathcal{D}_1 y+\mathcal{D}_2 y^2+\ldots]+$$
$$+\,Ey^4\,[1+\mathcal{E}_1 y+\mathcal{E}_2 y^2+\ldots]+Fy^5\,[1+\mathcal{F}_1 y+\mathcal{F}_2 y^2+\ldots]+$$
$$+\,Gy^6\,[1+\mathcal{G}_1 y+\mathcal{G}_2 y^2+\ldots]+Hy^7[1+\mathcal{H}_1 y+\mathcal{H}_2 y^2+\ldots].$$

Aceste serii se înmulțesc fiecare cu cîte o constantă arbitrară A, B, C, D, E, F, G, H, cele 8 constante ale sistemului. Primul coeficient nedeterminat al fiecărei serii, și implicit b_0 se cuprinde în aceste constante.

Al doilea coeficient al fiecărei serii se obține scriind ecuația de recurență pentru $s = 1$; ținînd seama că în acest caz, numai coeficienții $a_{7.1}$ și $a_{8.1}$ sînt diferiți de zero, rezultă relația de legătură între b_1 și b_0:

$$b_1 = -\,b_0\,\frac{a_{7.1}+a_{8.1}(\rho-7)}{a_{8.0}(\rho+1)},$$

pentru valorile $\rho_1 = 0$; $\rho_2 = 1$; $\rho_3 = 2$; $\rho_4 = 3$; $\rho_5 = 4$; $\rho_6 = 5$; $\rho_7 = 6$; $\rho_8 = 7$; se obțin termenii fiecărei serii

$$\mathcal{A}_1 = -\,\frac{a_{7.1}-7\,a_{8.1}}{a_{8.0}};\qquad \mathcal{B}_1 = -\,\frac{a_{7.1}-6\,a_{8.1}}{2\,a_{8.0}};\qquad \mathcal{C}_1 = -\,\frac{a_{7.1}-5\,a_{8.1}}{3\,a_{8.0}}$$

$$\mathcal{D}_1 = \frac{a_{7.1}-4\,a_{8.1}}{4\,a_{8.0}};\qquad \mathcal{E}_1 = -\,\frac{a_{7.1}-3\,a_{8.1}}{5\,a_{8.0}};\qquad \mathcal{F}_1 = -\,\frac{a_{7.1}-2\,a_{8.1}}{6\,a_{8.0}}$$

$$\mathcal{G}_1 = -\,\frac{a_{7.1}-a_{8.1}}{7\,a_{8.0}};\qquad \mathcal{H}_1 = -\,\frac{a_{7.1}}{8\,a_{8.0}}.$$

Termenul al treilea se deduce din relația de recurență pentru $s = 2$ și conduce la determinarea termenului b_2:

$$b_2 = -\,b_0\,\frac{a_{8.0}\,[a_{8.2}(\rho-6)(\rho-7)+a_{7.2}(\rho-6)+a_{6.2}]+a_{7.1}^2+a_{81}(2\rho-13)+a_{82}^2(\rho-6)(\rho-7)}{a_{8.0}^2(\rho^2+3\rho+2)}$$

Înlocuind în această expresie cele 8 valori ρ se obțin termenii: $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_2$.

Constantele soluției A, B, C, D, E, F, G, H, se determină cunoscînd condițiile de margini pe generatoarele de contur (8 condiții, cîte 4 condiții pe fiecare latură mărginită de generatoare).

La această soluție generală urmează a se adăuga o integrală particulară a ecuației complete care se poate preciza de la caz la caz, prin metoda variației constantelor.

Primită la redacție la 28 august 1962

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОБОЛОЧКАМ С ПЕРЕМЕННЫМ РАДИУСОМ КРИВИЗНЫ

РЕЗЮМЕ

В рамках общей теории изгиба тонких оболочек выводится разрешимое уравнение вопроса определения усилий применительно к цилиндрическим поверхностям с переменным радиусом кривизны.

Это уравнение с 8 переменными коэффициентами преобразуется путем разложения в ряд Фурье, в дифференциальное уравнение 8-го порядка с переменными коэффициентами.

Учитывая изменение радиуса кривизны, выраженное голоморфной функцией, дифференциальное уравнение решается при помощи метода Фробениуса.

BENDING THEORY OF CYLINDRICAL SHELLS OF VARIABLE CURVATURE RADIUS

ABSTRACT

The solving equation of the problem of determining the stresses in cylindrical shells of variable curvature radius has been deduced within the general bending theory of thin shells.

This 8th order equation with variable coefficients is transformed, by a development into Fourier series, into an 8th order differential equation with variable coefficients.

Considering that the variation of the curvature radius is expressed by a holomorphic function, the differential equation is solved by using the Frobenius method.

BIBLIOGRAFIE

1. H. LUNDGREN, *Cylindrical shells*. The Danish technical press. Copenhagen, 1949.
2. V. Z. TEZLAFF, *Tonnen und Trogartigenschalen*. Berlin, 1953.
3. V. Z. VLASOV, *Obsceaia teoria obolochek*. Gostehisdat, Moskwa, 1949.
4. A. A. IAKOBSEN, *Zylinderschalen mit veränderlichem Krümungshalbmesser und veränderlicher Schalenstärke*. Bauingenieur, 1937.
5. R. S. JENKINS, *Theory and design of cylindrical shell structures*. O. N. Arup, London, 1947.

PROBLEME DE PROFILARE ECONOMICĂ A CONSTRUCȚIILOR HIDROTEHNICE

(PROFILURI OPTIME HIDRAULICE)

DE

CRISTEA MATEESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R. P. R.

I. NOȚIUNI ȘI TEOREME GENERALE CU PRIVIRE LA PROFILURILE OPTIME

1. Orice construcție rațională trebuie să fie o construcție care îndeplinește cît mai bine scopul propus (condiția tehnologică) și totodată să fie economică (ceea ce revine la condiția realizării lucrării cu minimum de cheltuială de energie fizică și de muncă omenească). Construcția economică este un fenomen generalizat și în procesele de construcție ale naturii, în special în cele biologice. Putem spune că această problemă este veche ca natura și este mereu de actualitate.

La proiectarea construcțiilor hidrotehnice prima categorie de probleme condiționate de economia de material și de muncă se pune la profilarea conductelor, a canalelor și a rezervoarelor menite a suporta fluidele în mișcare sau în repaos.

Unele din aceste probleme au fost rezolvate cu ajutorul unor cunoștințe de matematică descoperite încă din antichitate ca proprietățile figurilor izoperimetrice, datorite lui Pythagora. Mai tîrziu, au fost mult cercetate diferite probleme de maximum și minimum (metoda Fermat), și apoi în timpul lui Lagrange care a descoperit calculul variațional pentru tratarea mai generală a unor asemenea probleme. Au urmat la diferite intervale de timp mai multe lucrări importante în acest domeniu care ar părea că astăzi este teoreticește închis. Aplicațiile însă au devenit din ce în ce mai numeroase și mai interesante, mai cu seamă cu dezvoltarea hidroenergeticei și a calculelor tehnico-economice, în general.

La lucrările hidrotehnice se deosebesc trei faze de calcul :

— determinarea formei raționale (profilul, proporțiile între diametre etc.) prin condiții geometrice sau hidraulice ce se cer satisfăcute ;

— determinarea dimensiilor secţiunii de curgere pe baze energetice sau energo-economice, cu păstrarea profilului ales în prima fază;

— determinarea grosimilor pereţilor prin calcule statice, operaţie care influenţează într-o anumită măsură şi rezultatele din primele două faze.

2. Principiul economiei apare deci chiar din primul moment al gîndirii tehnice, la stabilirea *formei optime* a secţiunii transversale a canalului, fără precizarea dimensiunilor.

Se caută anume forma profilului transversal, pentru care secţiunea udată, ,,pentru un debit dat Q şi o pantă longitudinală dată J, are aria cea mai mică''. Trebuie deci să se considere o infinitate de forme posibile şi să se aleagă cea mai favorabilă. Aici principiul economic revine numai la realizarea minimului de scţiune excavată în pămînt, este un criteriu pur geometric.

Aceeaşi problemă poate fi pusă şi în alte moduri, rezultînd din rezolvarea unei probleme de minimum a unei funcţiuni cînd se pun condiţiile de curgere a lichidului în canal. Relaţiile cunoscute sînt (în mişcarea turbulentă):

$$Q = \Omega V, \qquad R = \frac{\Omega}{\chi} \qquad \text{şi} \qquad V = C\sqrt{RJ}, \tag{1}$$

în care Ω, χ, R şi V sînt respectiv secţiunea udată, perimetrul udat, raza hidraulică şi viteza medie în secţiune.

Se vor lua dintre parametri, următorii trei, ca primordiali Q, Ω şi J şi făcînd cîte doi din ei, parametrii daţi (constanţi), pentru care se cere forma profilului, parametrul rămas liber (variabil) va lua valoarea minimă sau maximă.

Astfel, se obţin formulările următoare:

(a) Se dă Ω şi J, şi se caută condiţia pentru care Q este cît mai mare.

(b) Se dă Q şi J, şi se caută condiţia ca Ω să fie cît mai mic.

(c) Se dă Q şi Ω, şi se caută condiţia ca J să fie cît mai mic.

Din relaţiile (1), se obţin pentru J dat, atît în cazul (a) cît şi în cazul (b), expresiile modulelor de debit pentru două soluţii diferite (indicii 1 şi 2):

$$K_1 = \frac{1}{n}\,\Omega_1 R_1^{2/3} \qquad K_2 = \frac{1}{n}\,\Omega_2 R_2^{2/3}, \tag{2}$$

în care n este cifra de rugozitate (Manning), considerînd acelaşi material.

— În cazul (a), cînd $\Omega_1 = \Omega_2$, la modulul, deci şi la debitul cel mai mare, corespunde raza hidraulică cea mai mare.

Deci se vor căuta figurile pentru care, la arie închisă constantă, corespunde raza hidraulică maximă deci perimetrul minim.

— În cazul (b), pentru a satisface condiţia debitelor egale, trebuie să avem $K_1 = K_2$,
deci

$$\Omega_1 R_1^{2/3} = \Omega_2 R_2^{2/3}. \tag{3}$$

Condiţia de optim de volum este a alege soluţia (1) pentru care

$$\Omega_1 < \Omega_2 \quad \text{şi deci} \quad R_1 > R_2,$$

adică soluția pentru care raza hidraulică e mai mare, deci ca și în cazul precedent.

— În cazul (c), $K_1 = K_2$; însă din $Q_1 = Q_2$ și $\Omega_1 = \Omega_2$ rezultă, ținînd seama de (1) că

$$J = \frac{n^2}{R^{4/3}} \left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 = \frac{\text{const.}}{R^{4/3}}, \tag{4}$$

adică panta cea mai mică J corespunde razei hidraulice cele mai mari.

Răspunsul la cele trei formulări ale problemei este următorul: *forma* cea mai favorabilă a profilului transversal este aceea pentru care raza hidraulică este cea mai mare sau perimetrul cel mai mic în raport cu aria secțiunii, căci satisface o întreită condiție : geometrică (secțiunea cea mai mică), hidraulică (debitul cel mai mare) și energetică (panta energetică cea mai mică).

Trebuie însă să remarcăm că problema formei profilului optim nu se poate limita la această formulare simplificată la extrem. Într-adevăr, s-a considerat că secțiunea canalului este chiar secțiunea lui de curgere, coincidență rară în practică, deoarece din cauza reliefului terenului, pe lungimi mari, canalele se execută fie în săpătură adîncă (adică nivelul apei mult sub nivelul terenului), fie în umplutură, fie în profil mixt și nu există o dependență precizată între volumul secției udate și acela al lucrărilor. Într-adevăr, în afară de cele arătate, trebuie să se țină seama că se cere la canalele mai mari, o lărgime minimă la fund, drumuri laterale pentru efectuarea transporturilor în timpul execuției și exploatării, lucrări de epuismente, de perearea albiei, de etanșarea digurilor laterale, drenaje, lucrări de artă la intersecții cu văi, cu drumuri etc. Cheltuielile de investiție cerute de toate aceste lucrări, precum și cheltuielile generale ale întreprinderii, depind de numeroși parametri geometrici, geotehnici, economici și influențează în moduri variate alegerea dimensiunilor caracteristice și chiar a profilului optim.

Este adevărat că toate aceste condițiuni suplimentare influențează mai puțin forma și mai mult dimensiunile secțiunii, totuși este necesar să se analizeze care din aceste condițiuni influențează chiar forma, îndicîndu-se metoda de studiu. În cele ce urmează, secțiunea canalului ce se studiază nu va fi la alegere complet liberă ci se vor impune unele restricții adoptate în practică :

Secțiunea simetrică față de o axă verticală.

Se dă clasa de curbe care constituie conturul, acesta putînd fi format uneori din arce de curbe diferite.

La canale de pămînt se limitează înclinarea taluzelor sub taluzul stabil, iar la taluzele curbilinii, tangentele în orice punct la contur să fie sub taluzul stabil.

Se poate limita adîncimea (pentru dificultăți de execuție).

Se poate admite o pondere, crescînd cu adîncimea, a tranșelor de suprafață udată spre a ține seama de costul crescînd cu adîncimea, al lucrărilor.

Se poate limita lățimea la oglinda apei sau la fund.

Jghiaburile, jilipurile, podurile-canal pot fi considerate într-o primă aproximație ca semi-conducte cu pereți supra-înălțați pentru spațiul de gardă.

La folosirea teoriei izoperimetrelor ne referim la formularea clasică a căutării formei de arie maximă care corespunde unui perimetru dat.

În hidraulica canalelor interesează însă nu figurile închise, deoarece suprafața liberă a lichidului nu intră în calculul perimetrului udat. În acest caz, se pune întrebarea :

Dintre toate figurile izoperimetre situate *deoparte* a unei drepte, care este curba care închide aria maximă împreună cu linia AB care nu face parte din perimetru?

S-au rezolvat numeroase probleme de izoperimetrie atît prin metode geometrice directe, cît și analitice, prin calcul variațional etc.

3. Importanța teoremelor stabilite rezidă în generalitatea lor. Iată o teoremă relativă la un contur poligonal, care este importantă pentru problema canalelor : „*Dintre toate liniile poligonale izoperimetre formate cu un număr de laturi neegale, de lungimi date, situate deoparte a unei drepte $A\ A'$, extremitățile A și A' fiind libere a aluneca pe dreapta $A\ A'$, poligonul care închide aria maximă este inscriptibil într-un cerc în care $A\ A'$ este diametru*".

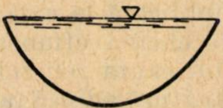


Fig. 1

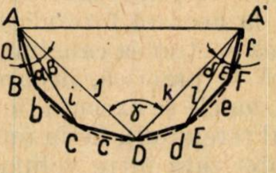


Fig. 2

Se poate da o demonstrație nouă acestei teoreme cunoscute :

Date fiind laturile a, b, c, d, e, f, alegem ca parametri variabili unghiurile α, β, γ, δ ε și construim pe rînd triunghiurile următoare :

Triunghiul ABC, cu laturile date a, b, și cu $\measuredangle$ α arbitrar, și se obține latura i = funcție (a, b, α).

Triunghiul ACD, cu laturile c și i cunoscute (după ce am construit triunghiul ABC) și cu unghiul β arbitrar, și se obține latura $j = f(a,b,c,\alpha,\beta)$.

Triunghiul $A'FE$, cu laturile f,e date și $\measuredangle$ ε arbitrar și se obține latura $l = f\ (e,f,\varepsilon)$.

Triunghiul $A'ED$, cu laturile l, d cunoscute și $\measuredangle$ δ arbitrar, $K = f\ (e,\ f,\ \varepsilon,\ d,\ \delta)$.

În sfîrșit, rezultă triunghiul ADA', cu un unghi γ arbitrar și laturile j, k obținute anterior. Unghiul γ este arbitrar, deoarece punctele A,A' pot aluneca pe dreapta dată.

Admitem că figura astfel construită conține aria maximă (închisă cu dreapta AA' care nu face parte din perimetrul dat) arie egală cu suma ariilor triunghiurilor componente.

$2\ S = a\,i \sin\alpha + ij \sin\beta + j\,k \sin\gamma + k\,l \sin\delta + l\,f \sin\varepsilon$. Întrucît unghiurile alese sînt variabilele independente, trebuie ca derivatele parțiale ale lui $2\,S$ în raport cu fiecare din aceste variabile să fie nule. Astfel, pentru α, β, δ, ε date și γ variabil, trebuie ca

$$2\,\frac{\partial S}{\partial \gamma} = 0 = j\,k \cos \gamma,$$

derivatele celorlalți termeni în raport cu γ fiind nule. De aci rezultă $\gamma = \frac{\pi}{2}$ adică punctul D se află pe un semicerc și evident că și celelalte vîrfuri trebuie să se afle pe același semicerc, căci oricăruia i se poate aplica raționamentul făcut pentru punctul D.

4. O altă teoremă generală care credem că se enunță și demonstrează pentru prima oară acum, este următoarea (fig. 3) :

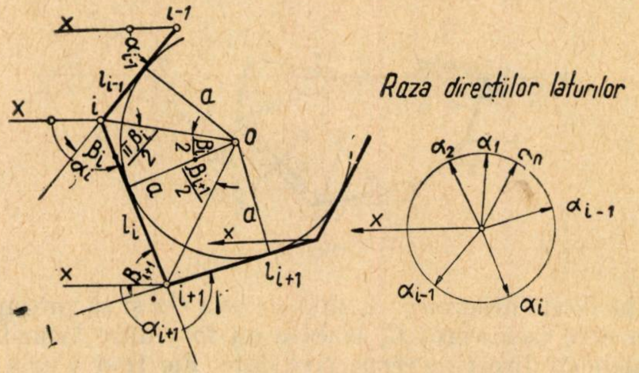


Fig. 3

Teoremă. Dintre toate liniile poligonale izoperimetrice cu un număr de laturi de lungimi nedate, însă avînd direcțiile date, poligonul care închide aria maximă este circumscriptibil unui cerc, cu condiția ca ordinea laturilor să corespundă ordinii de creștere a unghiului care definește orientarea dreptelor față de o axă fixă (condiția de convexitate), și ca unghiul format de prima cu ultima latură să fie mai mic ca 180° (condiția de închidere a poligonului).

Consecințe. 1) În cazul cînd poligonul trebuie să se formeze ca mai sus, însă deoparte a unei drepte de direcție, dată, de lungime nedată, și care nu face parte din perimetru, poligonul care închide aria maximă este circumscriptibil unui semicerc avînd diametrul de bază situat pe dreapta de direcție dată (fig. 4). În acest caz mai trebuie ca unghiurile interne ce face dreapta direcțională (de închidere) cu dreptele adiacente l și n să fie 90°.

2) În ambele cazuri, dacă unghiurile care definesc direcțiile laturilor sînt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, raza a a cercului (sau a semicercului înscris în poligon) este dată de relația

$$2\,\Omega = a \sum_{1}^{n} l_i = a\,\chi, \tag{5}$$

iar lungimea unei laturi este exprimată prin

$$l_i = a\left(\operatorname{tg}\frac{\beta_i}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta_{i+1}}{2}\right), \tag{6}$$

β_{i-1} și β_i fiind unghiurile ce face latura l_i cu laturile adiacente, valorile lor fiind $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ etc.

3) Dacă aria închisă de poligon reprezintă secția udată a unui canal, raza hidraulică a secțiunii udate este $R = \dfrac{a}{2}$, în ambele cazuri ; diametrul de bază din cazul al doilea coincide cu nivelul apei.

Demonstrația și a acestei teoreme se dă analitic, în modul următor, ca verificare a enunțului. Fie ,,roza direcțiilor date ale laturilor cu centrul

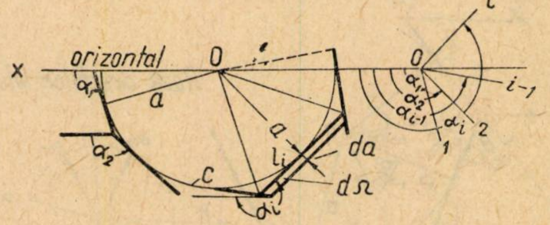


Fig. 4

în 0 și unghiurile de orientare α_i față de axa Ox și să presupunem că am construit un cerc (semicerc) C, la care au fost duse laturile poligonului căutat, paralele cu direcțiile respective date. Fie Ω și χ aria și perimetrul acestui poligon circumscris cercului. Plecînd de la această poziție, să dăm o deplasare da, laturei l_i, paralelă cu ea însăși, formîndu-se un poligon, care nu mai e circumscris cercului C, iar aria și perimetrul lui au crescut cu $d\,\Omega$ respectiv $d\chi$ față de aria, respectiv perimetrul poligonului inițial.

Fie Ω_1 aria și χ_1 perimetrul poligonului obținut prin deplasarea laturei l_i paralel cu ea însăși, de cantitatea da. Pentru ca acest poligon Ω_1 să poată fi comparabil cu poligonul Ω, să-l reducem la o scară astfel aleasă ca perimetrul său χ_1 să fie egal cu χ, adică la scara $\dfrac{\chi}{\chi + d\chi}$.

Să comparăm aria poligonului inițial cu aria poligonului izoperimetric

$$(\Omega + d\Omega)\left(\frac{\chi}{\chi + d\chi}\right)^2. \tag{7}$$

Notînd β_i și β_{i+1} unghiurile ce face latura l_i cu laturile adiacente, avem

$$d\Omega = l_i\,da - \frac{1}{2}\left(dl_{i-1}\cos\beta_i + dl_{i+1}\cos\beta_{i+1}\right)da = l_i\,da -$$

$$-\frac{1}{4}\left(\sin 2\beta_i + \sin 2\beta_{i+1}\right)da^2$$

în care dl_{i-1} şi dl_{i+1} sînt lungimile laturilor adiacente laturei l_i, în urma creşterei lui a cu da (fig. 5). Termenii din paranteză formează o arie infinit mică de ordinul 2, pe care o vom nota ε^2, deci

$$d\Omega = l_i\, da - \varepsilon^2,$$

deoarece

$$da = dl_{i-1} \sin \beta_i = l_{i+1} \sin \beta_{i+1}, \tag{8}$$

şi considerînd variaţiile lungimilor laturilor, obţinem :

$$d\chi = \frac{da}{\sin \beta_i}(1 - \cos \beta_i) + \frac{da}{\sin \beta_{i+1}}(1 - \cos \beta_{i+1}) = \left(\operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta_{i+1}}{2}\right) da.$$

Ţinînd seama de relaţia (6), rezultă că

$$d\chi = \frac{l_i}{a}\, da. \tag{9}$$

Introducînd pe $d\Omega$ şi $d\chi$ în expresia (7), rezultă că aria poligonului izoperimetric cu Ω este

$$\Omega' = (\Omega + l_i\, da - \varepsilon^2)\left(\frac{\chi}{\chi + \frac{l_i}{a}\, da}\right)^2. \tag{10}$$

Raportul ariilor celor două poligoane este :

$$\frac{\Omega}{\Omega'} = \frac{\Omega}{\Omega + l_i\, da - \varepsilon^2}\left(1 + \frac{l_i}{a\chi}\, da\right)^2 \tag{11}$$

sau, deoarece $2\Omega/\chi = a$

$$\frac{\Omega}{\Omega'} = \frac{\Omega\left(1 + \frac{2 l_i\, da}{\chi a} + \frac{l_i^2\, da^2}{\chi^2 a^2}\right)}{\Omega + l_i\, da - \varepsilon^2} = \frac{\Omega + l_i\, da + \frac{l_i^2\, da^2}{4\Omega}}{\Omega + l_i\, da - \varepsilon^2} > 1. \tag{12}$$

Rezultă deci că poligonul iniţial (circumscris cercului C) are o arie mai mare decît poligonul Ω', izoperimetric cu Ω avînd laturile paralele cu ale acestuia, însă fără a mai fi circumscris cercului. Este de remarcat că termenul al treilea de la numărător este infinit mic de ordinul 2 (fie notat η^2) şi este pozitiv, chiar dacă da este negativ. Astfel, în cazul că $da < 0$ raportul ariilor poligoanelor va fi

$$\frac{\Omega - l_i\, da + \eta^2}{\Omega - l_i\, da - \varepsilon^2} > 1.$$

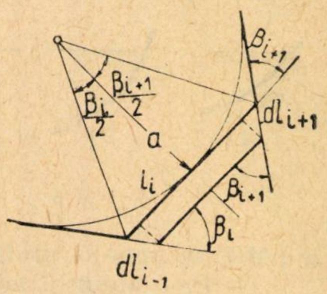


Fig. 5

În cazul deplasării mai multor laturi ale poligonului iniţial, raţionamentul se aplică succesiv, astfel că pentru orice deformări ale poligonului compatibile cu condiţiile stabilite (izoperimetrie şi direcţii constante ale laturilor), poligonul care închide aria minimă este acel circumscris unui cerc.

Demonstrația precedentă poate servi și pentru reciproca acestei teoreme :

Dintre poligoanele care închid o arie constantă și au laturile paralele cu direcții date, poligonul care are perimetrul minim este circumscris unui cerc.

Pentru demonstrație, se va da mai întîi deplasarea da laturei l_i și se va compara perimetrul poligonului inițial χ cu acel care va rezulta din poligonul deformat prin reducerea la o scară aleasă astfel ca χ' să se reducă la valoarea inițială, adică :

$$\chi' = (\chi + d\chi) \cdot \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega + d\Omega}}.$$

Rezultă :

$$\frac{\chi'}{\chi} = \frac{\chi + \frac{l_i}{a}\, da}{\chi} \cdot \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega + l_i\, da - \varepsilon^2}}.$$

Înlocuind pe $\chi = \dfrac{2\Omega}{a}$, rezultă :

$$\frac{\chi'}{\chi} = \left(1 + \frac{l_i\, da}{2\Omega}\right) \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{l_i\, da}{\Omega} - \frac{\varepsilon^2}{\Omega}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{l_i\, da}{\Omega} + \frac{l_i^2\, da^2}{4\Omega^2}}{1 + \frac{l_i\, da}{\Omega} - \frac{\varepsilon^2}{\Omega}}} > 1, \quad (13)$$

deci menținînd aria constantă, poligonul are perimetrul minim cînd este circumscris unui cerc, întrucît orice alt poligon χ' învecinat, îndeplinind condițiile cerute, are perimetrul mai mare ca χ.

Și în acest caz trebuie respectată condiția de convexitate a poligonului, deci ordinea laturilor să corespundă ordinii crescătoare a unghiurilor de direcție a laturilor.

La aplicarea teoremei poligoanelor izoperimetrice se poate trece la curbe, prin noțiunea de poligon cu număr infinit de laturi, iar în cazul teoremei polilaterelor izoperimetrice, curba apare ca înfășurată unei familii de drepte care urmează o lege între parametrii liberi. Forma curbei depinde în mare măsură de tangentele la extremitățile curbei.

Întrucît în cazul canalelor de formă optimă forma pereților laterali este influențată puternic de condițiile geotehnice și geologice, acestea se pot transpune în probleme de matematică de felul următor :

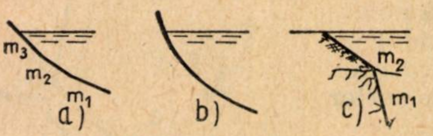


Fig. 6

— Pe o anumită adîncime de la suprafața terenului, taluzul poate fi m_3 iar mai în adîncime $m_2 > m_3$, apoi $m_1 > m_2$ etc. Linia de contur a pereților poate fi deci poligonală (fig. 6 *a*) sau curbă (fig. 6 *b*).

— Pe o anumită adîncime de la suprafață, taluzul să fie înclinat mai mult (corespunzător unui teren de structură dispersă) iar mai în adîncime dintr-o rocă suficient de cimentată pentru a permite taluzări mai abrupte (fig. 6 *c*).

Dacă se acceptă ca pereții canalului să aibă profile curbe, se vor prefera metodele analitice obișnuite, eventual calculul variațional în care caz este necesar să se fixeze în prealabil clasa de curbe înăuntrul căreia se caută ,, extremala", adică acea curbă care corespunde condiției de maximum sau minim. Se amintește că curba de clasa n se definește acea curbă care reprezintă o funcție continuă avînd derivatele de ordinul 1 pînă la n, continue. În aplicațiile tehnice, este necesar a se compara și curbe extremale din clase diferite, ținînd seama și de anumite condiții suplimentare care apar în practică. În sfîrșit, se vor compara și profile compuse din mai multe arce de curbă de clase diferite. Prin asemenea investigații se caută realizarea unui ,,extremum".

II. PROBLEME SPECIALE DE DETERMINAREA FORMEI OPTIME A PROFILELOR TRANSVERSALE LA CANALE (PRINCIPALELE TIPURI DE PROBLEME ȘI SOLUȚIONAREA LOR)

Problema 1. Dintre secțiunile izoperimetrice ale unui canal, să se afle forma conturului care închide aria cea mai mare; reciproc, dintre secțiunile de arii egale, cum trebuie să fie conturul pentru ca perimetrul udat să fie minimum?

În acest tip de probleme perimetrul ce intră în calcul este numai cel udat, deci fără linia de la suprafața liberă a lichidului. Dacă nu se pun și alte condiții cu privire la unele dimensiuni caracteristice sau la taluze, aplicarea teoremelor precedente duce la concluziile următoare, cu privire la contururile optime:

a) Printre triunghiuri, triunghiul dreptunghi isoscel (înscris în semicerc);

b) Printre trapeze, semihexagonul regulat (înscris în semicerc);

c) Printre poligoanele convexe, semipoligonul regulat (înscris în semicerc);

d) Printre poligoanele regulate, cel cu mai multe laturi și — la limită — semicercul;

e) Printre lănțișoarele cu coardă orizontală, se găsește că cel mai favorabil este acela la care raportul între săgeata f și coarda $2\,x$, este 0,493 ($\sim$0,5).

Pentru a demonstra aceasta, exprimăm lungimea arcului $2s$ și suprafața udată Ω, în funcție de variabilele x și h (parametrul curbei). Raportîndu-ne la figura 7, se pot scrie cunoscutele relații

$$\Omega = 2\,x\,y - 2\,h\,s, \qquad s = h\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{h}, \qquad y = h\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{h}. \tag{14}$$

Dacă s este constant, $ds = 0$ oricare ar fi variațiile parametrilor aleși; de asemenea $d\Omega = 0$ pentru forma perimetrului corespunzînd valorii maxime a lui Ω. Făcînd calculele, se găsește că

$$\frac{d\Omega}{2} = 0 = \left(h \operatorname{ch} \frac{x}{h} + x \operatorname{sh} \frac{x}{h}\right) dx + \left(x \operatorname{ch} \frac{x}{h} - x \operatorname{sh} \frac{x}{h} - s\right) dh,$$

$$ds = 0 = \left(\operatorname{sh} \frac{x}{h} - \frac{x}{h} \operatorname{ch} \frac{x}{h}\right) dh + \operatorname{ch} \frac{x}{h} dx.$$

Egalînd raportul $\frac{dx}{dh}$ obținut din aceste două ecuații, rezultă, după introducerea notației : $\frac{x}{h} = \xi$,

$$\xi \operatorname{th}^2 \xi + 2 \operatorname{th} \xi - 2\xi = 0. \tag{15}$$

Rezolvînd această ecuație prin încercări, se găsește cu aproximație de 0,6%, că $\xi = \frac{x}{h} = 1{,}60$, de unde deducem că lungimea semicoardei este foarte apropiată de aceea a săgeții, deci curba este foarte apropiată de semicercul circumscris. Calculînd pe y și s cu formulele precedente, se găsește $y = 2{,}577\, h$, $s = 2{,}376\, h$, $\Omega = 2\ (1{,}60 \times 2{,}577 - 1{,}0 \times 2{,}376)\, h^2 = 3{,}488\, h^2$, $f = 1{,}577\, h$. Față de aria semicercului izoperimetric care are raza $\frac{2 \times 2{,}376}{\pi} = 1{,}508\, h$ și aria udată $3{,}572\, h^2$, se constată că lănțișorul e mai puțin favorabil (cca. 2,35%).

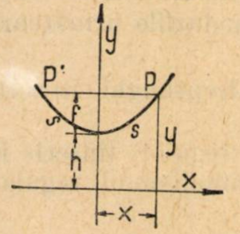


Fig. 7

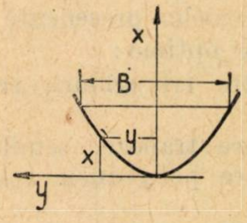


Fig. 8

f) Calculînd și parabola izoperimetrică, găsim de asemenea o formă apropiată de un cerc circumscris, însă cu aria și mai mică, lănțișorul situîndu-se între cerc și parabolă (fig. 8).

Luînd ca variabile, în cazul parabolei pe y și p, și ținînd seama de relațiile cunoscute

$$y^2 = 2\,px, \quad \Omega = \frac{2}{3}\, x\,(2y) \text{ și } s = \frac{p}{2}\left\{\frac{y}{p^2}\sqrt{p^2 + y^2} + \ln\left(y + \sqrt{p^2 + y^2}\right) - \ln p\right\}, \tag{16}$$

punem condiţiile $d\Omega = 0$ şi $ds = 0$ şi găsim o ecuaţie în $\eta = \frac{y}{p}$, a cărei rezolvare determină forma curbei căutate. Pentru a reduce calculele, exprimăm de la început pe Ω şi pe s în funcţie de η şi p.

$$\Omega = \frac{2}{3} p^2 \eta^3 \qquad s = \frac{p}{2} \{\eta \sqrt{1+\eta^2} + \ln (\eta + \sqrt{1+\eta^2})\}. \tag{16'}$$

Rezultă :

$$d\Omega = 2p\,\eta^2 \left(\frac{2}{3}\,\eta\, dp + p\, d\eta\right) = 0,$$

$$ds = \{\eta \sqrt{1+\eta^2} + \ln (\eta + \sqrt{1+\eta^2})\}\, dp + p \left\{ \sqrt{1+\eta^2} + \frac{\eta^2}{\sqrt{1+\eta^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 + \dfrac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}}{\eta + \sqrt{1+\eta^2}} \right\} d\eta = 0.$$

Egalînd expresiile lui $\frac{d\eta}{dp}$ deduse din aceste ecuaţii şi făcînd simplificările cuvenite, rezultă

$$\frac{\ln (\eta + \sqrt{1+\eta^2})}{\sqrt{1+\eta^2}} = \frac{\eta}{3}. \tag{17}$$

Această ecuaţie are o rădăcină $\eta = 1{,}94 = \frac{y}{p}$.

Din ecuaţia parabolei rezultă semicoarda $x = \frac{(1{,}94)^2\, p^2}{2p} = 1{,}88\ p$. Aşadar, ca şi în cazul lănţişorului, semicoarda este aproape egală cu adîncimea. Care este aria cercului izoperimetric?

Înlocuind în expresia lui s pe η cu 1,94 şi făcînd $p = 1$ m obţinem perimetrul udat şi aria

$$2s = 5{,}657 \text{ m}, \quad \Omega = 4{,}87 \text{ m}^2,$$

iar raza semicercului izoperimetric $r = 1{,}8$ şi aria sa, $\Omega_c = 5{,}11$ m², deci cu 4,7% mai mare. Aria parabolei redusă la scara calculelor anterioare, este $\Omega_p = 3{,}400$ h².

Rezultatele obţinute pînă acum la această problemă sînt deci următoarele :

Profil	Raza	Perimetru udat	Aria udată	Raportul ariilor
Semicerc	1,508	4,752	3,572	1,000
Lănţişor	—	4,752	3,488	0,976
Parabola	—	4,752	3,400	0,952

PROBLEME CU CONDIŢII RESTRICTIVE

Problema 2. Dintre toate profilele simetrice care închid o arie constantă sub nivelul suprafeţei libere (sub linia orizontală), care este acela care are perimetrul udat minim, în cazul că se dă adîncimea maximă, în axă, *a*?

Cazul $a < a_0$, a_0 fiind adîncimea corespunzătoare profilului semicircular.

Deşi şi această problemă poate fi tratată mai general, ne vom limita a lucra un exemplu numeric :

a) Un profil circular (segment) de cerc avînd unghiul la centru

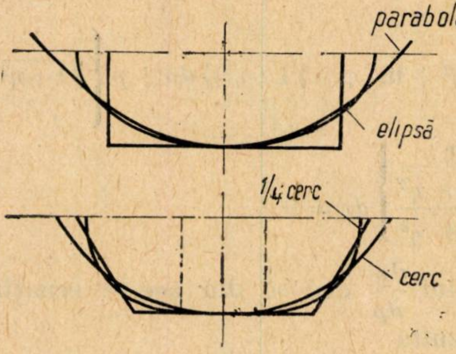


Fig. 9

COC′ = 120°, $r = 5$ m, $a = 2{,}5$ m, de unde rezultă $B = 8{,}66$ m şi aria $\Omega = 15{,}35$ m^2, se găseşte perimetrul $\chi = 10{,}47$ m.

Vom compara această formă cu alte forme de profil, păstrînd mereu $\Omega = 15{,}35$ m^2 şi $a = 2{,}5$ m găsim :

b) Trapezul isoscel cu taluzele de 60° cu orizontala, avînd baza mică 1,81 m şi perimetrul udat $\chi = 10{,}47$ m.

c) Parabola de gradul doi, cu parametrul $p = 4{,}241$, coarda 9,21 m şi $\chi = 10{,}25$ m.

d) Semielipsa cu semiaxa mare $b = 3{,}909$ m şi $\chi = 10{,}20$ m.

e) Dreptunghiul cu două sferturi de cerc. Se găseşte lungimea dreptunghiului 2,22 m şi $\chi = 10{,}074$ m.

Iată, în ordinea economiei, aceste profile şi diferenţele de perimetru faţă de profilul dreptunghiular cu două cercuri, cel mai favorabil.

	χ	χ/χ_0
dreptunghiul cu 2 sferturi de cerc	$\chi_0 \doteq 10{,}074$	1,0000
semielipsa	10,20	1,0126
parabola de gr. 2	10,25	1,0176
cercul segment	10,47	1,0390
trapez isoscel	10,47	1,0390
dreptunghi	11,15	1,1080

Cazul $a = a_0$ intră în problema precedentă, profilul cel mai economic este semicercul.

Cazul $a > a_0$. Secțiunea are suprafața dată mai mare decît $\frac{\pi}{2}\, a_0^2$ însă mai mică decît $\frac{\pi}{2} a^2$.

Un profil posibil este arcul de cerc cu unghiul la centru > 180°. Alte forme posibile sînt : parabola, semi-elipsa cu axa mică orizontală, dreptunghiul cu vîrfurile de la fund rotunjite circular etc. Acest caz nu prezintă un interes practic ca primul. Într-adevăr în practică apare mult mai deseori necesitatea de limitarea adîncimii și nu de sporirea ei, pentru a nu intra cu excavațiile într-o zonă cu ape subterane abundente sau în formații de rocă tare, sau în nisipuri curgătoare etc. care s-ar găsi mai în adîncime.

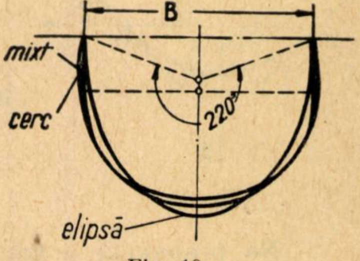


Fig. 10

Problema 3. Dintre profilele de canal care au același perimetru udat χ, care este acela de suprafață udată maximă, dacă lățimea profilului B, la oglinda apei, este dată?

Această problemă are asemănare cu cea precedentă și trebuie, pentru ca soluția să fie posibilă, să fie îndeplinită condiția $\chi > B$. Se deosebesc trei cazuri :

a) $\chi < \frac{\pi B}{2}$. Trebuie comparate mai multe curbe : arcul de cerc, elipsa, lănțișorul, parabola, dreptunghiul cu două sferturi de cerc etc.

b) $\chi = \frac{\pi B}{2}$. Figura cea mai favorabilă este semicercul, urmat de celelalte, ca în problema 1.

c) $\chi > \frac{\pi B}{2}$. Fie $\chi = 10{,}20$, $B = 50$ m. Să comparăm (fig. 10) elipsa cu profilul mixt „dreptunghi + semicerc".

Elipsa va avea $a = 3{,}909$ și aria $\Omega = 15{,}35$ m².

Profilul mixt va avea perimetrul $5\,\frac{\pi}{2} + 2\,z = 10{,}2$ m și aria $= \frac{\pi\,(2{,}5)^2}{2} + 5\,z$. Rezultă înălțimea dreptunghiului $z = 1{,}173$ și $\Omega = 15{,}675$ m², adică acest profil este mai favorabil ca elipsa.

Dar cel mai economic profil este arcul de cerc cu raza de 2,66 m și unghiul la centru 220° care, avînd același perimetru, închide cu orizontala o arie de 16,10 m². Așadar ordinea de economicitate ar fi :

arcul de cerc	$\Omega = 1{,}000$
dreptunghiul cu semicerc	0,973
elipsa	0,954
dreptunghiul ($\Omega = 13$ m²)	0,807.

Problema 4. Dintre toate profilele de canal, simetrice, izoperimetrice, să se determine profilul care conține aria maximă, fiind date înclinările pe orizontală ale curbei de contur, la capetele curbei.

În acest caz se dă lungimea arcului $CC' = L$, valorile ctg. $\varphi = m$ ar punctele C, C' vor ocupa poziția corespunzînd valorii extreme a ariei exprimată prin funcționala

$$J = \int_C^{C'} F\,dx = \int_C^{C'} y\,dx. \tag{18}$$

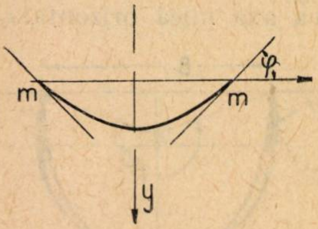


Fig. 11

Lungimea arcului CC' este exprimată prin integrala definită K, a cărei valoare este dată și egală cu L

$$K = \int_C^{C'} G\,dx = \int_C^{C'} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = L. \tag{19}$$

Ne propunem a rezolva această problemă de calcul variațional, punînd condiție ca pentru orice valoare a lui x, de-a lungul curbei $y = y\,(x)$, variația funcției $H = J + \lambda K$ să fie nulă, adică

$$\delta H = \delta\ (J + \lambda K) = 0, \tag{20}$$

în care λ este un parametru ce se va determina prin condițiile enunțate. Ecuația (cu notația $H_{y'}$ = derivata lui H în raport cu y') :

$$H - y' H_{y'}, = C_1, \tag{21}$$

reprezintă o integrală primă a ecuației lui Euler pentru integrala :

$$I = \int_C^{C'} H\,(y, y')\,dx. \tag{22}$$

În cazul de față

$$H\,(y, y') = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}. \tag{23}$$

Integrala primă a lui I este

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - y' \cdot \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1, \tag{24}$$

sau, simplificată

$$y = C_1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{24'}$$

Dacă se operează schimbarea de variabilă

$$y' = \operatorname{tg} \varphi$$

se obține

$$x = \lambda \sin \varphi + \alpha_2,$$
$$y = -\lambda \cos \varphi + \alpha_1,$$

din care rezultă, prin eliminarea lui λ

$$(x - \alpha_2)^2 + (y - \alpha_1)^2 = \lambda^2,$$

adică extremala căutată este un cerc. Punînd condițiile

$$(y = 0, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \pm m) \quad \text{și} \quad 2\,\varphi^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \cdot r = L,$$

în care r este raza cercului λ, se obțin valorile parametrelor

$$\alpha_1 = \frac{\lambda m}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \lambda = \frac{90^\circ L}{\pi \varphi^\circ}.$$

Ecuația cercului este deci

$$x^2 + \left(y - \frac{\lambda m}{\sqrt{1 + m^2}}\right)^2 = \left(\frac{90}{\varphi}\right)^2 \cdot \left(\frac{L}{\pi}\right)^2. \tag{25}$$

S-a folosit această metodă generală pentru a demonstra că printre familia de curbe de clasa C_1, cercul este curba extremală căutată.

Acest rezultat se poate afla și direct, astfel. Dacă în loc de ctg φ, s-ar da abscisele punctelor C, C', cădem peste o problemă cunoscută, rezolvată direct geometric, soluția fiind arcul de cerc de lungime L, subîntins de coarda $C\,C'$, date. Însă la acest arc de cerc corespund valori determinate ale unghiurilor φ de la capetele arcului și deci reciproc, dîndu-se unghiul φ, acestuia trebuie să-i corespundă un arc de cerc avînd o coardă de o lungime determinată. Construcția geometrică este următoarea:

Se determină unghiul la centru 2 φ din condiția ctg $\varphi = m$. Se află raza cercului cu ajutorului 2 φ și L; cu aceste elemente se determină poziția centrului și a punctelor C, C'

Observații. 1. Pe același cerc, însă arcul complementar lui CDC' corespunde unui unghi φ_1, suplimentar lui φ.

2. Dacă s-ar impune condiția ctg $\varphi = m$, la capetele arcului, din nevoia de a se menține taluzul canalului în limitele taluzului natural, merită a se face o comparație și cu alte curbe posibile, nu însă cu parabola, care este din aceeași clasă cu cercul și care ar conduce la o arie ceva mai mică, deci mai nefavorabilă. Trapezul, care este o curbă poligonală discontinuă, respectînd același taluz m, va trebui însă comparat. După cum se știe, trapezul optim cu taluze date este circumscris unui cerc de rază h. Perimetrul său este :

$$\chi = 2\,(2\sqrt{1 + m^2} - m)\,h$$

şi aria

$$\Omega = (2\sqrt{1+m^2} - m)\,h^2. \tag{26}$$

Din exemplele numerice considerate în problema 1 rezultă că cercul şi parabola sînt mai avantajoase ca trapezul optim.

Problema 5. Dîndu-se curba de egală stabilitate a taluzului canalului, să se determine lăţimea la fund a unui canal, astfel ca la acelaşi perimetru să corespundă aria maximă închisă de canal sub oglinda apei.

În această problemă se caută a se prinde condiţiile mai complicate ce se întîlnesc în natură. Prin rezolvarea acestei probleme se generalizează metoda de determinare a profilului trapezoidal optim cînd se dau taluzele m.

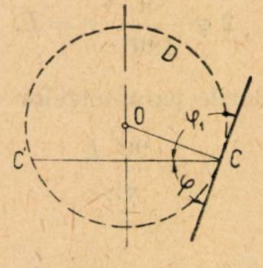


Fig. 12

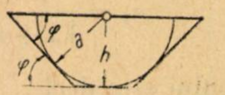


Fig. 13

Fie $C(x, y)$ curba taluzului şi fie lungimea segmentului de curba

$$\overset{\frown}{OM} = L = \int_0^M \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx.$$

Aceasta se poate scrie

$$L = \int_{y=0}^{y} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{y'^2}\right)}\, dy = L(y). \tag{27}$$

Aria cuprinsă între orizontală, curba L şi ordonata y este

$$F = \int_0^x y\, dx. \tag{28}$$

Să formăm derivatele

$$\frac{dF}{dy} \text{ şi } \frac{dL}{dy}$$

$$\frac{dF}{dy} = y\frac{dx}{dy} = my, \tag{29}$$

în care m este ctg φ (φ unghiul cu orizontala taluzului) în punctul de ordonata y. Într-adevăr, $m = \operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{dx}{dy}$.

$$\frac{dL}{dy} = \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}} = \sqrt{1 + m^2}. \tag{30}$$

Aria udată Ω și perimetrul udat se exprimă, pentru $y = h$, astfel (în cazul profilului simetric):

$$\Omega = bh + 2F(h) \qquad \chi = b + 2L(h) \tag{31}$$

$$\frac{d\Omega}{dh} = b + h\frac{db}{dh} + 2\frac{dF}{dh} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d\chi}{dh} = \frac{db}{dh} + 2\frac{dL}{dh} = 0, \tag{32}$$

pentru a răspunde condițiilor χ = const. și Ω max., h fiind parametrul variabil.

Se înțelege prin $\frac{dF}{dh}$ și $\frac{dL}{dh}$ valorile acestor derivate pentru $y = h$. Ecuațiile de condiție anterioare devin:

$$b + h\frac{db}{dh} + 2m_1 h = 0$$

$$\text{și} \quad \frac{db}{dh} + 2\sqrt{1 + m_1^2} = 0, \tag{33}$$

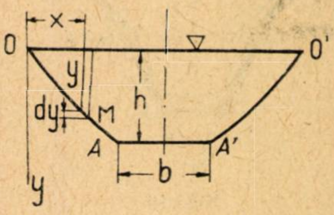


Fig. 14

m_1 fiind taluzul la fundul canalului în A și A'. Eliminînd pe $\frac{db}{dh}$ se obține raportul

$$\beta = \frac{b}{h} = 2\left[\sqrt{1 + m_1^2} - m_1\right]. \tag{34}$$

O dată găsit acest raport, se pot calcula toate elementele pentru a obține pe h și apoi pe χ, Ω și R, dacă se cunosc expresiile analitice ale lui $C(x, y) = 0$ și se rezolvă integralele L și F. Calculul se poate face și grafo-analitic, integrările făcîndu-se prin rectificări și planimetrări.

În cazurile practice, putem recurge la o soluție aproximativă, admisibilă, plecînd dela observația că în multe din problemele ce am studiat, forma cea mai favorabilă aproximează un semicerc. Astfel în fig. 15, unde se dau curbele de stabilitate C, ale taluzelor și secțiunea Ω, se calculează mai întîi raza R a unui semicerc fictiv a cărui arie este Ω și desenînd acest cerc la aceeași scară cu curbele C, pe foaia de calc, mișcăm această figură astfel ca să se mențină suprapunerea nivelului apei, pînă ce cercul este tangent la curba C; ducem apoi orizontala de fund, tangentă la același cerc și se obține profilul căutat, circumscris cercului. Secțiunea acestui profil este însă ceva mai mare decît a cercului și prin planimetrare obținem aria într-o primă aproximație; apoi reducem desenul profilului la scara raportului între secțiunea cerută și cea obținută. Avem astfel în a doua aproximație un profil aproape exact egal cu acel economic teoretic căutat.

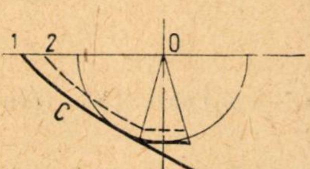


Fig. 15

Problema 6. Să se găsească profilul economic optim al unui canal la care nivelul apei se află la o adîncime dată t metri sub cota terenului.

astfel ca să transporte un debit cunoscut Q, sub panta hidraulică J dată. Profilul va fi compus din două trapeze suprapuse, în secțiunea udată taluzul are ctg $\varphi = m_1$, în trapezul aerian ctg. $\varphi = m_2$ (Fig. 16).

În această problemă se ține seama de faptul deseori întîlnit în practică că nivelul apei din canal nu coincide cu cota terenului și că $m_1 \neq m_2$. Pentru a nu ajunge la calcule prea complicate, vom considera coeficientul C (Chézy) constant în zona restrînsă în care se produce optimum economic.

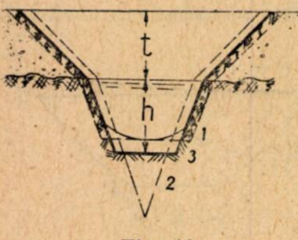


Fig. 16

Pentru rezolvare, vom exprima cele două condiții : suprafața F întreagă a profilului excavat să fie minimă și debitul Q este dat (constant). Avem :

$$F = h\,(b + m_1 h) + t\,(b + 2\,m_1 h + m_2 t) \quad (35)$$

$$Q = C\,\Omega\,R^{1/2} J^{1/2} \quad (36)$$

$\Omega = h\,(b + m_1 h)$ secțiunea udată

$\chi = b + 2\,m_1' h$

$m_1' = 1 + m_1^2.$

Deoarece Q și J sînt date, iar C este constant, rezultă din ecuația (36) că $\Omega\,R^{1/2} = \text{const.}$ sau

$$\frac{\Omega^3}{\chi} = \text{const.} \quad (37)$$

Dacă se ia ca variabilă h și $b = f\,(h)$, cele două condiții ale problemei revin la

$$\frac{dF}{db} = 0 \qquad \frac{d}{dh}\left(\frac{\Omega^3}{\chi}\right) = 0. \quad (38)$$

Prima condiție revine la

$$-(h + t)\,\frac{db}{dh} = b + 2\,m_1\,(h + t) \quad (39)$$

iar a doua revine la a anula numărătorul derivatei, adică

$$3\chi\,\frac{d\Omega}{dh} - \Omega\,\frac{d\chi}{dh} = 0. \quad (39')$$

sau, după efectuarea calculelor

$$-[(6\,m_1' - m_1)\,h^2 + 2hb]\,\frac{db}{dh} = 10\,m_1\,m_1' h^2 + (4\,m_1' + 6\,m_1)\,hb + 3\,b^2. \quad (40)$$

Din egalarea lui $\frac{db}{dh}$ din ecuațiile (39) și (39′), rezultă o relație între h și b, care se poate pune sub forma adimensională, adoptînd notațiile

$$\alpha = \frac{t}{h} + 1, \quad \beta = \frac{b}{h}, \quad (41)$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} + 2\,m_1\right)(2\,\beta + 6\,m_1' - m_1) = 10\,m_1\,m_1' + (4\,m_1' + 6\,m_1)\,\beta + 3\,\beta^2. \quad (42)$$

Pe de altă parte, ecuaţia (36) se poate scrie

$$\frac{\Omega^{3/2}}{\chi^{1/2}} = \frac{Q}{CJ^{1/2}} \text{ sau } \frac{h^3 (b + m_1 h)^3}{b + 2\, m_1' h} = \frac{Q^2}{C^2 J}$$

sau sub formă nedimensională,

$$\frac{(\beta + m_1)^3}{\beta + 2\, m_1'} = N\, (\alpha - 1)^5 \tag{43}$$

în care

$$N = \text{const.} = \frac{Q^2}{C^2 J t^5}.$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (42) şi (43) prin cîteva încercări nu întîmpină dificultăţi.

Pentru cazul $m_1 = m_2$, au fost calculate abace pentru diferite valori ale taluzelor şi diferite valori $\frac{h}{t}$ (Marzolo, L'Energia elettrica, 1932, p. 13).

Dacă $t = 0$, regăsim problema trapezului economic optim. Întradevăr, ecuaţia (39), devine condiţia lui $\Omega = \text{const.}$ iar ecuaţia (43), este nedeterminată, însă ecuaţia (37) revine la (38′) în care Ω fiind constant, primul termen e nul, deci $\frac{d\chi}{dh} = 0$, adică este condiţia lui χ minimum de la problema trapezului.

Problema este susceptibilă şi de o rezolvare grafo-analitică. Plecăm de la o variantă în care se ia trapezul inferior circumscris unui semicerc, ca în problema profilului trapez simplu şi apoi încercăm încă două variante : una cu adîncimi h mai mari şi alta cu $b = 0$ (triunghi). Calculăm sau planimetrăm pe F şi unim cele trei puncte printr-o curbă F (h) ; apoi se caută vizual poziţia minimului lui F (h).

Într-un articol viitor, ne propunem a publica rezultatul studiilor făcute prin introducerea în aceste probleme a unei consideraţii în plus, necesară în cazul dimensionării economice a canalelor suspendate (jghiaburi) din metal, beton armat sau lemn şi anume consumul din aceste materiale, necesitat pentru a asigura rezistenţa admisibilă corespunzătoare.

Primită la redacţie la 11 august 1962

ВОПРОСЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Рассматриваемые в докладе вопросы относятся к общим методам рационального расчета любого рода сооружений. Определение размеров в различных вариантах некоторого сооружения должно уточ-

няться не только применением законов физики и механики, а и принятием во внимание условия экономического оптимума, выражаемого с математической точки зрения условиями максимума некоторых функций, иногда частично определенных. Техническое строительство — имея целью создание некоторых экономических ценностей — является, следовательно, процессом, в котором естественные науки должны сочетаться с экономикой с начальной фазы его проектировки.

В настоящем докладе снова рассматривается старый вопрос оптимальных профилей каналов и трубопроводов, указывающий различные точки зрения экономического оптимума и методы решений, с получением новых результатов. Намечается перспектива применения этих методов в области гидротехнического строительства.

PROBLEMS OF THE ECONOMICAL DESIGN OF HYDRAULIC STRUCTURES

ABSTRACT

The problems treated in this paper belong to a general method for the rational design of any structures. The design of a structure depending on several variables, the defining of these variables is made not only by applying the laws of physics and mechanics but also by considering the conditions of economical optimum, mathematically expressed by the maximum conditions of a function which sometimes is only partially defined. The technical creation, which tends towards the realization of economic goods occurs thus as a process in which the sciences of nature should combine with economy from the very beginning of the conceiving process.

The present paper deals with the well-known problem of the optimum profiles of channels and conduits, various viewpoints on the economical optimum and the solving methods with their new results are shown. The possibilities of applying these methods in the field of hydraulic structures is also indicated.

BIBLIOGRAFIE

I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice*, Edit. Societ. „Gazeta matematică", Biblioteca matematică „George Țițeica", București, 1941.

M. A. LAVRENTIEV și L. A. LUSTERNIC, *Curs de calcul variațional*, Moscova, 1950, traducere din l. rusă, Editura tehnică, București, 1955.

A. LUDIN, *Wasserkraftanlagen*, Ed. Julius Springer, Berlin, 1934.

DOMENIUL DE APLICABILITATE A METODELOR DE CERCETARE CINEMATICĂ A MECANISMELOR PLANE ARTICULATE

DE

N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU și P. ANTONESCU [1]

I. INTRODUCERE

§ 1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

1. 1. Calculul cinematic al mecanismelor și în special al mecanismelor plane articulate a format în ultimul secol o preocupare de căpetenie a cercetătorilor din diferite țări în scopul găsirii unei metode generale și unitare și în același timp simplă pentru determinarea distribuțiilor de viteze și accelerații de pe elementele unui mecanism plan articulat.

Scopul final al acestor eforturi este îndreptat în diferite direcții ca de ex. : determinarea forțelor de inerție, calculul reacțiunilor din cuplele cinematice în vederea dimensionării juste a pieselor, sinteza unor mecanisme pe bază de condiții cinematice și dinamice.

Incontestabil că metoda generală unitară denumită de noi ,,clasică" se datorește oamenilor de știință ruși și sovietici, care luînd ca bază de cercetare cinematică grupele assurice au reușit să creeze unitatea de studiere a oricărui mecanism plan articulat oricît de complex ar apare ca structură și construcție.

Astfel. L. P. Assur [1] a pus bazele clasificării structurale a mecanismelor plane articulate și a dat directivele cercetării cinematice și cinetostatice ale grupelor assurice.

1. 2. Acad. I. I. Artobolevski [2], [3] a desăvîrșit metoda de cercetare cinematică ,,clasică" a lui Assur, perfecționînd clasificarea structurală a grupelor assurice și punînd la punct printr-o tratare unitară studiul cinematic al unui mecanism plan articulat, indiferent de numărul elementelor și al clasei grupelor aflate în structura lui [3].

---

[1] Institutul politehnic, București.

II. METODELE DE CERCETARE CINEMATICĂ A MECANISMELOR PLANE ARTICULATE

§ 2. METODA „CLASICĂ" (DIRECTĂ) DE DETERMINARE A DISTRIBUŢIILOR DE VITEZE ŞI ACCELERAŢII

Metoda foloseşte ecuaţiile vectoriale de compunere a vitezelor şi acceleraţiilor (ecuaţiile lui Euler) care se construiesc separat pentru viteze şi separat pentru acceleraţii (planele vitezelor şi cele ale acceleraţiilor) pornindu-se de la mişcarea cunoscută a elementului sau elementelor conducătoare (iniţiale) pînă se ajunge la elementul condus. Calculul grafic foloseşte (în funcţie de clasa şi ordinul grupelor assurice aflate în structura mecanismului) fie punctele particulare ale lui Assur, fie metoda poziţiilor false (sau a figurilor auxiliare). Ultima duce la construirea mai multor plane de viteze şi acceleraţii pînă se găseşte mişcarea reală a unui punct, după care reluarea construcţiei planului vitezelor sau al acceleraţiilor revine la cazul unei grupe de clasa a II-a ord. 2.

Complexitatea calculului grafic datorit acestor din urmă cazuri, au determinat pe cercetători să caute alte căi mai simple care să reducă volumul de lucru.

Simplificări se realizează în adevăr la multe mecanisme particulare şi pentru anumite poziţii ale lor în timpul ciclului cinematic, fără a se putea însă înlocui aplicarea metodei directe în cazurile generale[1]). În anexa nr. 1. este redat cazul general aplicat la un mecanism patrulater amplificat cu o grupă de clasa a V-a ord. 3.

§ 3. METODA SCHIMBĂRII ELEMENTULUI CONDUCĂTOR (INIŢIAL)

Metoda urmăreşte ca prin schimbarea elementului conducător să reducă clasa mecanismului evitînd fie folosirea punctelor particulare ale lui Assur (reducerea de la clasa a III-a ord. 3 sau 4, la clasa a II-a ord. 2) fie a poziţiilor false (reducerea de la clasele VI, V, IV la clasele III sau II).

Într-o lucrare anterioară [4] s-au analizat diferitele variante ale acestei metode, propunîndu-se un procedeu care reduce la minimum volumul de lucru (un singur plan al vitezelor şi unul al acceleraţiilor). După cum se ştie determinarea distribuţiilor de viteze nu comportă nici o dificultate, deoarece pentru aceeaşi poziţie a mecanismului planele vitezelor construite pentru diferite valori ale vitezei elementului conducător sînt asemenea.

Construirea planului acceleraţiilor a format însă obiectul studiilor redate în lucrarea citată [4] în vederea simplificării construcţiilor grafice suplimentare.

În acea lucrare autorii au indicat mersul calculului vectorial care pornind de la elementul iniţial ales astfel încît să încadreze mecanismul în cea mai mică clasă (după clasificarea I. I. Artobolevski) construia planul acceleraţiilor pînă se ajungea la punctul din planul elementului care se poate lega prin ecuație vectorială de accelerația $\bar{a}_A$ a elementului conducător (a cărui mișcare este dată de problemă) (vezi anexa nr. 2).

---

[1]) Acest lucru a fost demonstrat de acad. I. I. Artobolevski în articolul citat [3].

Metoda are avantajul, după cum s-a arătat în lucrare — că se poate obține pe planul accelerațiilor toate accelerațiile tangențiale, fără a mai fi nevoie să se facă uz de planul vitezelor pentru aflarea scării rezultante, sau de calcularea modulului fiecărui vector-accelerație cu ajutorul raportului segmentelor din planul vitezelor.

Metoda schimbării elementului conducător este aplicabilă numai la mecanismele care prin această operație clasa mecanismului se micșorează. La grupele assurice luate independent de restul mecanismului nu se poate deci aplica.

§ 4. METODA GRAFICĂ A ACCELERAȚIILOR REDUSE

Metoda constă — după cum se știe — în găsirea accelerațiilor reduse ale articulațiilor interioare ale unei grupe assurice, folosind proprietatea fundamentală a perpendicularității figurii accelerațiilor reduse pe figura în mișcare [5], [6].

În lucrarea citată [4] autorii au prezentat modul cum se poate aplica această metodă și proprietățile geometrice cele mai importante care rezultă din adaptarea noțiunilor de viteză si accelerație redusă la mecanismul patrulater articular, în cazul cînd centrul instantaneu al vitezelor din planul bielei se afla în planul desenului.

Legătura strînsă între accelerațiile reduse și cercul inflexiunilor permit rezolvări frumoase a multor probleme de cinematică plană [4].

În anexa nr. 3 se redau două probleme rezolvate cu ajutorul accelerațiilor reduse.

§ 5. METODA SCHIMBĂRII BAZEI (METODA GRAFICO-ANALITICĂ PROPUSĂ DE TH. B. GOODMANN [7]

5. 1. Principiul de bază al acestei metode este în fond tot alegerea unui element inițial și unul fix articulat de primul astfel încît noul mecanism să se transforme într-unul de clasa a II-a, ord. 2 (după clasificarea I. I. Artobolevski).

Diferența față de metoda schimbării elementului conducător §(3) constă în faptul că în cazul de față elementul fix din mecanismul dat devine element mobil.

Deoarece în literatura tehnică din țara noastră nu a fost prezentată pînă în prezent această metodă, se va arăta în cele ce urmează principiul metodei și modul de calcul vectorial, după metoda clasică propusă de autori aplicată la schema structurală a unui mecanism de clasa a V-a ord. 3. (fig. 1).

Prin metoda schimbării elementului conducător (6 în loc de 1) mecanismul se transformă într-unul de clasa a IV-a ord. 3. (grupa assurică 1, 2, 3, 4, 5, 7, cu bielele 2 și 5 și 3 cuple exterioare : O,C,E.).

Cercetarea cinematică cu ajutorul metodei directe duce tot la aplicarea pozițiilor false conturului A.G.H.I. după ce în prealabil trebuie determinate mișcările punctelor lui Assur din planul elementelor 3 (S_3) și 4 (S_4).

Volumul de calcul în această situație nu este mai mic decît dacă se face calculul direct al mecanismului de clasa a V-a ord. 3. (elementul 1 conducător).

Realizarea unei economii de lucru se face dacă mecanismul se transformă în lanț cinematic și apoi se fixează elementul 1 (care se transformă astfel în bază) și se alege 4 ca element conducător. Prin transformarea indicată mecanismul devine de clasa a III-a ord. 3 ; este format din grupa de clasa a II-a ord. 2. (diada 3, 7,) și grupa de clasa a III-a ord. 3. (triada 2, 5, 6, 8,).

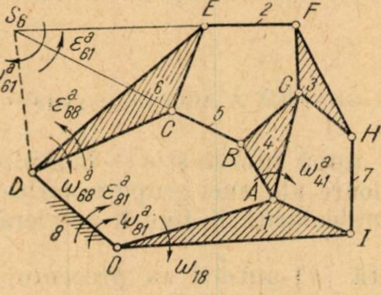


Fig. 1 *a*

În această situație cercetarea cinematică nu mai comportă decît un singur punct al lui Assur (S_6) pentru a reduce calculul la cazul unui mecanism de clasa II-a ord. 2.

Este necesară alegerea unei viteze unghiulare arbitrare pentru noul element conducător (ω_{41}^{a} în cazul de față) și cu ajutorul acesteia se calculează ω_{68} și ε_{68}.

Cu acestea și cu ω_{18} dat de problemă se construiesc planele vitezelor și accelerațiilor corespunzătoare mecanismului inițial (1 : element conducător și 8 : fix).

Construcțiile vectoriale nu prezintă nici o dificultate deoarece totul corespunde mecanismelor de clasa a II-a ord. 2, cu 2 elemente conducătoare (1 și 6) la care trebuie însă efectuată verificarea închiderii poligoanelor (lucru ce nu-l indică autorul metodei propuse [7])

5.2. Determinarea formulelor de recurență

Se fac următoarele notații :

θ_{kl} — unghiul dintre axele a două elemente *k și l* ale mecanismului ;

$\omega_{kl} = \dfrac{d\,\theta_{kl}}{dt}$ — viteza unghiulară a elementului *k* față de elementul *l*.

$\varepsilon_{kl} = \dfrac{d^2\,\theta_{kl}}{dt^2} = \dfrac{d\,\omega_{kl}}{dt}$ — accelerația unghiulară a elementului k față de elementul l.

s_{kl} — deplasarea liniară a elementului k față de l.

V_{kl}, a_{kl} — viteza respectiv accelerația unui punct de pe elementul k față de elementul l (în deplasarea liniară unul față de celălalt).

a — exponent care indică valoarea arbitrară fie pentru viteze, fie pentru accelerații, în scopul de a le distinge de valorile reale.

$$r = \frac{\theta_{kl}}{\theta^a_{kl}} = \frac{\theta_{ij}}{\theta^a_{ij}} = \frac{\omega_{kl}}{\omega^a_{kl}} \tag{1}$$

Această proprietate decurge din asemănarea planelor vitezelor corespunzătoare unei aceleiași poziții a mecanismului și diferite valori ale vitezei elementului inițial.

Din relația de mai sus se poate scrie :

$$\frac{d\,\theta_{kl}}{d\,\theta_{ij}} = \frac{\omega_{kl}}{\omega_{ij}} = \frac{\omega^a_{kl}}{\omega^a_{ij}} \tag{2}$$

În consecință :

$$\frac{\omega_{kl}}{\omega^a_{kl}} = \frac{\omega_{ij}}{\omega^a_{ij}} = r = \text{const.} \tag{3}$$

Din (2) rezultă :

$$\omega_{kl} = \frac{d\,\theta_{kl}}{d\,\theta_{ij}}\,\omega_{ij} \tag{4}$$

Derivînd se obține :

$$\varepsilon_{kl} = \frac{d^2\,\theta_{kl}}{d\,\theta^2_{ij}}\,\omega^2_{ij} + \varepsilon_{ij}\,\frac{\omega_{kl}}{\omega_{ij}}$$

de unde :

$$\frac{d^2\,\theta_{kl}}{d\,\theta^2_{ij}} = \frac{1}{\omega^2_{ij}}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{ij}\,\frac{\omega_{kl}}{\omega_{ij}}\right) \tag{5}$$

Formula (5) fiind adimensională este evident că se poate scrie și pentru o valoare arbitrară.

$$\frac{d^2\,\theta_{kl}}{d\,\theta^2_{ij}} = \frac{1}{(\omega^a_{ij})^2}\left(\varepsilon^a_{kl} - \varepsilon^a_{ij}\,\frac{\omega^a_{kl}}{\omega^a_{ij}}\right) \tag{6}$$

Din (5), (6), (2) și (3) rezultă :

$$\frac{\varepsilon_{kl} - r^2\,\varepsilon^a_{kl}}{\varepsilon_{ij} - r^2\,\varepsilon^a_{ij}} = \frac{\omega^a_{kl}}{\omega^a_{ij}} \tag{7}$$

Din formulele (3) și (7) se pot calcula deci ω_{kl} și ε_{kl} cînd sînt date mișcarea ij (ω_{ij} și ε_{ij}) și valorile arbitrare (ω^a_{kl}, ε^a_{kl}, ω^a_{ij}, ε^a_{ij}) determinate cu ajutorul planelor vitezelor și accelerațiilor corespunzătoare mecanismului transformat.

5.3. Aplicarea metodei schimbării bazei la mecanismul de la clasa a V-a ord.3. (fig. 1a)

5. 31 *a*) Se dă elementul conducător 1 cu ω_{18} şi $\varepsilon_{18} = 0$

b) se cere ω_{68} şi ε_{68} (şi distribuţiile de viteze şi acceleraţii de pe celelalte elemente ale mecanismului).

5.32. *c*) se alege ω_{41}^{a} şi $\varepsilon_{41}^{a} = 0$ (element conducător 4 şi element fix 1).

d) se construiesc planele vitezelor (fig. 1 *b*) şi acceleraţiilor (fig. 1 *c*) corespunzătoare mecanismului transformat cu ajutorul următoarelor ecuaţii vectoriale :

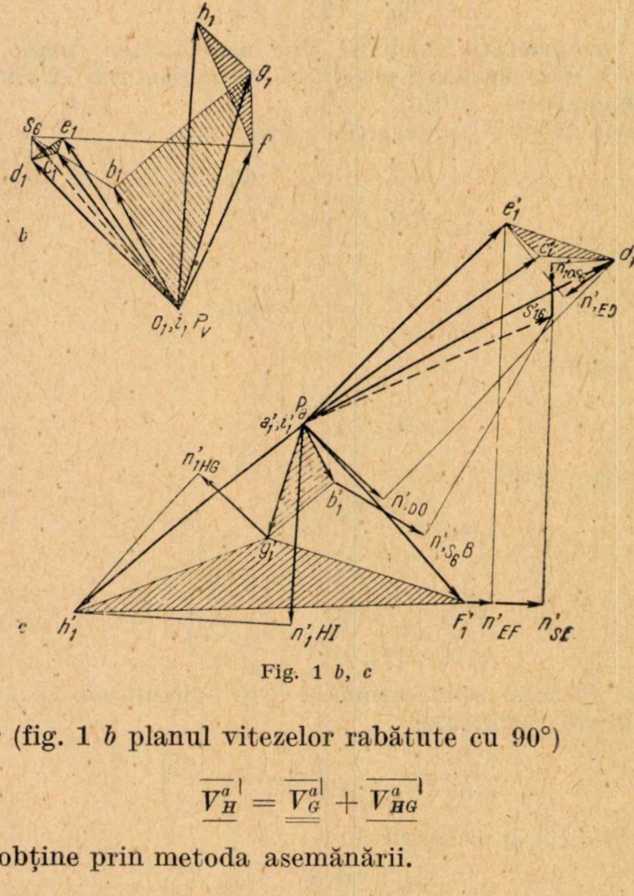


Fig. 1 *b*, *c*

Viteze: (fig. 1 *b* planul vitezelor rabătute cu 90°)

$$\underline{\overline{V_{H}^{a}}^{|}} = \underline{\underline{\overline{V_{G}^{a}}^{|}}} + \underline{\overline{V_{HG}^{a}}^{|}}$$

$\underline{\underline{\overline{V_{F}^{a}}^{|}}}$ se obţine prin metoda asemănării.

$$\overline{V_{S_6}^{a}}^{|} = \underline{\underline{\overline{V_{F}^{a}}^{|}}} + \underline{\overline{V_{EF_5}^{a}}^{|} + \overline{V_{S_6E}^{a}}^{|}} = \underline{\underline{\overline{V_{B}^{a}}^{|}}} + \underline{\overline{V_{CB}^{a}}^{|} + \overline{V_{S_6C}^{a}}^{|}}$$

$$\underline{\overline{V_{D}^{a}}^{|}} = \underline{\underline{\overline{V_{S_6}^{a}}^{|}}} + \underline{\overline{V_{DS_6}^{a}}^{|}}$$

$\overline{V_{C}^{a}}^{|}$ şi $\overline{V_{E}^{a}}^{|}$ se obţin prin metoda asemănării.

Accelerații (*fig. 1 b*)

$$\underline{\overline{a^a_H}} = \underline{\underline{\overline{a^{na}_{HI}}}} + \underline{\overline{a^{ta}_{HI}}} = \underline{\underline{\overline{a^a_G}}} + \underline{\underline{\overline{a^{na}_{HG}}}} + \underline{\overline{a^{ta}_{HG}}}$$

$\underline{\underline{\overline{a^a_F}}}$ se obține prin metoda asemănării.

$$\overline{a^a_{S_6}} = \underline{\underline{\overline{a^a_F}}} + \underline{\underline{\overline{a^{na}_{EF}} + \overline{a^{na}_{S_6E}}}} + \underline{\overline{a^{ta}_{EF}} + \overline{a^{ta}_{S_6E}}} = \underline{\underline{\overline{a^a_B}}} + \underline{\underline{\overline{a^{na}_{CB}} + \overline{a^{na}_{S_6C}}}} + \underline{\overline{a^{ta}_{CB}} + \overline{a^{ta}_{S_6C}}}$$

$$\underline{\overline{a^a_D}} = \underline{\underline{\overline{a^{na}_{DO}}}} + \underline{\overline{a^{ta}_{DO}}} = \underline{\underline{\overline{a^a_{S_6}}}} + \underline{\underline{\overline{a^{na}_{DS_6}}}} + \underline{\overline{a^{ta}_{DS_6}}}$$

$\underline{\underline{\overline{a^a_C}}}$ și $\underline{\underline{\overline{a^a_E}}}$ se obțin prin metoda asemănării.

e) Din cele două plane se calculează :

$$\omega^a_{61} = \frac{V^a_{DS}}{DS} = \frac{k_v\,(\overline{s_6\,d_1})}{DS} \text{ (rotește în sensul acelor de ceasornic)}$$

$$\varepsilon^a_{61} = \frac{a^{ta}_{DS}}{DS} = \frac{k_a\,(\overline{n'_{DS}\,d'_1})}{DS} \text{ (rotește în sens invers acelor de ceasornic)}$$

$$\omega^a_{81} = \frac{V^a_{DO}}{OD} = \frac{k_v\,(\overline{P_v\,d_1})}{OD} = -\,\omega^a_{18} \text{ (rotește după acele de ceasornic)}$$

$$\varepsilon^a_{81} = \frac{a^{ta}_{DO}}{OD} = \frac{k_a\,(\overline{{}^{n'}{}_1\;DO^{d'}{}_1})}{OD} = -\,\varepsilon^a_{18} \text{ (rotește după acele de ceasornic)}$$

f) Din relațiile de mai sus rezultă :

$$\omega^a_{68} = \omega^a_{61} + \omega^a_{18}$$

$$\varepsilon^a_{68} = \varepsilon^a_{61} + \varepsilon^a_{18}$$

g) *Se calculează apoi* ω_{68} *si* ε_{68} *cu ajutorul formulelor* (*3*) *și* (*7*) *după cum urmează* :

— Din (3) înlocuind pe *kl* prin 6,8 și *ij* prin 1,8, rezultă :

$$\frac{\omega_{68}}{\omega^a_{68}} = \frac{\omega_{18}}{\omega^a_{18}} = r \text{ de unde :}$$

$$\boxed{\omega_{68} = r\,\omega^a_{68}}$$

— Din (5) cu aceeași înlocuire rezultă : ($\varepsilon_{18} = 0$)

$$\boxed{\varepsilon_{68} = r^2\left(\varepsilon^a_{68} - \varepsilon^a_{18}\,\frac{\omega^a_{68}}{\omega^a_{18}}\right)}$$

h) Cu ajutorul lui ω_{68} şi ε_{68} se calculează :

$$\overline{V_C} = \overline{\omega_{68}} \times \overline{DC} \text{ şi } \overline{a_C} = \overline{a^n_{CD}} + \overline{a^t_{CD}}$$

unde :

$$\overline{a^n_{CD}} = -\omega^2_{68}\,\overline{DC} \text{ şi } \overline{a^t_{CD}} = \overline{\varepsilon_{68}} \times \overline{DC}$$

La fel se calculează şi $\overline{V_E}$ şi $\overline{a_E}$

5. 33. *i*) Cu ω_{18}, $\varepsilon_{18} = 0$, ω_{68} şi ε_{68} se construiesc planele vitezelor şi accelerațiilor corespunzătoare mecanismului dat prin problemă şi anume :

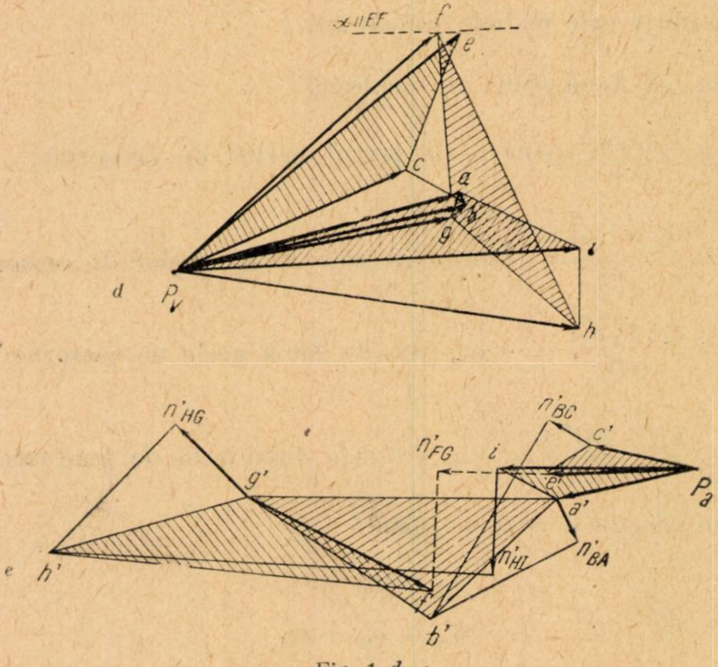


Fig. 1 *d*, *e*

— *Viteze* (*fig. 1 d planul vitezelor rabătute cu 90°*). Se trasează pe plan :

$$\overline{V_I}^{|} = k_v(\overline{P_v i})\,;\quad \overline{V_A}^{|} = k_v(\overline{P_v a})\,;\quad \overline{V_C}^{|} = k_v(\overline{P_v c})\,;\quad \overline{V_E}^{|} = k_v(\overline{P_v e})$$

Din ecuația vectorială :

$$\overline{V_B}^{|} = \underline{\underline{\overline{V_C}^{|}}} + \underline{\overline{V_{BC}}^{|}} = \underline{\underline{\overline{V_A}^{|}}} + \underline{\overline{V_{BA}}^{|}} \text{ se găseşte } \underline{\underline{\overline{V_B}^{|}}} = k_v(\overline{P_v b})$$

$\underline{\underline{\overline{V_G}^{|}}} = k_v(\overline{P_v g})$ se determină cu metoda asemănării.

Din ecuația :

$\overline{V_H}^{|} = \underline{\underline{\overline{V_G}^{|}}} + \underline{\overline{V_{HG}}^{|}} = \underline{\underline{\overline{V_I}^{|}}} + \underline{\overline{V_{HI}}^{|}}$ se găsește $\underline{\underline{\overline{V_H}^{|}}} = k_v(\overline{P_v h})$

$\underline{\underline{\overline{V_F}^{|}}} = k_v(\overline{P_v i})$ se determină cu metoda asemănării.

Verificarea calculului și construcțiilor grafice ale vitezelor. Important este ca poligoanele vitezelor să se închidă.

În cazul de față ajungîndu-se la punctul F a cărui viteză $\overline{V_F}^{|}$ a fost determinată și cum acest punct este legat de E (a cărui viteză $\overline{V_E}^{|}$ a fost de asemenea determinată) prin bara 2, va trebui satisfăcută ecuația vectorială :

$$\underline{\overline{V_E}^{|}} = \underline{\overline{V_F}^{|}} + \underline{\underline{\overline{V_{EF}}^{|}}} \tag{8}$$

Dreapta $f \alpha \parallel EF$ trebuie să treacă prin e.

— *Accelerații* (*fig. 1 e*)

Construind ecuațiile vectoriale în aceeași succesiune ca și la viteze se ajunge la punctul F a cărui accelerație $\overline{a_F}$, se determină pe această cale. Cum $\overline{a_E}$ a fost determinat pe baza calculului analitic (§ 5.32 *h*) va trebui ca și aici poligoanele accelerațiilor să se închidă.

Verificarea calculului și a construcțiilor grafice ale accelerațiilor se face cu următoarea ecuație vectorială :

$$\underline{\underline{\overline{a_F}}} = \underline{\underline{\overline{a_E}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{FE}}}} + \underline{\overline{a^t_{FE}}} \tag{9}$$

La construcție trebuie să se verifice :

$$(\overline{e' n'_{FE}}) = \frac{(\overline{ef})^2}{(EF)}$$

În caz contrar, calculul trebuie refăcut.

5.4. Domeniul de aplicabilitate a metodei schimbării bazei

5.41. Deoarece metoda admite în calcul ca element fix oricare alt element mobil rezultă că se poate aplica la mecanismele care, prin această operație, se pot reduce la cel mult unul de clasa a III-a.

5.42. *La mecanismele de clasa a III-a ord. 4.* domeniul de aplicabilitate se restrînge numai la acelea care au cel puțin unul din elementele centrale ale grupei assurice, cu ambele biele (brațe) legate de același element. În lucrarea citată [4] s-a arătat că din cauza nerespectării condiției de mai sus nu este posibilă aplicarea metodei schimbării elementului conducător și nici a acestei metode.

5.43. Domeniul de aplicabilitate al metodei este determinat pentru toate mecanismele nu 8 elemente stabilite la Cap. III, fie prin amplificarea sau lungirea elementului conducător cu grupe assurice, fie concomitent amplificare și lungire, fie în sfîrșit prin adăugarea la elementul conducător de grupe assurice cu 6 elemente din care se obțin apoi mecanismele denumite caracteristice [4].

§ 6. METODA COEFICIENŢILOR DE INFLUENŢĂ (METODA MOHR-MODREY) [8]

6.1. La baza metodei lui O. Mohr în rezolvarea cinematică a unui mecanism plan stă pe lîngă principiul deplasărilor virtuale şi principiul că ,,suma cîtorva deplasări posibile ale punctelor unui lanţ cinematic este în acelaşi timp deplasarea lui posibilă şi reală, deoarece pentru un punct oarecare al lanţului, viteza rezultantă a mişcării lui posibile şi reale este egală cu suma geometrică (vectorială) a vitezelor (parţiale) corespunzătoare mişcărilor componente'' [3].

Deoarece nici această metodă nu a fost după cunoştinţa noastră publicată pînă în prezent în literatura tehnică din ţară, vom prezenta mai jos modul de aplicare a ei transpus însă în metoda de construcţie clasică a ecuaţiilor vectoriale în planele vitezelor şi acceleraţiilor.

Se va arăta în plus domeniul de aplicabilitate a acestei metode, demonstrată pe mecanisme caracteristice, lucru ce nu se arată nici în lucrarea citată [8], şi nici în articolul menţionat [3] în care s-a demonstrat că în cazul mecanismului ales de I. Modrey pentru aplicarea metodei O. Mohr, metoda clasică cu ajutorul punctelor particulare ale lui Assur este mult mai simplă.

6.2. *Se va lua acelaşi mecanism (fig. 2 a) de clasa a V-a ord. 3* la care elementul conducător 1 are date ω_1 şi ε_1 (cazul cel mai general).

Mecanismul are evident un grad de mobilitate după cum rezultă din aplicarea formulei structurale a mecanismelor plane.

$$M_3 = 3\,n - 2C_5 = 3\cdot 7 - 2\cdot 10 = 1$$

unde $n = 7$ numărul elementelor mobile;

$C_5 = 10$ numărul cuplelor cinematice de clasa a V-a (articulaţii)

6. 3. Principiul metodei la determinarea vitezelor

6.31. Dacă mecanismului din figura 2*a* i se fixează unul din elementele legate la bază (de ex. 5 din figura 2 *b*) întregul mecanism devine rigid.

În adevăr din formula structurală rezultă pentru $n = 6$ şi $C_5 = 9$:

$$M_3 = 3\,n - 2\,C_5 = 3\cdot 6 - 2\cdot 9 = 0$$

(deoarece a ,,dispărut'' un element (5) şi cupla de rotaţie D).

Pentru a-i reda mobilitatea trebuie să se mai suprime o bară şi două cuple cinematice (articulaţii).

Operaţia echivalează cu ,,ruperea'' bielei 7 (fig. 2*b*).

Mecanismul devine acum de clasa a II-a ord. 2. compus din elementul conducător 1 şi cele două grupe de clasa a II-a ord. 2 (diadele 3, 4 şi 2, 6).

Cu ω_1 dat se construieşte planul vitezelor rabătute (fig. 3 *a*) din care se obţine:

$$\underline{\underline{\overline{V'_F}}} = k_v\,(\overline{P_v f_1}) \tag{10}$$

(Cunoscută în mărime, direcţie şi sens)

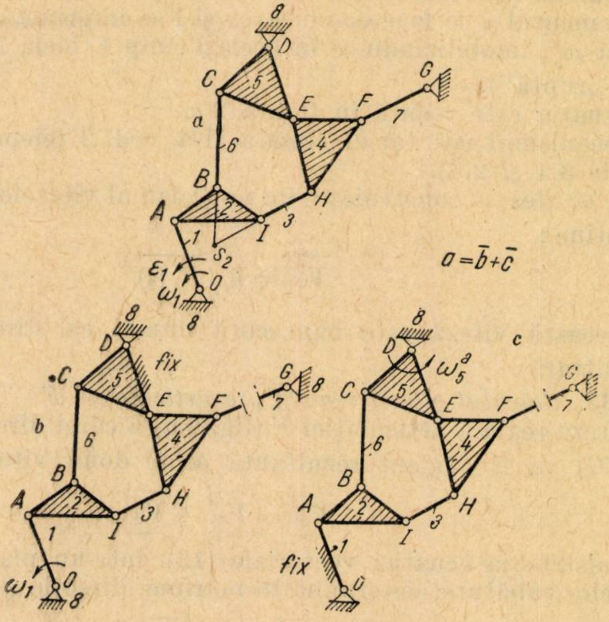

8
D
C
5
E
F
7
G
a
6
4
B
H
A
2
I
3
1
S_2
ε_1
ω_1
0
8
$a=\bar{b}+\bar{c}$
fix
b
c
ω_5^a
fix

Fig. 2 *a*, *b*, **c**

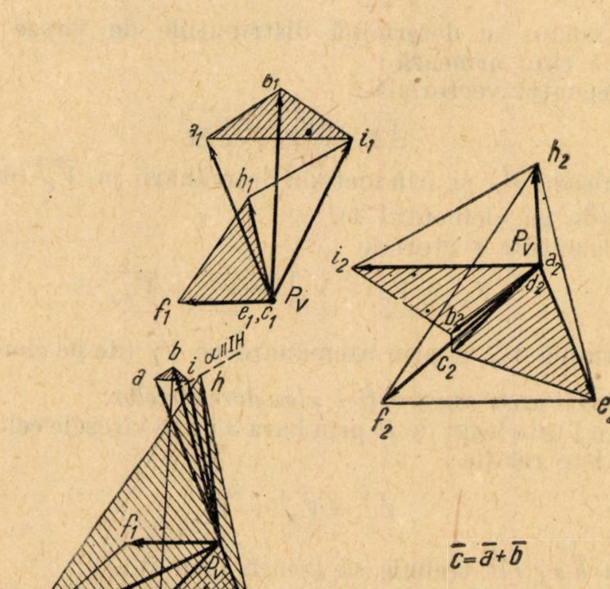

b_1
a_1
i_1
h_1
f_1
e_1, c_1
P_V
h_2
P_V
i_2
a_2
d_2
b_2
c_2
f_2
e_2
b
a
i
$\alpha \parallel IH$
h
f_1
P_V
c
$\parallel P_V f$
f
e
$\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$

Fig. 3 *a*, *b* *c*

6.32. *Se inversează rolurile celor două elemente* (*1 şi 5*).

Elementul 5 se face conducător şi i se imprimă o viteză unghiulară arbitrară ω_5^a, imobilizîndu-se în acelaşi timp 1 (biela 7 rămînînd în continuare ,,ruptă'').

Situaţia este redată în figura 2 *c*.

Mecanismul este tot de clasa a II-a ord. 2 (elementul conducător 5 şi diadele 3,4 şi 2,6).

Cu ω_5^a ales se construieşte un nou plan al vitezelor rabătute (fig. 3.*b*) şi se obţine :

$$\underline{\overline{V_F^a}^{|}} = k_v(\overline{P_v f_2}) \tag{11}$$

(Această viteză este cunoscută numai ca direcţie, deoarece ω_5^a este arbitrară).

6.33. *Calculul vitezei reale* $\overline{V_F}$ *a articulaţiei F*

Viteza reală a articulaţiei *F* (fig. 2.*a*) a cărei direcţie este cunoscută ($\overline{V_F} \perp FG$) va fi evident rezultanta celor două viteze parţiale adică :

$$\underline{\overline{V_F}^{|}} = \underline{\underline{\overline{V_F'}^{|}}} + \underline{\overline{V_F^a}^{|}} \tag{12}$$

Construcţia ecuaţiei vectoriale (12) într-un plan separat (fig. 3.*c*) al vitezelor rabătute, determină în mărime, direcţie şi sens pe :

$$\underline{\underline{\overline{V_F}^{|}}} = k_v(\overline{P_v f})$$

În continuare se determină distribuţiile de viteze ale celorlalte elemente după cum urmează :

— Din ecuaţia vectorială :

$$\underline{\overline{V_E}^{|}} = \underline{\underline{\overline{V_F}^{|}}} + \underline{\overline{V_{EF}}^{|}}$$

Se calculează $\overline{V_E}^{|}$ şi prin metoda asemănării pe $\overline{V_C}^{|}$ (de pe elementul 5) şi $\overline{V_H}^{|}$ (de pe elementul 4).

— Din ecuaţiile vectoriale

$$\overline{V_B}^{|} = \underline{\underline{\overline{V_C}^{|}}} + \underline{\overline{V_{BC}}^{|}} = \underline{\underline{\overline{V_A}^{|}}} + \underline{\overline{V_{BA}}^{|}}$$

se determină $\overline{V_B}^{|}$ şi prin asemănare pe $\overline{V_I}^{|}$ (de pe elementul 4).

6.34. *Verificarea construcţiei planelor-vitezelor.*

Deoarece I este legat de *H* prin bara 3 între vitezele celor două puncte trebuie să existe relaţia :

$$\underline{\underline{\overline{V_I}^{|}}} = \underline{\underline{\overline{V_H}^{|}}} + \underline{\overline{V_{IH}}^{|}} \tag{13}$$

(deci dreapta $h\,\alpha \parallel IH$ trebuie să treacă prin *i*)

6.35. *Observaţie.* Este evident că volumul de lucru ce-l necesită determinarea distribuţiei de viteză cu această metodă este mult mai mare decît prin metoda schimbării elementului conducător (care a transformat mecanismul în unul de clasa a III-a ord. 3).

6. 4. **Principiul metodei la determinarea accelerațiilor**

Se va considera cazul general considerat la § 6.2 (elementul conducător are $\omega_1 \neq 0$ și $\varepsilon_1 \neq 0$)

6.41. Cu ajutorul mișcării elementului conducător se construiește planul accelerațiilor corespunzător lui ε_1 și $\omega_1 = 0$ (fig. 4*a*) adică pentru cazul elementului 5 fix și bara 7 „ruptă".

Planul accelerațiilor tangențiale (rabătute cu 90°) este evident asemenea cu al vitezelor rabătute construit în figura 3*a*).

La scara k_a aleasă rezultă :

$$\underline{\underline{\overline{a'^{t|}_F}}} = k_a (\underline{\underline{\overline{P_v f_1}}}) \tag{14}$$

(Aceasta este cunoscută în mărime, direcție și sens deoarece $\overline{a^t_A} = \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{OA}$ este cunoscută)

6.42. *Se inversează rolurile celor două elemente* (*1 și 5*).

Cu o accelerație unghiulară ε^a_5 arbitrară se construiește planul rabătut cu 90° al accelerațiilor tangențiale pentru cazul din figura 4 *b* (elementul 1 fix, elementul 5 conducător și 7 „rupt").

Acest plan este evident asemenea cu planul vitezelor rabătute construit în figura 3 *b*.

Din plan rezultă direcția rabătută cu 90° a accelerației tangențiale a^{ta}_F a articulației F, adică :

$$\underline{\overline{a^{ta|}_F}} = k_a (\overline{P_v f_2}) \tag{15}$$

(cunoscută în direcție).

6.43. *Planul accelerațiilor corespunzător accelerațiilor normale ale elementelor 1 și 5* (ω_1 *și* ω_5)

Cu : $\overline{a^n_{AO}} = -\,\omega_1^2\,\overline{OA}$; $\overline{a^n_{CD}} = -\,\omega_5^2\,\overline{DC}$; $\overline{a^n_{ED}} = -\,\omega_5^2\,\overline{DE}$ și $\overline{\varepsilon}_1 = \overline{\varepsilon}_5 = 0$

se construiește planul accelerațiilor pentru cazul cînd mecanismul are numai bara 7 „ruptă" (fig. 4 *c*).

Construcția acestui plan nu constituie nici o dificultate (fig. 4 *d*).

— Astfel din ecuațiile vectoriale :

$$\overline{a'_B} = \underline{\underline{\overline{a^n_A}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{BA}}}} + \underline{\overline{a'^t_{BA}}} = \underline{\underline{\overline{a^n_{CD}}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{BC}}}} + \underline{\overline{a'^t_{BC}}}$$

se determină $\underline{\underline{\overline{a'_B}}}$ și apoi prin metoda asemănării $\underline{\underline{\overline{a'_I}}}$;

— din ecuațiile vectoriale :

$$\overline{a'_H} = \underline{\underline{\overline{a'_I}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{HI}}}} + \underline{\overline{a'^t_{HI}}} = \underline{\underline{\overline{a^n_{ED}}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{HE}}}} + \underline{\overline{a'^t_{HE}}}$$

se determină $\underline{\underline{\overline{a'_H}}}$ de unde prin asemănare rezultă :

$$\underline{\underline{\overline{a'_F}}} = k_a (\overline{P_a f'_1}) \tag{16}$$

(cunoscută în mărime, direcție și sens deoarece ω_1 și ω_5 sînt valorile reale ale elementelor 1 și 5).

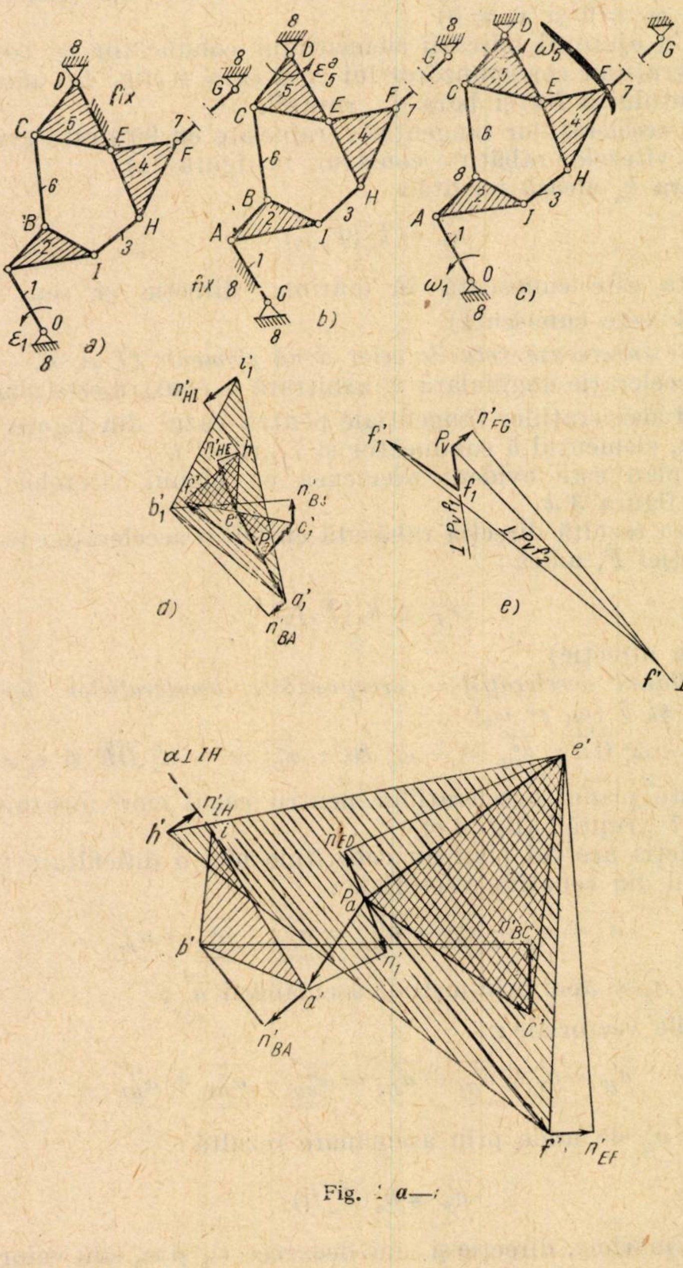

8
D
fix
C
5
E
4
7
F
6
B
2
H
3
I
1
0
ε_1
8
a)
8
D
ε_5^a
8
G
C
5
E
4
F
7
6
B
2
H
3
A
I
1
fix
8
0
8
b)
8
D
ω_5
G
8
C
5
E
F
7
4
6
8
2
H
A
3
J
1
ω_1
0
8
c)
G
i_1'
n'_{HI}
n'_{HE}
h
f_1'
n'_{BC}
b_1'
e
c_1'
P_a
a_1'
n'_{BA}
d)
n'_{FG}
f_1'
P_v
f_1
$\perp P_v f_1$
$\perp P_v f_2$
e)
f'
$\perp FG$
$\alpha \perp IH$
n'_{IH}
h'
i
n'_{ED}
e'
P_a
n'_{BC}
b'
n'_1
a'
c'
n'_{BA}
f'
n'_{EF}

Fig. [illegible] a—i

6.44. *Calculul accelerației reale $\overline{a_F}$ a articulației F*

Accelerația reală $\bar{a}_F$ a articulației F (din fig. 2a) adică :

$$\overline{a_F} = \underline{\underline{\overline{a^n_{FG}}}} + \underline{\overline{a^t_{FG}}} \tag{17}$$

va fi rezultanta celor trei vectori dată de relațiile (14), (15), (16).

Împreună cu (17) se poate scrie deci :

$$\overline{a_F} = \underline{\underline{\overline{a^n_{FG}}}} + \underline{\overline{a^t_{FG}}} = \underline{\underline{\overline{a'^t_F}}} + \underline{\underline{\overline{a'_F}}} + \underline{\overline{a^{ta}_F}} \tag{18}$$

Din construcția acestei ecuații într-un plan separat (fig. 4e) rezultă în mărime, direcție și sens :

$$\underline{\underline{\overline{a_F}}} = k_a(\overline{P_a f'})$$

6.45. *Construcția planului accelerațiilor reale ale mecanismului (fig. 4f).*

Cu ajutorul lui $\underline{\underline{\overline{a_A}}}$ și $\underline{\underline{\overline{a_F}}}$ se construiește acum planul accelerațiilor reale ale elementelor mecanismului pornind pe aceeași cale ca și în cazul vitezelor adică :

$$\underline{\overline{a_E}} = \underline{\underline{\overline{a_F}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{EF}}}} + \underline{\overline{a^t_{EF}}} = \underline{\underline{\overline{a^n_{ED}}}} + \underline{\overline{a^t_{ED}}}$$

$\overline{a_C}$ și $\overline{a_H}$ se calculcază prin metoda asemănării ;

$$\underline{\overline{a_B}} = \underline{\underline{\overline{a_C}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{BC}}}} + \underline{\overline{a^t_{BC}}} = \underline{\underline{\overline{a_A}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{BA}}}} + \underline{\overline{a^t_{BA}}} \ ;$$

$\overline{a_I}$ se calculează prin metoda asemănării.

6.46. *Verificarea construcției planului accelerațiilor.*

Ca și în cazul vitezelor trebuie ca în cazul accelerațiilor să se verifice construcția ecuației de mai jos :

$$\underline{\underline{\overline{a_I}}} = \underline{\underline{\overline{a_H}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{IH}}}} + \underline{\overline{a^t_{IH}}} \tag{19}$$

6. 5. Concluzii

Din comparația metodei prezentată mai sus în forma ecuațiilor vectoriale, care diferă mult de forma prezentată de I. Modrey [8] rezultă în mod incontestabil superioritatea metodelor precedente (directe și a schimbării elementului conducător).

Chiar și în cazul cînd elementul conducător are $\varepsilon_1 = 0$, volumul de lucru pentru construcția accelerației $\overline{a_F}$ a articulației F nu se reduce substanțial deoarece planul accelerațiilor tangențiale este deja construit cu ocazia determinării distribuției de viteze.

6. 6. Reducerea volumului de lucru.

Pentru cazul $\varepsilon_1 = 0$ se propune o metodă combinată pentru reducerea volumului de lucru la determinarea distribuţiei de acceleraţii.

Mersul calculului propus este următorul:

6.61. Se construieşte planul vitezelor folosind metoda schimbării elementului conducător; se porneşte deci de la elementul 5 în care caz mecanismul devine de clasa a III-a ord. 3.

6. 62. Se construieşte planul acceleraţiilor pornind de la ω_1 şi ω_5 conform § 6.43 (fig. 4 *c* şi 4 *d*).

Se obţine : $\underline{\underline{\overline{a'_F}}}$ (formula 16)

6.63. Se construieşte planul acceleraţiilor tangenţiale pornind de la ε_5^a ales arbitrar şi $\omega_5^a = 0$, fixînd elementul 1 şi ,,rupîndu-l'' pe 7 (fig. 4 *b* şi 3 *b* pentru cazul rabătut cu 90°) se obţine : $\underline{\underline{\overline{a_F^{ta}}}}^{|}$ (formula 15).

6.64. Se determină acceleraţia reală $\overline{a_F}$ a articulaţiei F prin construirea ecuaţiei vectoriale :

$$\overline{a_F} = \underline{\underline{\overline{a_{FG}^n}}} + \underline{\overline{a_{FG}^t}} = \underline{\underline{\overline{a'_F}}} + \underline{\overline{a_F^{ta}}} \tag{20}$$

6.65. Cu $\overline{a_A}$ şi $\overline{a_F}$ se construieşte apoi planul real al acceleraţiilor (construcţia se reduce la un mecanism de clasa a II-a ord. 2) cu verificarea corespunzătoare indicată în ecuaţia (19).

Este evident că acest din urmă plan al acceleraţiilor reale (fig. 4*f*) este mai uşor de construit decît unul corespunzător unui mecanism cu acelaşi număr de elemente, însă de clasa a III-a ord. 3 (folosirea punctelor lui Assur) sau de clasa a V-a ord. 3 (folosirea punctelor lui Assur combinată cu poziţiile false, care comportă în realitate construirea a două plane de acceleraţii în afară de 3 plane de viteze).

6. 7. Domeniul de aplicabilitate a metodei

Înainte de a arăta domeniul de aplicabilitate la fiecare din mecanismele cu 8 elemente (Cap. III) se va preciza că metoda coeficienţilor de influenţă nu se poate aplica la mecanismele care nu au elemente simple (cu 2 cuple cinematice) legate la bază.

În adevăr la mecanismul de clasa a IV-a ord. 2 cu 6 elemente (fig. 5 *a*) care în afară de elementul conducător 1 este legat la baza 6 şi prin elementul complex 5 (cu trei cuple cinematice C, D şi E) aplicarea metodei coeficienţilor de influenţă duce la nedeterminare.

În adevăr dacă se ,,rupe'' 4 şi se fixează succesiv elementul 5 respectiv 1 (fig. 5 *b*, respectiv 5 *c*) rezultă :

— Pentru situaţia din fig. 5 *b* (4 ,,rupt'', 5 fixat) :

$\underline{\overline{V'_B}}^{|} = \underline{\underline{\overline{V_A}}}^{|} + \underline{\overline{V_{BA}}}^{|}$ şi prin metoda asemănării se obţine :

$$\underline{\underline{\overline{V'_F}}}^{|} = k_v(\overline{P_v f_1}) \qquad \text{(fig. 5 } d\text{)}$$

— Pentru situația din fig. 5 *c* (4 „rupt", 1 fixat și ω_5^a ales arbitrar) $\overline{V_B^a}^{|} = \overline{V_C^a}^{|} + \overline{V_{BC}^a}^{|}$ și prin metoda asemănării se obține :

$$\overline{V_F^a}^{|} = k_v(\overline{P_v f_2}) \parallel AF \qquad \text{(fig. 5 } e)$$

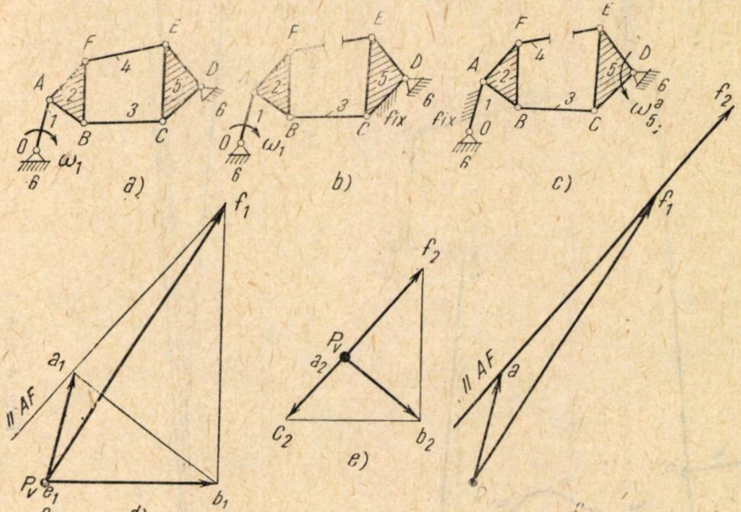


Fig. 5 *a—f*

Compunerea celor două viteze parțiale prin ajutorul ecuației de tipul (12) adică :

$$\overline{V_F}^{|} = \underline{\underline{\overline{V_A}^{|}}} + \underline{\overline{V_{FA}}^{|}}_{\parallel AF} = \underline{\underline{\overline{V_F'}^{|}}} + \underline{\overline{V_F^a}^{|}}_{\parallel AF} \qquad \text{(fig. 5 } f) \qquad (21)$$

duce la nedeterminare, deoarece după cum se vede din plan $\overline{V_{FA}}^{|} \parallel \overline{V_F^a}^{|} \parallel$ AF și direcțiile lor se confundă cu $\overline{af_1}$.

Domeniul de aplicare a metodei lui Mohr este deci mai restrîns decît al schimbării elementului conducător unde tocmai elementele complexe legate la bază sînt acelea care permit folosirea acesteia din urmă.

6. 8. Aplicarea metodei coeficienților de influență la determinarea mișcării sertarului de distribuție la locomotive

6 81. Pentru justificarea afirmației că aplicarea metodei coeficienților de influență (O. Mohr) poate micșora volumul de lucru față de metoda directă în unele cazuri de mecanisme, se va lua ca exemplu determinarea mișcării sertarului (11) din mecanismul de distribuție exterioară a locomotivelor (fig. 6 *a*).

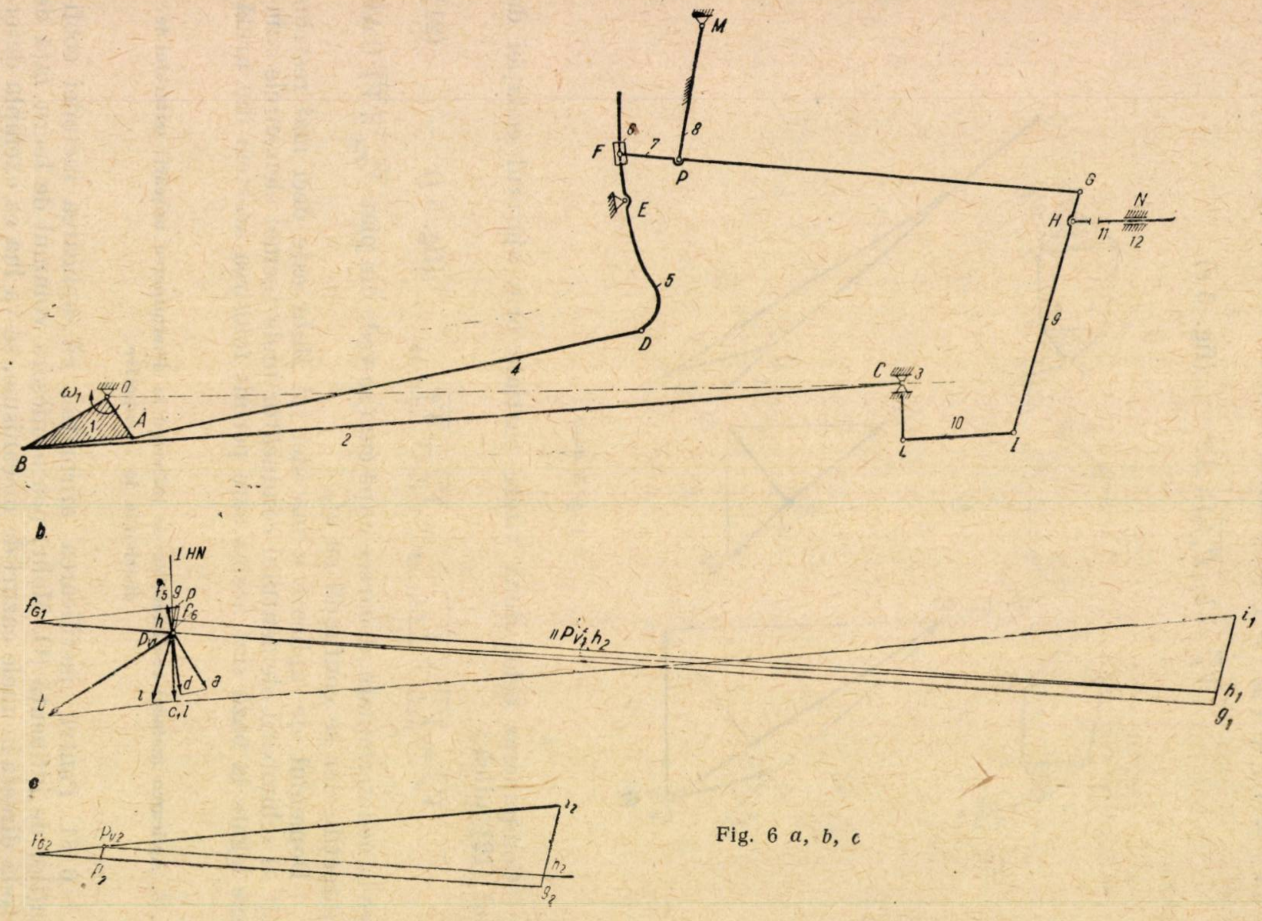

M
8
6
F
7
P
G
E
H
11
N
12
5
9
D
4
ω_1
0
C
3
1
A
10
2
B
L
I
b.
1 HN
f_5
g
p
f_{G1}
h
f_6
p_{v1}
$\parallel P v_1' h_2$
i_1
a
d
l
c, l
h_1
g_1
c
i_2
f_{G2}
p_{v2}
p_2
h_2
g_2

Fig. 6 a, b, c

Aplicarea metodei directe care necesită folosirea a două puncte ale lui Assur (S_7 şi S_9) corespunzătoare grupei de clasa a III-a ord. 4 (6, 7, 8, 9, 10, 11) cu elementele centrale 7 şi 9 comportă un mod de lucru migălos în special în aplicarea ecuaţiilor vectoriale la elementele 5, 6, 7, 8 şi 9. În cazul metodei coeficienţilor de influenţă mersul calculului este următorul :

6.82. *Determinarea vitezei* $\overline{V_H}$ *a tijei sertarului.*

6.821. Se fixează baza 8 şi se „rupe'' tija sertarului 11.

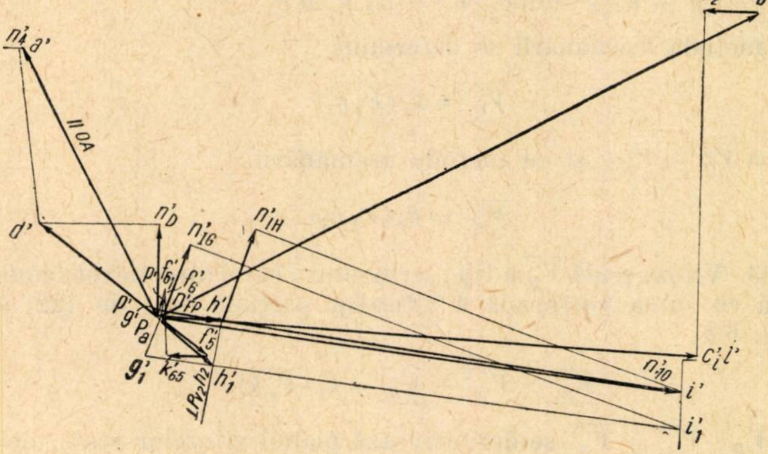


Fig. 6 *d*

Se construieşte planul vitezelor rabătute (fig. 6 *b*) cu ajutorul următoarelor ecuaţii vectoriale :

$$\underline{\overline{V_D}} = \underline{\underline{\overline{V_A}}} + \underline{\overline{V_{DA}}} \quad \text{prin asemănare se obţine :}$$

$$\underline{\underline{\overline{V_{F_5}}}} = k_v(\overline{P_v f_5})$$

$$\underline{\overline{V_{F_6}}} = \underline{\underline{\overline{V_{F_5}}}} + \underline{\overline{V_{F_{65}}}} \quad \text{prin asemănare se obţine :}$$

$$\underline{\underline{\overline{V'_G}}} = k_v(\overline{P_v g_1})$$

$$\underline{\overline{V_C}} = \underline{\underline{\overline{V_B}}} + \underline{\overline{V_{CB}}} = \underline{\underline{\overline{V_L}}} = k_v(\overline{P_v l});$$

$$\overline{V'_I} = \underline{\underline{\overline{V_L}}} + \underline{\overline{V'_{IL}}} = \underline{\underline{\overline{V'_G}}} + \underline{\overline{V'_{IG}}} \quad \text{şi apoi}$$

prin metoda asemănării rezultă :

$$\underline{\underline{\overline{V'_H}}} = k_v(\overline{P_v h_1}) \tag{22}$$

6.822. Se fixează manivela 1, se „rupe'' tija sertarului 11 şi se dă barei 8 o viteză unghiulară arbitrară ω_8^a.

În această situaţie se rigidizează biela culisei 4, culisa 5, biela motoare 2 şi capul de cruce 3.

Deci puncte fixe sînt F_5 şi L la care sînt legate : piatra de culisă 6 (prin cupla de translaţie 6,5) respectiv bara de legătură 10 (prin cupla de rotaţie L).

Planul vitezelor rabătute corespunzător acestei situaţii (fig. 6 *c*) este foarte simplu, se construieşte cu ajutorul următoarelor ecuaţii vectoriale la o scară aleasă k_v :

$$\overline{V^a_{F_6}}\rceil = \overline{V^a_P}\rceil + \overline{V^a_{F_6 P}}\rceil \quad \text{unde} \quad \overline{V^a_P} = \overline{\omega^a_8} \times \overline{MP}$$

Cu metoda asemănării se determină

$$\underline{\overline{V^a_G}\rceil} = k_v\,(\overline{P_v\,g_2})$$

$$\underline{\overline{V^a_I}\rceil} = \underline{\underline{\overline{V^a_G}\rceil}} + \underline{\overline{V^a_{IG}}\rceil} \quad \text{şi cu metoda asemănării :}$$

$$\underline{\overline{V^a_H}\rceil} = k_v\,(\overline{P_v\,h_2}) \tag{23}$$

6.823. Viteza reală $\overline{V_H}$ a tijei sertarului a cărei direcţie este cunoscută este egală cu suma vectorială a vitezelor parţiale date de (22) şi (23) adică (fig. 6 *b*)

$$\underline{\overline{V_H}\rceil} = \underline{\underline{\overline{V'_H}\rceil}} + \underline{\overline{V^a_H}\rceil} = k_v\,(\overline{P_v\,h}) \tag{24}$$

Cu $\overline{V_H}\rceil$, $\overline{V_A}\rceil$ şi $\overline{V_B}\rceil$ se definitivează planul vitezelor reale, determinîndu-se $\overline{V_I}\rceil$, apoi prin metoda asemănării $\overline{V_G}\rceil$, în continuare se construieşte ecuaţia vectorială care dă pe $\overline{V_P}\rceil$ şi prin asemănare pe $\overline{V_{F_6}}\rceil$.

Verificarea construcţiei se face cu ajutorul ecuaţiei vectoriale :

$$\underline{\underline{\overline{V_{F_6}}\rceil}} = \underline{\underline{\overline{V_{F_5}}\rceil}} + \underline{\overline{V_{F_{65}}}\rceil} \tag{25}$$

6.83. *Determinarea acceleraţiei* $\overline{a_H}$ *a tijei sertarului.*

6.831. Planul acceleraţiilor tangenţiale rabătute corespunzător lui ε^a_8 ales arbitrar (pentru 1 fix şi 11 „rupt") este asemenea cu cel din fig. 6 *c*.

De aici rezultă :

$$\underline{\overline{a^{ta}_H}} = k'_a\,(\underline{\overline{P_v\,h_2}}) \tag{26}$$

6.832. Planul acceleraţiilor construit pentru întreg mecanismul cu 12 elemente pornindu-se concomitent de la :

$$\overline{a^n_A} = -\,\omega^2_1\,\overline{OA}\ ;\ \overline{a^n_B} = -\,\omega^2_1\,OB\ ;\ \overline{a^n_P} = -\,\omega^2_8\,\overline{MP}$$

$$\overline{a^t_P} = \overline{\varepsilon_8} \times \overline{MP} = 0$$

este redat în fig. 6 *d* :

— Ecuațiile vectoriale sînt următoarele :

$$\underline{\overline{a_C}} = \underline{\overline{a_L}} = \underline{\underline{\overline{a^n_B}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{CB}}}} + \underline{\overline{a^t_{CB}}} = k'_a(\overline{P_a l'})$$

$$\overline{a_D} = \underline{\underline{\overline{a^n_{DE}}}} + \underline{\overline{a^t_{DE}}} = \underline{\underline{\overline{a^n_A}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{DA}}}} + \underline{\overline{a^t_{DA}}} = k'_a(\overline{P_a\, d'})$$

Prin metoda asemănării se obține :

$$\underline{\underline{\overline{a_{F_5}}}} = k'_a(\underline{\overline{P_a f'_5}})$$

$$\overline{a'_{F_6}} = \underline{\underline{\overline{a_{F_5}}}} + \underline{\underline{\overline{a^c_{F_{65}}}}} + \underline{\overline{a^{r'}_{F_{65}}}} = \underline{\underline{\overline{a^n_P}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{F_6P}}}} + \underline{\overline{a^{t'}_{F_6P}}} = k'_a(\overline{P_a f'_{6_1}})$$

Prin metoda asemănării se obține :

$$\underline{\underline{\overline{a'_G}}} = k'_a(\overline{P_a g'_5})$$

$$\overline{a'_I} = \underline{\underline{\overline{a_L}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{IL}}}} + \underline{\overline{a^{t'}_{IL}}} = \underline{\underline{\overline{a'_G}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{IG}}}} + \underline{\overline{a^{t'}_{IG}}} = k'_a(\overline{P_a i'_1})$$

Prin metoda asemănării rezultă :

$$\underline{\underline{\overline{a'_H}}} = k'_a(\overline{P_a h'_1}) \tag{27}$$

6.833. *Accelerația reală* a$_H$ *a tijei sertarului* este suma vectorială a celor două componente date de (27) și (26), adică :

$$\underline{\overline{a_H}} = \underline{\underline{\overline{a'_H}}} + \underline{\overline{a^{ta}_H}} \tag{28}$$

Prin h'_1 (fig. 6 *d*) se duce $\overline{h'_1\ \alpha} \perp \overline{P_{v_2} h_2}$ care intersectează $\overline{P_a l'}$ în punctul h', astfel că :

$$\underline{\underline{\overline{a_H}}} = k'_a(\overline{P_a h'})$$

Cu $\overline{a_H}$, $\overline{a^n_A}$ și $\overline{a^n_B}$ se definitivează planul accelerațiilor determinîndu-se $\overline{a_I}$, prin asemănare $\overline{a_G}$, apoi $\overline{a_P}$ şi prin asemănare $\overline{a_{F_6}}$. Verificarea construcției se face cu ecuația vectorială :

$$\underline{\underline{\overline{a_{F_6}}}} = \underline{\underline{\overline{a_{F_5}}}} + \underline{\underline{\overline{a^c_{F_{65}}}}} + \underline{\overline{a^r_{F_{65}}}} \tag{29}$$

Construcțiile grafice sînt ușurate prin eliminarea segmentelor mici și a reducerii lor la cazul mecanismelor de clasa a II-a ord. 2.

Are avantajul că dă posibilitatea unei verificări a calculelor grafice prin ecuațiile vectoriale (25) și (29).

Este necesară însă o asimilare perfectă din partea cercetătorului științific a metodelor de determinare a distribuțiilor de viteze și accelerații, pentru a putea fi în măşură să aleagă pe cea mai eficientă corespunzătoare mecanismului dat.

Este ceea ce se încearcă a se rezolva în capitolul ce urmează (Cap. III) unde se vor prezenta toate mecanismele plane articulate cu 6 și 8 elemente, cu criteriile de alcătuire a lor după cum s-a arătat la § 5.43.

III. CONTRIBUŢII LA SISTEMATIZAREA CERCETĂRII CINEMATICE A MECANISMELOR PLANE ARTICULATE CU 8 ELEMENTE

§ 7. CLASIFICAREA GRUPELOR ASSURICE PLANE CU 6 ELEMENTE ÎN FUNCŢIE DE NUMĂRUL (Z_g) DE CONTURURI ÎNCHISE DEFORMABILE

7. 1. Relaţia dintre Z_g, n' şi C_5' ale grupei assurice

Pornindu-se de la formula care exprimă numărul Z de contururi închise deformabile pe care le poate avea un lanţ cinematic [9] s-au stabilit formulele corespunzătoare unei grupe assurice plane [4].

$$Z_g = Z_{g\,max.} = \frac{n'}{2} - 1 \tag{30}$$

$$Z_g = Z_{g\,max.} = \frac{C_5'}{3} - 1 \tag{31}$$

unde :

Z_g = numărul maxim de contururi închise deformabile ale grupei assurice.
n' = numărul elementelor grupei assurice.
C_5' = numărul cuplelor cinematice de clasa a V-a ale grupei assurice.

Cu ajutorul acestor formule s-a alcătuit tabela 1, care cuprinde numărul maxim de contururi închise deformabile pe care le poate avea o grupă assurică plană articulată, cu încadrarea lor în clasele și ordinele clasificării propusă de I. I. Artobolevski.

Tabela 1

Numărul maxim ($Z_{g\,max.}$) de contururi închise deformabile pe care le poate avea o grupă assurică plană articulată

n'			2	4	6	8	10
$C_5' = \frac{3}{2} n'$			3	6	9	12	15
$Z_{g\,min.}$			0	0	0	0	0
$Z_{g\,max.} = \frac{n'}{2} - 1 = \frac{C_5'}{3} - 1$			0	1	2	3	4
Clasificarea după II Artobolevski.	ordin	maxim	2	3	4	5	6
		minim	2	2	2	2	2
	clasă (*)	maximă	II/2	IV/2	VI/3	VIII/4	X/5
		minimă	II/2	III/3	III/4	III/5	III/6

*) La numitor este trecut ordinul corespunzător clasei maxime respectiv minime.

7. 2. Încadrarea grupelor assurice plane articulate în tabele în funcţie de Z_g şi de clasa şi ordinul respectiv

Numărul de variante ce se poate alcătui, pentru fiecare n' şi C'_5 date, depinde de numărul elementelor simple, de numărul cuplelor exterioare, deci de ordinul grupei şi de forma simetrică sau asimetrică a aranjării elementelor cu 3 şi 2 cuple în structura grupei.

Acest număr a fost determinat şi redat în tabelele 2 şi 3 astfel:

7.21. *În tabela 2 sînt redate:*

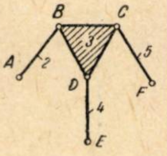
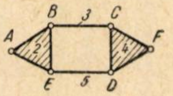
grupele assurice cu $n' = 4$ şi $C'_5 = 6$

— Cu $Z_g = 0$; de cl. III ord. 3 1 variantă
— Cu $Z_g = 1$; de cl. IV ord. 2. 1 variantă

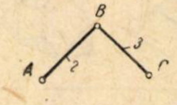
Tabela 2

Grupele assurice fără sau cu un contur închis deformabil.

GRUPELE ASSURICE CU $n'=4$ $C'_5=6$

$Z_g=0$		$Z_g=1$	
Clasa ord.	Schema structurală	Clasa ord.	Schema structurală
III_3		IV^1_2	

GRUPA ASSURICA CU $n'=2$ $C'_5=3$

Clasa II-a ord. 2	

În aceeaşi tabelă s-a trecut şi schema structurală a grupei assurice cu $n' = 2$, $C'_5 = 3$ (diada) şi $Z_g = 0$

7.22. *În tabela 3 a sînt redate:*

grupele assurice cu $n' = 6$; $C'_5 = 9$

În total sînt 10 variante cu $Z_g = 0, 1, 2$ după cum urmează:

— Cu $Z_g = 0$; de cl. III ord. 4 — 1 variantă
— Cu $Z_g = 1$ de cl. IV. ord. 3 — 3 variante
de cl. V. ord. 3 — 1 variantă
de cl. VI. ord. 3 — 1 variantă
— Cu $Z_g = 2$ de cl. IV. ord. 2 — 2 variante (2 contururi de cl. IV-a)
de cl. V. ord. 2 — 2 variante (formate din cîte un contur de cl. V-a şi altul de cl. IV-a; (V^2_{2b}; $V^2 \cdot 2$)

Tabela 3a

Grupele assurice cu $n' = 6$ și $C_5^1 = 9$ fără sau cu contururi închise deformabile (Z_g)

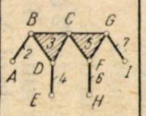
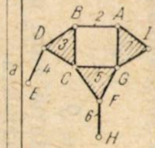
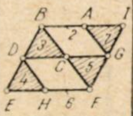
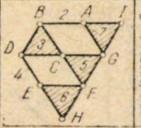
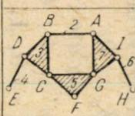
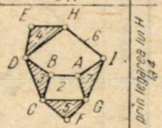
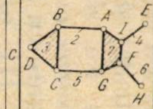
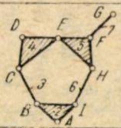
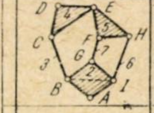
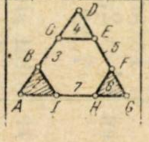
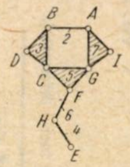
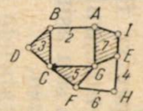
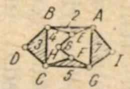
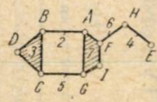
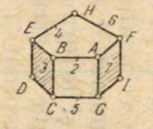
$Z_g = 0$			$Z_g = 1$					$Z_g = 2$				
Clasif. Cl	Ord	Schema structurală	Clasif. Cl	Ord	Sb	Schema structurală	Mod obț.	Clasif. Cl	Ord	Sb	Schema structurală	Mod obț.
III	4		IV¹	3	a		prin legarea lui A la 7	IV²	2	a_1		prin legarea lui H la 4
										a_2		prin legarea lui E la 6
					b		prin legarea lui I a elementului 6	V²	2	b		prin legarea lui H la 4
					c		prin legarea elementelor 4 și 6 la 7				—	
			V¹	3				V²	2	b	identică cu V² 2b 	prin legarea lui G la 2
			VI¹	3				IV²	2	a_2	identică cu grupa assurică obținută din IV¹3a	prin legarea lui D la 7 prin interior

Tabela 3b

Grupele assurice cu $n' = 6$. $C_5' = 9$ reductibile din punct de vedere structural

$Z_g = 1$				$Z_g = 2$				
Clasificare Cl	Ord	Sb	Schema structurală	Clasificare Cl	Ord	Sb	Schema structurală	Mod obținere
IV¹	3	d		IV²	2	d_1		prin legarea lui E la 7
				IV²	2	d_2		prin legarea lui E la 2 prin interior
IV¹	3	e		IV²	2			prin legarea lui E la 3

După criteriul de clasificare grupa primește clasa conturului cel mai mare.

În tabelă grupele assurice cu $Z_g = 2$ sînt aranjate în dreptul grupei assurice cu $Z_g = 1$ din care au generat prin legarea corespunzătoare a cuplelor exterioare la unul din elementele grupei fie prin exteriorul fie prin interiorul conturului.

În cazul cînd la grupele de clase superioare a rezultat o grupă cu $Z_g = 2$ obținută din contururile precedente, atunci nu s-a mai desenat, dar s-a făcut mențiune în locul corespunzător cu cine este identică.

Astfel din grupa de clasa a V^1-a ord. 3 prin legarea cuplei exterioare *G* la elementul 3 prin interiorul conturului se obține o grupă cu $Z_g = 2$ identică cu grupa V^2 2 b obținută din grupa de clasa a IV^1-a ord. 3 prin legarea cuplei exterioare H la elementul 4 prin exteriorul conturului.

De asemenea din grupa de clasa a VI^1-a ord. 3 prin legarea lui D la elementul 7 prin interiorul conturului se obține grupa de cl. IV^2-a ord. 2 rezultată din grupa de cl. IV^1-a ord. 3 a prin legarea articulației H la elementul 4.

Observație. Grupa de cl. IV^1-a ord. 3 mai are încă 2 variante redate în tabela 3 *b* cu două elemente simple în prelungire; grupele sînt reductibile din punct de vedere structural la o gr. de cl. II-a ord. 2 și una de cl. IV-a ord. 2, nu însă reductibile și cinematic, deoarece nu se pot afla distribuțiile de viteze și accelerații de pe elementele grupei de cl. II-a ord. 2 pînă cînd nu se rezolvă mai întîi grupa de cl. IV-a ord. 2. Din aceste 2 variante cu $Z_g = 1$ se obțin 3 variante cu $Z_g = 2$, care nu intră în categoria mecanismelor caracteristice.

§ 8. MECANISMELE CARACTERISTICE CU 6 ȘI 8 ELEMENTE CARE SE FORMEAZĂ PRIN LEGAREA GRUPELOR ASSURICE CU 4 ȘI 6 ELEMENTE LA ELEMENTUL CONDUCĂTOR ȘI LA BAZĂ

Cu ajutorul grupelor assurice din tabelele 2 și 3 *a* și *b* s-au alcătuit toate mecanismele denumite caracteristice cu 6 și 8 elemente.

8.1. *Mecanismele caracteristice cu 6 elemente* sînt redate în tabela 4.

S-au obținut în total 3 mecanisme caracteristice :

— Cu $Z_g = 0$ de cl. a III-a ord. 3 2 variante (III 3.1 ; III 3.2)

— Cu $Z_g = 1$ de cl. a IV-a ord. 2 1 variantă. Prin schimbarea elementului conducător 1 în 4 mecanismul se transformă în cl. a III-a ord. 3 (III 3.2)

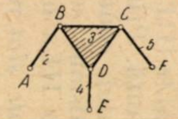
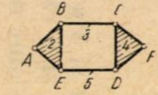
8.2. *Mecanismele caracteristice cu 8 elemente sînt* redate în 4 tabele după clasa și numărul contururilor (Z_g) ale grupei assurice legată la elementul conducător și bază astfel :

8.21. *În tabela 5 sînt redate* :

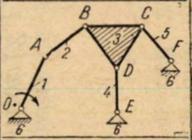
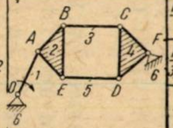
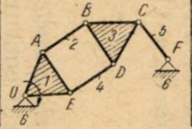
Mecanismele caracteristice cu 8 elemente de cl. a III-a ord. 4 fără contur închis deformabil ($Z_g = 0$)

Tabela 4

Mecanisme caracteristice cu grupe assurice fără contur (cl. III 3) sau cu un contur (cl. IV 2)

Datele grupei	$n' = 4$	$C'_5 = 6$
Nr de contururi închis def. Z_g	$Z_g = 0$	$Z_g =$
Clasa și ordinul grupei	cl III ord 3	cl IV ord 2
Schema structurală a grupei assurice	 B C 3 2 5 A D F 4 E	 B C 2 3 4 A F E 5 D

MECANISMELE CARACTERISTICE CE SE POT FORMA

1	2	3	4	5	6	7	8
Clasificare Cl.	Ord.	Schema structurală	Mec redus	Clasif. Cl	Ord	Schema structurală	Mec redus
III	3.1	 B C A 2 3 5 F D 1 6 4 O E 6 6	$\frac{II\,2}{4,5}$	IV	2	 B C A 2 3 4 F 1 6 O E 5 D 6	$\frac{III\,3}{4}$
			$\frac{II\,2}{4,5,6f}$				$\frac{II\,2}{3,4f}$
			da				—
III	3.2	 B C 5 A 2 3 F D 1 O 4 6 E 6	—				
			$\frac{II\,2}{2,3f}$				
			—				

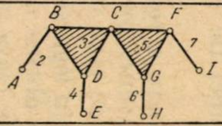
Observație. — În coloanele 4 și 8 sînt indicate metodele de cercetare cinematică aplicabile în afară de cea „clasică" precum și clasa și ordinul mecanismului rezultat prin transformare.

Prima fracție indică în cazul „M. S. E. C." la numărător clasa și ordinul lor, la numitor elementul conducător și elementul fix.

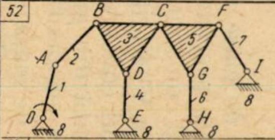
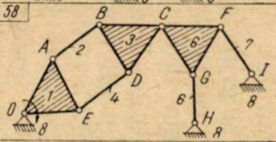
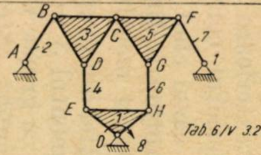
A treia căsuță ne indică dacă „M. C. I." se poate sau nu aplica (în caz negativ o linie orizontală; în caz afirmativ — da).

Tabela 5

Mecanisme caracteristice cu 8 elemente cu grupe assurice fără contur închis deformabil (cl. III ord. 4)

Datele grupei	$n' = 6$ $C'_5 = 9$
Nr. de contururi închis def. Z_g	$Z_g = 0$
Clasa și ordinul grupei	cl III ord. 4
Schema structurală a grupei assurice	 B C F 3 5 7 2 D G I A 4 6 E H

MECANISMELE CARACTERISTICE CE SE POT FORMA

Clasificare Cl	Ord	Schema structurală	Metoda aplic.	Cl.-ord mec. red
III	4.1	 52 B C F 3 5 7 A 2 D G I 1 4 6 8 O E H 8 8 8	MSEC	$\frac{II\,2}{6,7}$
			MGA	$\frac{II\,2}{6,7,8f}$
			MCI	da
III	4.2	 58 B C F A 2 3 6 7 D G I 1 4 6 8 O E H 8 8	MSEC	—
			MGA	—
			MCI	da
III	4.3	 B F 3 C 5 7 A 2 D G 1 4 6 E 1 H O 8 Tab. 6/V 3.2	MSEC	—
			MGA	—
			MCI	da

Observații: MSEC — metoda schimbării elementului conducător

MGA — metoda grafico-analitică

MCI — metoda coeficienților de influență

$Z_g = 0$ cl. a III-a ord. 4 cu 3 variante (III 4.1, III 4.2, III 4.3)

Elementul conducător 1 s-a legat succesiv:

- la biela unuia din elementele centrale 3 sau 5 (mecanismul III 4.1)
- la cele două biele ale unuia din elementele centrale 3 sau 5 (mecanismul III 4.2)
- la cîte una din bielele celor două elemente centrale 3 și 5 (mecanismul III 4.3).

8. 22. *În tabela nr. 6 a și b sînt redate:*

Mecanismele caracteristice, cu 8 elemente cu grupe assurice de cl. a IV-a ord. 3 și $Z_g = 1$

Din cele 3 grupe de cl. a IV^1-a ord. 3 s-au alcătuit în total *13* variante de mecanisme; la fiecare din grupă elementul conducător 1 legîndu-se succesiv la cîte o articulație respectiv 2 articulații exterioare și eliminîndu-se variantele care se repetau.

Astfel:

- din grupa IV^1 3a s-au obținut 5 variante (IV^1 3a$_1$ — IV^1 3a$_5$)
- din grupa IV^1 3b sau obținut 4 variante (IV^1 3b$_1$ IV^1 3b$_4$)
- din grupa IV^1 3c s-au obținut 4 variante (IV^1 3c$_1$ IV^1 3c$_4$)

Observație. Din grupele de cl. a IV-a ord. 3 reductibile structural (IV^1 3d și IV^1 3e) redate în tabela *3a* s-au obținut *4* variante care se vor regăsi în tabelele mecanismelor cu 8 elemente de la § 11 (vezi tabela 11 *a*). Nici acestea nu intră în categoria mecanismelor caracteristice.

Notă. Nu se poate lega elementul conducător 1 la elementul 4 prin articulația *E* și baza 8 la articulațiile exterioare *D* și *I*, deoarece în acest caz partea din grupă formată din elementele 2, 3, 5 și 7 se rigidizează și mecanismul se transformă într-un patrulater articulat 1, 4, 6, 8.

8.23. *În tabela 7 sînt redate:*

Mecanismele caracteristice cu 8 elemente cu grupe assurice de cl. a *V*^{1}-a *ord. 3 și cl.* a *VI*-a *ord. 3 cu un contur închis deformabil* ($Z_g = 1$)

Din grupa assurică de cl. a V-a ord. 3 cu o bielă — singura variantă care există — s-au alcătuit 6 mecanisme caracteristice de aceeași clasă și ordin prin legarea succesivă a elementului conducător și a bazei la articulațiile exterioare ale grupei, care sînt variante independente.

Cele 6 variante s-au notat cu V^1 3 1 . . . V^1 3 6

În continuare se obține din grupa de cl. a VI-a ord. 3, *2 mecanisme caracteristice cu 8 elemente cu grupe assurice de cl.* a *VI*-a *ord. 3 cu un contur închis deformabil* ($Z_g = 1$) (*VI 31 și VI 32*)

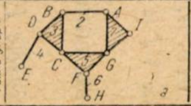
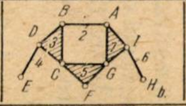
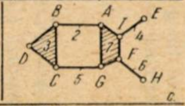
În total deci în tabela 7. sînt cuprinse 8 mecanisme caracteristice.

8.24. *În tabela 8 sînt în sfîrșit redate:*

Mecanismele cu 8 elemente cu grupe assurice de clasele IV și V ord. 2 cu două contururi închise deformabile ($Z_v = 2$).

Tabela 6 a

Mecanisme caracteristice cu 8 elemente cu grupe assurice cu un contur închis deformabil de clasa a IV-a ord. 3

Datele grupei	$n'=6$ $C'_5=9$		
Nr. contururilor închise def. Zg	$Z_g=1$		
Clasa şi ordinul	IV^1 ord. 3		
Schema structurală a grupei	 a	 b.	 c.

MECANISMELE CARACTERISTICE CE SE POT FORMA:

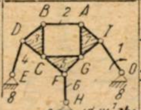
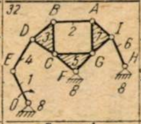
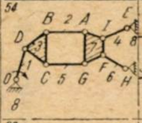
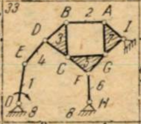
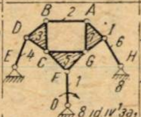
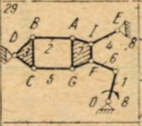
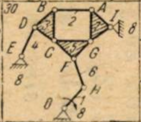
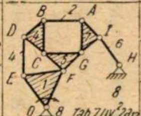
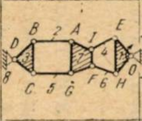
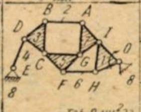
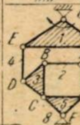
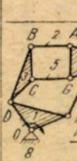
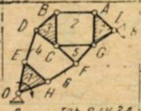
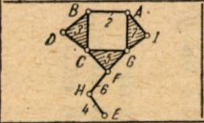
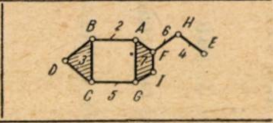
Cl	Schema structurală	M.red.	Cl	Schema structurală	M.red	Cl	Schema structurală	M.redus
$IV^1\,3\,a_1$	 id. $IV^1\,3b_2$	— $\frac{III3}{3,5f}$ da	$IV^1\,3\,b_1$		$\frac{II2}{5,6}$ $\frac{II2}{5,6,8f}$ da	$IV^1\,3\,c_1$		— $\frac{III3}{3,5f}$ —
$IV^1\,3\,a_2$		$\frac{II2}{6,7}$ $\frac{II2}{6,7,8f}$ da	$IV^1\,3\,b_2$	 id. $IV^1\,3a_1$	— $\frac{III3}{3,5f}$ da	$IV^1\,3\,c_2$		$\frac{III3}{3}$ $\frac{II2}{3,5f}$ da
$IV^1\,3\,a_3$		$\frac{III3}{7}$ $\frac{II2}{3,5f}$ da	$IV^1\,3\,b_3$	 Tab 7/$IV^2\,2a_{12}$	— $\frac{II2}{3,5f}$ —	$IV^1\,3\,c_3$		— $\frac{III3}{3,5f}$ —
$IV^1\,3\,a_4$	 Tab. 8/$IV^2\,2a_{11}$	— $\frac{II2}{7,5f}$ —	$IV^1\,3\,b_4$	 Tab 7/VI 32	— $\frac{III3}{3,5f}$ —	$IV^1\,3\,c_4$	 Tab 7/V ad_2	— $\frac{II2}{3,5f}$ —
$IV^1\,3\,a_5$	 Tab 8/V 34	— $\frac{III3}{3,5f}$ —						

Tabela 6 b

Mecanisme cu 8 elemente cu grupe assurice reductibile structural de clasa a IV-a ord. 3

Datele grupei	$n'=6$ $C'_5=9$	
Nr. conturilor Zg	$Z_g=1$	
Clasa ordinul	cl IV^1 ord 3	
Schema structurală a grupei		

MECANISMELE CE SE POT FORMA:

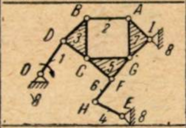
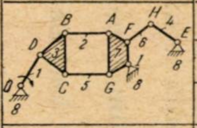
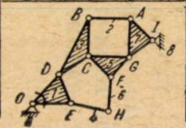
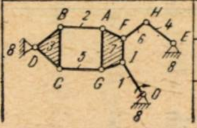
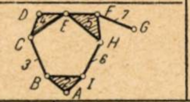
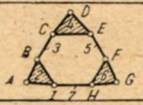
cl	Schema structurală	Redus	cl	Schema structurală	Redus
$IV^1\,3d_1$		$\frac{III3}{7}$ $\frac{II2}{3,5f}$ —	$IV^1\,3e_1$		$\frac{III3}{4}$ $\frac{II2}{3,5f}$ —
$IV^1\,3d_2$		$\frac{III3}{7}$ $\frac{II2}{3,5f}$ —	$IV^1\,3e_2$		$\frac{III3}{3}$ $\frac{II2}{3,5f}$ —

Tabela 7

Mecanisme caracteristice cu 8 elemente cu grupe assurice cu un contur închis deformabil de cl. a V-a ord. 3 și cl. a VI-a ord. 3

Datele grupei	$n'=6$ $C'_5=9$	
Nr de cont inch def Zg	$Zg=1$.	
Cl. și ord gr	Cl V ord 3	Cl VI ord 3
Schema structurală a grupei		

MECANISMELE CARACTERISTICE CE SE POT FORMA

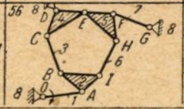
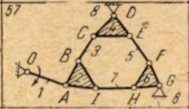
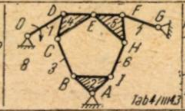
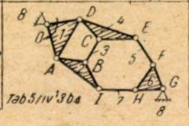
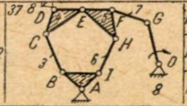
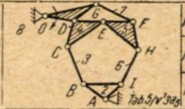
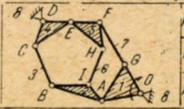
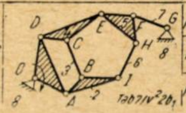
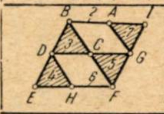
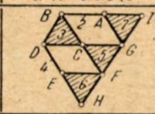
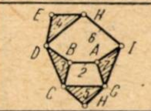
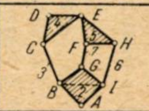
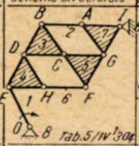
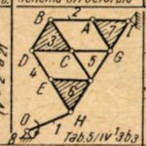
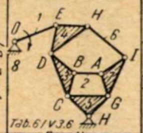
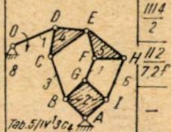
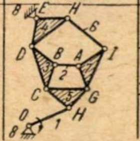
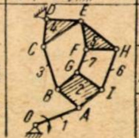
Cl ord.	Schema structurală	MET	Mec redus	Cl ord.	Schema structurală	Met	Mec redus
V3.1		MSEC	$\frac{III3}{4,7}$	VI3.1		MSEC	$\frac{III3}{4,6}$
		MGA	$\frac{III3}{4,78f}$			MGA	$\frac{III3}{4,68f}$
		MCI	da			MCI	–
V3.2		MSEC	$\frac{III4}{2}$	VI3.2		MSEC	$\frac{IV}{6}$
		MGA	$\frac{III4}{2,8f}$			MGA	$\frac{III3}{3,2f}$
		MCI	da			MCI	
V3.2		MSEC	$\frac{II2}{4,2}$				
		MGA	$\frac{II2}{4,28f}$				
		MCI	–				
V3.4		MSEC	$\frac{IV3}{2}$				
		MGA	$\frac{III3}{4,5f}$				
		MCI	–				
V3.5		MSEC	–				
		MGA	$\frac{III4}{4,5f}$				
		MCI	–				
V3.6		MSEC	–				
		MGA	$\frac{II2}{3,2f}$				
		MCI	–				

Tabela 8

Mecanisme caracteristice cu 8 elemente cu grupe assurice cu 2 contururi închise deformabile de cl. a IV-a, a V²-a ord. 2.

Datele grupei	$n'=6$ $C'_5=9$			
Nr contururi închise def Zg	$Zg=2$			
Clasa și ord	Cl IV² ord 2 (2IV)	Cl IV² ord 2(2IV)	Cl V² ord 2(1IV+1V)	Cl. V² ord 2(1IV+1V)
Schema structurală a grupei	 a_1	 a_2	 b	 d

MECANISMELE CARACTERISTICE CE SE POT FORMA:

Cl. ord.	Schema structurală	Mec red	Cl ord.	Schema structurală	Mec red.	Cl ord	Schema structurală	Mec red	Cl ord	Schema structurală	Mec redus
IV² 2 a11		– $\frac{II2}{3,5f}$ –	IV² 2 a21		– $\frac{II2}{3,5f}$ –	V² 2 b1		– $\frac{II2}{2,3f}$ –	V² 2.1		$\frac{III4}{2}$ $\frac{II2}{7,2f}$ –
						V² 2 b		– $\frac{II2}{2,3f}$ –	V² 2.2		$\frac{IV3}{4}$ $\frac{II2}{7,2f}$ –

Pe baza aceluiași principiu folosit la tabelele precedente s-au alcătuit cele 6 variante de mecanisme din cele 4 grupe assurice cu $Z_g = 2$ după cum urmează :

- din grupa de cl. a IV^2-a ord. 2 a_1 s-a obținut 1 variantă (IV$^2_2$ a$_{11}$)
- din grupa de cl. a IV^2-a ord. 2 a_2 s-a obținut 1 variantă (IV$^2_2$ a$_{21}$)
- dn grupa de cl. a IV^2-a ord. 2 *b* s-au obținut 2 variante
- din grupa de cl. a V^2-a ord. 2 *d* s-au obținut 2 variante

Observație. Din grupele reductibile structural cu $Z_g = 2$ redate în tabela nr. 3 *a* se pot alcătui de asemenea 4 mecanisme care se vor regăsi însă la § 11, de aceea nu sînt încadrate în categoria mecanismelor caracteristice.

8.25. În total s-au format 30 mecanisme caracteristice cu 8 elemente și din aceste 30 mecanisme caracteristice 18 se vor regăsi la § 11 printre cele rezultate din lungiri și amplificări *datorită* schimbării elementului conducător.

§ 9. CALCULUL NUMĂRULUI DE CONTURURI ÎNCHISE DEFORMABILE (Z) PE CARE LE POATE AVEA UN MECANISM PLAN ARTICULAT

Toate mecanismele caracteristice înscrise în tabelele 4...9 s-au clasificat după numărul de contururi închise deformabile (Z_g) ale grupei assurice aflată în structura lui și nu după numărul (Z) de contururi ale mecanismului. În acest din urmă caz determinarea numărului maxim de contururi închise deformabile ($Z_{max.}$) se face ținînd seama că în calcul intră încă două elemente (cel conducător și baza) plus articulația dintre acestea.

Deoarece la alcătuirea mecanismelor din grupe assurice cu $Z_{g\,max.}$, prin legarea uneia din cuplele exterioare la elementul conducător și a celeilalte la bază se mai creează încă un contur închis deformabil, rezultă următoarea relație :

$$Z_{max.} = Z_{g\,max.} + 1. \tag{32}$$

Relația dintre Z_{max}, $e = n + 1$ (numărul total de elemente), C_5 (numărul total de cuple cinematice) și $M_3 = 1$ (gradul de mobilitate) ale mecanismului, rezultă din formulele :

$$Z = C_5 - (e - 1) \tag{33}$$

$$M_3 = 3\ (e - 1) - 2\ C_5 = 1 \tag{34}$$

din care se obține succesiv :

$$Z_{max.} = \frac{1}{2}\ e - 1, \tag{35}$$

$$Z_{max.} = \frac{1}{3}\ (C_5 - 1). \tag{36}$$

Este de asemenea important de precizat relațiile care există între n' și C'_5 ale grupei assurice și e și C_5 ale mecanismului caracteristic corespunzător.

Aceste relații sînt mai ușor de determinat :

$$e = n' + 2, \tag{37}$$

$$C_5 = C'_5 + 1. \tag{38}$$

În tabela 9 s-a înscris numărul maxim de contururi închise deformabile ($Z_{max.}$) deduse din formulele (37), (38), (32)

Tabela 9

Numărul maxim de contururi închise deformabile ($Z_{max.}$) pe care le poate avea un mecanism plan articulat

Numărul total de elemente	4	6	8	10	12
Numărul total de articulații C_5	4	7	10	13	16
$Z_{max.} = \frac{1}{2} e - 1$ $= \frac{1}{3} (C_5 - 1)$	1	2	3	4	5
$Z_{g\,max.} = Z_{max.} - 1$	0	1	2	3	4

Numărul de contururi închise deformabile ale unui mecanism caracteristic plan articulat este important la determinarea metodei de cercetare cinematică.

§ 10. METODELE DE CERCETARE CINEMATICĂ A MECANISMELOR CARACTERISTICE PLANE ARTICULATE

10.1. *Sistematizarea calculului cinematic* prin alegerea metodei de cercetare care duce la cel mai mic volum de lucru se poate face cu ajutorul mecanismelor caracteristice.

Pentru aceasta în dreptul fiecărui mecanism din cele 5 tabele (nr. 4 — nr. 8) s-au trecut metodele care se pot aplica și care duc la un volum de lucru mai redus decît prin metoda ,,clasică'' directă.

Pentru ușurința înscrierii în tabele s-au făcut următoarele prescurtări :

MSEC	—	Metoda schimbării elementului conducător (§ 3 și anexa nr. 2)
MGA	—	Metoda grafico-analitică a schimbării bazei propusă de Th. Goodmann (§ 5)
MCI	—	Metoda coeficienților de influență (Metoda O. Mohr-Modrey) redată la § 6.

Aceste trei metode sînt indicate în tabele în ordinea de mai sus. În dreptul fiecărui mecanism s-a înscris în căsuța respectivă o fracție care are:

— la numărător: clasa și ordinul mecanismului rezultat prin transformare (MSEC sau MGA)

— la numitor: elementele care pot deveni noul element conducător (în cazul MSEC) sau elementul conducător și cel fix (în cazul MGA). Elementul fix va fi urmat de litera *f*.

În cazul cînd prin aplicarea metodei nu se ajunge la micșorarea clasei mecanismului, atunci în coloana respectivă figurează o linie orizontală „—".

Dacă linia orizontală apare și în dreptul metodei MCI aceasta înseamnă că nu se poate aplica, deoarece — după cum s-a arătat la § 6.7, duce la nedeterminare (fig. 6)

10.2. *Concluzii* Din analizarea domeniului de aplicabilitate ale celor 3 metode se constată următoarele:

10.21. *Metoda schimbării elementului conducător* (*MSEC*)

— se poate aplica: la 2 din cele 3 mecanisme caracteristice cu 6 elemente (67%).

— se poate aplica la 13 din cele 30 mecanisme caracteristice cu 8 elemente (43,3%)

10.22. *Metoda grafico-analitică a schimbării bazei* (*MGA*)

— se poate aplica: la toate cele 3 mecanisme caracteristice cu 6 elemente (100%)

— " : la 28 din cele 30 mecanisme caracteristice cu 8 elemente (93,3%)

10.23. *Metoda coeficienților de influență* (*MCI*)

— se poate aplica: la 1 din cele 3 mecanisme caracteristice cu 6 elemente (33%)

— " : la 11 din cele 30 mecanisme caracteristice cu 8 elemente (36,6%)

10.24. Mecanismele caracteristice cu 8 elemente dovedesc că metoda schimbării bazei are cea mai mare aplicabilitate în calculul distribuției de viteze și accelerații.

Nu se poate trage o concluzie categorică din această analiză statistică.

Acad. I. I. Artobolevschi a arătat că metoda schimbării bazei în vederea cercetării cinematice a unui mecanism complex este destul de greoaie [2, 3].

Noi susținem că cunoașterea adîncă a diferitelor metode de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate sistematizată pe cele 30 mecanisme caracteristice cu 8 elemente permite cercetătorului să aleagă metoda cea mai economică pentru determinarea distribuției de viteze și accelerații și deci și a forțelor de inerție.

Dacă dintre metodele expuse una dintre ele dă naştere la un volum de lucru mai mic decît metoda directă este evident că va trebui să se aleagă metoda cea mai simplă.

S-a arătat cum determinarea mişcării tijei sertarului se poate afla mult mai uşor cu metoda coeficienţilor de influenţă decît prin metoda directă. Dar mecanismele plane articulate cu 8 elemente nu sînt limitate numai la cele 30 mecanisme caracteristice indicate în tabelele 4—9 ci şi la cele 59 de mecanisme rezultate după cum se arată la § 11.

§ 11. MECANISMELE CU 8 ELEMENTE REALIZATE DIN AMPLIFICAREA, LUNGIREA, SAU AMBELE COMBINATE SUCCESIV, CU GRUPE ASSURICE PLANE ARTICULATE

11.1. *Introducere.* Mecanismele plane articulate cu 8 elemente se pot forma însă şi prin amplificarea sau lungirea mecanismului patrulater (mecanismul de bază în structura mecanismelor plane) cu grupe assurice cu 4 elemente ($n' = 4$; $C_5' = 6$) sau prin adăugarea la elementul conducător de grupe assurice simple sau complexe pînă la completarea numărului de 8 elemente.

Această construcţie de mecanisme este esenţial deosebită de alcătuirea mecanismelor caracteristice redate în tabelele 4—9.

Din modul de alcătuire a acestor mecanisme se va vedea că este posibil ca prin operaţia de schimbare a elementului conducător să rezulte unele din mecanismele cu 8 elemente plane articulate obţinute printre mecanismele caracteristice cu 8 elemente (18 mecanisme).

11.2. **Alcătuirea mecanismelor cu 8 elemente prin amplificări şi lungiri a elementului conducător cu grupe assurice**

11.21. *Definiţii.* Se numeşte amplificare a unui mecanism dat cu o grupă assurică, legarea acesteia din urmă cu toate articulaţiile exterioare numai la elementele mobile ale mecanismului.

În consecinţă atît mecanismul iniţial cît şi cel amplificat are acelaşi număr de articulaţii fixe (a se vedea toate mecanismele cu 8 elemente din grupele I_1, I_2 şi I_3) (tabela 10).

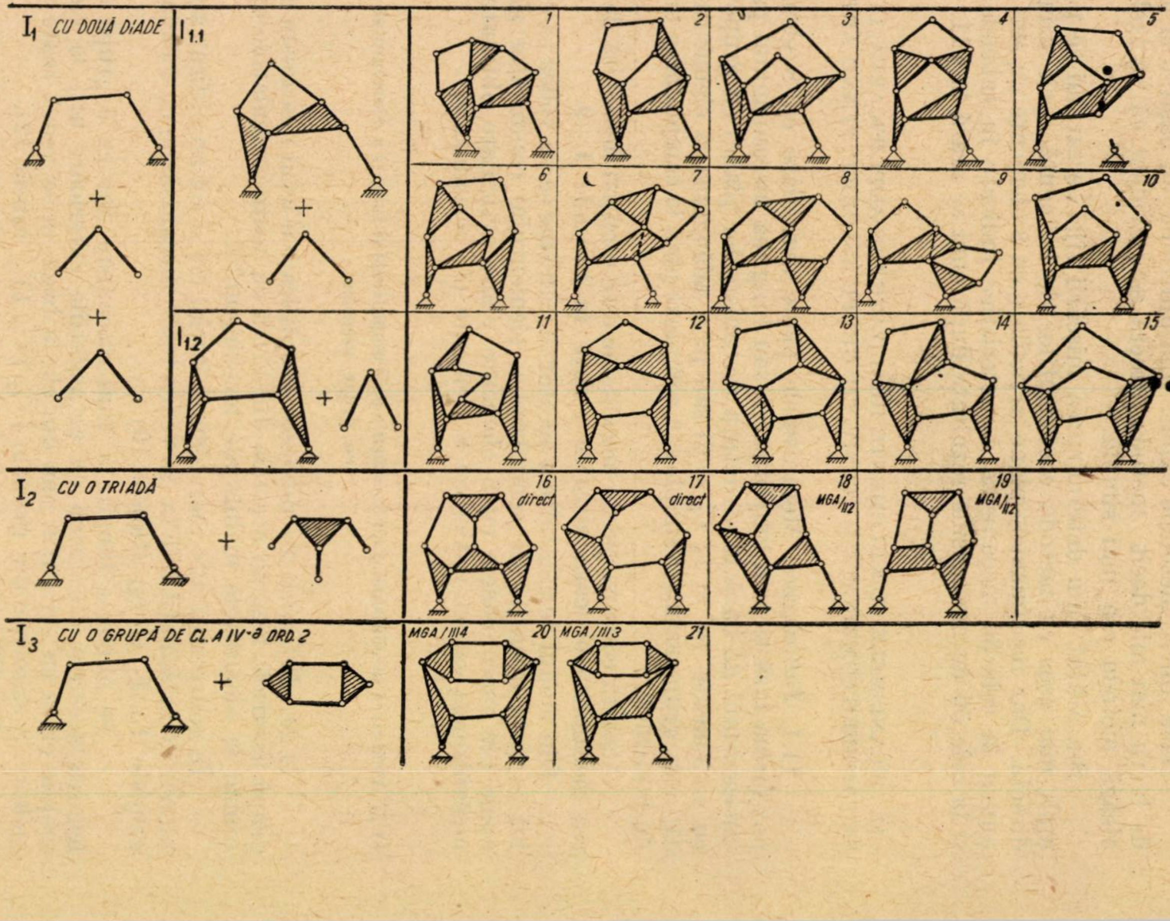
— Se numeşte lungire a unui mecanism dat cu o grupă assurică, legarea acesteia din urmă cu articulaţiile exterioare atît la elementele mobile cît şi cu cel puţin una din ele la bază (a se vedea toate mecanismele cu 8 elemente din grupele IV_1, IV_2, IV_3, tabela 12).

— Amplificarea urmată de lungire sau invers combină cele două operaţii de mai sus în vederea obţinerii tuturor variantelor de mecanisme cu un număr dat de elemente (a se vedea toate mecanismele cu 8 elemente din grupele III A_1, III A_2 respectiv III B_1, III B_2) (tabela 11).

11.22. *Modul de alcătuire a mecanismelor plane articulate* cu 8 elemente rezultă evident din aplicarea principiilor date mai sus şi se obţin astfel în tabelele 10 ... 12:

Tabela 10

Amplificarea mecanismului patrulater


I1 CU DOUĂ DIADE
I1.1
I1.2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
I2 CU O TRIADĂ
16 direct
17 direct
18 MGA/II2
19 MGA/II2
I3 CU O GRUPĂ DE CL. A IV-a ORD. 2
MGA/III4 20
MGA/III3 21

a. *grupa I-a de mecanisme* : Mecanisme cu 8 elemente rezultate prin amplificarea mecanismului patrulater cu următoarele trei subgrupe :

— subgrupa I_1 : Amplificarea mecanismului patrulater succesiv cu două diade în cele două variante $I_{1.1}$ şi $I_{1.2}$.

rezultă :

din varianta $I_{1.1}$	. . . . . .	10 mecanisme
,, $I_{1.2}$	. . . . .	5 mecanisme
	total	15 mecanisme

Tabela 11 a

Legarea la elementul conducător a unei grupe de cl. a IV-a şi apoi amplificarea respectiv lungirea cu o diadă.

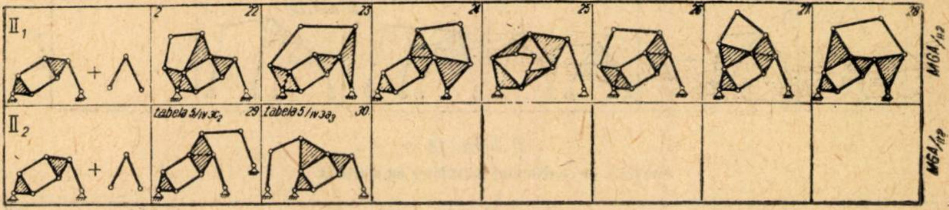
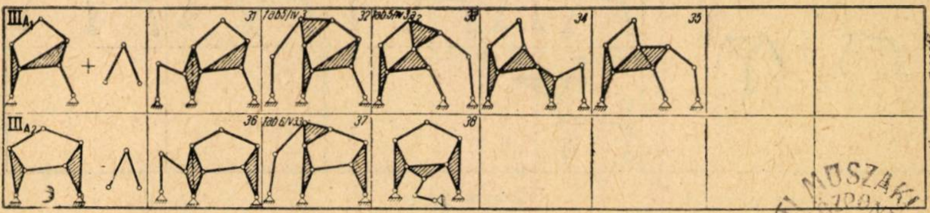

II₁
+
2
22
23
24
25
26
27
28
MGA/112
II₂
+
tabela 5/IV 3c₂
29
tabela 5/IV 3a₃
30
MGA/112

Tabela 11 b

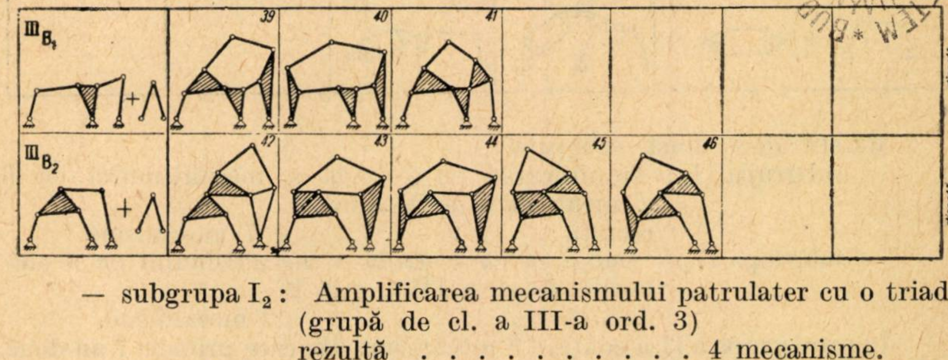
Amplificarea şi apoi lungirea mecanismului patrulater cu cite o diadă.


III_A₁
+
31
tab 5/IV 3
32
tab 5/IV 3a₂
33
34
35
directă
III_A₂
36
tab 6/IV 33
37
38
directă

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA * 1848

Tabela 11 c

Lungirea şi apoi amplificarea mecanismului patrulater cu cite o diadă.


III_B₁
+
39
40
41
directă
III_B₂
+
42
43
44
45
46
directă

— subgrupa I_2 : Amplificarea mecanismului patrulater cu o triadă (grupă de cl. a III-a ord. 3)
rezultă . . . . 4 mecanisme.

— subgrupa I_3 : Amplificarea mecanismului patrulater cu o grupă de cl. a IV-a ord. 2.
rezultă . . . . 2 mecanisme

În total grupa I-a conţine . . . . .21 mecanisme.

Toate acestea au deci două articulații fixe.

b. *Grupa a II-a de mecanisme* : Mecanisme cu 8 elemente rezultate din legarea la elementul conducător și bază a unei grupe de clasa a IV-a ord. 2 și apoi amplificarea respectiv lungirea cu o diadă :

Tabela 12 a

Lungirea mecanismului patrulater cu două diade.

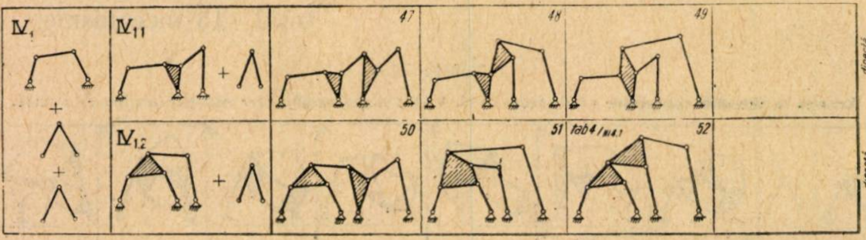

IV₁
IV₁₁
IV₁₂
+
47
48
49
50
51
tab4/m4.1
52
direcță
direcță

Tabela 12 b

Lungirea mecanismului patrulater cu o triadă.

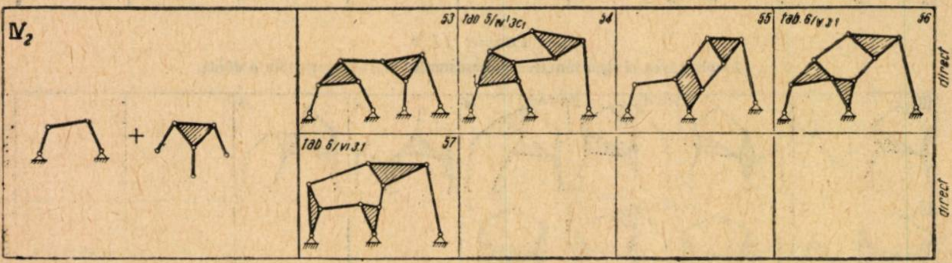
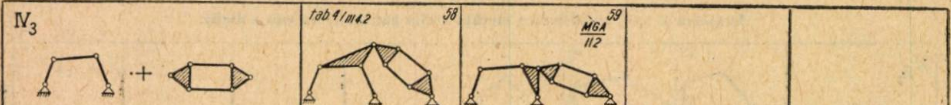

IV₂
+
53
tab 5/m'3c₁
54
55
tab 6/v3.1
56
tab 6/vi3.1
57
direct
direct

Tabela 12 c

Lungirea mecanismului patrulater cu o grupă cl. a IV-a ord. 2.


IV₃
+
tab4/m4.2
58
59
MGA/112

Există deci două subgrupe :

— subgrupa II_1 : Amplificarea cu o diadă a mecanismului cu 6 elemente de cl. a IV-a ord. 2.
rezultă . . . . 7 mecanisme

— subgrupa II_2 : Lungirea cu o diadă a mecanismului cu 6 elemente de cl. a IV-a ord. 2.
rezultă . . . . .2 mecanisme.

În total grupa a II-a conține 9 mecanisme din care primele 7 au două articulații fixe, iar ultimele 2 au 3 articulații fixe.

c. *Grupa a III-a de mecanisme* : Mecanisme cu 8 elemente rezultate din amplificarea urmată de lungirea mecanismului patrulater cu cîte o diadă sau invers, cu două subgrupe :

— *subgrupa* III_A : Amplificarea și apoi lungirea mecanismului patrulater cu cîte o diadă
rezultă : din varianta III_{A_1} . . . . . .5 mecanisme
„ III_{A_2} . . . . . .3 „

— *subgrupa* III_B : Lungirea și apoi amplificarea mecanismului patrulater cu cîte o diadă
rezultă : din varianta III_{B_1} . . . . 3 mecanisme
„ III_{B_2} . . . . 5 „

În total grupa a III-a cuprinde 16 mecanisme cu 3 articulații fixe.

d. *Grupa a IV-a de mecanisme* : Mecanisme cu 8 elemente rezultate din lungirea mecanismului patrulater cu grupe assurice, cu următoarele trei subgrupe :

— *subgrupa* IV_1 : Lungirea mecanismului patrulater cu două diade
rezultă : din varianta IV_{11} . . . . .3 mecanisme
„ IV_{12} . . . . .3 „

Cele 6 mecanisme rezultate au 4 articulații fixe.

— *subgrupa* IV_2 : Lungirea mecanismului patrulater cu o triadă
rezultă : . . . . 5 mecanisme cu trei articulații fixe.

— *subgrupa* IV_3 : Lungirea mecanismului patrulater cu o grupă de clasa a IV-a ord. 2.
rezultă : . . . . .2 mecanisme de asemenea cu trei articulații fixe.

În total grupa a IV-a conține 13 mecanisme din care primele 6 au 4 articulații fixe, iar ultimele 7 numai 3 articulații fixe.

În total s-au obținut 59 mecanisme cu 8 elemente după cum urmează :

— în grupa I . . . . . . .21 mecanisme numerotate 1 — 21
— „ II . . . . 9 „ „ 22 — 30
— „ III . . . . . .16 „ „ 31 — 46
— „ IV . . . . . . .13 „ „ 47 — 59

11.3. *Mecanismele caracteristice independente cu 8 elemente*

Pornind pe același criteriu, în continuare se pot încadra și mecanismele caracteristice din tabelele 4—9 fără a se mai ține seama de elementul conducător și identificîndu-le pe acele care se află în grupele I, II, III și IV de mai sus.

Astfel :

V. *Din tabela 5* rămîne variantă independentă numai mecanismul III 4.3 (căruia nu i se poate aplica *MSEC*).
Rezultă deci : 1 mecanism caracteristic.

VI. *Din tabela 6* rămîn variante independente numai mecanismele : $IV^1\ 3\ a_1$; $IV^1\ 3\ a_4$; $IV^1\ 3\ a_5$;
$IV^1\ 3\ b_3$; $IV^1\ 3\ b_4'$;
$IV^1\ 3\ c_3$; $IV^1\ 3\ c_4$.

În total rezultă deci : 7 mecanisme caracteristice.

VII. *Din tabela 7* rămîn variante independente mecanismele caracteristice : V. 3.5 și V. 3.6

În total deci : 2 mecanisme caracteristice.

VIII. *Din tabela 8* rămîn independente mecanismele caracteristice : $V^2\,2\cdot b_2$ şi $V^2\cdot 2\cdot C_{12}$

În total deci : 2 mecanisme caracteristice

Total : 12 mecanisme caracteristice independente.

Din cele 30 mecanisme caracteristice dacă nu se ţine seama de elementul conducător se elimină în consecinţă 18 rămînînd 12.

În concluzie, studiul domeniului de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică la mecanismele plane articulate cu 8 elemente, duce la studiul a 71 de mecanisme dintre care 59 rezultă din metodele de amplificare şi lungire şi numai 12 caracteristice independente. În articolul [10] K. Hain găseşte pe o altă cale acelaşi număr de 71 mecanisme.

IV. CONCLUZII ŞI PROPUNERI

§ 12. CONCLUZII

Aplicarea celei mai eficiente metode de cercetare cinematică a unui mecanism plan articulat depinde, după cum rezultă din cele expuse, de structura mecanismului.

Clasificarea lor în grupele şi subgrupele stabilite în această lucrare permite stabilirea pentru fiecare grupă a uneia din metodele indicate la Cap. III.

Se va arăta mai jos care sînt aceste metode :

I. *La mecanismele cu 8 elemente din grupa I*

— Subgrupa I_1—15 mecanisme (1—15) : — *Metoda clasică* (*directă*) care corespunde în acest caz mecanismelor de *clasa a II-a ord. 2.*

— Subgrupa I_2—4 mecanisme (16—19) : — pentru mecanismele 16, 17 *metoda directă* care corespunde mecanismelor de *clasa a III-a* ord. 3.
  — pentru mecanismele 18, 19 metoda grafico-analitică a schimbării bazei (*MGA*) care le transformă în *clasa a II-a ord. 2.*

— Subgrupa I_3—2 mecanisme : — *Metoda MGA* care le transformă în *cl. III ord. 4* respectiv *clasa III ord. 3.*

II. *La mecanismele cu 8 elemente din grupa a II-a*

— Subgrupa II_1—7 mecanisme : — *Metoda MGA* care le transformă în *clasa a II-a ord. 2.*

— Subgrupa II_2—2 mecanisme : — *Metoda MGA* care le transformă în *clasa a II-a ord. 2.*
  Aceste două mecanisme se regăsesc în tab. 6 a mecanismelor caracteristice la IV 3 c_2 (29) şi IV 3 a_3 (30) în dreptul cărora apar indicate metodele de cercetare cinematică cele mai eficiente (*MSEC*, *MGA*, *MCI*).

III. *La mecanismele cu 8 elemente din grupa a III-a*

— Subgrupele III_{A_1}, III_{A_2}, III_{B_1}, III_{B_2}
— 16 mecanisme
(31 ... 46) — *Metoda directă* care corespunde în aceste cazuri mecanismelor de *cl. a II-a ord. 2.*

Printre aceste mecanisme se regăsesc în grupa mecanismelor caracteristice 3 mecanisme.

— În tab. 6/IV 3 b_1 (mec. 32) și IV 3 a_2 (mec. 33).

— În tab. 7/V 3.3. (mec. 37).

În dreptul lor se constată că figurează ca metode ce cercetare *MSEC* și *MGA* care le transformă în cl. II ord. 2.

— Subgrupa IV_2 — 5 mecanisme : — Cea mai mică clasă prin metoda directă este aceea rezultată din însăși alcătuirea lor (mecanism patrulater lungit cu o triadă) adică de cl. a III-a ord. 3.

În afară de mec. 55 căruia prin aplicarea *MGA* se poate transforma în cl. a II-a ord. 2 toate celelalte nu se pot reduce la clasă mai mică de III ord. 3. De altfel din identificarea mecanismelor caracteristice 54 (tab. 6/IV^1 3 c_1), 56 (tab. 7/V 31) și 57 (tab. 7/VI 31) se vede în dreptul fiecărui mecanism din tabela respectivă că în adevăr cl. a III-a ord. 3 este cea mai mică ce poate fi obținută.

— Subgrupa IV_3 — 2 mecanisme : — *MGA* care le transformă în clasa a II-a ord. 2.

Mecanismul 58 se regăsește și în tab. 5/III 4.2 căruia i se poate aplica și *MCI.*

Toate celelalte 12 mecanisme caracteristice cu 8 elemente (variante independente) se pot cerceta cinematic cu ajutorul *MSEC*, *MGA* sau *MCI* care le reduc la cl. a II-a ord. 2 sau cel mult la cl. a III-a ord. 3 după cum s-a arătat la Cap. III.

§ 13. PROPUNERI

Din studiul prezentat s-a desprins diversitatea metodelor de cercetare cinematică ce se pot aplica unui mecanism plan articulat.

Problema esențială a fost însă găsirea metodei celei mai eficiente pentru reducerea volumului de lucru.

S-a încercat în cele de mai sus să se indice pentru fiecare din cele 71 mecanisme plane articulate cu 8 elemente metoda de cercetare cinematică cea mai eficientă, prezentînd în acelaşi tîmp şi modul cum anumite metode (*MSEC*, *MGA* şi *MCI*) pot fi aplicate în mod unitar dîndu-se posibilitatea celor familiarizaţi cu metoda directă să le utilizeze cu uşurinţă, folosind planele vitezelor şi acceleraţiilor şi punînd accentul *pe ecuaţiile de verificare*, care dau certitudinea unui calcul efectuat fără greşeală.

Propunerile făcute pentru mecanismele cu 8 elemente se vor extinde la cele cu 10 sau 12 elemente, criteriile indicate în prezenta lucrare putîndu-se extinde. De altfel aplicaţia *MCI* la un mecanism cu 12 elemente de clasa a III-a ord. 4, este edificator.

Mecanismele caracteristice cu 10 elemente sînt mult mai numeroase decît cele cu 8 elemente.

Studiul acestora început cu grupele assurice cu 8 elemente [4] se va continua.

ANEXA NR. 1

DETERMINAREA DISTRIBUŢIEI VITEZELOR ŞI ACCELERAŢIILOR PRIN METODA POZIŢIILOR FALSE

Să se determine distribuţia de viteze şi acceleraţii la mecanismul plan de clasa a V-a ord. 3 din fig. 1.1 a, fiind dată viteza unghiulară a elementului conducător $\omega_1 = 24\, rads^{-1}$ şi scara lungimilor $k_l = \frac{1}{50}\left[\frac{m}{mm}\right]$.

***Rezolvare. Determinarea vitezelor* (fig. 1,1*b*).**

Mecanismul este realizat prin amplificarea patrulaterului OBAC cu o grupă assurică (GHIJKLDEF) de clasa a V-a ordinul 3.

Viteza $\overline{V_A}$ a punctului A este :

$$V_A = \omega_1 \cdot \mathrm{OA} = \omega_1 \cdot k_l\,(\mathrm{OA}) = 24 \cdot \frac{1}{50} \cdot 25 = 12\ \mathrm{ms}^{-1}.$$

Alegînd $k_v = \frac{1}{2,5}\left[\frac{\mathrm{ms}^{-1}}{\mathrm{mm}}\right]$ se determină în planul vitezelor, rotit cu 90° în sens trigonometric, vectorul $\overline{P_v a}$ de mărime :

$$(P_v a) = \frac{V_A}{K_v} = \frac{12}{\frac{1}{2,5}} = 30\ \mathrm{mm}.$$

Viteza punctului B se găseşte prin construirea în planul vitezelor a ecuaţiei vectoriale.

$$\overline{V_B}^{|} = \underline{\underline{\overline{V_A}}}^{|} + \underset{\parallel AB}{\overline{V_{BA}}^{|}}.$$

Se obţine : $\overline{V_B}^{|} = k_v\,(\overline{P_v b}) = \frac{1}{2,5} \cdot 27,5 = 11\ \mathrm{ms}^{-1}$.

Prin metoda asemănării se determină vitezele punctelor D, E și F. :

$$\overline{V_D}\,| = k_v\,(\overline{P_v d}) = \frac{1}{2{,}5}\cdot 20 = 8\ \text{ms}^{-1}$$

$$\overline{V_E}\,| = k_v\,(\overline{P_v e}) = \frac{1}{2{,}5}\cdot 30 = 12\ \text{ms}^{-1}$$

$$\overline{V_F}\,| = k_v\,(\overline{P_v f}) = \frac{1}{2{,}5}\cdot 16 = 6{,}4\ \text{ms}^{-1}.$$

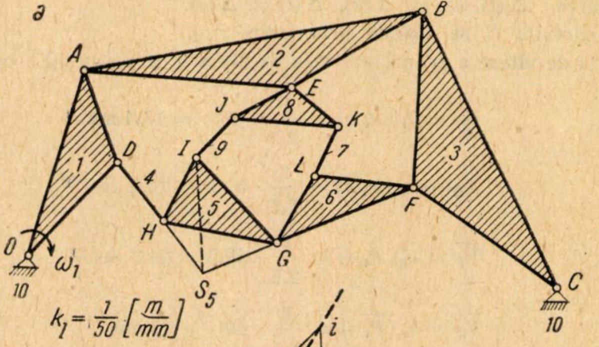

a
A
B
2
E
J
8
K
D
I
9
7
L
1
4
3
5
6
F
H
G
O
ω1
10
S5
C
10
$k_l = \frac{1}{50}\left[\frac{m}{mm}\right]$

Fig. 1.1 *a*

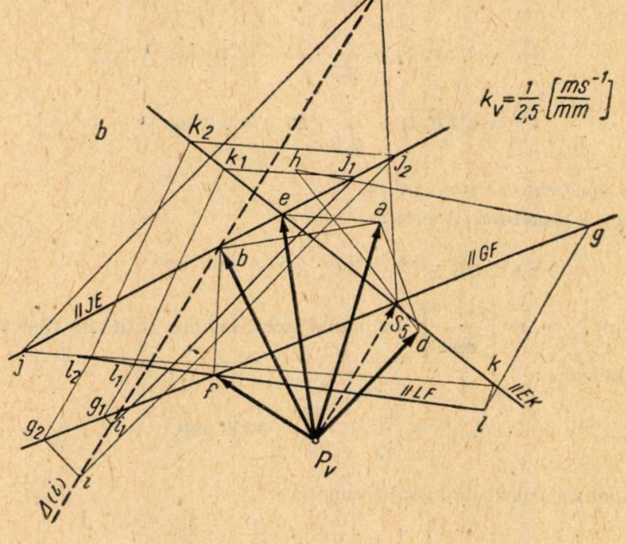

i
$k_v = \frac{1}{2,5}\left[\frac{ms^{-1}}{mm}\right]$
b
k2
k1
h
j1
j2
e
a
g
b
||GF
||JE
S5
d
j
l2
l1
f
||LF
k
||EK
g1
i1
g2
l
Pv
Δ(i)
i

Fig. 1.1 *b*

Pentru o mai mare ușurință în calculul grafic se folosește punctul lui Assur S_5 obținut prin prelungirea lui DH și GF — căruia i se determină viteza din ecuația :

$$\overline{V_{S_5}}\,| = \underline{\underline{\overline{V_D}\,|}} + \underset{||S_5D}{\underline{\overline{V_{S_5D}}\,|}} = \underline{\underline{\overline{V_F}\,|}} + \underset{||S_5F}{\underline{\overline{V_{S_5F}}\,|}}\,.$$

Pe direcția $D\ (g) \parallel GF$ pe care se găsește vîrful vitezei punctului G se ia la alegere punctul g_1.

Se construiește poligonul $(g_1, l_1, k_1, j_1, i_1)$ știind că vîrfurile l_1, k_1, j_1, se găsesc pe direcții cunoscute $\Delta\,(l) \parallel LF$, $\Delta\,(k) \parallel EK$ și $\Delta\,(j) \parallel JE$. Cum vîrful i_1 nu a căzut pe direcția $\Delta\,(i) \parallel IS_5$, se mai construiește încă un poligon $(g_2, l_2, k_2, j_2, i_2)$ alegînd pe $\Delta\,(g)$ un alt punct g_2, și se găsește vîrful i_2 care împreună cu i_1 dau direcția pe care se va găsi adevărata poziție a lui i.

La intersecția celor două locuri geometrice $\Delta\,(i_1, i_2)$ și $\Delta\,(i)$ se găsește punctul i vîrful vitezei punctului I.

Se construiește, pornind din i adevăratul poligon (i, j, k, l, g) cu toate vîrfurile pe direcțiile respective: $\Delta\,(i)$, $\Delta\,(j)$, $\Delta\,(k)$, $\Delta\,(l)$ și $\Delta\,(g)$.

Viteza punctului H se găsește prin asemănare.

Distribuția de viteze a grupei assurice de clasa a V-a ordinul 3 este dată de vitezele:

$$\overline{V_G}| = k_v\,\overline{(P_v g)} = \frac{1}{2,5}\cdot 46 \quad = 18,4\ \mathrm{ms}^{-1}$$

$$\overline{V_H}| = k_v\,\overline{(P_v h)} = \frac{1}{2,5}\cdot 35,5 = 14,2\ \mathrm{ms}^{-1}$$

$$\overline{V_I}| = k_v\,\overline{(P_v i)} = \frac{1}{2,5}\cdot 60,5 = 24,2\ \mathrm{ms}^{-1}$$

$$\overline{V_J}| = k_v\,\overline{(P_v j)} = \frac{1}{2,5}\cdot 40 \quad = 16\ \mathrm{ms}^{-1}$$

$$\overline{V_K}| = k_v\,\overline{(P_v k)} = \frac{1}{2,5}\cdot 25 \quad = 10\ \mathrm{ms}^{-1}$$

$$\overline{V_L}| = k_v\,\overline{(P_v l)} = \frac{1}{2,5}\cdot 23 \quad = 9,2\ \mathrm{ms}^{-1}$$

Determinarea accelerațiilor (fig. 1.1 *c*)

Accelerația $\bar{a}_A$ a punctului A este:

$$a_A = \omega_1^2 \cdot OA = 24^2 \cdot 0,5 = 288\ \mathrm{ms}^{-2}$$

Alegînd scara $k_a' = 20 \left[\frac{\mathrm{ms}^{-2}}{\mathrm{mm}}\right]$ în planul accelerațiilor rotit cu 180° se construiește vectorul $\overline{P_v a'}$ de mărime:

$$(P_v a') = \frac{a_A}{k_a'} = \frac{288}{20} = 14,4\ \mathrm{mm}.$$

Se găsește apoi $\bar{a}_B$ construind grafic ecuația:

$$\bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}_B^n}} + \underline{\bar{a}_B^t} = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BA}^n}} + \underline{\bar{a}_{BA}^t}$$

unde:

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{AB} = \frac{k_v^2(\overline{ab})^2}{k_l\,(\overline{AB})} = \frac{\frac{1}{6,25}\cdot 21,5^2}{\frac{1}{50}\cdot 45} = 83\ \mathrm{ms}^{-2} \qquad \begin{matrix}(\parallel AB \longrightarrow B)\\ \text{(rotită cu 180°)}\end{matrix}$$

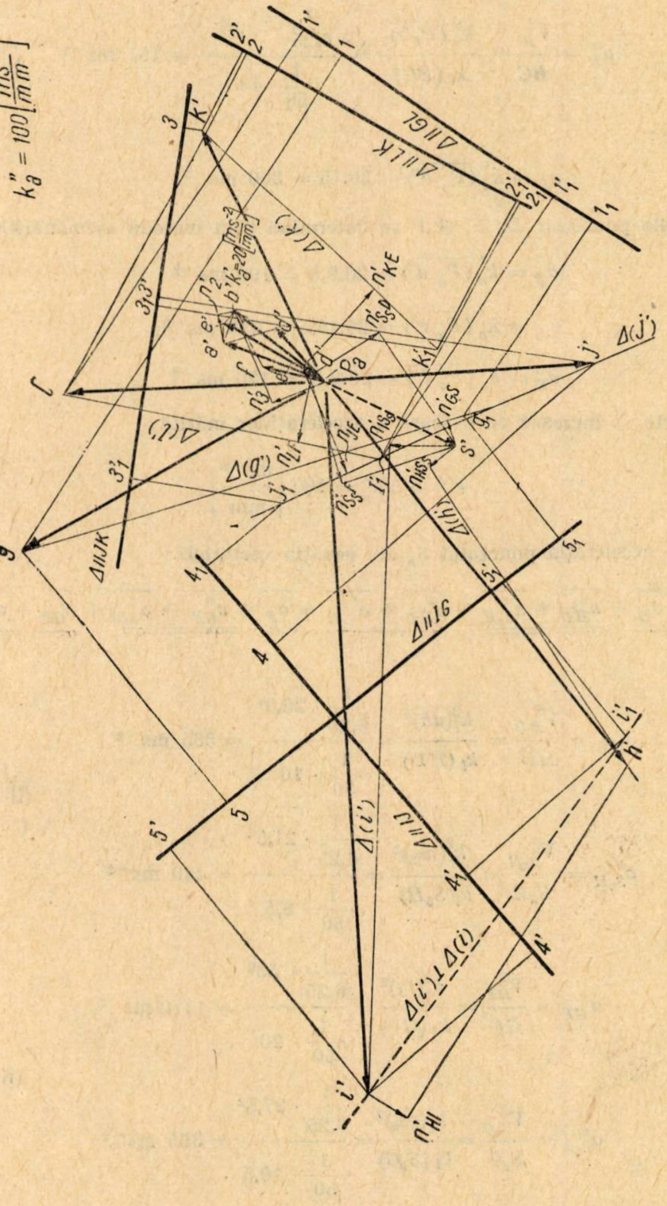

k''_a = 100 [ms^-2/mm]
k'_a = 20 [ms^-2/mm]
Δ∥GL
Δ∥LK
Δ∥JK
Δ∥IG
Δ∥IJ
Δ(k')
Δ(l')
Δ(g')
Δ(h')
Δ(j')
Δ(i')
Δ(i')⊥Δ(i)
1
1'
1₁
1'₁
2
2'
2₁
2'₁
3
3₁3'
3'₁
4
4'
4₁
4'₁
5
5'
5₁
5'₁
k'
k'₁
l'
g'
j'
j'₁
h'
i'
i'₁
s'
g'₁
a' e'
b'
c'
d'
f'
p_a
n'_2
n'_3
n'_KE
n'_SB
n'_GS
n'_ISB
n'_IE
n'_SG
n'_ISS
n'_HI

Fig. 1.1 c

$$\text{în plan}: (\overline{a'n_2'}) = \frac{a^n_{BA}}{k_a'} = \frac{83}{20} = 4{,}2 \text{ mm}$$

$$a^n_B = \frac{V_B^2}{BC} = \frac{k_v^2\,(\overline{P_v b})}{k_l\,(BC)} = \frac{\frac{1}{6{,}25}\cdot 27{,}5^2}{\frac{1}{50}\cdot 40} = 151 \text{ ms}^{-2} \qquad (\| BC \longrightarrow B).$$

Se găsește:

$$a_B = k_a'\,(\overline{P_a\, b'}) = 20.15 = 300 \text{ ms}^{-2}.$$

Accelerațiile punctelor D, E, și F se determină prin metoda asemănării:

$$a_D = k_a'\,(\overline{P_a\, d'}) = 20.9{,}5 = 190 \text{ ms}^{-2}$$

$$a_E = k_a'\,(\overline{P_a\, e'}) = 20.15{,}5 = 310 \text{ ms}^{-2}$$

$$a_F = k_a'\,(\overline{P_a\, f'}) = 20.8{,}5 = 170 \text{ ms}^{-2}$$

Mai departe se lucrează cu o scară a accelerațiilor mărită:

$$k_a'' = 5\,k_a' = 100 \left[\frac{\text{ms}^{-2}}{\text{mm}}\right].$$

Se găsește accelerația punctului S_5 din ecuația vectorială:

$$\overline{a_{S_5}} = \underline{\underline{\overline{a_D}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{HD}} + \overline{a^n_{S_5H}}}} + \underline{\overline{a^t_{HD}} + \overline{a^t_{S_5H}}} = \underline{\underline{\overline{a_F}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{GF}} + \overline{a^n_{S_5G}}}} + \underline{\overline{a^t_{GF}} + \overline{a^t_{S_5G}}}$$

unde:

$$a^n_{HD} = \frac{V^2_{HD}}{HD} = \frac{k_v^2\overline{(dh)}^2}{k_l\,(HD)} = \frac{\frac{1}{6{,}25}\cdot 26{,}5^2}{\frac{1}{50}\cdot 10} = 565 \text{ ms}^{-2}$$

$(\| S_5D \longrightarrow S_5)$
(rotită cu 180°)

$$a^n_{S_5H} = \frac{V^2_{S_5H}}{S_5H} = \frac{k_v^2(hs_5)^2}{k_l(S_5H)} = \frac{\frac{1}{6{,}25}\cdot 21{,}5^2}{\frac{1}{50}\cdot 8{,}5} = 440 \text{ ms}^{-2}$$

$$a^n_{GF} = \frac{V^2_{GF}}{GF} = \frac{k_v^2(fg)^2}{k_l\,(GF)} = \frac{\frac{1}{6{,}25}\cdot 53^2}{\frac{1}{50}\cdot 20} = 1110 \text{ ms}^{-2}$$

$(\| S_5F \longrightarrow S_5)$

$$a^n_{S_5G} = \frac{V^2_{S_5G}}{S_5G} = \frac{k_v^2(gs_5)^2}{k_l\,(S_5G)} = \frac{\frac{1}{6{,}25}\cdot 27{,}5^2}{\frac{1}{50}\cdot 10{,}5} = 355 \text{ ms}^{-2}$$

Măsurînd (P_{as_5}) se calculează:

$$a_{s_5} = k_a''\,(\overline{P_a s_5'}) = 100\,.\,19{,}5 = 1950 \text{ ms}^{-2}$$

În punctul s_5' se construieşte vectorul $\overline{s_5' \, n'_{GS_5}}$ de mărime :

$$\overline{(s_5' n'_{GS_5})} = \frac{a^n_{GS_5}}{k_a''} = \frac{a^n_{S_5G}}{k_a''} = \frac{355}{100} = 3{,}55 \text{ mm},$$

iar prin vîrful acestuia se duce direcţia Δ (g′) pe care se va găsi vîrful acceleraţiei punctului *G*.

Se calculează acceleraţiile normale :

$$a^n_{LF} = \frac{V^2_{LF}}{LF} = \frac{k_v^2 (fl)^2}{k_l (LF)} = \frac{\frac{1}{6{,}25} \cdot 36^2}{\frac{1}{50} \cdot 12{,}5} = 785 \text{ ms}^{-2} \qquad (\parallel \text{LF} \longrightarrow \text{L})$$

$$a^n_{KE} = \frac{V^2_{KE}}{KE} = \frac{k_v^2 (ek)^2}{k_l (KG)} = \frac{\frac{1}{6{,}25} \cdot 36^2}{\frac{1}{50} \cdot 7{,}5} = 1300 \text{ ms}^{-2} \qquad (\parallel \text{KE} \longrightarrow \text{K})$$

$$a^n_{IS_5} = \frac{V^2_{IS_5}}{IS_5} = \frac{k_v^2 (s_5 i)^2}{k_l (IS_5)} = \frac{\frac{1}{6{,}25} \cdot 41{,}5^2}{\frac{1}{50} \cdot 15} = 950 \text{ ms}^{-2} \qquad (\parallel \text{IS}_5 \longrightarrow \text{I})$$

$$a^n_{JE} = \frac{V^2_{JE}}{JE} = \frac{k_v^2 (ej)^2}{k_l (JE)} = \frac{\frac{1}{6{,}25} \cdot 38{,}5^2}{\frac{1}{50} \cdot 7{,}5} = 1\,500 \text{ ms}^{-2} \qquad (\parallel \text{JE} \longrightarrow \text{J})$$

$$a^n_{HS_5} = \frac{V^2_{HS_5}}{HS_5} = \frac{k_v^2 (s_5 h)^2}{k_l (HS_5)} = \frac{\frac{1}{6{,}25} \cdot 21{,}5^2}{\frac{1}{50} \cdot 8{,}5} = 440 \text{ ms}^{-2} \qquad (\parallel \text{HS}_5 \longrightarrow \text{H})$$

şi se construiesc în planul acceleraţiilor la scara $k_a'' = 100 \left[\frac{\text{ms}^{-2}}{\text{mm}}\right]$.

În vîrfurile acestor acceleraţii normale se duc direcţiile Δ (*l*′), Δ (*k*′), Δ (*j*′), Δ (*i*′), şi Δ (*h*′) pe care se vor găsi vîrfurile acceleraţiilor punctelor respective.

Se construiesc apoi dreptele $\Delta_{GL} \parallel$ GL, $\Delta_{LK} \parallel$ LK, $\Delta_{JK} \parallel$ JK, $\Delta_{IJ} \parallel$ IJ şi $\Delta_{IG} \parallel$ IG într-un mod convenabil în plan.

Se alege apoi pe direcţia Δ(*g*′) un punct g_1', de unde se construieşte $g_1' \, 1_1 \perp \Delta_{GL}$; pe Δ_{GL} se măsoară :

$$\overline{(1_1 1_1')} = \frac{\overline{a^n_{LG}}}{k_a''} = \frac{k_v^2 (\overline{gl})^2}{k_a'' k_l (LG)} = \frac{\frac{1}{6{,}25} \cdot 28^2}{100 \frac{1}{50} \cdot 10} = 6 \text{ mm} \qquad (\parallel \text{LG} \longrightarrow \text{L})$$

Din $1_1'$ se ridică $1_1' \, l_1 \perp \Delta_{GL}$ pînă la intersecţia cu Δ (*l*′) ; se coboară apoi $1_1' \, 2_1 \perp \Delta_{LK}$ pe care se măsoară :

$$\overline{(2_1 2_1')} = \frac{a^n_{KL}}{k_a''} = \frac{k_v^2 (\overline{2k})^2}{k_a'' \, k_l \, (\overline{LK})} = \frac{\frac{1}{6{,}25} \times 3{,}5^2}{100 \cdot \frac{1}{50} \cdot 7{,}5} = 0{,}13 \text{ mm} \qquad (\parallel \text{KL} \longrightarrow \text{K})$$

Din punctul k_1'—intersecţia perpendicularei ridicată în $2_1'$ pe Δ_{LK} cu Δ (k') se coboară perpendiculara k_1' 3_1 pe Δ_{JK}, pe care se măsoară :

$$\overline{(3_1 3_1')} = \frac{\overline{a^n_{JK}}}{k_a''} = \frac{k_v^2\,(\overline{kj})^2}{k_a''\,k_l(KJ)} = \frac{\frac{1}{6,25}\cdot 62,5^2}{100\,\frac{1}{50}\cdot 13,5} = 23 \text{ mm} \qquad (\parallel JK \longrightarrow J).$$

Perpendiculara în $3_1'$ pe Δ_{JK} întîlneşte direcţia $\Delta\,(j')$ în punctul j_1' de unde se coboară o perpendiculară pe Δ_{IJ} punctul de intersecţie fiind 4_1 de unde se măsoară pe Δ_{IJ} mărimea :

$$\overline{(4_1 4_1')} = \frac{\overline{a^n_{IJ}}}{k_a''} = \frac{k_v^2\,\overline{(ji)}^2}{k_a''\,k_l\,(JI)} = \frac{\frac{1}{6,25}\cdot 67,5^2}{100\cdot\frac{1}{50}\cdot 7} = 52,5 \text{ mm} \qquad (\parallel IJ \longrightarrow I).$$

Din g_1' se coboară perpendiculara g_1' 5_1 pe Δ_{IG} pe care se măsoară :

$$\overline{(5_1 5_1')} = \frac{\overline{a^n_{IG}}}{k_a''} = \frac{k_v^2\,\overline{(gi)}^2}{k_a''\,k_l\,(GI)} = \frac{\frac{1}{6,25}\cdot 42^2}{100\cdot\frac{1}{50}\cdot 15} = 9,5 \text{ mm} \qquad (\parallel IG \longrightarrow I).$$

Perpendiculara ridicată în $5_1'$ pe Δ_{IG} întîlneşte perpendiculara ridicată în $4_1'$ pe Δ_{IJ} în punctul i_1' prin care ducem direcţia :

$$\Delta\,(i_1') \perp \Delta\,(i_1 i_2)$$

la intersecţia căreia cu $\Delta\,(i')$ se găseşte punctul i' şi deci şi mărimea la scara k_a'' a acceleraţiei punctului I.

Pornind înapoi se găsesc şi acceleraţiile celorlalte puncte J, K, L şi G.

Apoi acceleraţia lui H se găseşte construind ecuaţia :

$$\overline{a_H} = \underline{\underline{\overline{a_{S_5}}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{HS_5}}}} + \underline{\overline{a^t_{HS_5}}} = \underline{\underline{\overline{a_I}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{HI}}}} + \underline{\overline{a^t_{HI}}}$$

unde :

$$a^n_{HI} = \frac{V^2_{HI}}{HI} = \frac{k_v^2\,(ih)^2}{k_l\,(HI)} = \frac{\frac{1}{6,25}\cdot 26,5^2}{\frac{1}{50}\cdot 10} = 600 \text{ ms}^{-2} \qquad (\parallel HI \longrightarrow H)$$

$$\text{la scară } (i\,n'_{HI}) = \frac{a^n_{HI}}{k_a''} = \frac{600}{100} = 6 \text{ mm.}$$

Distribuţia de acceleraţii în planul grupei assurice de clasa a V-a ord. 3 este dată de acceleraţiile punctelor G, H, I, J, K şi L:

$$\overline{a_G} = k''_a\,\overline{(P_a\,g')} = 100 \cdot 45{,}5 = 4\,550\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$\overline{a_H} = k''_a\,\overline{(P_a\,h')} = 100 \cdot 64 = 6\,400\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$\overline{a_I} = k''_a\,\overline{(P_a\,i')} = 100 \cdot 93{,}5 = 9\,350\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$\overline{a_J} = k''_a\,\overline{(P_a\,j')} = 100 \cdot 35{,}5 = 3\,550\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$\overline{a_K} = k''_a\,\overline{(P_a\,k')} = 100 \cdot 37 = 3\,700\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$\overline{a_L} = k''_a\,\overline{(P_a\,l')} = 100 \cdot 34{,}5 = 3\,450\ \mathrm{ms}^{-2}.$$

ANEXA NR. 2

DETERMINAREA DISTRIBUŢIILOR VITEZELOR ŞI ACCELERAŢIILOR PRIN METODA SCHIMBĂRII ELEMENTULUI CONDUCĂTOR

Schimbarea elementului conducător, micşorînd clasa mecanismului, simplifică în multe cazuri calculul cinematic al mecanismelor.

Acad. I.I. Artobolevski indică în articolul citat [3] p. 287—288, fig. 5 şi 7 *a*) şi *b*) calculul care reduce clasa mecanismului de cl. a V-a ord. 3 la un mecanism de cl. a III-a ord. 3 folosind punctele particulare ale lui Aassur.

După cum se ştie determinarea distribuţiei de viteze nu comportă absolut nici o dificultate, deoarece pentru aceeaşi poziţie a mecanismului planele vitezelor construite pentru diferite valori ale vitezei elementului iniţial sînt asemenea.

Construirea planului acceleraţiilor a făcut însă obiectul a diferite studii în vederea simplificării construcţiilor suplimentare.

În adevăr avîndu-se distribuţia de viteze sînt cunoscute în mărime direcţie şi sens toate acceleraţiile centripete relative deoarece acestea depind numai de viteza unghiulară şi raza de curbură relativă a traiectoriei punctului în momentul considerat, a cărei mărime depinde de elementele geometrice ale mecanismului.

Autorii au luat ca exemplu un mecanism de clasa a V-a ord. 3 din fig. 2 1-a care este format din grupa de clasa a V-a ord. 3 legată prin cuplele D şi G la bază şi prin A de elementul conducător (iniţial).

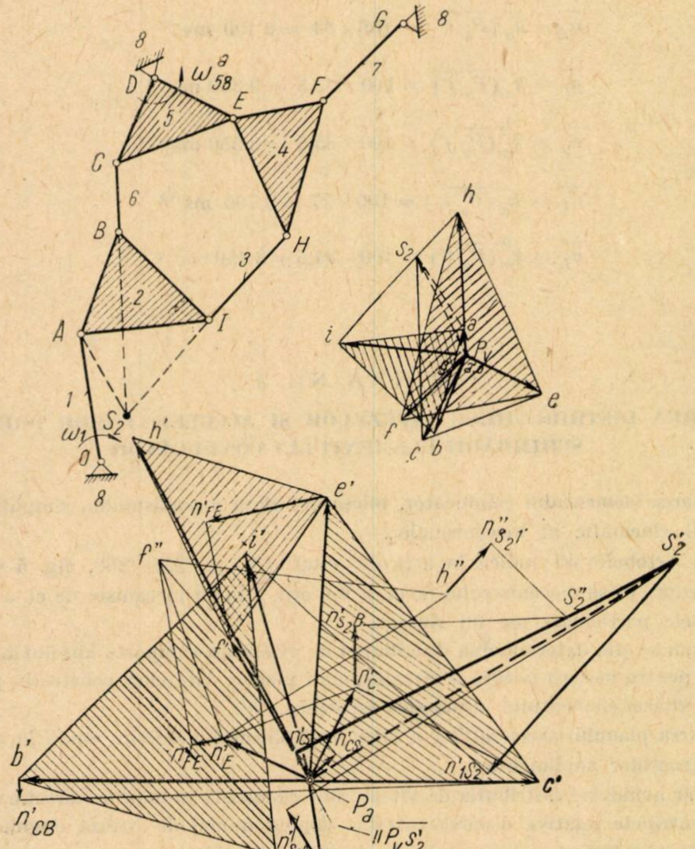
Acest mecanism a fost ales astfel ca să se poată face comparaţii cu metodele similare propuse de alţi autori.

§ 2.1. DETERMINAREA VITEZELOR

Dacă în loc de 1 se ia ca element conducător elementul 5 căruia i se dă o viteză unghiulară arbitrară ω_{58}^{a} (sau pe scurt ω_5^a) atunci mecanismul devine de clasa a III-a ord. 3 compus din grupa de clasa a III-a ord. 3 (triada 1, 2, 3, 6) şi grupa de clasă a II-a ord. 2 (diada 4, 7).

Se construiește *planul vitezelor rabătute* (fig. 2 1 *b*) pornind de la vitezele $\overline{v^a_C} = \overline{\omega_5^{a}} \times \overline{DC}$ și $\overline{v^a_E} = \overline{\omega_5^{a}} \times \overline{DE}$ se obține în final

$$\overline{v_A}^{|} = k_v\,(\overline{P_v a}) \tag{1}$$



G
8
8
D
ω
a
58
E
F
7
5
4
C
6
h
B
H
s₂
3
2
a
i
P
e
A
I
1
S₂
f
c
b
ω₁
h'
0
8
e'
n'FE
n''S₂1
i'
S₂'
f''
h''
S₂''
n'S₂B
f'
n'C
n'C
n'CS
n'FE
n'E
n'1S₂
b'
c'
n'CB
Pa
n'S₂A
∥PvS₂'
a'
n'1A
n'1

Fig. 2. 1 *a*, *b*, *c*

În expresia (1) sînt cunoscute atît $\overline{v_A}^{|}$ deoarece este viteza dată a elementului conducător cum și $\overline{(P_v a)}$ în mm.

De aici rezultă :

$$k_v = \frac{v_A}{(P_v a)} \tag{2}$$

Cu ajutorul scării k_v se poate afla viteza oricărui punct din planul oricărui element al mecanismului.

Astfel $\overline{v_E}^{|} = k_v\,(\overline{P_v e})$ etc.

§ 2.2. METODA DE CONSTRUIRE A PLANULUI ACCELERAŢIILOR PROPUSĂ DE AUTORI (fig. 2. 1 *c*)

Cu ajutorul lui ω_5 determinat ca la toate metodele expuse mai sus se calculează $a_C^n = \omega_5^2\,\overline{DE}$ şi $a'_C = a_C^n = \omega_5^2 \cdot \overline{DC}$ şi apoi se construieşte planul acceleraţiilor după cum urmează :

Cu ajutorul ecuaţiei vectoriale :

$$\overline{a'_F} = \underline{\underline{\overline{a_{FG}^n}}} + \underline{\overline{a_F^{t'}}} = \underline{\underline{\overline{a_E^n}}} + \underline{\underline{\overline{a_{FE}^n}}} + \underline{\overline{a_{FE}^{t'}}}$$

construită în planul acceleraţiilor la scara k_a se determină

$$a'_F = k_a\,(\overline{P_a f''}).$$

Prin metoda asemănării se determină $\overline{a'_H}$

$$\text{tr}\,(EFH) \sim \text{tr}\,(e''f''h'').$$

Cu acceleraţiile $\overline{a'_C}$ şi $\overline{a'_H}$ se determină acceleraţiile $\overline{a'_{S_2}}$ a punctului particular S_2 din ecuaţia vectorială :

$$\overline{a'_{S_2}} = \underline{\underline{\overline{a'_C}}} + \underline{\underline{\overline{a_{BC}^n} + \overline{a_{S_2B}^n}}} + \underline{\overline{a_{BC}^{t'}} + \overline{a'_{S_2B}}} = \underline{\underline{\overline{a'_H}}} + \underline{\underline{\overline{a_{IH}^n} + \overline{a_{S_2I}^n}}} + \underline{\overline{a_{IH}^{t'}} + \overline{a_{S_2I}^{t'}}}$$

se obţine :

$$a'_{S_2} = k_a\,(\overline{P_a s''_2}) = \underline{\underline{\overline{a_{S_2}^n}}} + \underline{\underline{\overline{a_{S_2}^{'t}}}} \quad \text{sau din plan} \quad k_a\,(\overline{P_a s''_2}) = k_a(\overline{P_a n'_{S_2}}) + k_a\,(\overline{n'_{S_2}\; s''_2}) \qquad (3)$$

unde $(P_a n'_{S_2})$ este segmentul care reprezintă la scara k_a acceleraţia centripetă a punctului particular S_2. Vîrful s'_2 al accelaraţiei a_{S_2} se află deci pe dreapta $\overline{n'_{S_2}\; s''_2}$.

S-a ajuns astfel pe drumul cel mai scurt la ultimul punct din planul mecanismului care se poate lega prin ecuaţie vectorială de acceleraţia $\overline{a_A}$ de pe elementul conducător 1 (care prin datele problemei are $\varepsilon_1 = 0$).

Acum se poate scrie ecuaţia vectorială :

$$\underline{\underline{\overline{a_{S_2}^n}}} + \underline{\overline{a_{S_2}^t}} = \underline{\underline{\overline{a_A}}} + \underline{\underline{\overline{a_{S_2A}^n}}} + \underline{\overline{a_{S_2A}^t}} \qquad (4)$$

sau în planul acceleraţiilor :

$$\underline{\underline{\overline{(P_a n'_{S_2})}}} + \underline{\overline{(n'_{S_2}\; s'_2)}} = \underline{\underline{(P_a a')}} + \underline{\underline{\overline{(a'\, n'_{S_2A})}}} + \underline{\overline{(n'_{S_2A}\; s'_2)}}\,.$$

Intersecţia perpendicularei duse din n'_{S_2A} la direcţia AS_2 cu paralela dusă din n'_{S_2} (vîrful acceleraţiei centripete a lui S_2) la viteza $\overline{v_S}$ determină vîrful s'_2 al acceleraţiei punctului S_2.

Cu $\overline{a_{S_2}} = k_a\,(\overline{P_a s'_2})$ şi $\overline{a_A^n} = k_a\,(\overline{P_a a'})$.

se determină :

$$\overline{a_I} = k_a\,(\overline{P_a i'}).$$

Prin metoda asemănării tr AIB ∼ tr (a′i′b′) se determină

$$\overline{a_B} = k_a\,(\overline{P_a b'}).$$

Din ecuaţia :

$$\overline{a_C} = \underline{\underline{\overline{a^n_C}}} + \underline{\overline{a^t_C}} = \underline{\underline{\overline{a^n_{CB}}}} + \underline{\overline{a^t_{CB}}}$$

se determină

$$\overline{a_C} = k_a(\overline{P_a c'}).$$

şi prin asemănare :

$$\overline{a_E} = k_a\,(\overline{P_a e'}).$$

Din ecuaţia :

$$\overline{a_F} = \underline{\underline{\overline{a^n_{FG}}}} + \underline{\overline{a^t_{FG}}} = \underline{\underline{\overline{a_E}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{FE}}}} + \underline{\overline{a^t_{FE}}}$$

se găseşte

$$\overline{a_F} = k_a\,(\overline{p_a f'})$$

după care prin asemănare rezultă :

$$\overline{a_H} = k_a(\overline{P_a h'}).$$

Verificarea construcţiei se face cu ajutorul ecuaţiei vectoriale.

$$\underline{\underline{\overline{a_I}}} = \underline{\underline{\overline{a_H}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{IH}}}} + \underline{\overline{a^t_{IH}}} \tag{5}$$

adică perpendiculara dusă din n'_{IH} (vîrful lui a^n_{IH}) la *IH* trebuie să treacă prin i' (vîrful lui $\overline{a_I}$). Construcţia nu este făcută pe fig. 2.1*c*.

Metoda expusă mai sus are avantajul că nu construieşte întreg planul acceleraţiilor cu $\varepsilon_5 = 0$ ci porneşte construcţia directă a planului acceleraţiilor după ce a determinat acceleraţia centripetă a punctului particular S_2, pe aceeaşi figură.

Metoda are avantajul că obţine pe o singură figură toate distribuţiile de acceleraţii *la scara k_a aleasă iniţial,* fără a mai fi nevoie să se determine segmentele acceleraţiilor tangenţiale folosind segmentele corespunzătoare din planul vitezelor, nici cu ajutorul scării combinate.

O aplicaţie făcută în cazul mecanismului seping de cl. a III-a ord. 3 fig. 2.2a transformat în cl. a II-a ord. 2 prin alegerea ca element conducător a saniei portcuţit ilustrează metoda propusă.

Din planul vitezelor construit fig. (2.2 *b*) pornind de la $\overline{V_D} = k_v\,(\overline{P_v d})$. aleasă arbitrar s-a determinat scara vitezelor din relaţia :

$$k_v = \frac{V_{A_2}}{(P_a a_2)}\,.$$

Pentru acceleraţii se alege (fig. 2.2*c*).

$$\overline{a'_D} = k_a\,(\overline{P_v d''})$$

şi se construieşte ecuaţia vectorială :

$$\overline{a'_B} = \underline{\underline{\overline{a^n_B}}} + \underline{\overline{a'^t_B}} = \underline{\underline{\overline{a'_D}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{BD}}}} + \underline{\overline{a'^t_{BD}}}$$

unde :

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{BC} = \frac{k_v^2}{k_l}\,\frac{(\overline{P_v\, b})^2}{(BC)}$$

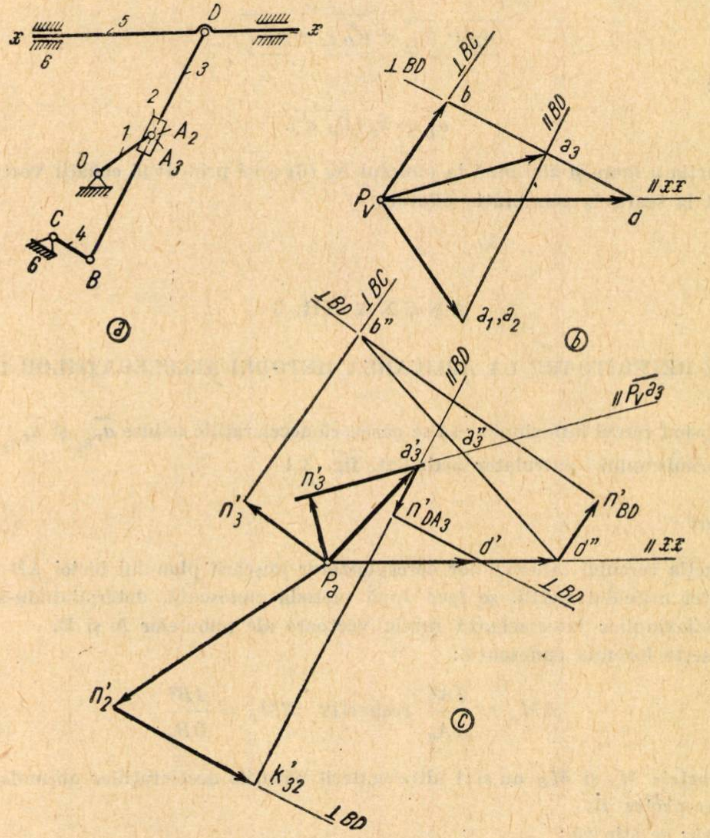
$$a_{BD}^n = \frac{v_{BD}^2}{BD} = \frac{k_v^2}{k_l}\,\frac{(\overline{db})^2}{(BD)}$$

se determină :

$$\overline{a'_B} = k_a\,(\overline{P_a\, b''}).$$

Prin metoda asemănării rezultă :

$$\overline{a'_{A_3}} = k_a\,(\overline{P_a\, a_3''}) = \underline{\underline{\overline{a'^{n}_{A_3}}}} + \overline{a'^{t}_{A_2}} \qquad (6)$$



x
5
D
x
6
3
2
1
A2
0
A3
C
4
6
B
a
⊥BD
⊥BC
b
//BD
a3
Pv
//xx
d
a1,a2
b
⊥BD
⊥BC
b"
//BD
//Pva3
a3"
a3'
n3'
n3'
n'DA3
n'BD
d'
d"
//xx
Pa
⊥BD
n2'
c
k32'
⊥BD

Fig. 2.2 *a*, *b*. *c*.

Din P_a se duce ⊥ $\overline{v_{A_3}}$ şi din a_3'' || v_{A_3}.

Acestea se intersectează în n_3' de unde rezultă :

$$n^n_{A_3} = k_a\,(\overline{P_a\, n_3'}).$$

Vîrful a_3' al accelerației $\overline{a_{A_3}}$ a punctului A_3 se va afla deci pe $\overline{n_3' a_3''}$.

Se scrie acum ecuația vectorială :

$$\overline{a_{A_3}} = \underline{\underline{\overline{a^n_{A_3}}}} + \underline{\overline{a^t_{A_3}}} = \underline{\underline{\overline{a_{A_2}}}} + \underline{\underline{\overline{a^c_{A_{32}}}}} + \underline{\overline{a^r_{A_{32}}}} \tag{7}$$

unde :

$$a^n_{A_2} = k_a(\overline{P_a a_2'})\,;\ \overline{a^c_{A_{32}}} = k_a(\overline{a_2' k_{32}'}).$$

Intersecția paralelei duse din k_{32}' la $\overline{BD}$ cu $\overline{n_3' a_3''}$ determină pe a_3' vîrful accelerației $\overline{a_{A_3}}$

$$\overline{a}_{A_3} = k_a(\overline{P_a a_3'}).$$

Din ecuația vectorială :

$$\underline{\overline{a_D}} = \underline{\underline{\overline{a_{A_3}}}} + \underline{\underline{\overline{a^n_{DA_3}}}} + \underline{\overline{a^t_{DA_3}}} \tag{8}$$

se determină :

$$\overline{a_D} = k_a(\overline{P_a d'}).$$

Construcția a mers și aici pînă la punctul A_3 (6) apoi prin două ecuații vectoriale (7,8) s-a determinat la scara k_a accelerația căutată.

ANEXA NR. 3

PROBLEME REFERITOARE LA APLICAREA METODEI ACCELERAȚIILOR REDUSE

1°. Folosind cercul inflexiunilor să se găsească accelerațiile reduse $\overline{a}_{r_{B_2}}$ și $\overline{a}_{r_{B_2}}$ ale articulației B a mecanismului patrulater articulat. fig. 3.1

Rezolvare

Construcția cercului inflexiunilor corespunzător mișcării planului bielei AB a mecanismului patrulater articulat OABC se face după metoda cunoscută, determinîndu-se punctele unde cercul inflexiunilor intersectează razele vectoare ale punctelor A și B.

Se folosește formula cunoscută :

$$AM_A = \frac{IA^2}{AA_0} \text{ respectiv } BM_B = \frac{IB^2}{BB_0}$$

Dar punctele M_A și M_B nu sînt altceva decît vîrfurile accelerațiilor normale reduse ale punctelor A respectiv B.

În adevăr se știe că :

$$a^n_A = \frac{V^2_A}{A_0A} = \frac{\omega^2_2\, IA^2}{AA_0} \text{ de unde :}$$

$$\frac{a^n_A}{\omega^2_2} = a^n_{rA} = \frac{IA^2}{AA_0} \text{ deci tocmai } \mathrm{AM}_A$$

la fel:

$$a^n_{rB} = \frac{IB^2}{BB_0} = Bn''_{rB_2}.$$

Determinarea accelerației reduse $\overline{a}_{rB_2} = \overline{BB''_{r_2}}$.

Vîrful B''_{r_2} se găsește:

— pe direcția $A''_{r_2}\ \alpha \perp AB$ și

— pe $n''_{rB_2}\ \beta \perp BC$

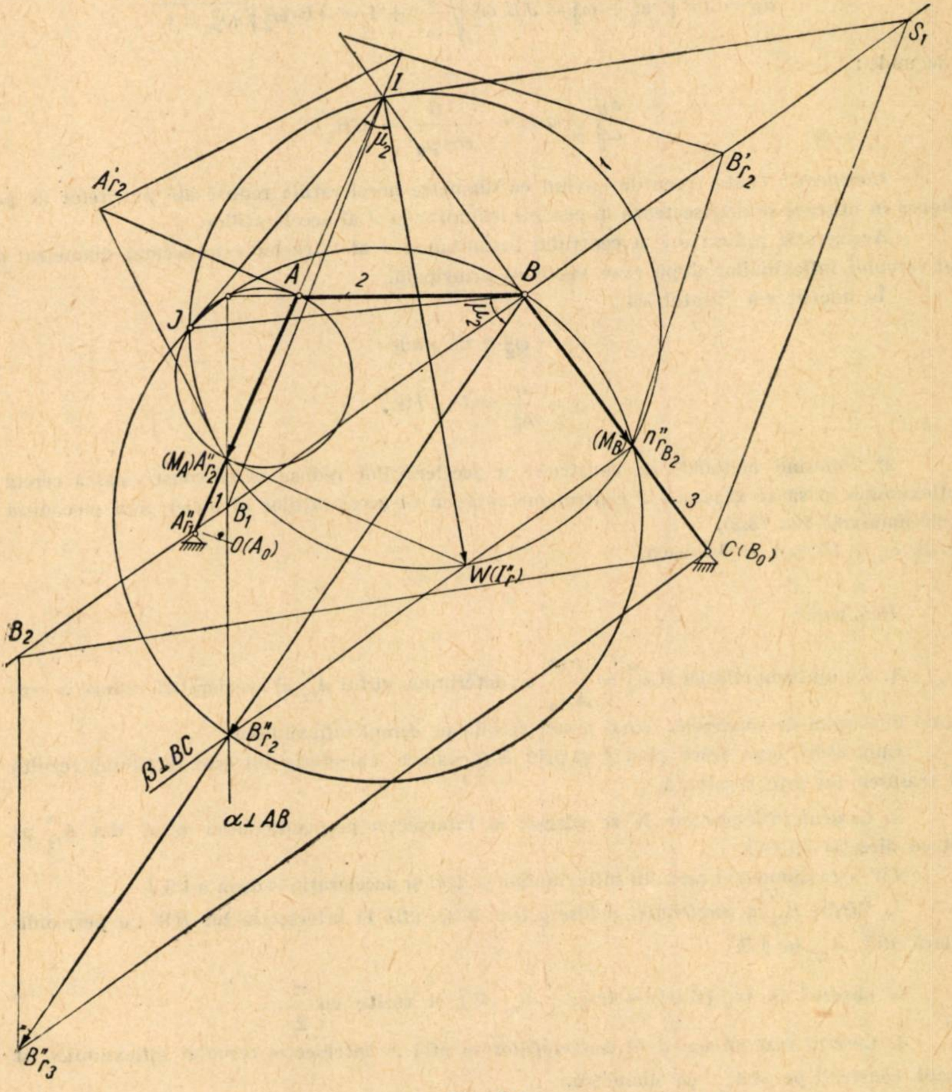

S_1
I
μ_2
B'_{r_2}
A'_{r_2}
A
2
B
μ_2
J
$(M_A)A''_{r_2}$
1
B_1
A''_r
$O(A_0)$
$(M_B)\ n''_{rB_2}$
3
$C(B_0)$
$W(\Gamma''_r)$
B_2
B''_{r_2}
$\beta \perp BC$
$\alpha \perp AB$
B''_{r_3}

Fig. 3.1

Accelerația redusă $\overline{a}_{rB_3} = \overline{BB}''_{r_3}$ rezultă la intersecția perpendicularei din $C\,(B_0)$ la BC cu BB''_{r_2}.

Construcția generală conduce la același rezultat: perpendiculara din B_2 la BC trece prin B''_{r_3}.

Centrul instantaneu J al accelerațiilor se află la intersecția cercului inflexiunilor cu cercurile construite pe AA''_{r_2} și BB''_{r_2} ca diametre.

În adevăr se știe că:

$$a_B = JB\sqrt{\varepsilon_2^2 + \omega_2^4} = JB\,\omega_2^2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\omega^4} + 1} = JB\cdot\omega_2^2\sqrt{tg^2_{\mu_2} + 1}$$

de unde:

$$\frac{a_B}{\omega_2^2} = a_{rB_2} = \frac{JB}{\cos\mu_2} = BB''_{r_2}.$$

Concluzie: Toate cercurile avînd ca diametre accelerațiile reduse ale punctelor de pe figura în mișcare se intersectează în centrul instantaneu J al accelerațiilor.

Accelerația redusă a_{rI} a centrului instantaneu I al vitezelor este tocmai diametrul d al cercului inflexiunilor după raza vectoare principală.

În adevăr s-a arătat că:

$$a_I = \omega_2^2\cdot d \text{ de unde:}$$

$$a_{rI} = \frac{a_I}{\omega_2^2} = d = IW.$$

2°. Folosind metodele de construire a accelerațiilor reduse să se construiească cercul inflexiunilor și să se găsească J centrul instantaneu al accelerațiilor al bielei unui mecanism bielă manivelă fig. (3.2),
se dă $\omega_1 = 10$ rad. s^{-1}=const.

Rezolvare:

1. Cu ajutorul relației $AA''_{r_2} = \dfrac{IA^2}{AA_0}$ se determină vîrful A''_{r_2} al accelerației reduse a centrului butonului de manivelă. Acest punct se află pe cercul inflexiunilor.

Cum acest cerc trece prin I și prin B (deoarece traiectoria lui este rectilinie) rezultă că trasarea lui este rezolvată.

2. *Centrul inflexiunilor* W se găsește la intersecția perpendicularei dusă din A''_{r_2} pe OA cu direcția lui OB.

IW este diametrul cercului inflexiunilor și deci și accelerația redusă a lui I.

3. *Vîrful* B''_{r_2} *a accelerației reduse a lui* B se află la intersecția lui BW cu perpendiculara din A''_{r_2} la AB.

se observă că tr. $(ABI) \sim$ tr $(A''_{r_2}\,B''_{r_2}\,W)$ și rotite cu $\dfrac{\pi}{2}$.

4. *Centrul instantaneu J al accelerațiilor* se află la intersecția cercului inflexiunilor cu cercul construit pe AA''_{r_2} ca diametru.

5. *Centrul de fugă F se află la intersecţia* dreptei *WJ* cu tangenta *TT* în *I* la cercul inflexiunilor.

6. *Cercul de fugă* (sau al întoarcerilor se construieşte pe *FI* ca diametru. Acest cerc trece evident prin *A*, deoarece el are numai acceleraţie centripetă.

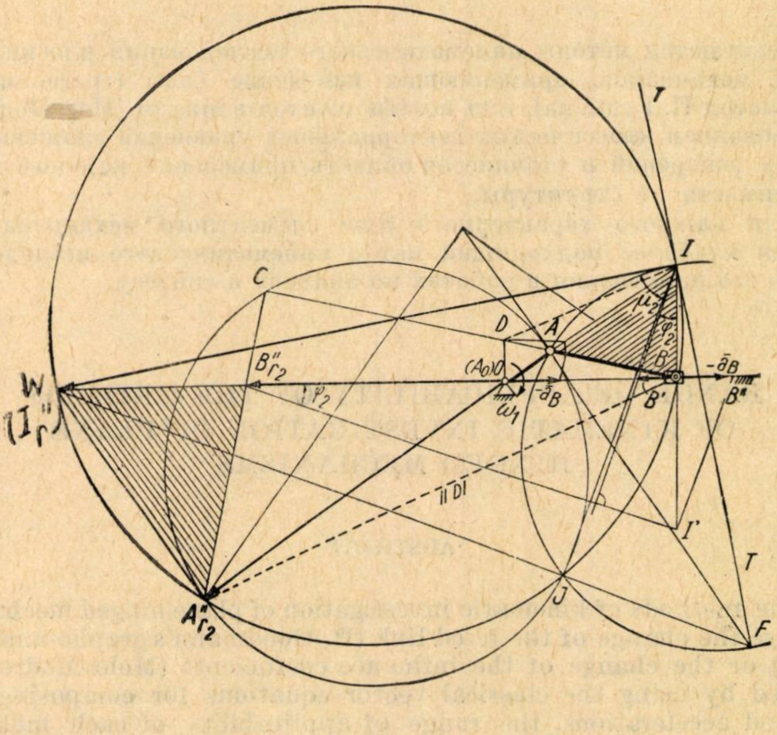


Fig. 3.2

Observaţie : Cercul inflexiunilor se putea construi şi prin găsirea punctului A''_{r_2} (M_A) cu ajutorul metodei Bobillier :

— Din O se duce perpendiculară la *OB* care taie pe *AB* în *D* ;

— Din *B* se duce apoi o paralelă la *DI* care taie pe *OA* în A''_{r_2} punct pe cercul inflexiunilor. (Construcţia este făcută pe figură cu linii întrerupte.)

Acceleraţia absolută a lui B se obţine folosind construcţia cunoscută.

Din B''_{r_2} se duce $B''_{r_2}\,I'$ care face ∡ φ_2 cu BB''_{r_2} (dreapta s-a dus perpendiculară pe *IB'* unde *B'* este vîrful lui V_B).

Perpendiculara din *I'* pe $B''_{r_2}\,I'$ taie pe *OB* în *B''*.

BB'' este acceleraţia lui *B* rotită cu 180°.

Construcţia clasică a lui $\overline{a_B}$ este făcută pe desen şi verifică prima construcţie.

Scările alese pentru viteze şi acceleraţii sînt date de relaţia :

$$k_a = k_v\,\omega_1 = k_l\,\omega_1^2 .$$

Primită la redacţie la 3 iulie 1962

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

РЕЗЮМЕ

Излагаются методы кинематического исследования плоских шарнирных механизмов, применяющих изменение базы (графо-аналитический метод П. Гудмана), или коэффициентов влияния (Мор-Модрей), с использованием классических векториальных уравнений сложения скоростей и ускорений и уточняется область применения каждого метода в зависимости от структуры.

Для каждого характерного 8-ми элементного механизма определяется наиболее подходящий метод кинематического исследования с целью его применения в работах по анализу и синтезу.

RANGE OF APPLICABILITY OF THE METHODS OF KINEMATIC INVESTIGATION OF PLANE HINGED MECHANISMS

ABSTRACT

The methods of kinematic investigation of plane hinged mechanisms which use the change of the fixed link (P. Goodmann's grapho-analytical method) or the change of the influence coefficients (Mohr-Modrey) are presented by using the classical vector equations for composing velocities and accelerations, the range of applicability of each method is shown function of the structure.

For each eight-link characteristic mechanism the most efficient kinematic method for studies of analysis and synthesis is established.

BIBLIOGRAFIE

1. L. P. Assur, *Cercetarea mecanismelor plane din bare articulate (cu cuple cinematice inferioare)*. Buletinul Institutului Politehnic din Petrograd, **XX—XXVII** 1913—1918 (citat din Teoria Mecanismelor şi a Maşinilor de L. B. Levensohn, Editura tehnică, 1951).
2. I. I. Artobolevski, *Teoria mecanismelor şi a maşinilor*. Ed. tehnică, 1955.
3. I. I. Artobolevski, *Despre chestiunea cercetării lanţurilor cinematice complexe*. Buletin Inst. Polit. Iaşi, seria nouă, **VI (X)** *1—2* (1960) 285—297.
4. N. I. Manolescu, I. Erceanu, M. Pielmuş, P. Antonescu, *Asupra distribuţiei de viteze şi acceleraţii la mecanismele plane formate din lanţuri complexe*. Bul. Inst. politehnic, Bucureşti (sub tipar).
5. D. Mangeron, C. Drăgan, Dokladî Acad. Nauk S.S.S.R., 102, 797, 798, (1955); 112 25,26 (1957); — Bul. Inst. polit. Iaşi (1955), 229; — Studii şi cercetări de mecanică aplicată a Acad. R.P.R., **9**, *1*, 50—62 (1959).

6. IA. A. ZILBERMANN, *Aplicarea metodei accelerațiilor reduse la analiza cinematică a mecanismelor plane de clasa a III-a.* Acad. R.P.R. filiala Iași. Studii și cercetări științifice, Fizică și știință tehnică, **IX**, 1, 39—56 (1958); — Trudî Rostovskova na Donu Instituta Injinerov Jeleznovo-dorojnovo transporta **XXIX**, 59—67 (1961).
7. TH. B. GOODMANN, *An indirect method for determining accelerations in complex mechanisms.* Transactions of the ASME, **81**, 1676—1682 (1958).
8. I. MODREY, *Analysis of Complex Kinematic Chains with influence coefficients.* Journal of applied mechanics June, 184—188 (1959).
9. E. BUGAEVSCKI, R. BAGDAN, C. PELECUDI, *Contribuție la clasificarea mecanismelor spațiale.* Studii și cercetări din mecanica aplicată, **VIII**, *2* (1957).
10. K. HAIN, *Analiza și sinteza mecanismelor articulate cu 8 elemente.* V. D. I. Berichte, **5**, 81—93 (1955), (Traducere în romînește I.D.T. Dosar 44 669).

SINTEZA MECANISMELOR CU CAME LA PRESCRIEREA VALORILOR ARCELOR DE CAME

DE

CHR. PELECUDI și R. C. BOGDAN

Problema, care se tratează mai jos, revine la determinarea profilului camei în condițiunea cunoașterii legii după care trebuie să varieze lungimea arcului său în raport cu deplasarea sa (unghiulară θ sau liniară x), bineînțeles luînd în considerare și restricțiile impuse de realizarea practică a mecanismelor cu came.

Utilitatea acestei probleme reiese din întrebuințarea acestor mecanisme în dispozitivele de comandă automată sau în instalațiile de calcul, în care sînt necesare reprezentarea diferitelor funcțiuni pe cale mecanică sau electrică. Întrebuințarea unor fire rezistive montate în lungul arcului camei permite obținerea unor tensiuni electrice în raport direct cu funcția construită.

Dacă funcția de realizat este $F(\theta)$ în care θ și F nu au dimensiuni, va trebui ca lungimea arcului de camă să fie dată de expresia

$$l(\theta) = L\,F(\theta), \tag{1}$$

în care L este un coeficient de proporționalitate cu dimensiunile unei lungimi. În cazul camelor de rotație θ reprezintă deplasarea unghiulară, iar pentru camele de translație se poate lua $\theta = \frac{x}{A}$ unde x este deplasarea liniară, iar A este o lungime constantă.

Ecuația (1) presupune de la început că funcția $F(\theta)$ este pozitivă, monoton crescătoare

$$F(\theta) > 0, \quad F'(\theta) > 0. \tag{2}$$

Construcția grafică a camei se obține din aproape în aproape, în conformitate cu ecuațiile cu diferențe finite obținute din (1)

$$\Delta_k l = l(\theta_k) - l(\theta_{k-1}) = L\,[F(\theta_k) - F(\theta_{k-1})], \tag{3}$$

pentru n puncte de diviziune ale intervalului $\theta_0 \div \theta_n$ în care se construieşte funcţia $F(\theta)$. În acest sens se desenează dreptele radiale pentru camele de rotaţie şi dreptele paralele pentru camele de translaţie corespunzătoare valorilor $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n$ şi între ele se construiesc cu ajutorul compasului distanţele $\Delta_k l$ determinîndu-se în felul acesta prin puncte forma camei (fig. 1). Deosebirea fundamentală între cele două came constă în faptul că distanţele dintre dreptele corespunzătoare la valorile θ_{k-1} şi θ_k cresc sau descresc în raport cu mărimea razei vectoare a camei sau rămîn constante pentru camele de translaţie. Acest lucru avantajează uneori camele de rotaţie, la care variaţiile prea mari ale lui $\Delta_k l$ poate duce la o alegere convenabilă a măririi sau micşorării razei camei.

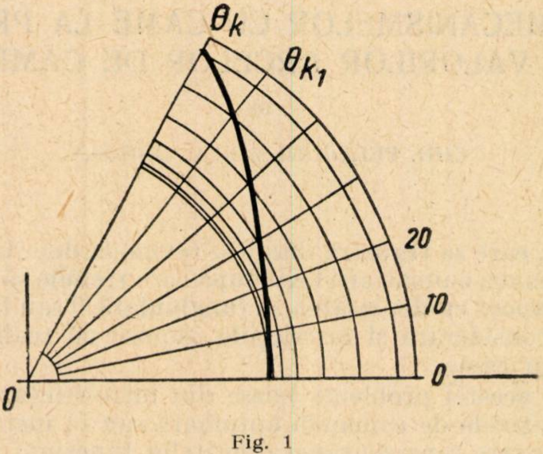


Fig. 1

Dacă se urmăreşte determinarea analitică a razei vectoare, respectiv a ordonatei camei, se întrebuinţează ecuaţiile integrale

$$l(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{\rho^2(\alpha) + \rho'^2(\alpha)}\, d\alpha = L F(\theta), \tag{4}$$

respectiv

$$l(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{A^2 + y'^2(\alpha)}\, d\alpha = L F(\theta), \tag{5}$$

care prin derivare duc la ecuaţiile diferenţiale

$$\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta) = L^2 F'^2(\theta), \tag{6}$$

$$A^2 + y'^2(\theta)\, L^2 F'^2(\theta), \tag{7}$$

şi din care se scot, în primul rînd, condiţiile

$$0 \leqslant \rho(\theta) \leqslant LF'(\theta), \qquad 0 \leqslant A < LF'(\theta), \tag{8}$$

$$-LF'(\theta) \leqslant \rho'(\theta) \leqslant +LF'(\theta),$$

$$-LF'(\theta) \leqslant y'(\theta) \leqslant +LF'(\theta). \tag{9}$$

De asemenea, din condiția ca unghiul de presiune să fie sub limita sa admisibilă α_0 se obțin

$$\frac{1}{\rho}\frac{dl}{d\theta}=\frac{\sqrt{L^2 F'^2(\theta)-\rho^2(\theta)}}{\rho(\theta)}\leqslant \operatorname{tg}\alpha_0, \tag{10}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{L^2 F'^2(\theta)-A^2}}{A}\leqslant \operatorname{tg}\alpha_0, \tag{11}$$

sau

$$0<LF'(\theta)\leqslant\frac{\rho(\theta)}{\cos\alpha_0}, \tag{12}$$

$$0<LF'(\theta)\leqslant\frac{A}{\cos\alpha_0}, \tag{13}$$

adică

$$\frac{(\theta)}{L}\leqslant F'(\theta)\leqslant\frac{\rho(\theta)}{L\cos\alpha_0}, \tag{14}$$

$$\frac{A}{L}\leqslant F'(\theta)\leqslant\frac{A}{L\cos\alpha_0}, \tag{15}$$

de unde rezultă variații reduse pentru $F'(\theta)$ astfel că $F(\theta)$ trebuie să se apropie cît mai bine de o funcție liniară, cu abateri mici de la linia dreaptă.

Punctele de extremum ale camei se obțin pentru $\rho'(\theta)=0$ sau $y(\theta)=0$, adică pentru soluțiile ecuațiilor

$$F'(\theta)=\frac{\rho(\theta)}{L}, \tag{16}$$

și

$$F'(\theta)=\frac{A}{L}. \tag{17}$$

Derivarea ecuațiilor (6) și (7):

$$\rho\rho'+\rho'\rho''=L^2F'F'', \tag{18}$$

$$y'y''=L^2F'F'', \tag{19}$$

conduce pentru punctele de maxim la

$$F''(\theta)=0, \tag{20}$$

ceea ce corespunde punctelor de inflexiune ale funcției arcului.

Tot aceste puncte $F''(\theta)=0$ mai pot corespunde și punctelor de inflexiune ale curbei camei de translație $y''=0$ dacă $y'\neq 0$. La camele de rotație situația $F''(\theta)=0$ pentru $\rho'(\theta)\neq 0$, corespunde punctelor cu concavitatea îndreptată spre pol, deoarece

$$\rho+\rho''=0 \text{ și } \rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''=2(\rho^2+\rho'^2)=2L^2F'^2(\theta)>0. \tag{21}$$

Concavitatea sau convexitatea profilului camei de translație corespunde sau este opusă cu aceea a curbei $F(\theta)$ a arcului după cum y' a fost ales pozitiv sau negativ $y'' = L^2 F' F''/y'$. Pentru camele de rotație orientarea concavității spre sau contrar polului este dată de semnul expresiei :

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = L^2 F' \, [2F' - \rho F''/\rho'] \gtrless 0, \qquad (22)$$

respectiv de cantitatea scrisă între parantezele mari, care depinde în mare măsură de raportul F''/ρ'.

Funcțiunea $F(\theta)$ nu poate avea maxime sau minime, deoarece în acest caz ar rezulta, din ecuațiile (6) și (7), următoarele :

$$\rho = \rho' = 0 \quad \text{sau} \quad A = y' = 0.$$

Construcția grafică corespunzătoare ecuațiilor (6) și (7) se face în raport cu ecuațiile cu diferențe finite :

$$\rho_k - \rho_{k-1} = \pm(\theta_k - \theta_{k-1}) \sqrt{L^2 F'^2(\theta_k) - \rho^2_{k-1}}, \qquad (23)$$

$$y_k - y_{k-1} = \pm(\theta_k - \theta_{k-1}) \sqrt{L^2 F'^2(\theta_k) - A^2}, \qquad (24)$$

alegîndu-se soluțiile optime din infinitatea de soluții corespunzătoare schimbării convenabile de semn, ceea ce însă în general duce la schimbarea, de cele mai multe ori nedorită, a curburii camei. Diferențele $\Delta_k\rho = \rho_k - \rho_{k-1}$ sau $\Delta_k y = y_k - y_{k-1}$ sînt purtate pe dreptele corespunzătoare diviziunilor θ_k iar $\Delta_k\theta = \theta_k - \theta_{k-1}$ sînt distanțele în general constante între dreptele θ_k (fig. 1).

Condițiile impuse funcției $F(\theta)$ pentru realizarea unor astfel de came, sînt destul de restrictive, astfel că puține funcții pot fi reprezentate. Într-adevăr, funcția $F(\theta)$ trebuie să fie pozitivă, monoton crescătoare, fără puncte de maxim sau minim și cu variații mici ale coeficientului unghiular al tangentei. În general, așa cum s-a exprimat și mai sus, trebuie să fie foarte apropiată de o funcție liniară, graficul respectiv fiind aproximativ o dreaptă de pantă pozitivă.

Lărgirea clasei funcțiilor posibil de reprezentat se poate face prin adoptarea unor montaje, mecanice sau electrice, suplimentare. Printre acestea putem menționa :

— Întrebuințarea unor montaje electrice potențiometrice de înmulțire, cu fire rezistive fixate la periferia unor came mișcate solidar și alimentate fiecare de la cursorul antecedentei. Deși montajul redă o înmulțire aproximativă, totuși în anumite condiții, de exemplu cu utilizarea unor rezistențe potențiometrice $R_1 \ll R_2 \ll R_3 \ll \ldots$ — sau cu separarea etajelor cu amplificatori electronici — se obțin rezultate acceptabile practic [1]

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \ldots = m F(\theta), \qquad (25)$$

Metoda descrisă revine la aproximarea funcției $F(\theta)$ cu un polinom $P(\theta)$, pe intervalul de reprezentat, fiecare factor de ordinul unu al polinomului, afectat eventual și de cota-parte a diferenței $\varepsilon(\theta) = F(\theta) - P(\theta)$ apropiindu-se de condițiile arătate mai sus și permițînd astfel reprezentarea lui cu ajutorul lungimii arcului de camă. Pentru aproximarea funcției $F(\theta)$ prin polinomul $P(\theta)$ pot fi utilizate : metoda abaterii medii pătratice minime Gauss, metoda aproximării optime Cebîșev, metoda aproximării prin puncte.

— Utilizarea unor montaje electrice potențiometrice pentru realizarea diferenței între două tensiuni și deci [1]

$$f_1(\theta) - f_2(\theta) = m F(\theta). \tag{26}$$

În acest caz se aproximează funcția dată $F(\theta)$ cu un binom liniar. Dacă aceasta se obține prin diferența a două funcții liniare de coeficienți unghiulari mult superiori — de exemplu $(k+1)\,a$ și ka cu $k \gg 1$ — atunci cota parte a abaterii $\varepsilon(\theta)$ se reduce foarte mult (de $2k+1$ ori) astfel că funcțiile $f_1(\theta)$ și $f_2(\theta)$ pot îndeplini condițiile impuse mai sus iar construcția necesită astfel două came.

— Dacă se utilizează montaje potențiometrice de derivare, prin culegerea tensiunii de pe o singură camă între două cursoare, montate la depărtare constantă h între ele, se obțin funcții integrale cu caracteristici acceptabile mai ales în apropierea maximilor funcției primitive. Ecuațiile cu diferențe finite pentru diverse montaje electrice [2]

$$\begin{aligned} & f(\theta) - f(\theta - \theta_k) = m F(\theta), \\ \text{sau} \quad & f(\theta) - f(\theta - \theta_k) = m F(\theta) f(\theta), \end{aligned} \tag{27}$$

conduc, de exemplu la limită cînd $m \simeq \theta_k \to 0$ la funcțiile

$$f(\theta) \simeq \int F(\theta)\, d\theta \quad \text{și} \quad f(\theta) \simeq e^{\int F(\theta)\, d\theta}. \tag{28}$$

În apropierea maximului funcției $F(\theta)$, aceasta avînd valoarea aproximativ constantă, funcția $f(\theta)$ are o caracteristică aproape liniară.

În general însă, realizarea practică a montajelor semnalate mai sus necesită întrebuințarea unor valori ai diferiților parametri care reduc mult semnalul electric final necesitînd în acest scop amplificatori corespunzători.

— Utilizarea unor mecanisme cu elemente rigide și cu cuple inferioare în combinație cu cama respectivă, este o soluție mai acceptabilă practic. În acest caz, se caută ca parametrii elementului condus $\overline{\theta} = P(\theta)$, ca funcție de parametru lagrangian al mecanismului θ, să aproximeze cît mai bine funcția $F(\theta)$. Aceasta este cu atît mai eficace cu cît numărul elementelor mecanismului este mai mare, avînd bineînțeles neplăcerea erorilor date de imperfecțiunile de lucru. Pentru mecanismul patrulater articulat există de exemplu 5 parametri care pot fi aleși în condițiile unei bune aproximări [3]. Arcul de camă va trebui să reprezinte funcțiunea $\overline{F}(\overline{\theta}) = \overline{F}(P(\theta)) = F(\theta)$ în care $F(\theta) \simeq P(\theta)$ adică funcția $\overline{F}$, aplicată argumentului $P(\theta)$, va trebui să corecteze abaterea acestuia de la funcțiunea urmărită în reprezentare $F(\theta)$

$$\overline{F}(P(\theta)] = P(\theta) + \varepsilon(\theta) = F(\theta). \tag{29}$$

Pentru $\theta = P^{-1}(\overline{\theta})$ și $\varepsilon(\theta) = \overline{\varepsilon}(\overline{\theta})$

$$\overline{F}(\theta) = \overline{\theta} + \overline{\varepsilon}(\overline{\theta}), \tag{30}$$

adică $\overline{F}(\overline{\theta})$, este aproximativ liniară.

— Se poate întrebuinţa şi profilarea electrică a potenţiometrului, urmărind distribuirea forţată a tensiunii electrice în lungul său după legea dată. Pentru aceasta se montează în paralel cu diferitele porţiuni ale rezistenţei potenţiometrului rezistenţe de diferite valori, astfel încît să se obţină o tensiune variabilă în modul dorit faţă de deplasarea cursorului. În felul acesta intervalul θ pe care se doreşte reprezentarea funcţiei $F(\theta)$ este împărţit în subintervale de lungimi mai mici pe care funcţia dată poate fi, cu mai bună aproximaţie, înlocuită cu o funcţie liniară.

În concluzie, deşi la reprezentarea funcţiilor prin arce de camă sînt restricţii destul de severe, analizate în prima parte a lucrării, utilizarea unor mecanisme suplimentare, electrice sau mecanice, fac posibilă rezolvarea problemei într-un număr mult mai mare de cazuri pentru o clasă de funcţiuni mult mai cuprinzătoare.

Primită la redacţie la 14 iulie 1962

СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ КРИВИЗНЫ ПРОФИЛЯ КУЛАЧКОВ

РЕЗЮМЕ

В работе анализируются условия, которым должна удовлетворять функция $F(\theta)$, согласно которой изменяется профиль кулачка в зависимости от перемещения (углового или линейного), для практического изготовления соответствующего кулачка. На основании полученных соотношений проводится соответствующий анализ. Упоминаются также различные вспомогательные электрические и механические схемы для расширения класса функций, которые могут быть представлены используемой системой.

SYNTHESIS OF CAM MECHANISMS AT THE PRESCRIBING OF THE VALUES OF CAM ARCS

ABSTRACT

This paper analyses the conditions which are to be fulfilled by the function $F(\theta)$, in compliance to which the cam arcs vary with respect to the angular or linear displacement, for the practical realization of the cam. Using the relations obtained, the respective synthesis can be made. Various additional electrical and mechanical devices necessary for broadening the class of functions which may be represented by the system employed are also mentioned.

BIBLIOGRAFIE

1. CHR. PELECUDI, *Reprezentarea funcţiilor cu ajutorul arcelor de came de rotaţie şi tachet de translaţie*. St. cerc. mec. apl., **12**, *6* (1961).
2. — *Folosirea arcelor de came de translaţie cu tachet de translaţie la reprezentarea funcţiilor*. St. cerc. mec. apl., **13**, *1* (1962).
3. И. Б. ЛЮДМИРСКАЯ, *Применение цифровых машин для синтеза шарнирных четырехзвездных счетно-решающих механизмов*. Труды Института машиноведения, 80 (1960).

CONTRIBUȚII ASUPRA CERCETĂRII UZURII ROȚILOR DINȚATE CU AJUTORUL IZOTOPILOR RADIOACTIVI

DE

A. CHIȘU, D. MAROȘ, T. ALBU, G. HULPE, D. MATEIȘANU, A. DALY[1]) și A. SZABO[2])

Studiul și cercetarea uzurii — ca preocupare de bază a colectivului de autori — cu ajutorul izotopilor radioactivi, se face cu scopul de a sesiza procesul și starea de uzură în mașini, de a îmbunătăți rezistența la uzură a organelor de mașini, de a înlocui unele organe de mașini confecționate din materiale deficitare, cu materiale indigene existente din abundență și fără a diminua calitatea și în sfîrșit pentru a cerceta problemele la nivelul tehnicii și științei mondiale prin metodele cele mai moderne.

Roțile dințate sînt scoase din uz — în principal — datorită uzurii premature a dinților ; pentru a lupta împotriva acestui fenomen, este foarte important să se știe cauzele apariției uzurii în timpul funcționării mașinii, ridicînd și analizînd curbele respective, deoarece ele arată viteza uzurii în diferite condiții de exploatare.

Aprecierea uzurii după metodele clasice (calitative și cantitative) cere o demontare și o montare deasă a mașinilor, care pe lîngă un timp îndelungat de funcționare în scopul obținerii unei uzuri măsurabile introduc la fiecare remontare modificări mai mari sau mai mici, deci erori față de situația inițială. În acest caz concluziile finale pot fi eronate.

Metodele clasice mai au neajunsul că în ulei iau parte produsele de uzură a tuturor elementelor de mașini ce sînt deservite de lubrefiantul respectiv, nearătînd în final nimic concret.

Metoda determinării uzurii cu ajutorul izotopilor radioactivi elimină în bună parte neajunsurile de mai sus și are o serie de avantaje ca de exemplu :

— sensibilitate de măsurare foarte mare, mergînd pînă la 10^{-8} g ;
— posibilitatea studierii uzurii simultan la mai multe roți dințate ;
— posibilitatea obținerii foarte rapid a unor indicații asupra com-

---

[1]) Institutul politehnic, Cluj.
[2]) Institutul de fizică atomică, Cluj.

portării la uzură a roților dințate cercetate, față de metodele clasice care necesită încercări de lungă durată.

În piesele ce se cercetează se introduc izotopii radioactivi prin una din metodele cunoscute [1], [2], [3].

O metodă eficace este aceea a introducerii în suprafața activă a piesei a unor inserții radioactive. În acest caz uzura se apreciază prin uzura inserției, care trebue să aibă aceeași duritate ca a piesei — sau mai mică —, căci altfel, pe lîngă că măsurătorile nu vor fi exacte, inserția respectivă va zgîria piesa.

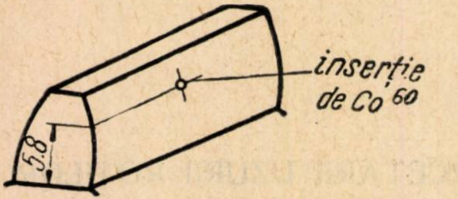


Fig. 1. — Un dinte al roții (pinionului) studiat cu inserția de Co^{60}.

În cazul studiat de autori se cercetează uzura roților dințate din fontă nodulară perlitică, la diferite cote de înălțime de flancul activ al pinionului.

După verificarea existenței unei suprafețe normale de contact s-a fixat la înălțimea de 5,8 mm de la baza dintelui și la mijlocul lățimii flancului o inserție de Co^{60} de diametru 1 mm și lungime de 3 mm.

Cuiul de Co^{60} a fost supus în prealabil unui tratament termic de înmuiere, asigurîndu-i o duritate inferioară față de cea a piesei. Duritatea piesei este de 229 U.B., iar a cuiului de Co^{60} după tratamentul termic este de 170 U.B.

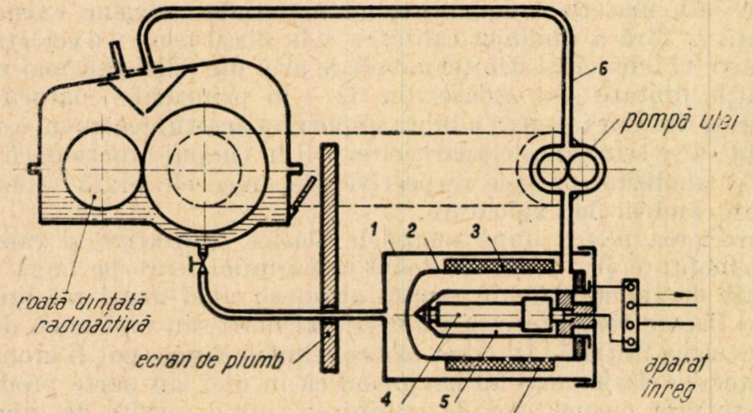


Fig. 2. — Schema de lucru pentru studiul uzurii cu ajutorul izotopilor radioactivi. *1.* — Cilindrul exterior ; *2.* — Cilindrul de aluminiu găurit ; *3.* — Filtrul de pîslă montat pe cilindrul 2 ; *4.* Contorul G.M./AC — 2/ ; *5.* Cilindrul protector de aluminiu pentru contorul G.M. ; *6.* Conducta de circulație a uleiului.

Roțile dințate din fontă nodulară de încercat se montează în una din carcasele mașinii universale de încercat roți dințate [4], care a fost completată cu o aparatură specială strict necesară studiului uzurii cu ajutorul izotopilor radioactivi [10].

Pentru a face o corelație între greutățile de pe talerul mașinii și momentul din circuitul închis, respectiv puterea în CP, s-a făcut etalonarea mașinii de încercat printr-o metodă tensometrică, ridicîndu-se diagrama din figura 3.

Ungerea se face prin barbotaj, uleiul fiind în circuit închis cu ajutorul unei pompe cu roți dințate.

În ulei cad particule de uzură care prin agitație și circulație ajung în cilindrul plasat sub nivelul uleiului din carcasă și sînt reținute pe filtrul din pîslă, iar uleiul își continuă drumul în circuit, fiind trimis din nou în carcasă.

În praful de uzură de pe filtru sînt și particule radioactive, care emit radiații, fiind detectate de contorul G.M., iar semnalele electrice sînt trimise în numărătorul electronic care le înregistrează. Numărarea impulsurilor se face la intervale de cîte 1/2 oră, timp de cîte 4 minute, după care se face media de impulsuri pe minut.

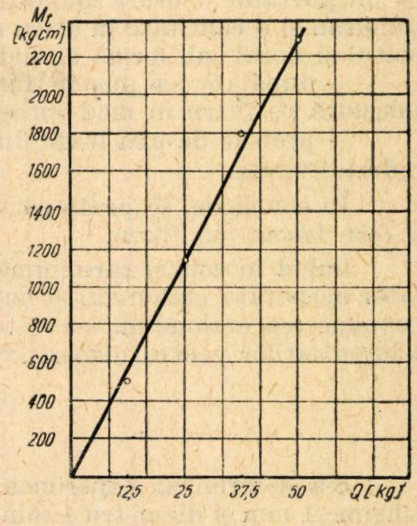


Fig. 3. — Diagrama momentului de torsiune în funcție de încărcare în kg.

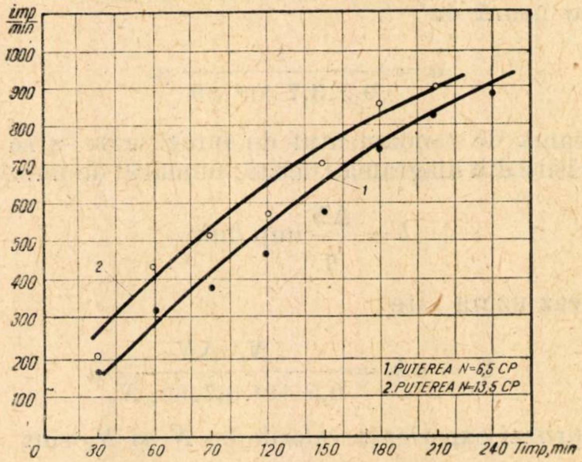


Fig. 4. — Diagrama de uzură (calitativă).

Pe baza acestora se trasează curbele de uzură (calitative) în funcție de încărcare, din care se poate vedea felul în care evoluează uzura la roțile dințate cercetate.

După trasarea curbelor calitative, s-a făcut evaluarea cantitativă a uzurii efectuîndu-se etalonarea după metoda următoare:

— s-a preparat o soluţie de clorură de Co^{60} cu o activitate cunoscută de 0,5μc. Soluţia de etalonare a fost introdusă în baia de ulei, împreună cu un purtător (clorură de cobalt inactiv şi clorură ferică) adăugîndu-se simultan şi o cantitate în exces de hidroxid de amoniu, care precipită cobaltul şi fierul sub formă de hidroxizi solizi, care se reţin uşor pe filtru;

— după ce s-a pus în funcţiune maşina, s-a măsurat activitatea colectată pe filtru în mod succesiv pînă ce a devenit practic constantă;

— probele de ulei luate din carcasă nu au prezentat decît urme de radioactivitate.

În concluzie, se poate considera că practic întregul preparat etalon a fost trecut pe filtru.

Luînd în considerare numărul de impulsuri calculat (N_2) corespunzător activităţii etalonului şi numărul de impulsuri înregistrat (N_1) după introducerea etalonului, s-a determinat randamentul de înregistrare (η) a impulsurilor pentru dispozitivul experimental

$$\eta = \frac{N_2}{N_1}. \tag{1}$$

S-a determinat experimental activitatea unui cilindru de Co^{60} de lungime 1 mm şi diametru 1 mm găsindu-se valoarea de 0,5 m.c., căreia îi corespund $3,7.10^7.0,5.60$ imp./min.

Pentru un micron lungime de cilindru (uzură) îi corespunde o viteză de numărare de $3,7.10^4$; 0,5.60 imp./min, iar pentru un impuls pe minut îi corespunde o uzură de

$$a = \frac{1}{0,5.3,7.10^4.60}\,\mu. \tag{2}$$

Ţinînd seama de randamentul de înregistrare η se obţine pentru ΔN imp./min citite din diagrama trasată, numărul de imp./min reale este

$$b = \frac{\Delta N}{\eta}\text{ imp./min.} \tag{3}$$

În acest caz uzura este

$$U = a.b. = \frac{N_1.\,\Delta N}{0,5.10^4.3,7.60,\, N_2}\,\mu \tag{4}$$

În cazul primei experienţe valorile lui N_1 şi N_2 sînt

$$N_1 = 1\,092\,000 \text{ imp./min,}$$

$$N_2 = 2\,730 \text{ imp./min.}$$

Înlocuind valorile de mai sus în relaţia (4) se obţine

$$U = \frac{1\,092\,000\ \Delta N}{0,5.3,7.10^4.60.2\,730}\,\mu = 0,36.10^{-3}\,\Delta N\,\mu. \tag{5}$$

Precizia acestor măsurători este limitată de caracterul statistic al fenomenului de dezintegrare radioactivă.

În cazul experiențelor efectuate de autori, această eroare statistică variază între valorile ± 2% pînă la ± 5%.

O altă cauză de eroare mai poate surveni din faptul că față de produsele de uzură de dimensiuni foarte mici, filtrul ar putea fi eficace doar pînă la o limită, în care caz randamentul η nu ar fi suficient de exact. Însă dat fiind faptul că radioactivitatea uleiului din carcasă a fost neglijabilă, această cauză de eroare în mod practic nu afectează măsurătorile.

Cu ajutorul formulei [5] din curbele calitative de uzură s-a evaluat uzura cantitativă.

Tabela 1

Nr. crt.	M_f kg cm	Putere C.P.	După 1 oră de funcț.		După 2 ore		După 3 ore		După 4 ore		5000 ore	observații
			Imp/ min	uzura μ	Imp/ min	uzura μ	Imp/ min	uzura μ	Imp/ min	uzura μ	uzura μ	
1	550	6,5	280	0,1	550	0,188	750	0,27	910	0,328	500 *)	
2	1 150	13,50	400	0,14	640	0,23	830	0,298	960	0,345	700 *)	

*) Uzura la 5000 ore s-a calculat după uzura coresp. primei ore de funcționare (caz defavorabil).

Măsurătorile de radioactivitate au fost efectuate cu contorul G.M. tip AC2, cuplat cu numărătorul sovietic B2.

Din aceste prime experiențe s-au trasat curbele de uzură (cu caracter preliminar) care ne dau o imagine despre mersul uzurii în timp la angrenajul încercat.

Se poate trage concluzia că metoda utilizată va da posibilitatea ca în viitor să se poată trasa curbe complete pentru roțile dințate din fontă nodulară (eventual și alte roți din alte materiale) evaluîndu-se uzura pe înălțimea flancului activ al dintelui, în funcție de timp și diferite momente de încărcare, mașina de încărcat permițînd aceasta în cele mai bune condiții.

Încercările vor continua cu un număr corespunzător de roți dințate (suficient de mare) luînd în considerare toți parametrii posibili și astfel vom putea trage concluzii definitive contribuind în acest fel la îmbunătățirea calității și ieftinirea construcției de mașini, respectiv la dezvoltarea tehnicii și științei în țara noastră.

La continuarea experiențelor se vor experimenta și alte metode de marcare radioactivă a roților dințate[1]).

Primită la redacție la 16 iunie 1962

---

[1]) Această lucrare a fost realizată în cadrul unei convenții de colaborare tehnico-științifică între catedra de organe de mașini, Institutul politehnic Cluj, laboratorul de radioizotopi, Institutul de fizică atomică Cluj și Uzinele „1 Mai" Ploiești.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ИЗНОСА ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ПРИ ПОМОЩИ РАДИОАКТИВНЫХ ИЗОТОПОВ

РЕЗЮМЕ

В работе излагается предлагаемый авторами метод для определения износа при помощи радиоактивных изотопов со всеми вытекающими преимуществами и дается подробное описание технологического процесса проведения опытов.

На основании этого метода построены кривые износа (качественные), по которым можно проследить за развитием износа в зависимости от времени и нагрузки.

Для определения величины износа описывается процесс тарировки с переходом к расчету износа зубчатого зацепления проверяемых колес, изготовленных из сфероидального чугуна.

В заключение приводятся результаты (предварительного характера) износа в зависимости от времени и нагрузки.

CONTRIBUTIONS TO THE INVESTIGATION OF THE WEAR OF TOOTHED WHEELS BY USING RADIOACTIVE ISOTOPES

ABSTRACT

This paper presents a method for determining the wear with the aid of radioactive isotopes, indicating the resulting advantages and the detailed technological process of the tests.

Using this method, qualitative wear curves have been drawned, showing the evolution of wear function of time and loading.

For the quantitative estimation of wear, the calibration process is described and the calculation of wear for the tested gear is presented.

Finally, preliminary results are given concerning the determination of wear function of time and loading.

BIBLIOGRAFIE

1. Б. И. Анисимов, *Опыт применения радиоактивных изотопов на московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева. Радиоактивные изотопы и ядерные излучения в народном хозяйстве СССР* III. Гостоптехиздат, Москва, 1961.
2. B. I. Anisimov, *Aplicaţiile energiei nucleare în industrie şi agricultură*. I.D.T. Caiet selectiv, *5* (1957).
3. E. Broda, T. Schönfeld, *Aplicaţiile tehnice ale radioactivităţii*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
4. A. Chişu, D. Maros, T. Albu, O. Hulpe, D. Mateişanu, G. Ursu, *Maşină universală de încercat roţi dinţate*. Lucr. St. IPC, **IV** (1962).

5. P. I. DIACENKO, *Aplicațiile energiei nucleare în industrie și agricultură*. I.D.T. Caiet selectiv, 3 (1957).
6. Ф. М. ЛИПКИН, Н. М. ГЕНКИН, Б. И. ЕЛИЗАРОВ, *Опыт внедрения радиоактивных изотопов на Ярославском моторном заводе. Радиоактивные изотопы и ядерные излучения в народном хозяйстве СССР* III. Гостоптехизд. Москва, 1961.
7. К. А. ГРАЧЕВА, В. А. ЛЕТЕНКО и сотр., *Экономическая эффективность применения радиоактивных изотопов в машиностроении*. СССР III, Гостехиздат, Москва, 1961.
8. С. И. РУМЫНЦЕВ, *Состояние и перспективы применения радиоактивных изотопов и ядерных излучений в машиностроении*.
9. F. L. SCHWARTZ, R. H. EITON, SAI Transactions, **63** (1956).
10. B. L. SLIUCO, *Aplicațiile energiei nucleare în industrie și agricultură*. I.D.T. Caiet selectiv, *12* (1957).
11. * * * *Aplicațiile energiei nucleare în industrie. Referate de sinteză*. I.D.T. Caiet selectiv, *7* (1957).

ASPECTE TRIDIMENSIONALE ALE TRANZIŢIEI PROVOCATE DE UN JET DE INTENSITATE MICĂ PE O PLACĂ PLANĂ ÎN SCURGERE INCOMPRESIBILĂ. I

DE

ST. SĂVULESCU, GH. DARIE şi V. TOMA

1. SCOPUL LUCRĂRII

Studiile experimentale efectuate pînă în prezent asupra tranziţiei în scurgere incompresibilă pe placa plană au avut în vedere în principal aspectul bidimensional, ceea ce a condus la utilizarea unor plăci late (raportul între lăţime, lungime de ordinul 0,5 ÷ 0,8). În acest mod se putea neglija influenţa pereţilor, cu stratul limită care se dezvoltă pe aceşti pereţi şi care în general este turbulent, deoarece aparţine circuitului întregii suflerii.

În camera de experienţe de 80 × 500 mm a sufleriei plate a secţiei de aeromecanică IMA, am montat o placă de plexiglas de 6 × 80 × 1300 mm, adică cu un raport de 0,0615 între lăţime şi lungime, pentru a studia tranziţia în condiţii de scurgere care reproduc aproximativ condiţii de scurgere dintre discurile rotorului unui ventilator centrifugal sau ale unei pompe.

Ţelurile urmărite în studiul experimental al tranziţiei pe o astfel de placă au fost următoarele:

a) Stabilirea influenţei pereţilor asupra zonei laminare care începe la bordul de atac al plăcii.

b) Încercarea şi verificarea metodei de provocare artificială a tranziţiei printr-un jet de intensitate mică.

Într-adevăr, ca metode de provocare artificială a tranziţiei se utilizează scînteia electrică [1], obstacolul în stratul limită (fir lipit pe placă sau hîrtie de glaspapir) [1] sau perturbare sonoră [2] [3]. Perturbarea stratului limită laminar prin jet de debit mic a fost puţin încercată după cunoştinţa noastră [4] sau încercată fără succes pentru scopurile urmărite. În cazul nostru însă această metodă s-a dovedit extrem de practică din următoarele motive.

1) Debitul extrem de mic (circa 10^{-4} g/s) introdus printr-un orificiu de circa 0,8 mm $\varnothing$ nu influențează caracteristicile medii ale scurgerii decît pe un domeniu finit acționînd ca un perturbator local prin aport de energie și masă.

2) Reglajul lui extrem de fin printr-un sistem de ventil cu ac conic situat în afara sufleriei și la îndemîna experimentatorului permite obținerea regimului de scurgere dorit într-o secțiune anumită cu o deosebită precizie și acuratețǎ. În acest mod într-o anumită secțiune a stratului limită se poate face trecerea de la regimul laminar la cel turbulent prin toate fazele intermediare ale tranziției (caracterizată de obicei prin gradul de intermitență = raportul dintre timpul în care mișcarea e turbulentă și timpul total de observare), fără dificultățile tehnice ale celorlalte metode de perturbare.

Dezavantajul principal al acestui mod de perturbare constă în faptul că el determină în vecinătatea lui o scurgere complexă, formată din interacțiunea unui jet laminar transversal cu un strat limită laminar, neavînd deci posibilitatea introducerii punctuale a unei perturbații de energie ca în cazul scînteii sau a unei frecvențe cunoscute ca în cazul perturbatorului acustic. Însă, pentru studiul formării locale a zonelor de tranziție s-a dovedit o metodă deosebit de potrivită.

c) Studiul dezvoltării stratului limită influențat de acest jet, urmărirea zonelor spațiale de tranziție cu caracteristicile lor, detectarea punctelor de apariție a spoturilor turbulente.

d) Studiul condițiilor locale de tranziție, adică stabilirea influenței parametrilor exteriori (grad de turbulență a curentului exterior, numărul Reynolds, rugozitatea, intensitatea jetului), în aceeași secțiune a stratului limită, asupra caracteristicilor stratului limită (distribuția de viteze, distribuția de fluctuație, mărimea spoturilor turbulente formate).

Este de remarcat că lucrarea aceasta prezintă în același timp o verificare a performanțelor experimentale ale instalației secției de aeromecanică pentru studiul tranziției cu toată aparatura pe care o comportă acest domeniu delicat de investigație.

În același timp trebuie precizat că acest studiu are un caracter pur experimental, el reprezentînd o descripție fenomenologică prin diagrame, fotografii a unui caz particular de tranziție artificială.

S-a socotit că deocamdată nu sînt premise suficiente pentru a trece la interpretări teoretice care de multe ori încurcă lucrurile în loc să le clarifice, deoarece se bazează în general pe fapte izolate.

Lucrarea de față este partea întîi a acestui studiu general și cuprinde punctele *a*), *b*) și o parte din punctul *c*), așa cum au fost expuse mai înainte.

2. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ

Instalația experimentală de care dispunem pentru aceste încercări se compune din : sufleria plată, aparatul de fir cald cu sonda respectivă și dispozitivul de traversare, placa plană montată în suflerie, prevăzută cu prize de presiune legate la un multimanometru și cu una din prize

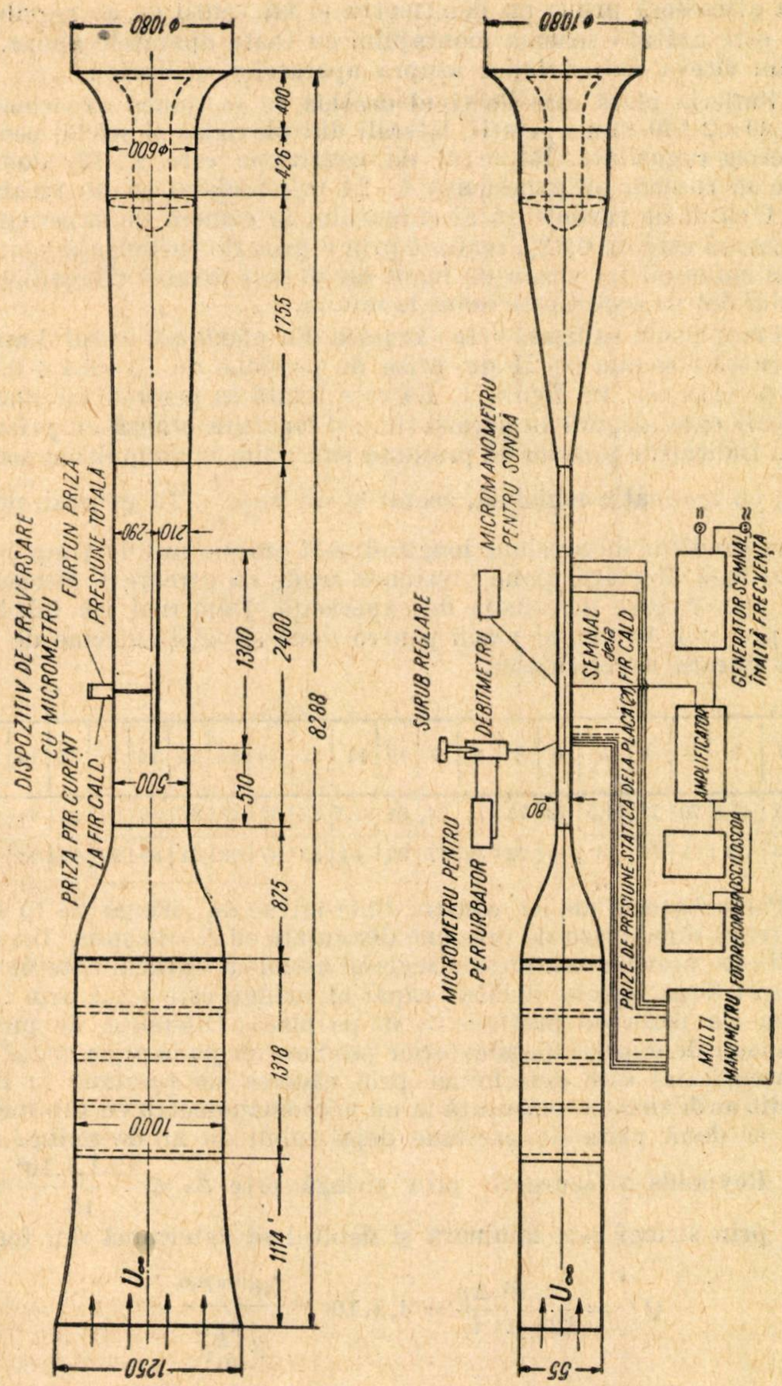

ϕ1080
ϕ600
400
426
1755
2400
8288
1300
510
875
1318
1114
1000
500
210
290
1250
U_∞
DISPOZITIV DE TRAVERSARE CU MICROMETRU
FURTUN PRIZĂ PRESIUNE TOTALĂ
PRIZA PTR. CURENT LA FIR CALD
ϕ1080
MICROMANOMETRU PENTRU SONDĂ
SURUB REGLARE
DEBITMETRU
MICROMETRU PENTRU PERTURBATOR
SEMNAL de la FIR CALD
GENERATOR SEMNAL ÎNALTĂ FRECVENȚĂ
AMPLIFICATOR
PRIZE DE PRESIUNE STATICĂ DE LA PLACĂ
OSCILOSCOP
FOTORECORDER
MULTI MANOMETRU
80
55
U_∞

Fig. 1. — Vedere generală schematică a instalației experimentale și a aparaturii anexe pentru studiul tranziției pe placa plană.

legată la atmosferă printr-un debitmetru și un ventil cu ac reglabil. În figura 1 este arătată schema montajului cu toate aparatele anexe.

Dăm cîteva date tehnice asupra aparatelor utilizate :

a) Sufleria plată este de tipul deschis cu secțiunea experimentală de 500×80×2 400 mm, pereții laterali din plexiglas și sticlă pentru a avea aceeași rugozitate. Raportul de contracție este 1 : 12, domeniul de viteze în camera de experiență 4—24 m/s reglabil cu un reostat de pornire. Gradul de turbulență al curentului în camera de experiență cu placa montată este de 0,3%, realizat prin 6 grile de turbulență situate în colectorul sufleriei. La viteza de lucru de 13 m/s nivelul vibrațiilor și al zgomotului dat de motor este redus la minim.

b) Placa plană utilizată este excutată din plexiglas, avînd dimensiunile 6×80×1 300 mm cu 21 de prize de presiune de ⌀ =0,4 ÷ 0,8 mm dispuse pe axă ca în figura 1. Ea este fixată în peretele de plexiglas prin ștuțuri care asigură în același timp și legătura etanșă cu prizele de presiune. Indicațiile prizelor de presiune sînt citite la un multimanometru cu alcool cu înclinația reglabilă, așezat la $\sin\alpha = \frac{1}{6}$. În general, primele 6 prize au gradient de presiune longitudinală practic nul, în timp ce spre bordul de fugă al plăcii plane presiunea scade ca urmare a pierderii de presiune prin frecare în camera de experiență. Dăm mai jos tabelul cu variația presiunii în lungul plăcii pentru două situații extreme de lucru pe toată durata experiențelor.

Priza / h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$h_{\min}$	71	40,5	70	71	71,5	72	70	72	74	81	81,5	82	84	85	87	86	87	91	89	94	95
$h_{\max}$	73	42	73	74	74	75	72	74	77	83	84	85	87	88	91	89	90	94	93	98	99

c) Perturbatorul de jet constă dintr-un ac de siringă de ⌀ int = 1,1 mm avînd două prize de presiune distanțate cu $L=80$ mm. Un capăt al siringii este prevăzut cu un con reglabil astfel că orificiul acestui capăt este obturat după nevoie. Celălalt capăt al siringii este legat prin furtun de cauciuc cu priza de presiune (2) de pe placă. Diferența de presiune dintre camera de experiențe și exterior produce un jet la priza (2), al cărui debit (intensitate) este determinat prin căderea de presiune în lungul tubului, din ac de siringă, măsurată la un micromanometru cu tub înclinat, conectat la două prize de presiune depe tubul de ac de siringă. Cum numărul Reynolds al scurgerii prin siringă este $\mathcal{R}_e \leqslant \frac{12.1{,}1.10^3}{15} \simeq 880$, mișcarea prin siringă este laminară și debitul se determină din formula

$$Q^{\frac{m^3}{s}} = \frac{\pi}{128}\,\frac{d^4}{\mu}\,\frac{\Delta p}{l} = 4{,}5.10^{-13}\,\frac{\Delta p^{\mathrm{mm\,H_2O}}}{\mu\,\frac{\mathrm{kgs}}{\mathrm{m^2}}}\,.$$

De exemplu ν pentru $T^\circ = 25°C$, $\mu = 2.10^{-6}$ kgs/m², se obţine

$$Q^{\frac{m^3}{s}} = 2{,}25.10^{-7}.\ \Delta p^{\mathrm{mm\,H_2O}}.$$

Cum $\Delta p \simeq 3$ mmH_2O se găseşte $Q = 6{,}75.10^{-7}$ m³/s $= 8{,}7.10^{-7}$ kg/s la o viteză de ieşire a jetului de $U_{\text{med}} = \dfrac{Q}{S_{\text{orif}}} = 1{,}35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Numărul Reynolds la ieşire este deci $\dfrac{1{,}35.0{,}8.10^3}{16} = 67{,}5$, astfel că jetul care iese pe placă are într-adevăr un debit extrem de mic (debitul suflerieі la $U = 13$ m/s este circa 0,288 m³/s = 0,36 kg/s deci debitul jetului reprezintă $2{,}35.10^{-4}\%$ iar faţă de secţiunea laminară a stratului limită de pe placă debitul jetului reprezintă circa 0,14%), şi este laminar. La micromanometrul cu alcool cu tub înclinat la 1 : 10 am utilizat 3 intensităţi de jet $\Delta p = 0$, $\Delta p = 2{,}4$ mm alcool şi $\Delta p = 3{,}2$ mm alcool, care corespund respectiv la $\Delta p = 0$, $\Delta p = 2{,}1$ mm H_2O, $\Delta p = 2{,}8$ mm H_2O.

Ca observaţie generală este de semnalat faptul că un debit de aer de circa 0,1 mg/s ieşind aproape punctual cu o viteză aproximativă 1,5 m/s transversal pe un strat limită de grosime $\delta = 1{,}5$ mm poate declanşa tranziţia şi produce spoturi de frecvenţă reglabilă prin varierea fină a intensităţii jetului.

d) Sonda de măsurare a vitezelor medii este un tub de presiune totală executat de ace de siringă, priza propriu-zisă avînd $\varnothing_{\text{ext}} = 0{,}5$ mm, $\varnothing_{\text{int}} = 0{,}25$ mm şi vîrful rotunjit semisferic.

După etalonare cu un tub Prandtl de coef. 1 a rezultat cu bună aproximaţie că această sondă are coef. 1. Aplicînd corecţia cunoscută [5] pentru aceste microsonde, avem

$$h_{\text{real}} = h_{\text{măsurat}} - \frac{50\,\nu^2\,\rho}{d_p^2}$$

unde d_p = diametrul interior al orificiului sondei. După alţi autori [6] aceste sonde se utilizează pentru domeniul $\dfrac{ud_p}{\nu} > 60$, ceea ce în cazul nostru înseamnă $u > 3{,}6$ m/s. Dacă înclinarea micromanometrului este $\alpha = (1 : 10)$, densitatea alcoolului la temperatura t°C este γ_t, iar diferenţa de presiune între priza statică de pe placă şi priza totală a microsondei este indicată la micromanometrul prin coloana de alcool h, atunci viteza este

$$u = \sqrt{\frac{2\gamma_t}{\rho_t} \sin \alpha\, h \left(1 - \frac{50\,\nu_t^2\,\rho_t}{h\,d_p^2}\right)}.$$

Cu această formulă s-au calculat vitezele medii pentru distribuţia vitezei în stratul limită. Trebuie remarcat că timpul de răspuns al unei astfel de sonde este destul de mare (aproximativ 5 minute) şi că obţinerea unui profil de viteze este o muncă extrem de migăloasă.

Dispozitivul de traversare cuprinde în principal un micrometru de precizie. De asemenea, trebuie observat că profilele de viteză reprezintă în anumite cazuri medieri efectuate de microsondă pentru alternarea profilelor tipice laminare şi turbulente, prezente o dată cu trecerea spoturilor turbulente.

e) Aparatul cu fir cald este un produs Polymetrom, din 1956, de tip intensitate constantă. Domeniul de frecvenţe utilizabil este 20 Hz — — 16 kHz şi permite atît vizualizarea la un osciloscop a tensiunii instantanee produse pe elementul sensibil al sondei prin varierea vitezei locale, cît şi medierea acestei tensiuni cu ajutorul unui termocuplu. Sonda utilizată de noi este formată din două ace de siringă de 0,5 mm $\varnothing_{ext}$ care servesc atît drept prize de presiune totală cît şi suporţi ai firului Wollaston de 7,65μ, lipit de aceşti suporţi distanţaţi cu 5 mm. Partea centrală a firului pe o lungime ce variază între (0,75—1,5) mm este decapată formînd traductorul termorezistiv. Eforturi deosebite de atenţie, de tehnologie şi de manipulare, se cer pentru obţinerea unor rezultate cît mai aproape de reprezentarea fidelă a fenomenului fizic. Dificultăţile întîlnite în utilizarea firului cald sînt în principal, următoarele:

1) Eliminarea vibraţiilor mecanice ale sufleriei, suportului sau proprii firului.

2) Decaparea corectă a firului, asigurarea contra prafului, respectarea geometriei decapării şi a prinderii firului.

3) Eliminarea paraziţilor din echipamentul electronic printr-o ecranare corespunzătoare, aranjarea amplificatorilor şi circuitelor de corecţie la valorile optime pentru obţinerea unei oscilograme (sau a unei valori mediate) cît mai fidele şi expresive. Dispozitivul de traversare a sondei cu fir cald este de tip micrometric cu o precizie de 0,01 mm.

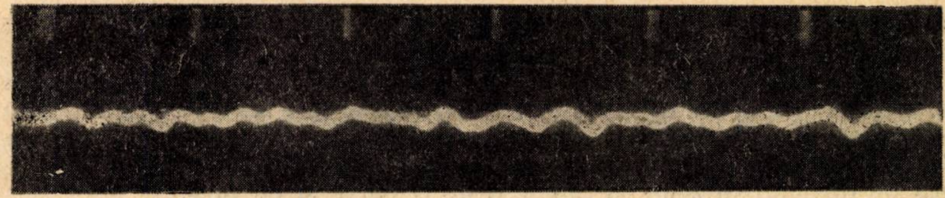
Pentru înregistrarea şi analiza rezultatelor s-au mai utilizat un osciloscop Orion cu ecran de 5″ şi un oscilograf Orion cu fotorecorder cu viteza maximă de derulare a filmului de 0,2 m/s (marcajele de timp pe film făcîndu-se cu o frecvenţă de 50 c/s) precum şi un analizor de spectru RFT cu banda de frecvenţă 20 Hz pînă la 20 000 Hz şi cu atenuare 0,2 şi 40 db pe octavă.

3. METODICA DE LUCRU

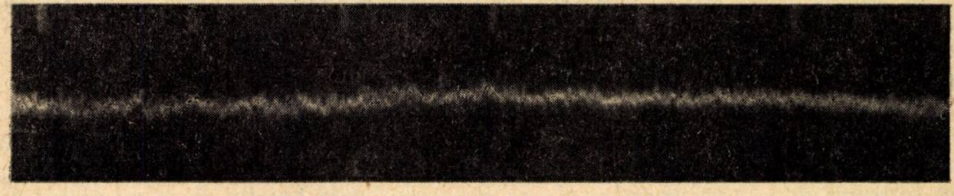
După asigurarea condiţiilor de lucru optime s-a procedat la efectuarea următoarelor etape de experimentare:

a) Fixarea regimului de lucru adică a vitezei sufleriei (indicată de multimicromanometru) astfel ca zona de tranziţie urmărită să cuprindă porţiunea iniţială a plăcii. Sonda cu fir cald montată la priza (10), la $y = 0{,}5$ mm de placă a fost utilizat drept etalon al unui aceluiaşi regim de tranziţie prin observarea ecranului osciloscopului unde s-a menţinut apariţia aceluiaşi regim de spoturi, la jetul de intensitate maximă.

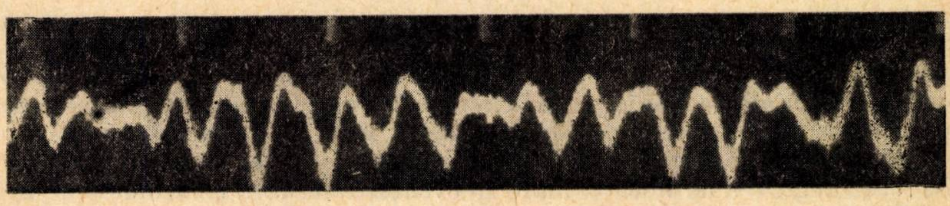
b) Explorarea informativă a domeniului de pe placă între $x = 0$ (bordul de atac) şi $x = 250$ mm (priza (9) pentru delimitarea zonelor de



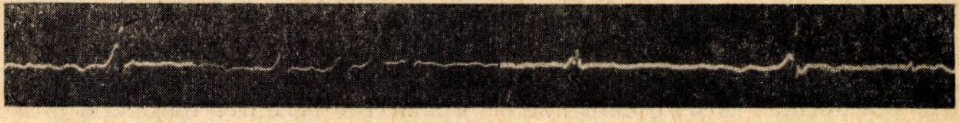
Oscilograma I



Oscilograma II



Oscilograma III. Sensul de formare a imaginii ⟵



Oscilograma IV. Sensul de formare a imaginii ⟵

Oscilograma V

influență a pereților și a jetului. Dăm cîteva oscilograme caracteristice pentru zonele parcurse (I, II, III, IV, V).

c) Determinarea dezvoltării caracteristicilor medii ale stratului limită pentru 3 intensități de jet ($\Delta p = 0$, $\Delta p = 2{,}4$, $\Delta p = 3{,}2$ mm alcool) prin ridicarea profilelor de viteză în dreptul prizelor (1), (2), (3)... (9) pe axa plăcii. De asemenea, s-au determinat profile de viteze în puncte simetrice față de orificiul prizelor la 2,5 mm de o parte și de alta.

d) Determinarea unor zone caracteristice în evoluția stratului limită prin observarea imaginii de pe ecranul osciloscopului și obținerea prin fotografiere a oscilogramelor. În general aspectul vizual al fluctuațiilor instantanee de viteză este influențat de comportarea elementului sensibil (fir decapat) și de amplificarea și reproducerea semnalului prin echipamentul electronic. Pentru a realiza deosebiri nete între diferitele aspecte observate am păstrat pe cît posibil același regim de scurgere medie în suflerie și aceleași caracteristici electronice de înregistrarea semnalului. Pentru a fi siguri că aceste deosebiri se datoresc diferitelor intensități de jet și sînt specifice zonei de tranziție studiate am încercat mai multe fire cu lungimi decapate variabil și am controlat atît bordul de atac al plăcii cît și firul contra depunerilor fine de praf. Micile fire de praf depuse fie la orificiul de jet din placă, fie pe placă în fața firului cald, fie pe acesta din urmă, pot perturba sensibil scurgerea și falsifica interpretarea semnalului. Influența aceasta este puțin importantă pentru zona în care s-au format deja spoturile, deoarece acestea dau semnale atît de specifice scurgerii intermitente cu porțiuni distincte turbulente încît nu pot fi confundate cu alte semnale perturbatoare. Totuși claritatea redării acestor spoturi este alterată prin prezența prafului. Dar influența prafului poate fi esențială pentru zona ce precede apariția spoturilor unde se întîlnesc fluctuații regulate de mică și mare frecvență, fluctuații sinusoidale de instabilitate secundară de mare frecvență și mică amplitudine, asupra cărora impuritățile din mediul cercetat au o influență decisivă.

Pentru a putea fi siguri de reprezentarea fenomenelor din această zonă — numită de noi bandă de oscilații secundare — și pentru a elimina influența factorilor perturbatori din instalația de măsură am efectuat controale vizuale și la microscop, ale sondei și plăcii, de asemenea, am repetat de cîteva ori experiența cu diferite fire avînd diverse vibrații proprii. S-a obținut astfel o deprindere vizuală care permitea distincția între imaginile de pe ecranul osciloscopului și aprecierea acurateții lor.

4. REZULTATE EXPERIMENTALE

În privința rezultatelor ce vor fi expuse în acest paragraf trebuie reamintit că această lucrare reprezintă un prim stadiu de investigație consacrat unui caz particular de tranziție provocată artificial printr-un jet de intensitate mică, reglabilă, urmărindu-se identificarea diferitelor zone caracteristice de scurgere, cu varietăți de mișcări ce se grupează în jurul celor două tipuri limită : laminar și turbulent. Această identificare este o operație de apreciere calitativă după numeroasele oscilograme ob-

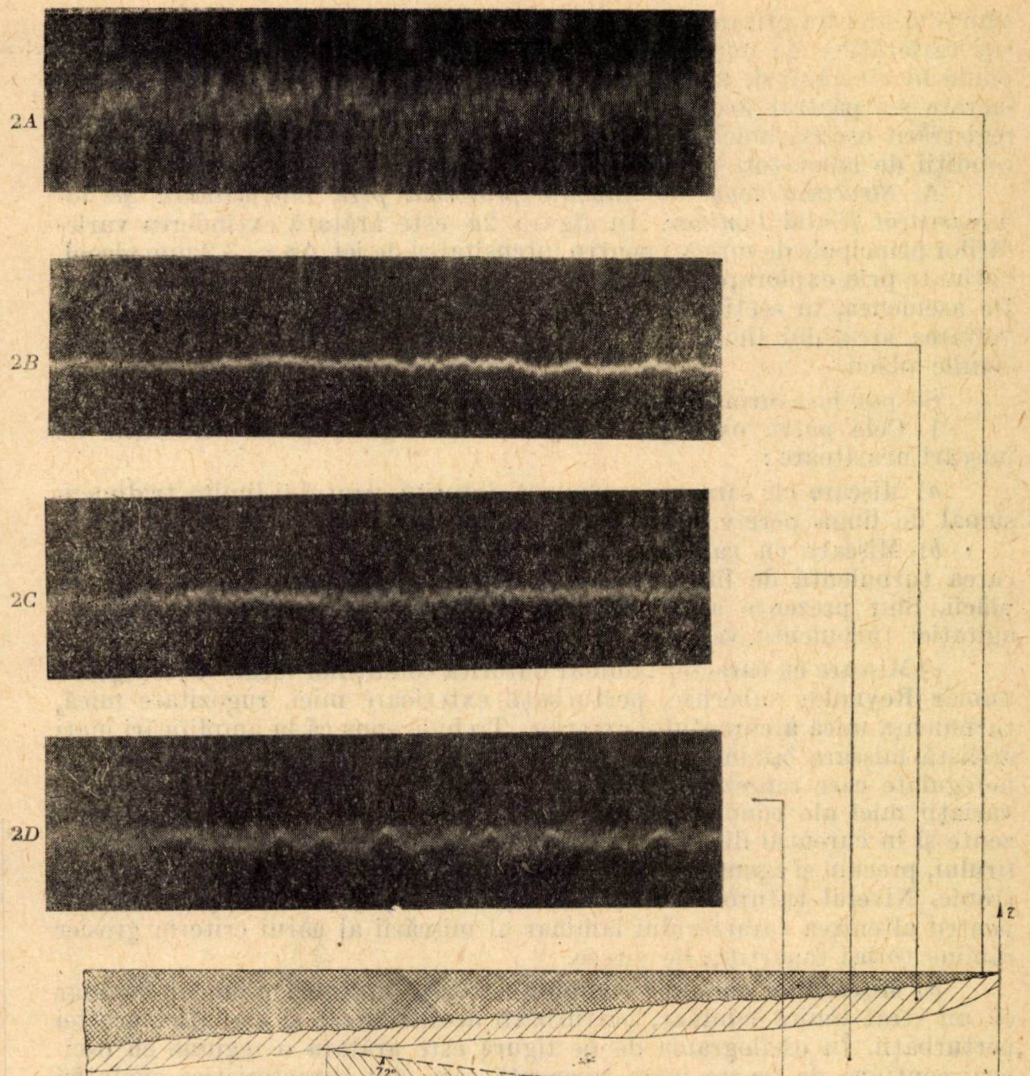

2A
2B
2C
2D
z
0
x
7,2°
a)
y
U_0
δ_1
0
⑩
⑨
⑧
⑦
⑥
⑤
④
③
②
①
b)

Fig. 2. — Varietăți de mișcări în stratul limită perturbat ($\Delta p = 3{,}2$ mm) de pe placa plană.

ținute și nici un criteriu nu este cunoscut pentru exprimarea și clarificarea varietăților de mișcări întîlnite, mai ales că examinarea vizuală depinde foarte mult de înregistrarea și reproducerea electronică. În această lucrare s-a păstrat aceeași sondă cu același fir cald pe toată durata înregistrării oscilogramelor și pe cît posibil aceeași amplificare și aceleași condiții de laborator, pentru facilitarea comparației.

A. *Structura zonei de tranziție provocată prin interacțiunea jet laminar-strat limită laminar.* În figura 2*a* este arătată extinderea varietăților principale de mișcări pentru intensitatea de jet $\Delta p = 3{,}2$ mm alcool, obținute prin explorare cu firul cald la o distanță de perete de 0,45 mm. De asemenea, în secțiunea transversală din figura 2 *b* este arătată dezvoltarea stratului limită tranzițional la scară naturală față de dimensiunile plăcii.

Se pot face următoarele observații și constatări:

1. Cele patru oscilograme indicate pe figură arată varietățile de mișcări următoare:

a) Mișcare cu caracter turbulent datorită stratului limită tridimensional de lîngă perete, format în unghiul drept dintre perete și placă.

b) Mișcare cu caracter tranzițional datorită întîlnirii dintre mișcarea turbulentă de lîngă perete și mișcarea laminară dinspre mijlocul plăcii. Sînt prezente aici spoturi ca și perturbații neregulate datorită agitației turbulente vecine.

c) Mișcare cu caracter laminar datorită condițiilor locale de scurgere: număr Reynolds subcritic, perturbații exterioare mici, rugozitate mică, turbulența mică a curentului exterior. Trebuie spus că la amplificări mari această mișcare laminară apare ca o succesiune de ondulații regulate și neregulate care reprezintă: influențe acustice ale zgomotului motorului, variații mici ale condițiilor exterioare de presiune și temperatură (prezente și în curentul din suflerie), vibrații mecanice ale sondei, suportului, firului, precum și zgomotul de fond și perturbațiile din echipamentul electronic. Nivelul tuturor acestor oscilații nu depășește însă pe cel critic pentru alterarea caracterului laminar al mișcării al cărui criteriu grosier rămîne totuși repartiția de viteze.

d) Mișcare cu caracter complex datorită întîlnirii unui jet laminar cu un strat limită laminar, perturbării acestui strat și evoluției acestei perturbații. În oscilograma de pe figură este arătată o regiune cu oscilații continue de foarte mare frecvență care sînt caracteristice evoluției jetului în stratul limită.

Structura acestei zone centrale influențate de jet va fi arătată în detaliu mai departe.

2. Dezvoltarea stratului turbulent de lîngă perete arată o îngroșare mare față de evaluările deduse din teoriile semi-empirice ale stratului limită turbulent. Acest efect se datorește caracterului tridimensional al scurgerii în acest diedru. Dezvoltarea zonei centrale de influență a jetului pentru intensitatea $\Delta p = 3{,}2$ mm alcool se deosebește de dezvoltarea unui obstacol, de exemplu o sferă rigidă în stratul limită, așa cum rezultă din lucrarea [1].

Într-adevăr, zona de influență nu se dezvoltă liniar începînd din punctul perturbat, ci există întîi ($x = 50$ mm — $x = 60$ mm) o mică zonă de dezvoltare parabolică, apoi o zonă mai lungă ($x = 60$ mm — $x = 120$ mm) de lățime constantă $2Z_0 = 5$ mm, asemănătoare unei dîre în curent liber şi apoi urmează ($x = 120$ mm — $x = 220$ mm) o zonă de extindere laterală aproximativ liniară, cu origina la $x \simeq 120$ mm adică înapoia punctului perturbator. Unghiul acestei extinderi liniare laterale este de aproximativ 7,2°, inferior dezvoltării unui spot produs punctual sau unei dîre

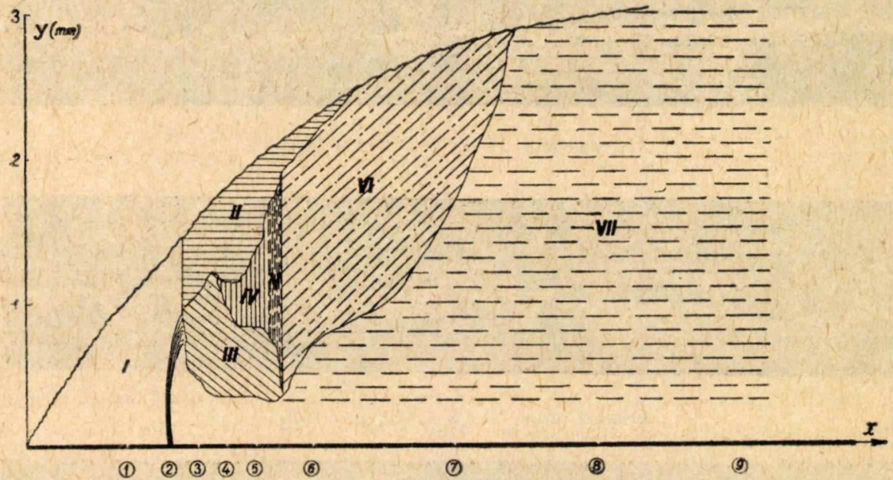


Fig. 3. — Zone de mișcări în secțiune longitudinală prin stratul limită perturbat ($\Delta p = 3{,}2$ mm) pe linia mediană ($z = 0$) a plăcii.

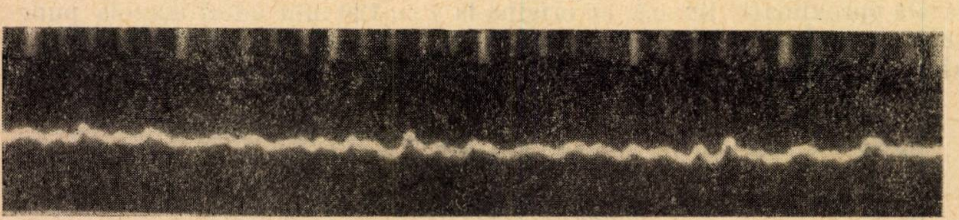
de obstacol rigid în stratul limită. Pentru un jet de intensitate mai mică, $\Delta p < 2{,}4$ mm alcool, zona de influență centrală nu se observă la firul cald decît sub forma unei oscilații care nu alterează caracterul laminar al mişcării în stratul limită şi nu se dezvoltă pentru a produce spoturi.

Pentru un jet de intensitate mai mare, $\Delta p = 4{,}2$ mm alcool, astfel ca în secțiunea (9) să avem turbulență complet dezvoltată, evoluția zonei de influență arată mici deosebiri față de cazul $\Delta p = 3{,}2$ mm alcool. În orice caz, dacă practic atribuim oricărui punct perturbator din stratul limită laminar o intensitate de perturbație suficientă pentru modificarea caracterului mişcării în aval, zona de influență a perturbației evoluează aproximativ liniar cu un unghi de deschidere ce variază lateral între 8° ÷ 12°. Pe figură se poate remarca faptul că această schemă acoperă suficient de bine nevoile practice ale evaluării rapide a domeniilor de influență produsă de diferitele perturbații prezente în stratul limită laminar cum sînt : interacțiunile cu pereții de încastrare a unui profil, vîrfurile de nit, orificiile de jet etc.

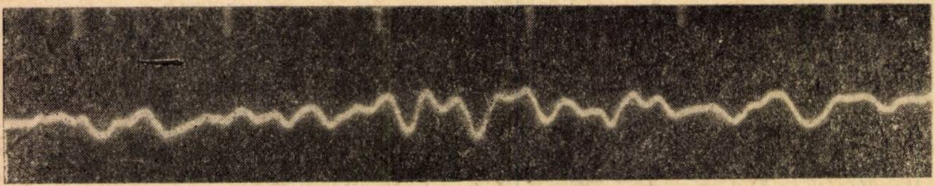
În figura 3 este arătată o secțiune longitudinală prin stratul limită perturbat cu un jet de intensitate $\Delta p = 3{,}2$ mm alcool, secțiune făcută prin centrul plăcii, cu scara grosimii stratului limită mărită de 50 de ori.

Examinarea cu firul cald a varietăţilor de mişcări prezente în dezvoltarea interacţiunii jet laminar-strat limită laminar arată următoarele zone:

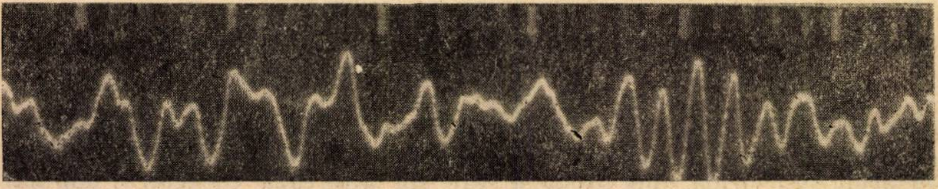
I. Zonă de mişcare laminară cu perturbaţii neregulate pînă la $x = 55$ mm, jetul comportîndu-se ca un obstacol în stratul limită laminar. Oscilogramele făcute în punctul $x=53$ mm $y=0,75$ mm arată acest comportament prin continuitatea fluctuaţiilor neregulate în cazul prezenţei jetului ($\Delta p = 3,2$ mm) şi absenţei jetului ($\Delta p = 0$). De asemenea, oscilogramele din punctul $x = 53$ mm, $y = 0,9$ mm arată prezenţa fluctuaţiilor neregulate de amplitudine mare şi frecvenţă mică, prezente în mişcarea laminară.



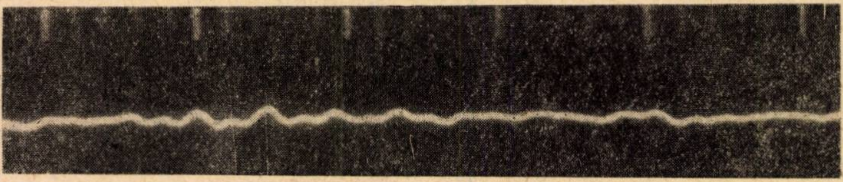
Oscilograma 1 — $x = 53$; $y = 0,75$



Oscilograma 1′ $x = 53$; $y = 0,75$

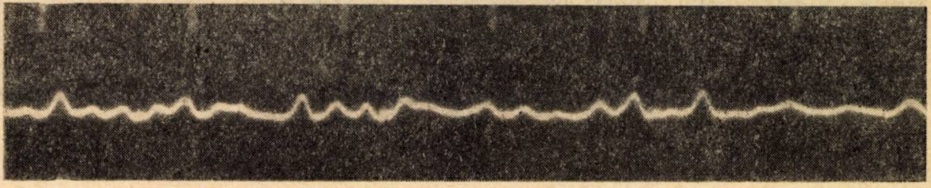


Oscilograma 2 $x = 53$; $y = 0,9$

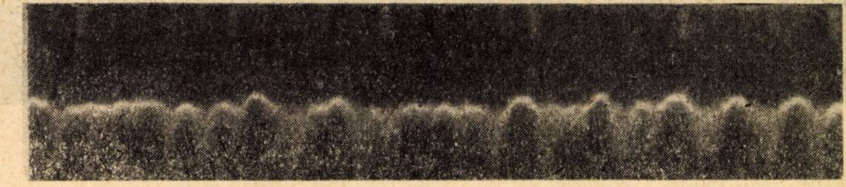


Oscilograma 2′ $x = 53$; $y = 0,9$

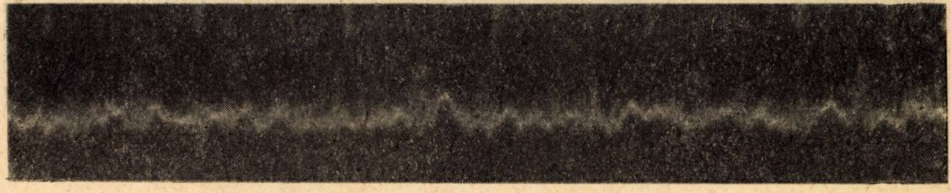
II. Zonă de mișcare laminară cu oscilații secundare de înaltă frecvență caracteristice evoluției jeturilor. Această zonă este delimitată superior aproximativ de marginea stratului limită iar inferior de acea regiune unde apar perturbații bruște (analoge unor spoturi incipiente locale) suprapuse perturbațiilor existente în mișcarea determinată de evoluția jetului. Oscilograma *3* arată această margine inferioară. De asemenea, oscilogramele *4* și *5* indică individualizarea acestei zone. Sînt de remarcat salturile bruște de amplitudine ale înaltelor frecvențe. Zona aceasta se întinde aproximativ între $x = 55$ mm și $x = 90$ mm și caracteristica ei este faptul că jetul ce evoluează în stratul limită își păstrează individualitatea de mișcare, avînd zonele proprii de tranziție caracterizate prin apariția fluctuațiilor secundare de înaltă frecvență și prin elemente de spoturi datorite interacțiunii cu stratul limită.



Oscilograma 3 $x = 60$; $y = 1{,}05$

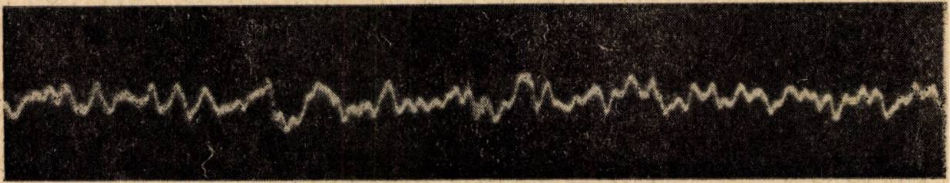


Oscilograma 4 $x = 70$; $y = 1{,}65$

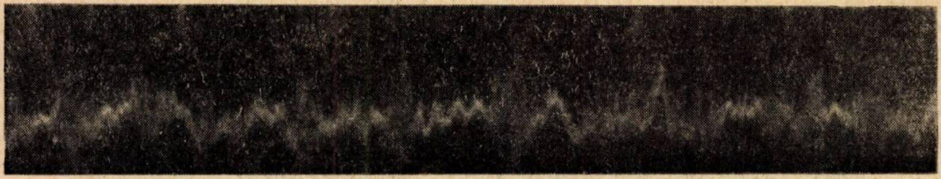


Oscilograma 5 $x = 70$; $y = 1{,}15$

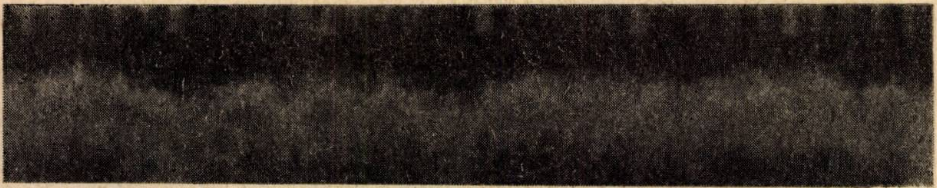
III. Zonă de mișcare tranzițională cu fluctuații de înaltă frecvență și spoturi aparținînd porțiunii stratului limită de lîngă perete independente de zona II unde predomină evoluția jeturilor. Ea se întinde aproximativ de la $x = 55$ mm la $x = 90$ mm și marginea ei inferioară e zona din apropierea peretelui unde se observă pe oscilograme spoturile inițiale, îndreptate în sus, iar marginea superioară e dată de regiunea unde elementele de spoturi sînt îndreptate în jos ceea ce arată, ca mai sus, o individualizare a acestei zone. Oscilograma *6* arată prezența fluctuațiilor de înaltă frecvență rezultate din interacțiunea dîrei formată în spatele jetului, imediat lîngă perete, cu porțiunea stratului limită laminar de lîngă perete.



Oscilograma 6 $x = 75$; $y = 0{,}55$. Sensul de formare a imaginii ⟵



Oscilograma 7 $x = 80$; $y = 1{,}45$

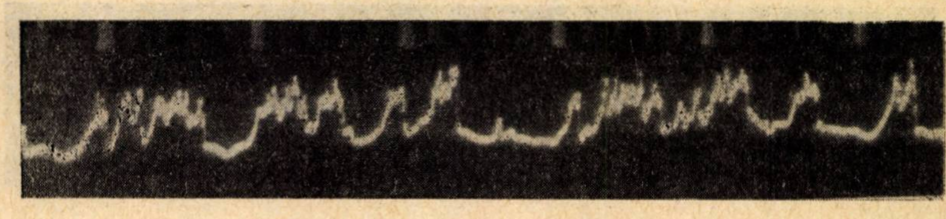


Oscilograma 8 $x = 80$; $y = 1{,}45$. Sensul de formare a imaginii ⟵

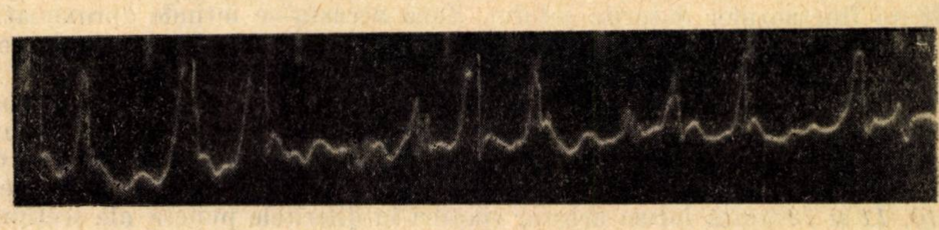
Zonele II și III se caracterizează printr-o mare sensibilitate la perturbații acustice exterioare. De exemplu oscilograma *7* arată un punct din această zonă și oscilograma *8* arată același punct perturbat sonor din exterior.

IV. Zona de mișcare tranzițională cu fluctuații de joasă și înaltă frecvență reprezentînd suprapunerea influențelor jetului dezvoltat spre marginea exterioară a stratului limită (zona II) pe de o parte, și a porțiunii de strat limită de lîngă perete (zona III) pe de altă parte. Zona IV evoluează astfel că zonele vecine (II) și (III) se îngustează pierzîndu-și individualitatea. Această zonă se întinde aproximativ între $x = 60$ mm și $x=85$ mm, acolo unde comportarea de ansamblu se datorește preponderenței profilului de viteză ce aparține stratului limită din acea secțiune.

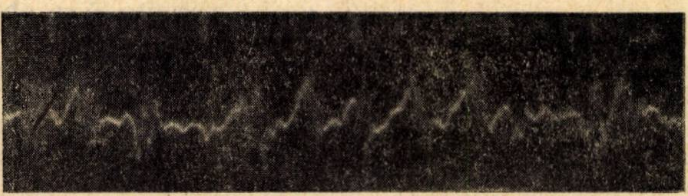
V. Zona tranzițională cu fluctuații de joasă și înaltă frecvență în care distribuția fluctuațiilor tinde să depindă numai de repartiția de viteze a stratului limită, această zonă fiind o continuare a celei precedente (IV) pînă la $x = 90$ mm.



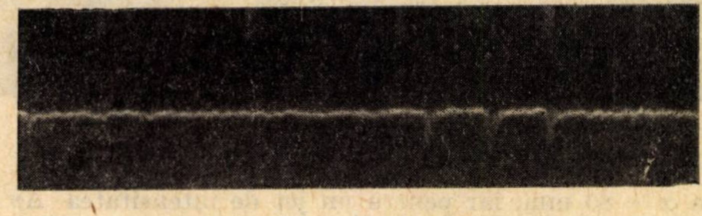
Oscilograma 9 ←



Oscilograma 10 $x = 250$; $y = 0{,}35$. Sensul de formare a imaginii ←



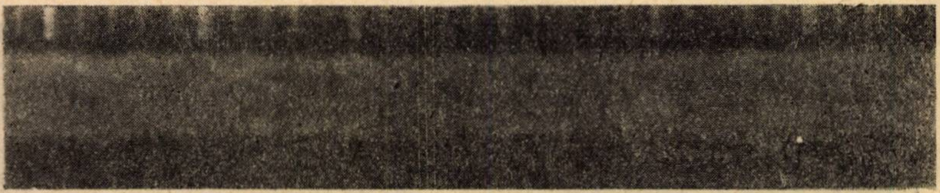
Oscilograma 11 $x=250$; $y=1{,}60$. Sensul de formare a imaginii ←



Oscilograma 12 $x = 250$; $y = 3$

Caracteristica acestor zone este prezența spoturilor înțelese ca alternanța profilelor de viteze laminar și turbulent în domenii finite (un criteriu al acestei comportări fiind dat la punctul 5) peste care se suprapun frecvențele înalte specifice interacțiunii jet-strat limită.

VI. Zona tranziţională cu spoturi dezvoltate peste care se suprapun frecvenţele datorite jetului. Exemplu este oscilograma *9*. O secţiune prin stratul limită în această zonă arată spotul complet dezvoltat, interesînd întreaga secţiune, însă în partea superioară se mai observă prezenţa fluctuaţiilor datorite jetului. Zona aceasta se întinde aproximativ pînă la $x = 175$ mm unde practic se termină influenţa jetului ca dezvoltare proprie şi rămîne influenţa jetului doar ca perturbator global.

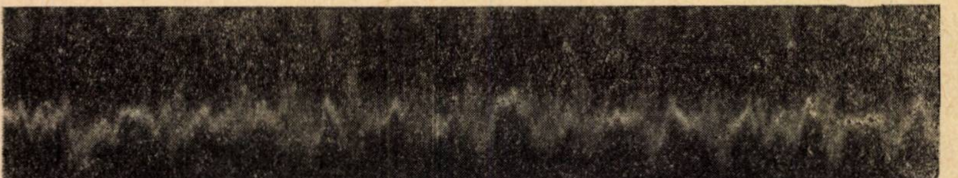


Oscilograma 13 $x = 80$; $y = 1{,}75$

VII. Zona tranziţională cu spoturi dezvoltate datorită perturbatorului jet care a generat, printr-o interacţiune complexă, mecanismul tranziţiei sub această formă spotică, adică alternarea locală începînd de la $x = 175$ mm a celor două profile, laminar şi turbulent. Oscilogramele *10*, *11* şi *12* arată forma acestor spoturi în diferitele puncte ale secţiunii din dreptul prizei (9).

Descrierea varietăţilor de mişcări întîlnite, precum şi examinarea acestor varietăţi la diferite intensităţi de jet, permite să se observe următoarele :

α) interacţiunea jet laminar — strat limită laminar interesează un volum limitat de fluid care depinde de intensitatea jetului, geometria orificiului de ieşire, grosimea locală a stratului limită (de exemplu pentru un jet de intensitate $\Delta_p = 4{,}2$ mm întreaga zonă de interacţiune se termină la $x = 80$ mm, iar pentru un jet de intensitatea $\Delta p = 3{,}2$ mm alcool care iese prin priza (4), zona de interacţiune se întinde pînă la $x = 300$ mm). Bineînţeles că aceşti parametri trebuie consideraţi în aceleaşi condiţii de scurgere : grad de turbulenţă a curentului exterior, rugozitate, nivel acustic perturbator etc.



Oscilograma 14. Sensul de formare a imaginii

β) Acest volum limitat are drept caracteristică esenţială apariţia fluctuaţiilor de înaltă frecvenţă (armonice ale frecvenţelor fundamentale de perturbație) însă începînd numai de la o anumită intensitate (în cazul studiat $\Delta p=3{,}1$ mm). De exemplu oscilograma *13* arată prezența acestei oscilații de înaltă frecvență pentru o intensitate de jet $\Delta p= 4{,}2$ mm, cînd începînd de la $x = 80$ mm mișcarea în stratul limită este complet turbulentă.

γ) În privința apariției spoturilor oscilogramele *4* și *5* par să arate că origina spoturilor este o *bruscă amplificare a amplitudinei unei oscilații* prezente în stratul limită, fenomen petrecut *la scară aproximativ microscopică*. Pe de altă parte multe alte oscilograme efectuate în alte puncte par să indice că spotul e indisolubil legat de existența unei *repartiții de viteze într-un volum finit*, el reprezentînd alternanța a două mișcări limită laminară și turbulentă. În acest sens pledează numeroasele noastre observații că spotul apare numai de la o anumită intensitate a jetului perturbator, capabil să intereseze întreaga secțiune a stratului limită. În orice caz conceptul de spot turbulent atribuit unei porțiuni bine delimitate de fluid ce se scurge cu viteza medie a curentului și înăuntru căreia mișcarea este turbulentă trebuie extins, întrucît noi am remarcat mișcări de ansamblu cu caracter spotic dar care reprezentau grupe formate din oscilații de înaltă frecvență, ca exemplu fiind oscilograma *14*.

B. *Repartiții de viteze medii în zona de influență a jetului perturbator.* În zona *D* din figura 2 s-au determinat profilele de viteză cu tub Pitot, atît pe linia mediană a plăcii, cît și la distanțe simetrice $Z \pm 2{,}5$ mm de această linie. Determinările s-au făcut pentru trei intensități de jet : $\Delta p = 3{,}2$ mm, $\Delta p= 2{,}4$ mm și $\Delta p= 0$, corespunzătoare respectiv începutului tranziției prin spoturi, regimului de fluctuații mari fără caracter spotic și regimului de mișcare laminară neperturbat artificial. În diagramele 1—9 din figura 4 sînt arătate aceste distribuții de viteze medii.

Pe baza rezultatelor obținute putem remarca următoarele :

a) Există un acord destul de bun între observațiile vizuale cu firul cald, observații schematizate în figura 3 și evoluția profilelor de viteză din figura 4. Într-adevăr, priza (1) care este înaintea perturbatorului este practic neafectată de el și de asemena începînd de la priza (8) efectul jetului ca dezvoltare individuală dispare, rămînînd doar efectul global asupra profilului de viteze, efect neobservabil de diagrama (9) deoarece profilul este laminar cu spoturi rare, factorul de intermitență de ordinul 0,2—0,3.

b) Deși repartiția de viteze în dreptul prizei (2) în cazul jetului perturbator nu este corectă (rezultatele tubului Pitot sînt alterate prin faptul că vitezele au direcții variabile aici), totuși se poate observa că aproape pe întreaga secțiune jetul acționează ca un obstacol, efect păstrat în lungul plăcii aproape pînă la priza (9). Modificarea repartiției laminare ($\Delta p= 0$) este importantă și se observă că ambele intensități de jet ($\Delta p= 3{,}2$ mm, $\Delta p= 2{,}4$ mm) provoacă nete devieri de la profilul laminar neperturbat. Putem afirma că luarea în considerare a repartițiilor de viteze medii nu oferă un criteriu de caracterizarea regimului tranzițional, întrucît deosebirea între modificările aduse de cele două intensități de jet nu e concludentă. Singura diagramă mai elocventă în această privință

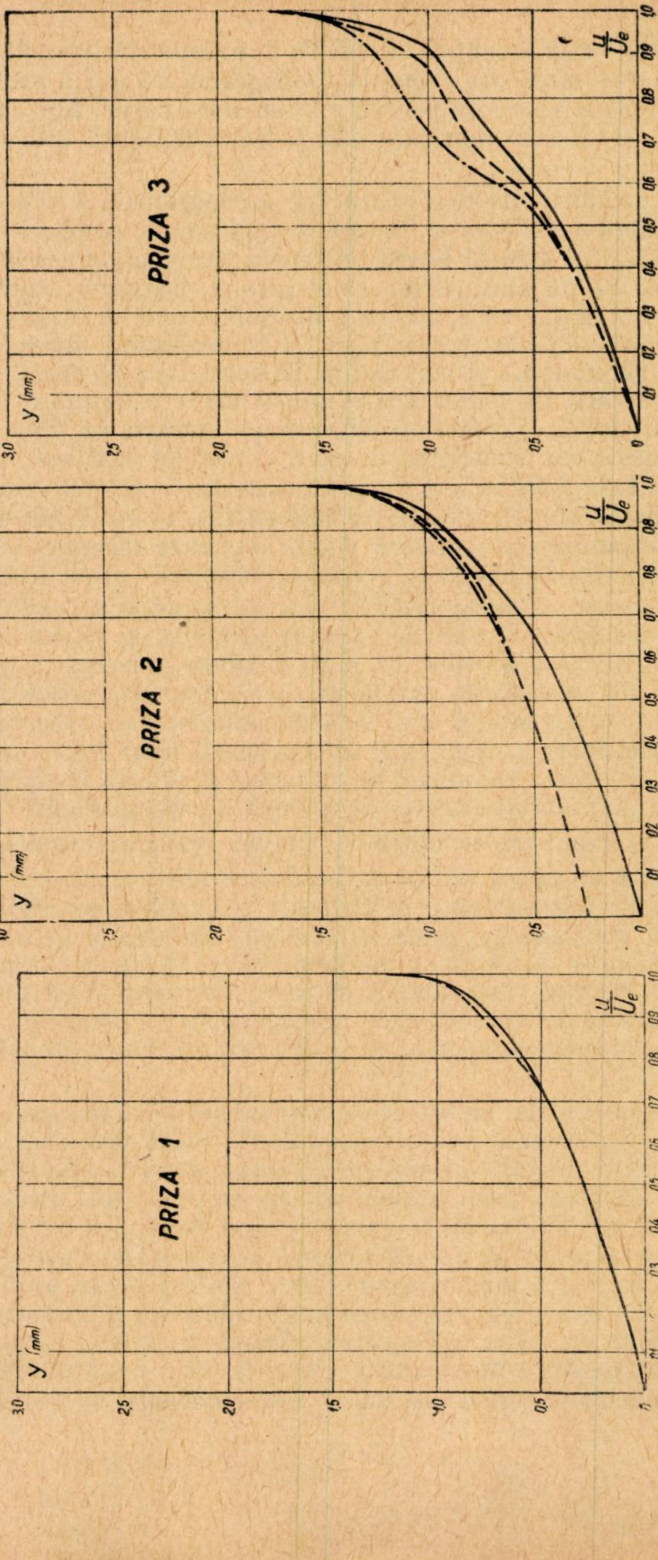


Fig. 4 *a*, *b*, *c*. — Repartiția de viteze medii pe linia mediană ($z=0$) a plăcii, în dreptul prizelor 1 . . . 3.

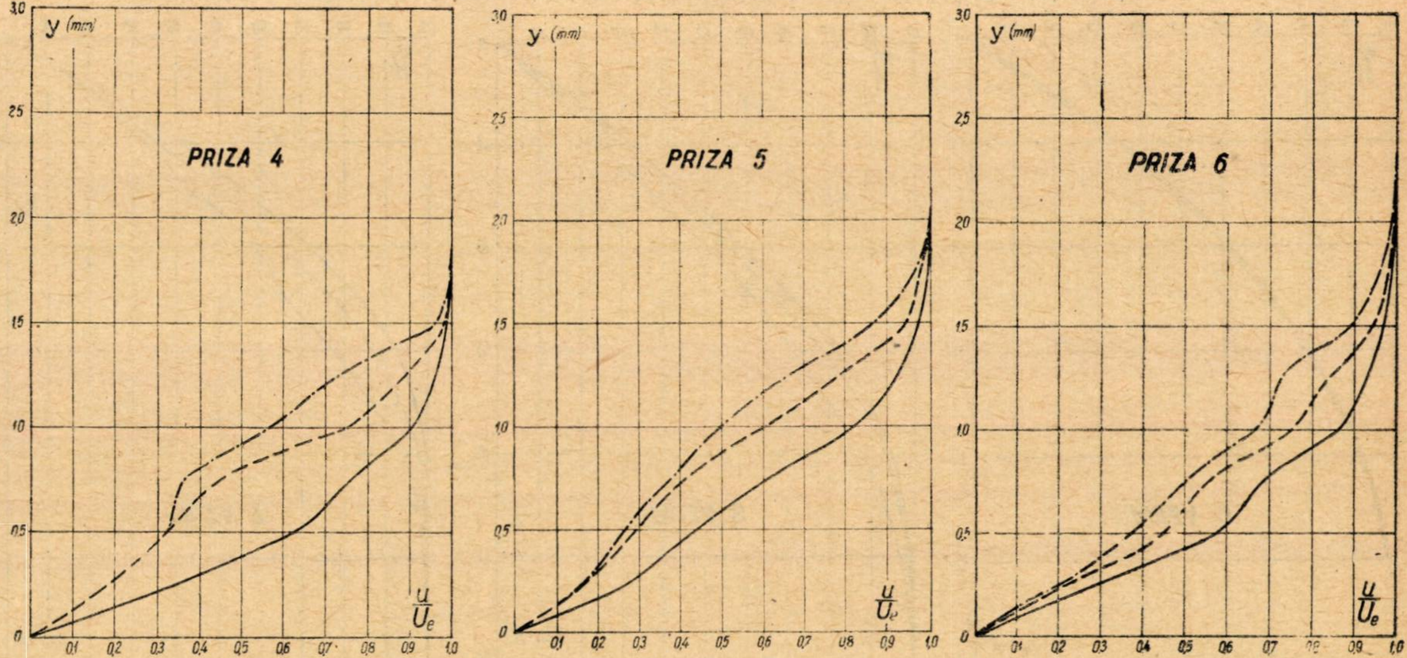


Fig. 4 *d*, *e*, *f*. — Repartiţia de viteze medii pe linia mediană ($z=0$) a plăcii, în dreptul prizelor 4 . . . 6.

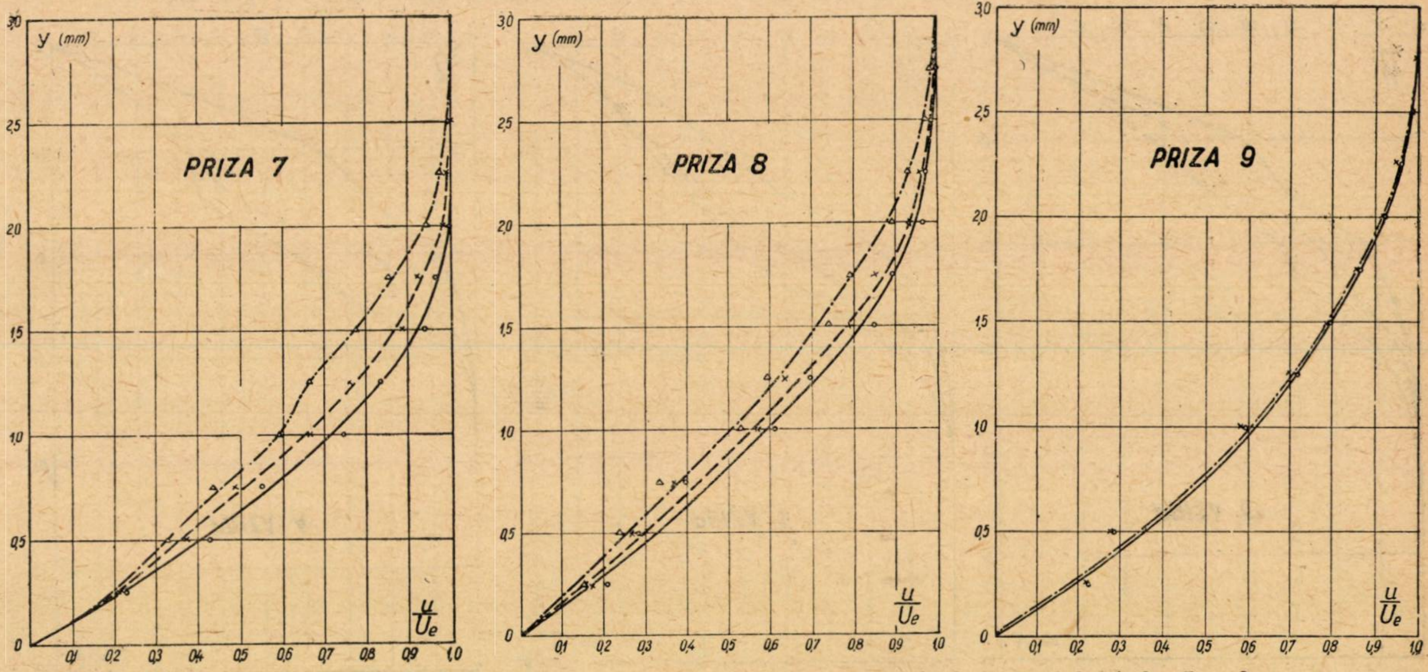


Fig. 4 *g*, *h*, *i*. – Repartiţia de viteze medii pe linia mediană ($z=0$) a plăcii, în dreptul prizelor 7 . . . 9.

este diagrama 4 unde se pare că își au origina spoturile ce vor interesa mai departe întreaga secțiune a stratului limită. Pe această diagramă se observă că repartiția de viteze este astfel încît domeniul cuprins între $y = 0{,}8$ mm și $y = 1{,}7$ mm formează o repartiție de viteze individualizată spațial prin cele două cote unde $\frac{du}{dy} = 0$. Această porțiune de fluid comportă alternanța a două repartiții de viteze, alternanță analogă întrucîtva spoturilor dezvoltate mai departe (de exemplu priza (9)) însă această alternanță se efectuează de către grupe de oscilații de înaltă frecvență prin mărirea întîmplătoare a amplitudinilor ($y = 0{,}8$ mm, oscilograma *5*) sau micșorarea lor ($y = 1{,}3$ mm oscilograma *4*).

c) Repartiția de viteze în cazul absenței jetului perturbator este de tip Blasius cu foarte bună aproximație; de asemenea la distanța $z = \pm 2{,}5$ mm de linia mediană nu se mai simte influența jetului în repartiția de viteze care este tot de tip Blasius. Aceasta indică într-adevăr efectul perturbatorului într-un volum finit de fluid. Diagramele din figura 5 sintetizează aceste rezultate.

Este interesant de remarcat că profilul Blasius nu e alterat de tridimensionalitatea scurgerii prezente prin influența pereților. De exemplu la priza (9) avem extinderea laterală a porțiunii laminare numai de aproximativ 20 mm față de cei 80 mm ai plăcii și o grosime a stratului limită de aproximativ 3 mm. De asemenea porțiunea inițială a plăcii are într-adevăr un gradient longitudinal de presiune foarte apropiat de zero însă de la priza (9) acest gradient se modifică sensibil ca urmare a pierderii de presiune în lungul plăcii montate în camera de experiență. Dar nici această deviere în aval, de la condițiile teoretice nu alterează sensibil (în limita erorilor experimentale) profilul de viteze Blasius din amonte.

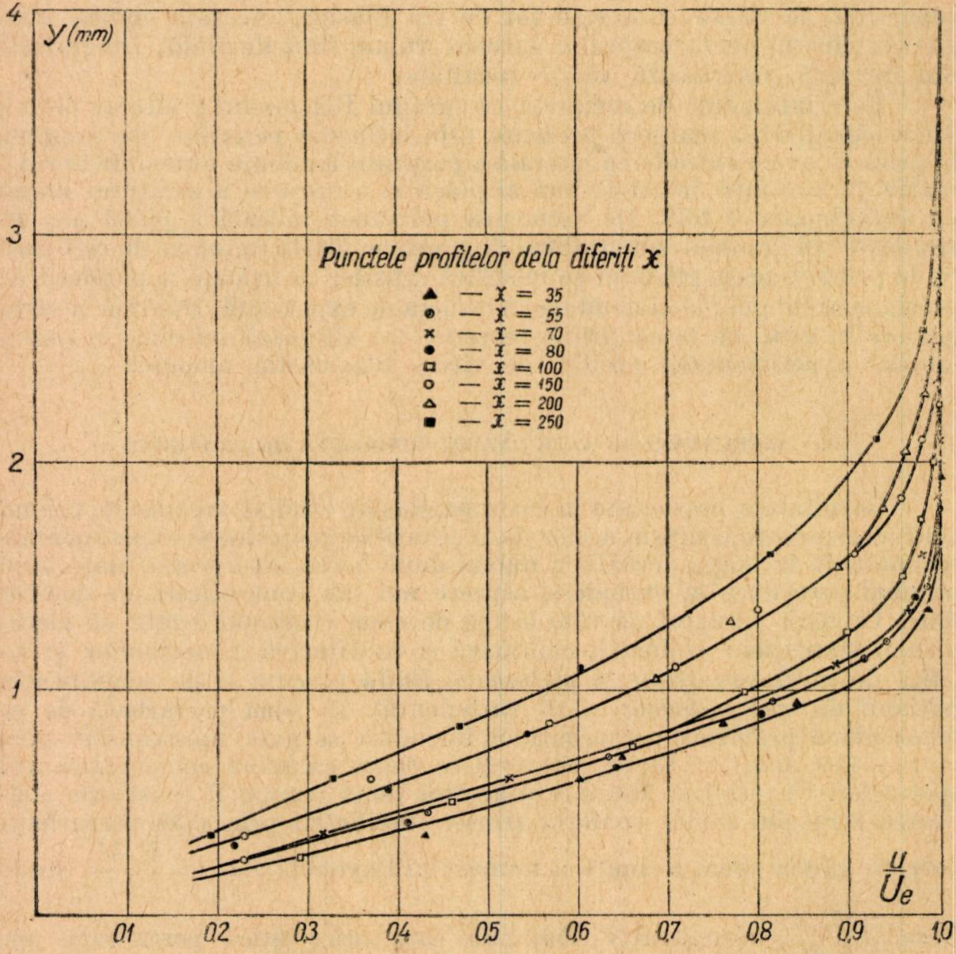
5. CONFRUNTĂRI CU ALTE CAZURI CUNOSCUTE DE TRANZIȚIE

Rezultatele prezentate în cazul particular studiat trebuie în primul rînd interpretate conform acelor date științifice teoretice și experimentale recunoscute în etapa actuală și numai după aceea interpretat materialul original care duce la extinderi, aspecte noi sau contraziceri ale acestor date. În acest paragraf ne vom ocupa de două chestiuni legate de mecanismul tranziției: evaluarea calitativă și cantitativă a noțiunilor științifice de mică *perturbație* și *perturbație finită* precum și de semnificația noțiunii de *spot turbulent* (pată turbulentă). În zona perturbată de pe placa plană problema perturbațiilor introduse se pune aproximativ pînă la $x = 170$ mm, iar de aici în aval se poate examina comportamentul spoturilor. Criteriul de limitare a acestor două regiuni îl constituie analizarea stratului limită conform teoriei stabilității prin mici perturbații potrivit căreia avem o limită a numărului Reynolds $Re_{\delta^*} = \frac{U_e\,\delta^*}{\nu}$, unde $\delta^* \simeq 1{,}7\sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$, aproximativ 450, sub care orice mică perturbație in-

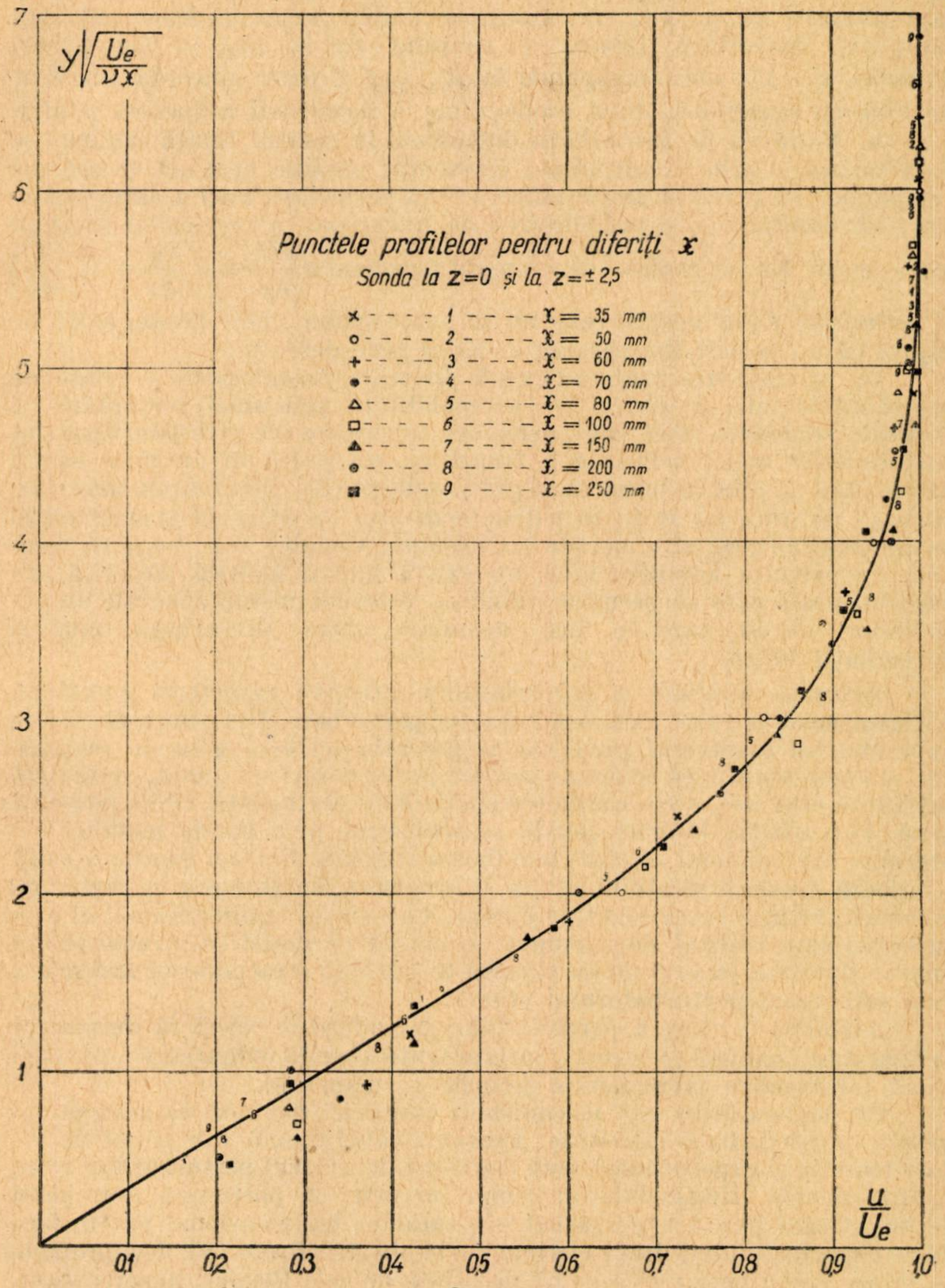
Fig. 5

Repartiţia vitezelor medii, lateral ($z = \pm 2{,}5$ mm) faţă de linia mediană a plăcii (fig. 5 *a*)

Figura 5 *b* arată confruntarea profilelor neperturbate cu profilul Blasius



5 *a*


$y\sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}$
7
6
5
4
3
2
1
Punctele profilelor pentru diferiți x
Sonda la $z=0$ și la $z=\pm 2{,}5$
× - - - - 1 - - - - $x =$ 35 mm
○ - - - - 2 - - - - $x =$ 50 mm
+ - - - - 3 - - - - $x =$ 60 mm
● - - - - 4 - - - - $x =$ 70 mm
△ - - - - 5 - - - - $x =$ 80 mm
□ - - - - 6 - - - - $x =$ 100 mm
▲ - - - - 7 - - - - $x =$ 150 mm
◉ - - - - 8 - - - - $x =$ 200 mm
■ - - - - 9 - - - - $x =$ 250 mm
$\frac{u}{U_e}$
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0

trodusă trebuie să se amortizeze. În cazul stratului limită studiat de noi cu $U = 13$ m/sec., $\nu = 15{,}1.10^{-6}$ m^2/sec, se obţine $x = 81{,}6$ mm (aproximativ priza (5)), în timp ce datele experimentale [1] dau începutul dezvoltării liniare a spotului de la $Re_{\delta^*} = 650 \div 800$. Punctul $x = 170$ mm corespunde la $R_{e_{\delta^*}} = 650$ care concordă suficient de bine cu aprecierea, după oscilograme, a terminării influenţei jetului.

a. Noţiunea de perturbaţie introdusă în stratul limită laminar se caracterizează prin amplitudine, frecvenţă, acţiune spaţială şi acţiune temporală. În privinţa amplitudinii există *perturbaţii mici* a căror caracteristică esenţială este posibilitatea de linearizare a termenilor inerţiali din ecuaţia Navier-Stokes $\left(\text{de exemplu termenul } u\frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow U\frac{\partial u'}{\partial x} + u'\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ şi *perturbaţii finite* despre care nu se poate spune nimic precis, afară de faptul că nu permit linearizarea de tipul precedent.

În privinţa frecvenţelor, există *frecvenţe fundamentale* corelate cu perturbaţiile mici în cadrul teoriei stabilităţii prin mici perturbaţii, şi *frecvenţe secundare*, mai mari, armonice superioare ale primelor, care sînt caracteristice zonei nelineare a tranziţiei, cel puţin în anumite cazuri particulare ca dîra în urma unui profil subţire [3]. Frecvenţele unei perturbaţii de orice fel ar fi, se pot detecta uşor cu ajutorul anemometriei cu fir cald sau prin alte metode (de exemplu vizualizare cu perle de telur [7]). În privinţa amplitudinilor nu există însă o metodă teoretică sau experimentală care să permită stabilirea valorilor instantanee ale amplitudinilor de la care se face deosebire între perturbaţii mici şi perturbaţii finite.

Acţiunea spaţială a perturbaţiilor priveşte caracterul punctual, bidimensional sau tridimensional al zonei perturbate. Din punct de vedere experimental caracterul punctual al perturbaţiei este greu de realizat, dar se poate aprecia că scînteia electrică produsă într-un punct, unde stratul limită este mic, are o extindere spaţială de perturbaţie cît se poate de mică. Perturbaţia bidimensională se realizează prin bande metalice vibratoare sau tot felul de obstacole (benzi rugoase, fire) cu grosimea mult inferioară grosimii stratului limită şi lungimea foarte mare în raport cu grosimea, întinse transversal pe curent. Caracterul tridimensional al perturbaţiei este realizat de exemplu de un jet ce perturbă stratul limită într-un domeniu cu ordinul de mărime al grosimii stratului sau mai mare, cum este cazul perturbatorului studiat.

Acţiunea în timp a perturbaţiilor introduse se referă la durata lor instantanee (scînteie electrică), intermitentă (bandă vibratoare) sau continuă (obstacolele permanente, jeturile permanente).

Se poate afirma că mecanismul tranziţiei depinde de această varietate de perturbaţii introduse. Pentru stratul limită, din punct de vedere teoretic şi experimental, este clarificat doar cazul perturbaţiilor mici, bidimensionale, sinusoidale în timp. Întrucît în porţiunea examinată de noi stratul limită neperturbat are caracter bidimensional putem face unele observaţii luînd drept cirteriu curba de stabilitate [8], deşi profilele de viteze perturbate sînt sensibil deosebite de cele Blasius, neperturbate.

Dăm mai jos tabelul cu frecvențele de instabilitate în lungul porțiunii examinate de noi.

Jetul introdus în experiențele noastre la priza (2) este tridimensional, continuu în timp și se comportă ca o perturbație mică pînă la intensitatea $\Delta p = 2{,}8$ mm col. alcool, deoarece oricare frecvențe prezente în zona perturbată nu se amplifică pentru a conduce la tranziție. Între $\Delta p = 3{,}0$ mm și $\Delta p = 4{,}0$ mm jetul introdus se comportă ca o perturbație finită (neliniar) în sensul că generează tranziția prin efecte ieșite din cadrul teoriei micilor perturbații.

Priza	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^{mm}	35	50	60	70	80	100	150	200	250
$R_{e_{\delta^*}}$	296	354	386	418	447	500	613	706	790
Frecvențe de instabilitate	—	—	—	712	620 ÷ 712	465 ÷ 605	260 ÷ 445	190 ÷ 354	142 ÷ 300

Un prim efect extrem de important este apariția frecvențelor mari de ordinul 2000—3000 Hz (vizibile în oscilogramele III, *6*) în afara limitelor de frecvențe date de curba de stabilitate. Aceste frecvențe mari sînt datorite instabilității secundare și au fost semnalate în cazul tranziției în dîra unui profil subțire [3]. În acest domeniu de intensitate ($\Delta p = 3{,}0 \div 4{,}0$ mm) schema scurgerii perturbate este similară celei descrise în paragraful 3, însă extinderea spațială a diferitelor zone se modifică, ca și frecvența spoturilor produse. Apariția frecvențelor secundare mari, se pare că e o caracteristică foarte importantă a zonei neliniare a tranziției. Aceste frecvențe trec direct în turbulență în cazul dîrei [3], în timp ce în stratul limită generează spoturi. Această deosebire de comportament se explică, după părerea noastră, prin înțelegerea noțiunii de spot ca alternanța a două profile de viteză diferite într-un volum finit de fluid, situație care nu există în cazul dîrei, deoarece repartiția de viteze laminară sau turbulentă este aproximativ aceeași (în mărimi adimensionalizate o exponențială).

Pentru intensități de jet mai mari ca $\Delta p = 4{,}2$ mm scurgerea este turbulentă începînd aproximativ din dreptul prizei (4) avînd o scurtă zonă tranzițională între prizele (2) și (4), zonă caracterizată tot prin oscilații de mare frecvență. Pentru intensități mai mari ca $\Delta p = 5{,}5$ mm jetul străbate stratul limită acționînd ca un obstacol rigid și provocînd tranziția sau turbulența prin desprindere de vîrtejuri.

Putem deci afirma că jetul ca perturbator tridimensional este extrem de eficace pentru provocarea gradată a tranziției în domeniul subcritic al curbei de stabilitate și că intensitatea lui joacă rolul micilor perturbații din cazul perturbațiilor bidimensionale sinusoidale. Rămîne de efectuat un număr important de experiențe pentru corelarea următorilor parametri fizici: numărul Reynolds al stratului limită, intensitatea ca direcţie şi mărime a jetului, geometria (formă şi mărime) orificiului, turbulenţa curentului exterior, efecte combinate ale mai multor perturbatoare. Datele informative obţinute de noi în examinarea acestor chestiuni (de exemplu jetul ieşind la prizele 3, 4, 5 dă efecte diferite; jetul combinat cu un fir transversal întîrzie sau accelerează tranziţia) permit să apreciem că obţinerea de rezultate în aceste probleme ar clarifica numeroase aspecte ale mecanismului tranziţiei.

b. Noţiunea de spot turbulent (introdus experimental de [9], tratat teoretic de [10] şi verificat experimental de [1], [14] pentru stratul limită şi de [5], [11], [12], pentru tuburi) comportă un domeniu finit de fluid, înăuntrul căruia mişcarea e turbulentă, domeniu separat de fluidul înconjurător în mişcare laminară. Această *pată de turbulenţă*, caracteristică turbulenţei la perete, se mişcă cu viteza medie a scurgerii şi în acelaşi timp se extinde spaţial dezvoltîndu-se lateral aproximativ linear după binecunoscutul unghi de 8,5° pînă la 11,5° stabilit în lucrarea [1] pentru stratul limită. Spotul poate fi identificat într-un anumit domeniu de numere Reynolds care depinde de caracterul tranziţiei (artificială sau naturală) şi geometria scurgerii (strat limită sau tuburi). Lăsînd la o parte descripţia formei şi evoluţiei spoturilor, studiată în lucrările de mai sus, în cercetarea noastră calitativă am urmărit două lucruri: punctele de origine a spoturilor şi comportamentul local într-o anumită secţiune a stratului limită. În această privinţă putem spune următoarele:

α) Scara de mărime geometrică la care operează firul cald de 7,5 microni, de cîteva ori mai mare ca liberul parcurs molecular, nu permite să obţinem informaţii despre comportamentul unui grup de molecule situat într-un cîmp puternic de forţe de inerţie, cu mare disipaţie vîscoasă locală. Or, acesta este cazul pentru concentrarea de vîrtejuri din apropierea peretelui în teoria stabilităţii cu mici perturbaţii [8] sau în domeniile cu frecvenţe foarte mari generate de interacţiunea jet-strat limită. Singura cale de a aborda comportamentul la scară microscopică a unui grup de molecule situat în astfel de condiţii este cea teoretică, deocamdată. Este de aşteptat ca pentru sisteme microscopice neconservative, în anumite condiţii la limită macroscopice, să apară fluctuaţii de energie care să scoată sistemul din comportamentul fizic linear adică continuitatea ecuaţiilor Navier-Stokes pînă la scara agitaţiei moleculare.

Din investigaţiile făcute de noi, cele mai mici domenii avînd fluctuaţii cu caracter spotic (întîmplătoare, bruşte, depăşind ordinul de mărime obişnuit în fenomenul observat) sînt cele arătate în oscilogramele *4* şi *5* unde se observă amplificări de tip spotic ale unei singure oscilaţii. Dimensiunea acestui volum este mai mică decît grosimea stratului limită local, ceea ce arată că volumul finit de fluid în care mişcarea este spotică depinde de repartiţia locală a energiei cinetice medii (modificarea repartiţiei de viteze provocată de jet). În orice caz dacă în cazul scînteii electrice originea spotului e bine precizată (dar nu poate fi investigată) în cazul jetului perturbator există volume diferite, bine definite tridimensional, care capătă fluctuaţii de tip spotic. Experimental există mari dificultăţi în detectarea unui astfel de volum, minim ca dimensiune, de asemenea în aprecierea caracterului spotic al mişcării ca şi în înregistrarea electronică.

β) Într-o secţiune a stratului limită tranziţional, după terminarea zonei de influenţă a jetului perturbator, spotul se manifestă clar ca alternanţa a două distribuţii de viteză, laminară şi turbulentă pe toată grosimea stratului limită. În acest sens se pot invoca argumentele următoare :

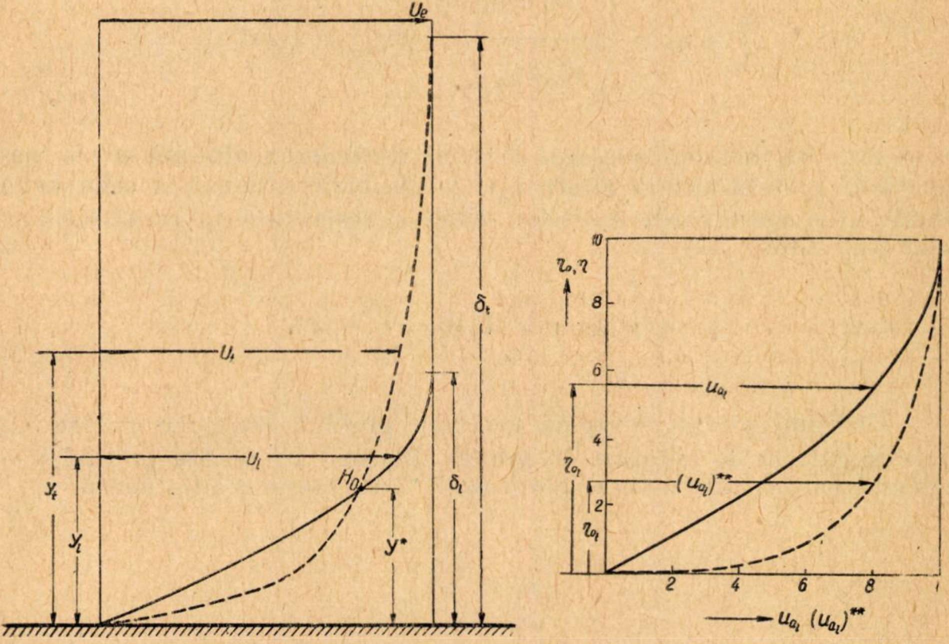


Fig. 6. — Schema alternării celor două profile de viteză, laminar şi turbulent, într-o secţiune a stratului limită tranziţional, în ipoteza conservării debitului.

— În studiul tranziţiei în dîra unui profil subţire [3] nu s-au observat spoturi şi explicaţia constă în faptul că în această dîră repartiţia de viteze turbulentă şi laminară este identică. Aceasta nu exclude însă posibilitatea existenţii unor spoturi incipiente, la scară microscopică sau la scară neobservabilă cu firul cald, spoturi care nu se dezvoltă din cauza inexistenţei acestei alternanţe de viteze medii.

— Evoluţia în stratul limită a unui spot dezvoltat, se face prin contaminare laterală [9] cu un unghi la vîrf de 8,5°—11,5°, începînd aproximativ de la $Re_{\delta^*} = 600$. Or, pe figura 2 se remarcă acest lucru extinderea laterală a spotului avînd în cazul nostru unghiul la vîrf de 7,2°.

— Schema din figura 6 pune în evidenţă alternanţa locală a celor două profile.

Fie profilul laminar $U_{a_e} = U_{a_e}(\eta_{0_e})$ unde $U_{a_e} = \frac{u_e}{U_e}$, $\eta_{0_e} = \frac{y_e}{\delta_e}$. Transformata acestei distribuţii [13] (fig. 6 b) dă profilul turbulent $U_{a_t}(\eta_{0_t}) = (u_{a_l})^{\star\star}$ unde $u_{a_t} = \frac{u_t}{U_l}$ şi

$$\frac{y_t}{\delta_t} = \eta_{0_t} = \frac{\int_0^{\eta_{0_e}} u_{a_l}^2 \, d\eta_{0_l}}{\int_0^1 u_{a_l}^2 \, d\eta_{0_l}} = \eta_{0_t}(\eta_{0_l}) = \eta_{0_t}(u_{a_l}^{\star\star})$$

La o anumită distanţă mişcarea exterioară rămîne nealterată şi cea mai plauzibilă ipoteză asupra alternanţei locale bidimensionale a celor două profile este conservarea debitelor, evident respectată în cazul conductelor [5]. Avem deci

$$\int_0^{\delta_l} u_l \, dy + \int_{\delta_e}^{\delta_t} U_l \, dy = \int_0^{\delta_t} u_t \, dy.$$

Utilizînd pentru o rapidă evaluare profilul Poiseuille pentru u_{a_l} (practic extrem de apropiat de profilul Blasius) iar pentru profilul turbulent transformatul acestui profil $(u_{a_l})^{\star\star}$ se găseşte relaţia locală

$$\boxed{\delta_t = \frac{7}{3}\delta_l}$$

valabilă pentru tranziţia prin spoturi dezvoltate. Variaţia mărimii $K = \frac{u_l}{u_t}$ e dată în tabelul de mai jos:

$\frac{Y}{\delta_l}$	0 0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,54
$\frac{u_l}{u_t} = K$	0 0,185	0,32	0,54	0,72	0,86	0,96	1

Ţinînd seama de relaţia traductorului cu fir cald $l = -s.u$ unde l = tensiunea electrică pe fir, s = sensibilitatea traductorului şi u = fluctuaţia de viteză locală considerată pozitivă în sensul creşterii vitezei medii, putem afirma pe baza tabelului de mai sus următoarele:

— Spoturile observate în porţiunea $\frac{y}{\delta_l} < 0{,}2$, care au forma din oscilograma, 15,15′, se găsesc în regiunea de comportament nelinear al traductorului de fir cald.

— În punctul H_0 $\left(\text{fig. 6a, } \frac{y}{\delta_e} = 0{,}54\right)$, trebuie să se observe doar fluctuaţia suprapusă vitezei medii şi nu alternanţa profilelor deoarece în acest punct $u_e = u_t$. Oscilogramele 16, 16′, din diferitele secţiuni ale stratului limită arată acest comportament particular în jurul valorii $\frac{y}{\delta_e} = 0{,}54$. Distanţa $y^\star = 0{,}54\ \delta_e$ este un punct de reper foarte preţios în verificarea spotului dezvoltat ca alternanţa celor două profile de viteze tipice şi în acelaşi timp o indicaţie experimentală pentru comportarea semnalului obţinut de la firul cald.

— Spoturile observate în porţiunea $0{,}6 < \frac{y}{\delta_e} < 2$ au forma din oscilogramele *17* şi *17′* şi se găsesc în regiunea de răspuns linear a traductorului, întrucît $\frac{|\Delta u|}{u} < 0{,}15$.

— Factorul de intermitenţă γ se poate deduce din indicaţia vitezei medii $\overline{u}^2_{\text{med}} = \gamma^2\, \overline{u}^2_t + (1-\gamma)\, \overline{u}^2_e$ cu acurateţă mai bună în regiunea $\frac{y}{\delta} \sim 0{,}1$ unde alternanţa celor două profile este foarte netă.

— Un calcul al energiilor cinetice dă:

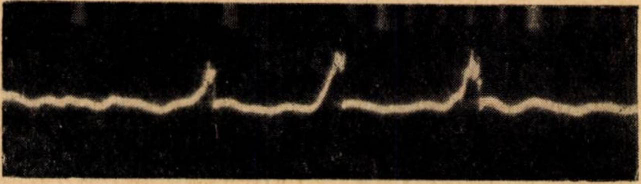
$$E_l = \int_0^{\delta_e} u_e^2\, dy + \int_{\delta_e}^{\delta_t} U_e^2\, dy\, ;\ E_t = \int_0^{\delta_t} u_t^2\, dy.$$

Se găseşte $E_t = 0{,}95\ E_e$, ceea ce pare plauzibil cu 5% E_e regăsit în energia cinetică de agitaţie turbulentă.

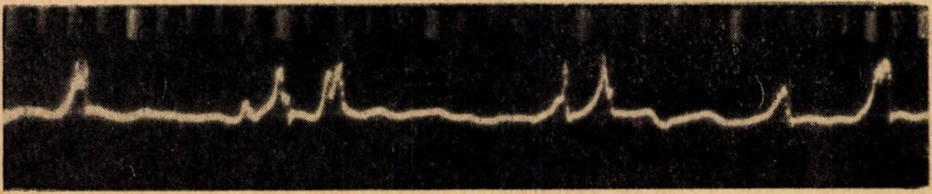
Trebuie să remarcăm că această schemă s-a dovedit valabilă pentru orice mod de generare a spoturilor. De exemplu în oscilogramele 15 — 17′ sînt spoturi produse prin jetul perturbator (15 — 17) sau prin dîra de vîrtejuri a unui obstacol în afara stratului limită (obturarea parţială a secţiunii de intrare în camera de experienţă) (15′ — 17′). Am făcut de asemenea verificări şi la alte viteze exterioare U_e în diferite secţiuni ale stratului limită.

0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,33
1,05	1,115	1,15	1,162	1,15	1,116	1,084	1,065	1,045	1,025	1

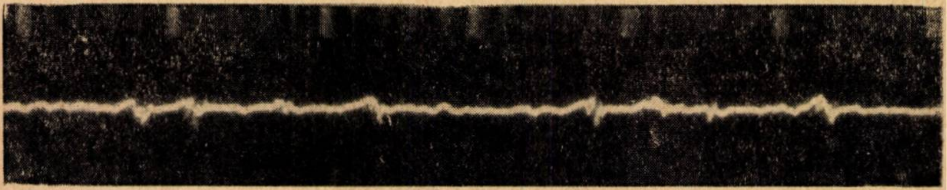
Forma semnalului electric aşa cum apare din oscilogramele anterioare este specifică trecerii unui spot [1]: salt brusc la contactul cu traductorul şi revenire de tip exponenţial la părăsirea traductorului. Totuşi în porţiunea $\frac{y}{\delta_e} > 0{,}6$ această formă nu mai este aşa de netă, revenirea la profilul turbulent fiind de alt tip.



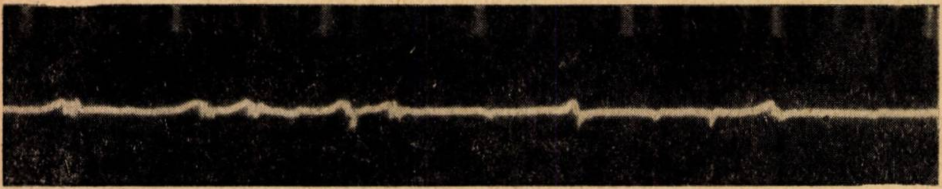
Oscilograma 15 $x = 250$; $y = 0{,}35$. Sensul de formare a imaginii ⟵



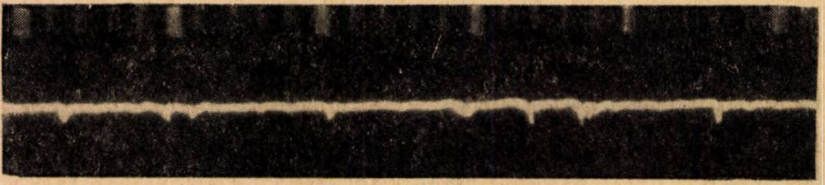
Oscilograma 15′ $x = 250$; $y = 0{,}35$. Sensul de formare a imaginii ⟵



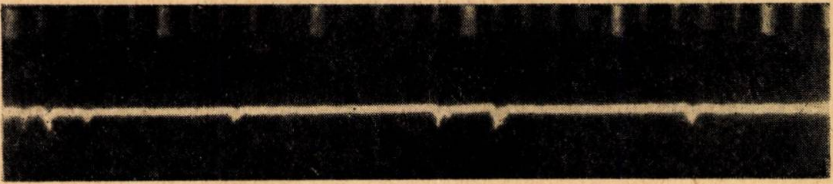
Oscilograma 16 $x = 250$; $y = 1{,}55$



Oscilograma 16′ $x = 250$; $y = 1{,}55$



Oscilograma 17 $x = 250$ şi $y = 2{,}35$



Oscilograma 17′ $x = 250$ şi $y = 2{,}35$

6. CONCLUZII

Examinarea regimului de tranziţie provocată artificial de un jet de intensitate mică în stratul limită de pe o placă plană în scurgere incompresibilă, pînă la $Re_{\delta^*} < 800$ permite să se tragă următoarele concluzii :

a) Efectul pereţilor se manifestă prin dezvoltarea stratului limită turbulent mărginit de o regiune de tranziţie care în ansamblu se dezvoltă aproximativ linear cu un unghi de contaminare laterală de 10°. Stratul limită central are caracter bidimensional nealterat de pereţi pînă aproape de joncţiunea celor două regiuni de influenţă parietală.

b) Jetul perturbator determină o zonă centrală de influenţă de lăţime constantă (5 mm) pînă la $Re_{\delta^*} = 600$, după care se extinde lateral cu un unghi de 7,2°. Interacţiunea jet laminar — strat limită laminar este complexă şi se caracterizează prin apariţia frecvenţelor mari (circa 3 000 Hz) de instabilitate secundară, ca şi prin modificarea profilului de viteză în zona de influenţă directă a jetului.

c) Există un domeniu de valori ale intensităţii jetului în care acesta se comportă ca o *perturbaţie mică* ($\Delta p < 2{,}8$ mm), alt domeniu de intensităţi în care jetul se comportă ca o perturbaţie finită ($2{,}8 < \Delta p < 5{,}0$) şi în sfîrşit pentru intensităţi mai mari jetul se comportă ca un obstacol rigid ce străbate stratul limită. Reglajul fin al intensităţii, geometria orificiului de ieşire numărul Re_{δ^*} al stratului limită, gradul de turbulenţă al curentului exterior permit obţinerea unor domenii de stabilitate analoge curbei de stabilitate din micile perturbaţii bidimensionale.

d) Originea spoturilor pare să fie o amplificare bruscă, întîmplătoare, a amplitudinei *unei singure oscilaţii* de frecvenţă foarte mare în condiţiile unui volum finit de fluid cu o anumită repartiţie de viteze. Comportamentul local al spoturilor este alternanţa celor două profile limită într-o secţiune a stratului limită : profilul laminar şi profilul turbulent. În punctul $y^* = 0{,}54\ \delta_l$ cele două profile se întretaie conform ipotezei, verificată în lucrare, de conservare a debitului în scurgere bidimensională.

Primită la redacţie la 4 august 1962

ТРЕХМЕРНЫЕ АСПЕКТЫ ПЕРЕХОДА, СОЗДАВАЕМОГО СЛАБОЙ СТРУЕЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ НЕСЖИМАЕМОМ ИСТЕЧЕНИИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе авторы проводят качественное исследование (при помощи диаграмм, осциллограмм) переходного граничного слоя, создаваемого ламинарной струей, бьющей из отверстия 0,8 мм на пластинку 80 × 1 300 при несжимаемом истечении в области при $Re_{\delta^*} <$ 800. Изучается влияние стенок, взаимодействие между ламинарной струей и ламинарным граничным слоем, изменение профилей скорости типа Блазиуса, появление и форма вихревых (турбулентных) пятен. Сила струи могла регулироваться с такой тонкостью, что проявлялась как небольшое или конечное возмущение, с получением в некотором определенном вниз по течению сечении, режима турбулентных пятен с желаемой степенью прерывистости до перехода в полностью развитое завихрение ($\Delta p_{\text{стр}} = 4{,}2$ мм ст. спирта). Высказывается мнение, что зарождение вихревого пятна происходит вследствие резкого увеличения колебаний очень высокой частоты (3 000 гц) в зоне влияния струи. Представляются также опытные доказательства, подтверждающие, что пятно завихрения является местом перемены распределения граничных скоростей ламинарных и вихревых. Производится количественная оценка изменения скоростей в предположении сохранения расхода при двухмерном истечении, причем оба профиля скоростей пересекаются на расстоянии $y^* = 0{,}54 \quad \delta_l$, где δ_l = толщина граничного ламинарного слоя.

THREE-DIMENSIONAL ASPECTS OF THE TRANSITION CAUSED BY A LOW INTENSITY JET ON A FLAT PLATE IN INCOMPRESSIBLE FLOW

ABSTRACT

This paper investigates qualitatively the transitional boundary layer caused by a laminar jet emerging through a 0.8 mm orifice on a 80 × 1 300 mm plate in incompressible flow in a range where $Re_{\delta^*} <$ 800. The influence of walls, the laminar jet — laminar boundary layer interaction, the modification of Blasius type velocity profiles and the appearance and shape of the turbulent spots have been examined. The jet intensity could be very finely adjusted such that the jet should behave like a small perturbation or a finite perturbation, a spot regime with a desired degree of intermittence up to the appearance of the fully developed

turbulence ($\Delta p_{\text{jet}} = 4.2$ alcohol col.) being obtained in a certain downstream section. It is believed that the spot originates in a sudden increase of a very high frequency oscillation (3 000 Hz) present in the zone of jet influence. Experimental arguments are also presented, which verify the fact that the spot represents locally the alternation of laminar and turbulent limit velocity distributions. The velocity variation has been quantitatively estimated by using the assumption of the conservation of the two-dimensional rate of flow, the two velocity profiles intersecting at the distance $y^{\star} = 0.54\ \delta_e$, where δ_e stands for the laminar boundary layer thickness.

BIBLIOGRAFIE

1. SCHUBAUER G. B. and KLEBANOFF P. S., Contributions on the Mechanics of Boundary layer Transition, NACA-TN 3489, 1955.
2. WILLE R., Modellvorstellungen zum Übergang Laminar – Turbulent, DVL-Bericht 113–960.
3. SATO H. and HUVIKI K., The mechanism of transition in the Wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow. Journal of Fluid Mechanics, vol. II, Part. 3, November, 1961.
4. LAUFER J. and VREBALOVICH T., Stability and transition of a supersonic laminar boundary layer on an insulated flat plate. L. O. Mech., vol. 9, Part. 2, octombrie 1960.
5. ROTTA J., Experimentaller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung in Rohr. Inginer-Archiv. 4, 1956.
6. PESTON J. H., The determination of turbulent skin-friction by means of pitot tubes. J.R.Ac. Soc. vol. 58, 1954.
7. WORTMANN F. X., Eine Methode zur Beobachtung und Messung von Wasserströmungen mit Tellur. ZAPh. 5, 1953.
8. TOLHMIEN W., Miscellen aus der Turbulenzforschung. Corso sulla Teoria della Turbolenza, Varenna, 1957.
9. CHARTERS ALEX. C. J., Transition between laminar and turbulent flow by transverse contamination. NACA T.N. 891, March, 1943.
10. EMMONS H. W., The laminar turbulent transmission in a boundary layer. Part. I, J. Aero. Sci. 18. p. 940, 1951.
11. LINDGREN E. R., Some aspects of the change between laminar and turbulent flow of liquids in cylindrical tubes. Archiv. for Fysik, 7, 293, 1954, a.
12. MATTIOLI ENNIO : Ricerce sperimentali sul mecanismo della transizione. Atti della Academia delle Scienze di Torino, 94, 1959–1960.
13. SĂVULESCU ST., On a hypothesis of limitative statistical organization of energy fluctuations in the fully developed turbulent boundary – layer. RMA, V, 6, 1960.

STUDII

ASUPRA SIMILITUDINII SALTULUI HIDRAULIC

DE

CONSTANTIN IAMANDI

INTRODUCERE

Caracterul de mişcare brusc variată a făcut din saltul hidraulic un fenomen cu deosebită importanţă pentru tehnică. Astfel dorinţa de a obţine soluţii cu minim de învestiţii şi cu siguranţă corespunzătoare, a îndreptat atenţia hidrotehnicienilor asupra acestei mişcări de transformare a curgerii rapide în curgere lentă.

Complexitatea fenomenului nu a permis însă pînă în prezent obţinerea unor tratări teoretice care să rezolve total problemele hidraulice ale acestei curgeri. Astfel curburile mari ale firelor de curent ca şi desprinderea unor particule din curgerea principală fac în general ineficace metodele actuale de studiu; astăzi fiind în general valabile numai relaţiile obţinute prin tratarea în ansamblu a fenomenului.

În această situaţie cercetătorii au încercat unele schematizări ale fenomenului cu valabilitate redusă însă în general mergîndu-se în special pe calea tratării experimentale. Materialul experimental acumulat astfel în acest domeniu este vast, deosebindu-se în special lucrările laboratoarelor sovietice care au adus soluţii pentru o serie de probleme legate de folosirea saltului hidraulic în amenajările energetice, hidroameliorative, căi pe apă etc.

În faţa acestei situaţii considerăm că se poate face un pas înainte [1] pornind de la o serie de ipoteze fundamentate prin tratarea corespunzătoare a vastului material experimental existent. În acest sens în lucrarea de faţă, stabilind în ce constă fenomenul studiat şi respectiv care sînt elementele hidraulice fundamentale, se obţine legea de similitudine a acestuia.

NOTAŢII FOLOSITE

h_1 = prima adîncime conjugată a saltului hidraulic egală cu adîncimea contractată în cazul amenajărilor hidrotehnice,
h_2 = a doua adîncime conjugată a saltului hidraulic,
h_s = $h_2 - h_1$ = înălţimea saltului hidraulic,
l_s = lungimea saltului hidraulic,
$\mathcal{F}_{r_1} = \dfrac{q^2}{gh_1^3}$ = valoarea numărului $\mathcal{F}_r$ în prima secţiune conjugată,
v_1 = viteza medie pe verticală în prima secţiune conjugată,
q = debitul specific pe unitatea de lăţime,
g = acceleraţia gravitaţională,
ρ = densitatea apei,
γ = greutatea specifică a apei.

NATURA SALTULUI HIDRAULIC

Dacă în forma cea mai generală noţiunea de salt hidraulic reprezintă trecerea de la mişcarea rapidă la mişcarea lent-fluvială, nu există însă o definire precisă a elementelor hidraulice a acestui fenomen. Astfel astăzi modul în care acestea se consideră este diferit funcţie de modul de cercetare a mişcării.

Pe baza cercetărilor existente şi a observaţiilor noastre în natură şi laborator [2] vom prezenta pe scurt în ce constă structura fenomenului studiat şi care sînt elementele sale principale.

Considerînd curgerea plană produsă pe un pat orizontal, se poate susţine că fenomenul studiat este format din două mişcări distincte (fig. 1) şi anume : zona unui curent de translaţie sub forma unei vîne divergente *a* şi zona curgerii superficiale foarte puternic aerată *b*. Scurgerea de bază prin care se transportă debitul intrat în secţiunea contractată poate fi considerată cu suficientă exactitate ca mişcare permanentă. De asemenea, pentru o poziţie de echilibru a saltului pot fi considerate constante în timp şi caracteristicile hidraulice ale curgerii de suprafaţă.

Mecanismul de formare a saltului constă în următoarele :

Datorită legii generale de continuitate, în momentul în care condiţiile exterioare ale curgerii rapide sînt modificate (modificări de pantă, apariţia unui obstacol etc.) şi poate apărea curgerea lentă, se va produce o divergenţă a curentului lichid. Suprafaţa liberă a curgerii va fi continuă şi va prezenta în zona de trecere de la un regim la altul două curburi diferite separate de o inflexiune (fig. 1). Funcţie de curbura acestei suprafeţe pe porţiunea din aval de punctul de inflexiune se va putea produce o rupere a legăturii unor particule aşa după cum dovedeşte şi teoretic A. Puzanov [3]. Astfel din momentul în care particulele pot părăsi suprafaţa liberă ele vor forma curgerea aerată superioară, care caracterizează trecerea de la saltul ondulatoriu la saltul hidraulic propriu-zis. Aceasta se produce conform rezultatelor teoretice amintite [3] cînd $\mathcal{F}_{r_1} = 1{,}474$ sau conform celor mai noi rezultate experimentale [4] cînd $\mathcal{F}_{r_1} = 1{,}513$. În mod practic se poate considera [5] această trecere produsă pentru condiţia $\mathcal{F}_{r_1} \geqslant 2$.

Astfel o particulă fluidă *m* deplasîndu-se pe suprafața liberă *S* (fig. 2) se va putea desprinde la un moment dat (în baza celor arătate) după o direcție *N* — *N*. Desprinderea ei, în realitate va fi împiedicată atît de particulele desprinse anterior (care se deplasează în sensul curgerii) cît și de particulele alăturate care încearcă a părăsi curgerea. În această situație reiese că pentru un anumit număr $\mathcal{F}_{r_1}$ se va forma la un moment dat un echilibru în care volumul de particule desprinse se poate considera constant după cum am amintit.

Saltul fiind format și nivelele amonte și aval fiind păstrate la aceeași valoare, se observă însă o oscilație continuă a limitelor saltului hidraulic, se observă dezgoliri repetate ale secțiunii contractate. Aceasta se datorește faptului că la anumite momente particulele fluide din zona superioară pătrund în curgerea de bază pe porțiunea cuprinsă între secțiunea contractată și punctul de inflexiune, datorită vitezei lor de cădere. Astfel pentru moment, volumul situat deasupra vînei divergente se va micșora și prin aceasta se va modifica și efectul de frecare și presiune al acestuia pe conturul superior al curgerii divergente inferioare. Conturul respectiv se va modifica producînd în compensare noi desprinderi de particule. Aceasta se repetă continuu putînd considera însă cu toată exactitatea că saltul are totuși o stare de echilibru medie.

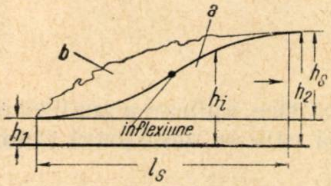


Fig. 1. — Secțiune longitudinală prin saltul hidraulic.

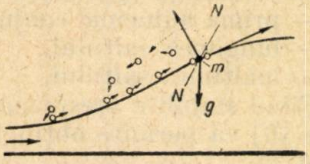


Fig. 2. — Schema deplasării particulelor situate pe conturul superior al curgerii de bază a saltului hidraulic.

În ceea ce privește nomenclatura folosită pentru acest caz de mișcare trebuie subliniat de asemenea că nu este unitară, deosebind următoarele noțiuni :

— salt hidraulic simplu [7],
— salt hidraulic apropiat [8],
— salt hidraulic în stare critică [9].

Noi considerăm că noțiunea *salt hidraulic* este corespunzătoare și ea definește curgerea care începe din secțiunea contractată și care se caracterizează printr-un vîrtej de suprafață cu o proiecție pe orizontală egală cu lungimea fenomenului respectiv. Celelalte cazuri de trecere de la regim rapid la regim lent sînt situații speciale în care se formează saltul hidraulic și pot fi numite ***salt hidraulic înecat*** și ***salt hidraulic îndepărtat*** cu diferite grade de înecare sau îndepărtare.

Astfel referindu-ne la nomenclatura actuală, considerăm că este mai exact a se numi salt hidraulic apropiat saltul înecat și a cărui apropiere de construcție depinde direct de gradul de înecare.

STABILIREA RELAȚIEI FUNCȚIONALE A SALTULUI HIDRAULIC

Se consideră cazul saltului hidraulic produs pe un pat orizontal, mișcarea fiind plană (fig. 1). De asemenea, așa cum s-a arătat mai sus, se consideră mișcarea formată din două curgeri, una de bază continuu divergentă prin care se transportă debitul și una de suprafață cu circuit închis, ambele, mișcări fiind considerate permanente.

În baza studiului structurii saltului hidraulic considerăm ca parametrii determinanți ai mișcării :

— densitatea,
— viteza medie în prima secțiune conjugată,
— accelerația gravitației,
— prima adîncime conjugată,
— lungimea saltului,
— înălțimea saltului.

Fiind stabilite aceste mărimi caracteristice, aplicarea analizei dimensionale [6] va permite obținerea legii după care se desfășoară fenomenul studiat.

Astfel conform teoremei produselor (π) va trebui să fie satisfăcută relația

$$\Phi(\rho, v_1\ l_s, h_s, h_1, g) = 0, \tag{1}$$

în care se consideră fundamentali parametrii ρ, v_1 și h_s funcție de care se vor putea scrie produsele corespunzătoare π_1, π_2 și π_3 relația (1) devenind

$$\psi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0. \tag{2}$$

Produsele amintite vor fi

$$\begin{aligned} \pi_1 &= l_s \cdot \rho^{\alpha_1} \cdot v_1^{\beta_1} \cdot h_s^{\theta_1} \\ \pi_2 &= h_1 \cdot \rho^{\alpha_2} \cdot v_1^{\beta_2} \cdot h_s^{\theta_2} \\ \pi_3 &= g \cdot \rho^{\alpha_3} \cdot v_1^{\beta_3} \cdot h_s^{\theta_3}, \end{aligned} \tag{3}$$

în care valorile α_i, β_i și θ_i se determină prin rezolvarea sistemelor de ecuații de mai jos, obținute prin condiția adimensională considerînd ca unități de bază lungimea, masa și timpul

$$\begin{cases} 1 - 3\,\alpha_1 + \beta_1 + \theta_1 = 0, \\ \alpha_1 = 0, \\ -\beta_1 = 0; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} 1 - 3\,\alpha_2 + \beta_2 + \theta_2 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ -\beta_2 = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 1 - 3\,\alpha_3 + \beta_3 + \theta_3 = 0, \\ -3\,\alpha_3 = 0, \\ -2 - \beta_3 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Valorile căutate sînt

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0 \qquad &&\alpha_2 = 0 \qquad &&\alpha_3 = 0,\\ &\beta_1 = -1 &&\beta_2 = -1 &&\beta_3 = 1,\\ &\theta_1 = 0 &&\theta_2 = 0 &&\theta_3 = -2, \end{aligned} \tag{7}$$

iar produsele adimensionale au expresiile

$$\pi_1 = \frac{l_s}{h_s}, \quad \pi_2 = \frac{h_1}{h_s}, \quad \pi_3 = \frac{gh_s}{v_1^2}, \tag{8}$$

egalitatea (2) putîndu-se scrie sub forma

$$\psi\left(\frac{l_s}{h_s}, \frac{h_1}{h_s}, \frac{gh_s}{v_1^2}\right) = 0. \tag{9}$$

În continuare, ţinînd seamă de relaţia generală stabilită între cele două adîncimi conjugate [5]

$$h_2 = h_1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8\,\mathfrak{F}_{r_1}} - 1\right), \tag{10}$$

produsele π_2 şi π_3 se mai pot scrie

$$\pi_2 = \frac{h_1}{h_s} = \frac{h_1}{h_2 - h_1} = \frac{h_1}{\frac{1}{2}h_1\left(\sqrt{1+8\,\mathfrak{F}_{r_1}}-1\right) - h_1} = \frac{2}{\sqrt{1+8\,\mathfrak{F}_{r_1}}-3}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \pi_3 &= \frac{gh_s}{v_1^2} = \frac{g}{v_1^2}(h_2 - h_1) = \frac{g}{v_1^2}\left[\frac{1}{2}\cdot h_1\left(\sqrt{1 + 8\,\mathfrak{F}_{r_1}} - 1\right) - h_1\right] =\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{g\cdot h_1}{v_1^2}\left(\sqrt{1 + 8\,\mathfrak{F}_{r_1}} - 3\right) = \frac{\sqrt{1 + 8\,\mathfrak{F}_{r_1}} - 3}{2\,\mathfrak{F}_{r_1}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Cu transformările efectuate se capătă relaţia fundamentală

$$\psi\left(\frac{l_s}{h_s}, \frac{2}{\sqrt{1 + 8\,\mathfrak{F}_{r_1}} - 3}, \frac{\sqrt{1 + 8\,\mathfrak{F}_{r_1}} - 3}{2\,\mathfrak{F}_{r_1}}\right) = 0 \tag{13}$$

sau sub formă explicită

$$\frac{l_s}{h_s} = \left(\frac{2}{\sqrt{1 + 8\,\mathfrak{F}_{r_1}} - 3}, \frac{\sqrt{1 + 8\,\mathfrak{F}_{r_1}} - 3}{2\,\mathfrak{F}_{r_1}}\right). \tag{14}$$

În cele din urmă se poate scrie în forma cea mai generală relaţia funcţională a saltului hidraulic

$$\frac{l_s}{h_s} = F\left(\mathfrak{F}_{r_1}\right) \tag{15}$$

şi care demonstrează legătura existentă între dimensiunile principale ale fenomenului (lungime şi înălţime) şi caracteristica curgerii în prima secţiune conjugată.

VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ

Pentru a putea dovedi justețea relației funcționale obținute, au fost efectuate lucrări experimentale într-un canal vitrat cu fund orizontal avînd dimensiunile principale 0,30 × 0,30 × 10,00. Canalul folosit a fost prevăzut cu dispozitive de determinare a presiunilor pe fund în secțiuni transversale, cît și cu instalație de profilometrie. Debitul de experimentare a fost furnizat de o stație de pompare prevăzută cu dispozitive de măsură și instalație de nivel constant, care au asigurat condițiile mișcării permanente cercetate.

Lungimea saltului a fost stabilită experimental în felul următor:

— mișcarea fiind relativ stabilizată se lansau plutitori pe suprafață în secțiunea contractată și care erau antrenați în mișcarea ruloului cu ax orizontal. Se urmărea apoi linia aval în care plutitori ieșiți la suprafață, erau întorși pe fața superioară a vîrtejului. Aceasta era linia considerată ca limită aval a saltului și care era comparată cu linia după care presiunea pe fundul canalului devine egală cu $\gamma\, h_2$ caracteristică mișcării uniforme din aval. De asemenea aceste rezultate experimentale se comparau cu curba suprafeței superioare a fenomenului, determinată cu ajutorul profilometrului și care devenea orizontală în secțiunea de capăt a saltului.

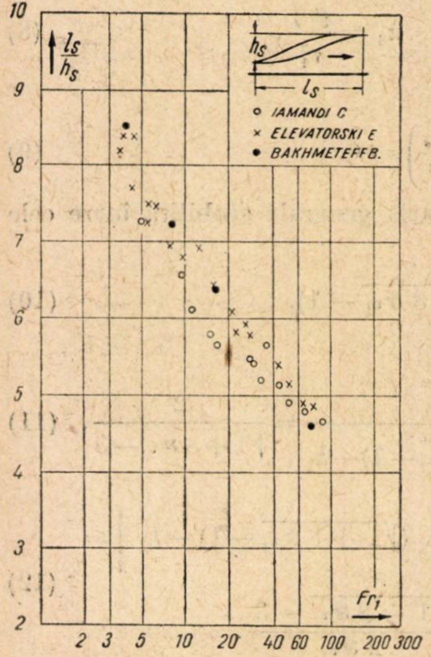


Fig. 3. — Rezultatele experimentale prelucrate pe baza relației funcționale stabilite.

Desigur că experimentarea saltului hidraulic a adus o serie de greutăți datorită în special pulsațiilor din cele două secțiuni conjugate și de care am amintit mai sus. Valorile considerate reale s-au obținut prin media mai multor măsurători.

În figura 3 se înfățișează rezultatele noastre experimentale cît și a altor autori și se poate afirma pe baza acestora că relația funcțională stabilită este pe deplin valabilă. Împrăștierea datelor experimentale relativ redusă (ținînd seamă de scara de prezentare), se explică prin condițiile grele de experimentare (influența pereților în cazul mișcărilor rapide, greutatea realizării măsurătorilor etc.).

În continuare, se dau în figurile 4 și 5 două imagini caracteristice ale instalației experimentale folosite, vedere generală (fig. 4) și panoul vitrat de determinări și observații (fig. 5).

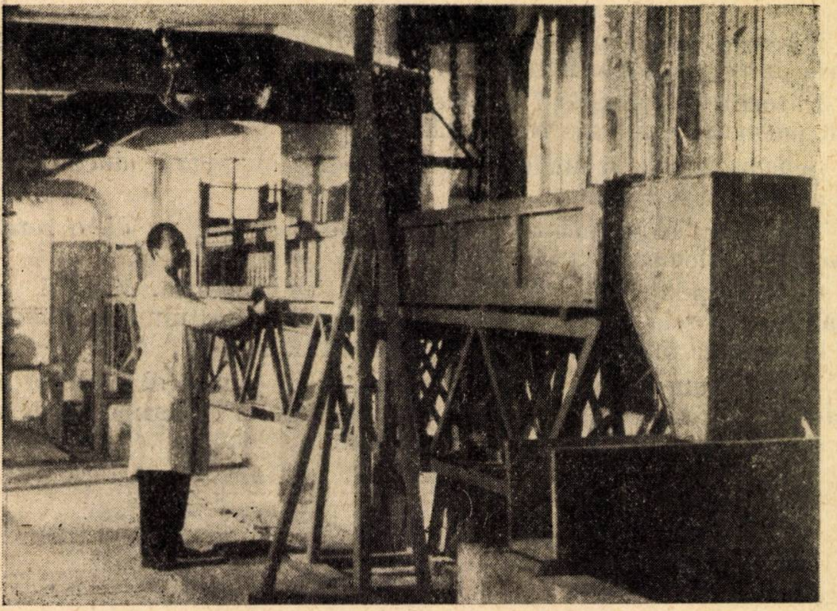


Fig. 4. — Vedere de ansamblu a instalației experimentale folosite.

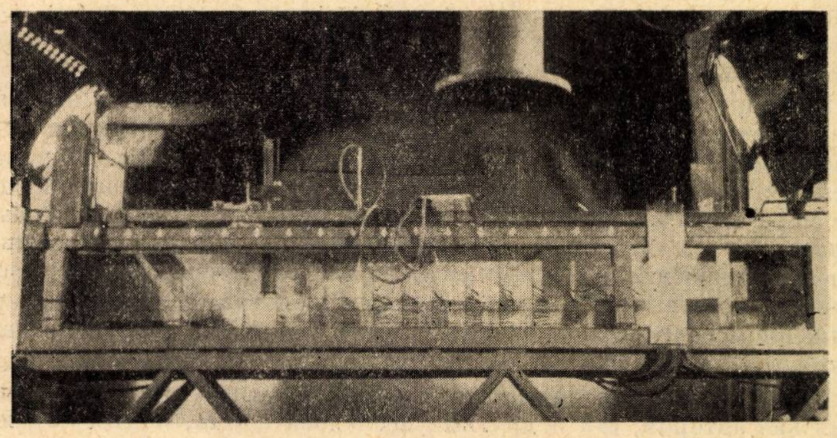


Fig. 5. — Panoul vitrat de lucru al canalului folosit.

CONCLUZII

Mişcarea brusc-variată a saltului hidraulic formează una din preocupările importante ale hidrotehnicienilor.

Datorită complexității fenomenului, tratările teoretice de pînă acum nu au putut da rezolvare completă.

Schematizările şi analogiile realizate nu au putut aduce o tratare reală a saltului hidraulic.

Materialul experimental existent este vast dar nu dă o rezolvare unitară a problemelor hidraulice ale acestui fenomen.

Considerîndu-se ca mărimi caracteristice lungimea, masa şi timpul se stabileşte o relaţie funcţională între lungimea saltului, înălțimea saltului şi valoarea numărului $\mathcal{F}_r$ în secţiune iniţială.

Relaţia funcţională stabilită se susţine experimental şi ea va forma fundamentarea teoretică a prelucrării materialului experimental al autorului şi existent în literatura de specialitate.

Primită la redacţie la 4 august 1962

О ПОДОБИИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРЫЖКА

РЕЗЮМЕ

Благодаря своим свойствам гидравлический прыжок имеет особо важное значение в технике. Но сложность этого явления до сих пор не представляла возможности дать теоретическое толкование, которое привело бы к полному решению этого вопроса.

При таком положении вещей, учитывая имеющийся в настоящее время богатый опытный материал, автор выводит функциональное соотношение, выявляющее подобие изучаемого движения. Начиная с объяснения структуры явлений, в работе устанавливаются определяющие параметры и применяется теорема произведений. В результате получается в самой общей форме, в виде равенства (15), функциональное соотношение, связывающее основные элементы гидравлического прыжка — его длину и высоту — с характеристикой течения в первом сопряженном сечении, считающемся местом начала рассматриваемого явления.

В работе даются также результаты опытных проверок, выполненных как автором, так и другими исследователями, подтверждающие действительность теоретических выводов, полученных на основании теоремы произведений.

Установленное функциональное соотношение даст возможность обработки опытного материала, имеющегося в специальной литературе.

ON THE SIMILARITY OF HYDRAULIC JUMP

ABSTRACT

Owing to its characteristics, the hydraulic jump is of a particular importance for technique. The complexity of the respective phenomenon has not allowed so far the achieving of theoretical treatments which should solve completely the problem.

Under these conditions and considering the large volume of existing experimental work, the author establishes a functional relation which emphasizes the similarity of the motion examined. Proceeding from the presentation of the phenomenon structure, he establishes the determining parameters and applies the product theorem. Finally, the most general functional relation which relates the main elements of the hydraulic jump — its length and height — to the flow characteristics in the first conjugate section from which the phenomenon is assumed to begin is obtained under the form of inequality (15).

The paper also presents experimental verifications obtained both by the author and by other investigators, which prove the validity of the theoretical results obtained through the application of the product theorem.

The functional relation established permits the processing of existing experimental data.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iamandi, *Asupra saltului hidraulic.* Colocviul internațional de mecanica fluidelor. Octombrie 1961, Brașov.
2. — *Contribuții teoretice și experimentale la problema conjugării prin salt hidraulic a biefurilor construcțiilor hidrotehnice.* Dizertație, Institutul de construcții, București, 1962.
3. A. Puzanov, *Pribliznireseni tvarn hladiny venitéhovodniho skoku.* Zakladnim vyzkumen k rozvoje vodniho haspodarsti, 1958, Praha.
4. I. A. Sandower, *Experiments on surge waves.* Water Power, **9**, *11* (1957).
5. Н. А. Чертоусов, *Специальный курс гидравлики.* Москва-Ленинград.
6. Cristea Mateescu, *Hidraulica.* București, 1961.
7. И. Ж. Агроскин, С. Т. Димитриѣв, Ф. Л. Пикалов, *Гидравлика.* Москва, 1950.
8. Wen te Chaw, *Open Channels hydraulics.* New York, 1960.

STUDII

VIBRAȚIILE PALELOR ROTOARELOR REACTIVE DE ELICOPTER

DE

AL. MARINESCU

NOTAȚII

$OXYZ$ — sistem fix de axe (planul XOY coincide cu planul de control),

$Ozyr$ — sistem de axe rotitoare (axa Or coincide cu poziția palei rigide),

$Ox_1 x_2 x_3$ — sistem de referință al carenei aeroreactorului,

R — raza rotorului,

t_p — profunzimea palei,

r — distanța unei secțiuni de axa rotorului,

$\bar{r}$ — distanța unui punct în planul meridian al carenei,

ξ — distanță curentă,

ζ_n — coordonată generalizată,

c — lungimea carenei,

$V = V_\infty$ — viteza de zbor spre înainte a elicopterului,

$U = U_\infty$ — viteza periferică a rotorului,

a_∞ — viteza sunetului,

$\eta \omega R$ — viteza care atacă un element de pală paralel cu planul de control,

$\xi \omega R$ — viteza care atacă un element de pală normal pe planul de control,

ω — viteza unghiulară a rotorului,

ν — frecvența proprie a palei,

M_r — masa aeroreactorului,

M_n — masa generalizată,

$m(r)$ — masa pe unitatea de lungime într-o secțiune la distanța r de axa de rotație,

θ_0 — unghiul de calaj al palei,

α — unghiul de incidență al palei respectiv al carenei,

β — unghiul de bătae al palei,

φ — unghiul planului meridian cu planul $Ox_1 x_2$,

C_z — coeficientul de portanță al profilului palei,
C'_α — panta curbei de portanță a profilului palei,
μ — gradul de înaintare al elicopterului,
λ — gradul de permeabilitate al rotorului,
C_p — coeficientul de presiune,
$M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach,
$y_n(r)$ — funcția formei modale,
$E I_p$ — rigiditatea la încovoiere a palei,
S — densitatea aerului,
Φ — potențialul mișcării în jurul carenei.

Problema vibrațiilor palelor pentru rotoarele de elicopter cu antrenare mecanică a făcut obiectul mai multor lucrări printre care putem cita [1], [2].

În ce privește vibrațiile palelor rotoarelor reactive însă, și este vorba aici numai de rotoare avînd pale cu aeroreactoare la extremități, problema se complică prin aceea că prezența carenei aeroreactorului la extremitatea palei modifică, pe de o parte, frecvența proprie a palei rotitoare, iar pe de altă parte, introduce noi forțe aerodinamice constante sau variabile cu timpul (forțe perturbatoare) de care trebuie ținut seama.

În lucrarea de față vom analiza vibrațiile palelor rotoarelor reactive pentru mai multe cazuri (pale pur articulate, pale pe butuc prins cardanic de arbore, pale cantilever) considerînd pentru generalitate că pala are formă trapezoidală fără torsiune.

De asemenea, vom ține seama de compresibilitatea aerului în aproximația Prandtl Glauert ($M_\infty \leqslant 0{,}7$) precum și de amortizarea aerodinamică introdusă de deformarea palei. Admitem că tracțiunea aeroreactorului coincide cu axa carenei sale și cu axa de simetrie a profilului palei care de regulă este biconvex simetric.

Înainte de a trece la examinarea problemei vibrațiilor forțate ale palei rotorului reactiv de elicopter vom face cîteva considerațiuni arătînd că în cazul cînd la extremitatea palei există un aeroreactor avînd masa M_r, prezența acestei mase modifică frecvența proprie a palei față de cazul cînd această masă nu ar exista.

Fie deci pala rotitoare cu viteza unghiulară ω referită unui sistem de axe $Oryz$ care se rotește cu ea (fig. 1). Momentul încovoietor în secțiunea r se scrie observînd figura 1

$$M(r) = \int_0^R \{ -m(\xi)\, \ddot{z}(\xi, t)\, (\xi - r) - m(\xi)\, \omega^2 \xi\, [z(\xi, t) - z(r, t)] \}\, d\xi - M_r\, \omega^2 R\, [z(R, t) - z(r, t)]. \tag{1}$$

Ținînd seama că

$$M(r) = E I_p \frac{d^2 z}{dr^2},$$

ecuația (1) devine după ce derivăm față de r

$$m(r)\,\ddot{z}(r,t) + \frac{d^2}{dr^2}\left[EI_p\,\frac{d^2 z}{dr^2}\right] + \\ + \omega^2\left\{m(r)\,r\,\frac{dz}{dr} - \frac{d^2 z}{dr^2}\left[\left[\int_r^R m(\xi)\,\xi\,d\xi + M_r\,R\right]\right]\right\} = 0. \tag{2}$$

Punînd [3]

$$z(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m(r)\,\zeta_m(t), \qquad m = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{3}$$

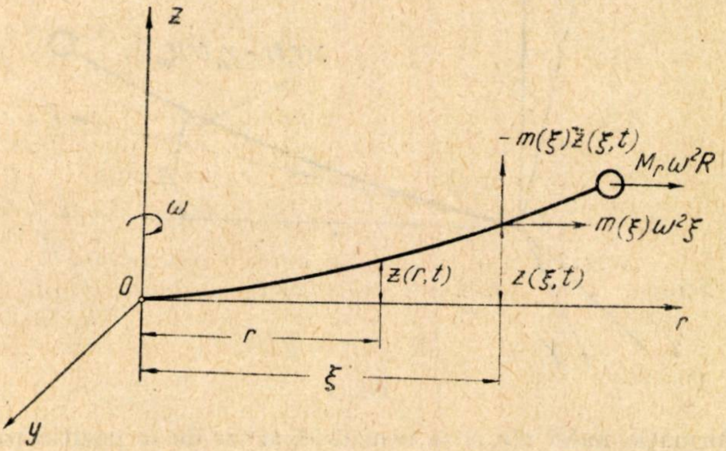


Fig. 1

după ce introducem expresia (3) în ecuația (2) înmulțim cu $y_n(r)$ și integrăm de la 0 la R obținem datorită ortogonalității funcțiilor $y_m(r)$, $y_n(r)$ ecuația vibrațiilor libere

$$M_n\,\ddot{\zeta}_n + M_n\,\nu_n^2\,\zeta = 0, \tag{4}$$

în care masa generalizată

$$M_n = \int_0^R y_n^2(r)\,m(r)\,dr \tag{5}$$

și frecvența proprie la pătrat

$$\nu_n^2 = \frac{1}{M_n}\int_0^R y_n(r)\left\{\frac{d^2}{dr^2}\left[EI_p\,\frac{d^2 y_n(r)}{dr^2}\right] + \right. \\ \left. + \omega^2\left[m(r)\,r\,\frac{dy_n(r)}{dr} - \frac{d^2 y_n(r)}{dr^2}\left(\int_r^R m(\xi)\,\xi\,d\xi + M_r\,R\right)\right]\right\} dr. \tag{6}$$

Deci influența masei concentrate a aeroreactorului la extremitatea palei se traduce prin termenul $M_r\,R$ în expresia (6) a frecvenței proprii.

Ecuația (4) poate fi obținută și cu ajutorul ecuației lui Lagrange după ce stabilim energia cinetică și potențială a palei (vezi [2]). Cunoscînd după cele văzute mai sus ecuația vibrațiilor libere (4), ecuația vibrațiilor forțate se scrie

$$M_n \ddot{\zeta}_n + M_n \nu_n^2 \zeta_n = Q_{1p} + Q_{2p} + Q_a \tag{7}$$

în care Q_{1p}, Q_{2p} sînt forțele generalizate corespunzătoare forțelor perturbatoare distribuite respectiv concentrate, iar Q_a forța generalizată corespunzătoare forței de amortizare aerodinamică rezultată din deformarea palei.

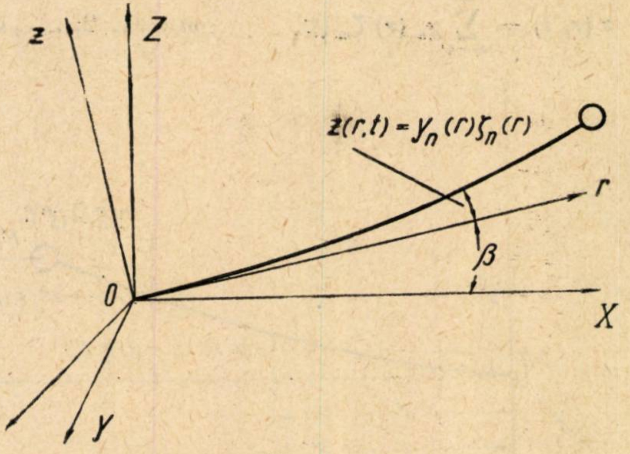


Fig. 2

Deformația palei $z(r, t)$ se consideră acum de la poziția palei rigide cu care corespunde axa Or a sistemului mobil (fig. 2).

În planul OYX poziția axei Or este definită de unghiul $\psi = \omega t$ iar normal pe acesta de unghiul de bătaie β dat de aerodinamica rotorului.

Să calculăm mai întîi forța generalizată corespunzătoare forței aerodinamice distribuite de-a lungul palei.

Considerînd pala articulată și cu variație liniară a corzii (fără torsiune) și ținînd seama de compresibilitatea aerului în aproximația Prandtl-Glauert vom scrie

$$Q_{1p} = \int_0^R \frac{\rho}{2} V_R^2 C_{ZC} t_p y_n(r) \, dr. \tag{8}$$

Deoarece [4]

$$\begin{aligned} \beta &= a_0 - a_1 \cos \omega t - b_1 \sin \omega t, \\ t_p &= t_0 \left(1 + p \frac{r}{R}\right), \\ V_R &\approx \eta \omega R, \\ C_{ZC} &\approx \frac{C_a'}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{a_\infty^2}}} \left(\theta - \frac{\xi \omega R}{\eta \omega R}\right) \end{aligned}$$

şi în plus

$$\eta\,\omega\,R = U\left(\frac{r}{R} + \mu \sin \omega\, t\right),$$

$$\xi\,\omega\,R = U\left(\lambda + \frac{r}{R}\,\frac{d\beta}{dt} + \mu \cos \omega\, t \sin \beta\right),$$

forţa generalizată Q_{1p} devine

$$Q_{1p} = A_0 + A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + A_2 \sin 2\,\omega t + B_2 \cos 2\,\omega t, \tag{9}$$

în care

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\rho}{2}\, C'_a\, t_0\, U^2 \left[\left(t_3 + \frac{1}{2}\,\mu^2 t_1\right)\theta_0 - \lambda\, t_2\right],\\
A_1 &= \frac{\rho}{2}\, C'_a\, t_0\, U^2 \left[2\,\mu\, t_2\, \theta_0 - t_1\, \mu\, \lambda + a_1\, t_3 + \frac{1}{4}\,\mu^2 a_1\, t_1\right],\\
B_1 &= -\frac{\rho}{2}\, C'_a\, t_0\, U^2 \left[\mu\, a_0\, t_2 - b_1\, t_3 - \frac{1}{4}\,\mu^2 b_1\, t_1\right],\\
A_2 &= \frac{\rho}{2}\, C'_a\, t_0\, U^2 \left[\mu\, b_1\, t_2 - \frac{1}{2}\,\mu^2 a_0\, t_1\right],\\
B_2 &= \frac{\rho}{2}\, C'_a\, t_0\, U^2 \left[\mu\, a_1\, t_2 - \frac{1}{2}\,\mu^2 t_1\, \theta_0\right],
\end{aligned} \tag{10}$$

iar mărimile t_1, t_2, t_3, t_4 sînt

$$\begin{aligned}
t_1 &= \int_0^R \frac{1 + p\,\dfrac{r}{R}}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\omega^2}{a_\infty^2}}}\; y_n(r)\, dr,\\
t_2 &= \int_0^R \frac{1 + p\,\dfrac{r}{R}}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\omega^2}{a_\infty^2}}}\; \frac{r}{R}\; y_n(r)\, dr,\\
t_3 &= \int_0^R \frac{1 + p\,\dfrac{r}{R}}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\omega^2}{a_\infty^2}}}\; \left(\frac{r}{R}\right)^2 y_n(r)\, dr,\\
t_4 &= \int_0^R \frac{1 + p\,\dfrac{r}{R}}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2\,\omega^2}{a_\infty^2}}}\; \left(\frac{r}{R}\right)^3 y_n(r)\, dr.
\end{aligned} \tag{11}$$

Este de reținut că pentru rotoarele reactive prinse cardanic de arbore și foarte adesea utilizate pe elicoptere, coeficientul $a_0 = 0$ și cum $b_1 = Ka_0 = 0$ avem

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\rho}{2} C'_a t_0 U^2 \left[\left(t_3 + \frac{1}{2}\mu^2 t_1\right) - \lambda t_2\right], \\
A_1 &= \frac{\rho}{2} C'_a t_0 U^2 \left[2 \mu t_2 \theta_0 - \mu t_1 \lambda - a_1 t_3 + \frac{1}{4}\mu^2 a_1 t_1\right], \qquad (12) \\
B_1 &= 0, \\
A_2 &= 0, \\
B_2 &= \frac{\rho}{2} C'_a t_0 U^2 \left[\mu a_1 t_2 - \frac{1}{2}\mu^2 t_1 \theta_0\right], \qquad (12a)
\end{aligned}
$$

iar pentru rotoarele cu pale cantilever în relațiile (12) se face $a_1 = 0$.

Vom stabili acum expresia forței generalizate datorită forțelor concentrate.

Precizăm că forțele care iau naștere pe carenă se consideră ca fiind concentrate pentru deformarea palei.

În calculul forțelor pe carenă vom face abstracție de viteza $V_\infty \sin \omega t$ neglijînd-o față de U_∞ ceea ce corespunde gradelor uzuale de înaintare urmînd să arătăm pentru cazurile cînd V_∞ nu este neglijabilă față de U_∞ ce corecții trebuie aduse.

Ca urmare a pasului general al palei ia naștere pe carenă o forță de împingere independentă de timp iar ca urmare a variației ciclice și a mișcării de bătaie o forță de împingere variabilă cu timpul. Forțele provenind din izbirea jetului de ejecție al aeroreactorului de către curentul incident nu se consideră deoarece în direcția deformării palei au o influență neglijabilă.

Pentru prima forță concentrată P_{cp} independentă de timp forța generalizată corespunzătoare este

$$Q'_{2p} = \int_0^R P_{cp}\, y_n(r)\, \delta\,(r - \xi)\, dr, \qquad (13)$$

în care $\delta\,(r - \xi)$ este funcția lui Dirac.

Pe baza proprietății funcției lui Dirac și cum $\xi = R - r_c \approx R$ putem scrie că

$$Q'_{2p} \approx P_{cp}\, y_n\,(R). \qquad (14)$$

În ce privește expresia forței P_{cp} ea este dată de relația

$$P_{cp} = \int_0^{2\pi} \int_0^c (p - p_\infty) \cos \varphi \, dS, \qquad (15)$$

unde

$$p - p_\infty = C_p \frac{\rho}{2} U_\infty^2, \tag{16}$$

C_p – fiind coeficientul de presiune, iar dS – elementul de suprafaţă pe carenă.

Referind carena care face unghiul α cu viteza U_∞ unui sistem de axe $Ox_1\, x_2\, x_3$ (fig. 3) şi folosind coordonatele cilindrice

$$x_1 = x_1,$$
$$x_2 = \bar{r}\cos\varphi,$$
$$x_3 = \bar{r}\sin\varphi,$$

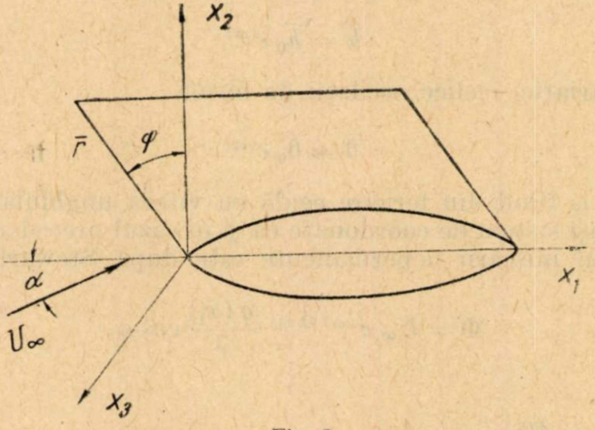


Fig. 3

potenţialul mişcării laterale [5]

$$\Phi = U_\infty \sin\alpha \left(\bar{r} + \frac{r_c^2}{\bar{r}}\right)\cos\varphi, \tag{17}$$

conduce la viteza de perturbaţie pe carenă

$$u = \frac{2\,U_\infty \sin\alpha\cos\varphi}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \cdot \frac{dr_c}{dx_1}. \tag{18}$$

Cum

$$C_p = -2\,\frac{u}{U_\infty}$$

şi

$$dS = r_c\, d\,\varphi\, d\,x_1$$

forţa P_{cp} devine

$$P_{cp} = -\frac{2\rho\, U_\infty^2 \sin\alpha}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{c} \cos^2\varphi\, r_c \frac{dr_c}{dx_1}\, dx_1\, d\varphi. \tag{19}$$

În intervalul 0 — c pe carena aeroreactorului $r_c \neq 0$ aşa încît forţa P_{cp} nu se anulează.

Pentru forţa concentrată variabilă cu timpul, forţa generalizată corespunzătoare se calculează tot cu ajutorul funcţiei lui Diarc şi are expresia

$$Q''_{2p} \approx P_{cv}\, y_n'(R), \tag{20}$$

unde P_{cv} se calculează tot cu ajutorul formulei (15) în care $(p - p_\infty)$ va fi calculat altfel.

În stabilirea potenţialului mişcării nepermanente pe carnă este de observat că datorită mişcării de bătaie carena execută deplasări de forma

$$\bar{h} = \bar{h}_0\, e^{i\omega t}$$

şi datorită variaţiei ciclice oscilaţii de forma

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_0\, e^{i\omega t}$$

frecvenţa lor ω fiind din fericire egală cu viteza unghiulară a rotorului. Folosind acelaşi sistem de coordonate ca şi în cazul precedent pentru carenă, potenţialul mişcării nepermanente este după Stewartson (vezi [5])

$$\Phi = U_\infty\, e^{i(\omega t + \bar{k} x_1)}\, \frac{q(x_1)}{\bar{r}} \cos\varphi, \tag{21}$$

unde

$$\bar{k} = \frac{\bar{\lambda}}{c}\, \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\omega c}{U_\infty},$$

$$q(x_1) = -\, e^{-i\bar{k}x_1} \Big(\Big[1 + i\bar{\lambda}\,\frac{x_1}{c}\Big)\bar{\theta}_0 + i\bar{\lambda}\,\frac{\bar{h}_0}{c}\Big]\, \bar{r}^2 = -\, e^{-i\bar{k}x_1} R(x_1)\, \bar{r}^2.$$

Pe carenă

$$\Phi = -\, U_\infty\, e^{i\omega t} R(x_1)\, r_c \cos\varphi \tag{22}$$

şi diferenţa de presiune

$$p - p_\infty = -\rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right). \tag{23}$$

Vom putea scrie deci

$$P_{cv} = \int_0^{2\pi}\int_0^{c} (p - p_\infty) \cos\varphi\, dS \tag{24}$$

și înlocuind

$$P_{cv} = \rho\, U_{\infty}^{2}\, e^{i\omega t} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{c} \cos^{2}\varphi \left(i\,\bar{\lambda}\, \frac{r_c}{c} + r_c\, \frac{dR\,(x_1)}{dx_1} + \right. \qquad (25)$$

$$\left. + R\,(x_1)\, \frac{dr_c}{dx_1} \right) r_c\, d\, x_1\, d\varphi = H\, e^{i\omega t}.$$

Astfel forța generalizată corespunzătoare forțelor concentrate

$$Q_{2p} = P_{cv}\, y_n\,(R) + H\, y_n\,(R)\, e^{i\omega t}. \qquad (26)$$

Vom calcula acum forța generalizată corespunzătoare forței aerodinamice care rezultă din deformarea palei.

Portanța pe un profil subțire de pală în regim nepermanent care execută numai oscilații flexionale ($\alpha = \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$) se scrie [4].

$$P_n = \pi\rho\, \frac{t_p^2}{4}\, \ddot{z} + t_p\, \pi\rho\omega\, r\, C\,(k)\, \dot{z}. \qquad (27)$$

Frecvența oscilațiilor fiind relativ mică putem considera că $C\ (k) \to 1$ și cum pentru deformarea în al n-lea mod $z = \zeta_n\,(t) \cdot y_n\,(r)$, forța generalizată corespunzătoare forței rezultată din deformarea palei va fi

$$Q_a = -\ddot{\zeta}_n\, \frac{\pi\rho}{4} \int_0^R t_p^2\, y_n\,(r)\, dr - \dot{\zeta}\, \pi\rho\omega \int_0^R t_p\, r\, y_n\,(r)\, dr. \qquad (28)$$

După cum se vede în toate expresiile care dau masele și forțele generalizate apare funcția $y_n\ (r)$, a cărui cunoaștere este neapărat necesară.

Fără a intra în detalii după lucrarea [2] expresia acestei funcții este pentru pala articulată de profunzime constantă

$$y_n(r) = A_{3n}\left(\sin\frac{\alpha_n}{R}\, r + \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{R}\, r\right) + A_{4n}\left(\sin\frac{\alpha_n}{R}\, r - \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{R}\, r\right), \qquad (29)$$

iar pentru cea cantilever

$$y_n(r) = A_{2n}\left(\cos\frac{\alpha_n}{R}\, r - \operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{R}\, r\right) + A_{4n}\left(\sin\frac{\alpha_n}{R}\, r - \operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{R}\, r\right), \qquad (30)$$

mărimile A_{mn}, α_n, putînd fi luate gata calculate din lucrarea citată. Pentru pala cu profunzime variabilă funcția formei modale se poate calcula după procedeul dat în lucrarea [6]. În acest fel avem toate elementele spre a da sub forma definitivă ecuația vibrațiilor forțate.

Ținînd seama de expresiile (9), (26) și (28) ale forțelor generalizate ecuația (7) a vibrațiilor forțate devine

$$\ddot{\zeta}_n + C_1\, \dot{\zeta}_n + C_2\, \zeta_n = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 \sin\omega t + \bar{B}_1 \cos\omega t + \qquad (31)$$

$$+ \bar{A}_2 \sin 2\,\omega\, t + \bar{B}_2 \cos 2\,\omega\, t + \bar{\bar{H}}\, e^{i\omega t},$$

unde

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\pi\rho\omega\int_0^R t_p\, r\, y_n(r)\, dr}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\, y_n(r)\, dr}, \\
C_2 &= \frac{M_n\, \nu_n^2}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\, y_n(r)\, dr}, \\
\bar{A}_0 &= \frac{A_0 + P_{cp}\, y_n(R)}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\, y_n(r)\, dr}, \\
\bar{A}_1 &= \frac{A_1}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\, y_n(r)\, dr}, \\
\bar{B}_1 &= \frac{B_1}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\, y_n(r)\, dr}, \\
\bar{A}_2 &= \frac{A_2}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\, y_n(r)\, dr}, \\
\bar{B}_2 &= \frac{B_2}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\, y_n(r)\, dr}, \\
\bar{H} &= \frac{H}{M_n + \frac{\pi\rho}{4}\int_0^R t_p^2\, y_n(r)\, dr}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Dacă punem şi termenii în sin şi cos din membrul doi al ecuaţiei (31) sub forma complexă aceasta devine

$$\ddot{\zeta}_n + C_1\,\dot{\zeta}_n + C_2\,\zeta_n = \sum_{k=0,\,\pm1,\,\pm2,} \bar{a}_k\, e^{ik\omega t}. \tag{33}$$

Pentru a determina pe de o parte răspunsul palei la sarcinile aplicate iar pe de alta condiţiile de rezonanţă vom căuta pentru ecuaţia (33) soluţii particulare de forma

$$\zeta_n = \bar{\zeta}_n\, e^{i(k\omega t + \delta_k)}. \tag{34}$$

După ce introducem în (33) obținem

$$\bar{\zeta}_n \, e^{i\delta_k} (C_2 - k^2 \omega^2 + i \, C_1 k \, \omega) = \bar{a}_k = \bar{\alpha}_k + i \, \bar{\beta}_k \tag{35}$$

și efectuînd calculele

$$\bar{\zeta}_n = \frac{\sqrt{[\bar{\alpha}_k (C_2 - k^2 \omega^2) + \bar{\beta}_k C_1 k \, \omega]^2 + [\bar{\beta}_k (C_2 - k^2 \omega^2) - \bar{\alpha}_k C_1 k \, \omega]^2}}{(C_2 - k^2 \omega^2)^2 + C_1 k^2 \omega^2} \tag{36}$$

iar

$$\operatorname{tg} \delta_k = \frac{\bar{\beta}_k (C_2 - k^2 \omega^2) - \bar{\alpha}_k C_1 k \, \omega}{\bar{\alpha}_k (C_2 - k^2 \omega^2) + \bar{\beta}_k C_1 k \, \omega}. \tag{37}$$

Pentru studiul fenomenului de rezonanță al palei care prezintă un interes deosebit în practică ecuația care dă viteza unghiulară de rezonanță rezultă din condiția $\bar{\zeta}_n \to \infty$ adică

$$(C_2 - k^2 \omega^2)^2 + C_1 k^2 \omega^2 = 0, \tag{38}$$

care se poate pune sub forma

$$\omega^4 + \frac{C_1 - 2\,C_2}{k^2} \omega^2 + \frac{C_2^2}{k^4} = 0. \tag{39}$$

Deci corespunzător armonicei de ordinul k formula (36) dă posibilitatea calculului amplitudinei deformării palei, formula (37) dă posibilitatea calculului defazajului iar formula (39) pe aceea a calculului vitezei unghiulare de rezonanță.

În ce privește contribuția vitezei $V_\infty \sin \omega t$ care atacă carena ca urmare a deplasării spre înainte a elicopterului să revenim la relațiile (19) și (25).

Scriind în cazul pasului general după ce facem aproximația $\sin \alpha \approx \alpha$ că viteza care atacă normal carena aeroreactorului este $V_\infty \alpha \sin \omega t$ putem presupune că, carena se află în prezența unui curent permanent de viteză V_∞ dar își schimbă incidența după legea $\alpha \sin \omega t$.

Deoarece în acest caz $\sqrt{1 - \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}} \approx 1$ atunci expresiei forței P_{cv} dată de (19) i se va adăuga pentru noua situație termenul

$$\Delta P_{cv} = -2 \rho V_\infty^2 \alpha \sin \omega t \int_0^{2\pi} \int_0^c \cos^2 \varphi \, r_c \frac{dr_c}{dx_1} \, dx_1 \, d\varphi. \tag{40}$$

Ca urmare a variației ciclice și a mișcării de bătaie în prezența vitezei $V_\infty \sin \omega t$ lucrurile stau ca și cum carena execută deplasarea $\bar{\bar{h}} = \bar{\bar{h}}_0 \, e^{i 2 \omega t}$

şi oscilaţia $\overline{\overline{\theta}} = \overline{\overline{\theta}}_0 \, e^{i2\omega t}$ astfel încît forţei P_{cp} dată de (25) i se va adăuga termenul

$$\Delta P_{cp} = \rho \, V_{\infty}^2 \, e^{i2\omega t} \int_0^{2\pi} \int_0^c \cos^2 \varphi \left(i \bar{\lambda} \frac{r_c}{c} + r_c \frac{dR\,(x_1)}{dx_1} + R(x_1) \frac{dr_c}{dx_1} \right) r_c \, dx_1 \, d\,\varphi$$

în care

$$\bar{\lambda} = \frac{\omega\, c}{V_{\infty}}$$

şi

$$R\,(x_1) = \left(1 + i\,\bar{\lambda}\,\frac{x_1}{c} \right) \overline{\overline{\theta}}_0 + i\,\bar{\lambda}\,\frac{\overline{\overline{h}}_0}{c}.$$

Putem observa cu uşurinţă că prin adăugarea noilor termeni care ţin seama de contribuţia vitezei V_{∞} sin $\omega\, t$ pe carenă, ecuaţia diferenţială (33) păstrează aceeaşi formă, singura deosebire fiind că coeficienţii $\bar{a}_k = \bar{\alpha}_k + i\,\bar{\beta}_k$ devin $\overline{\overline{a}}_k = \overline{\alpha}_k + i\,\overline{\overline{\beta}}_k$. Ecuaţia vitezei unghiulare de rezonanţă rămîne neschimbată adică ecuaţia (39) numai în expresia (36) a amplitudinii şi (37) a defazajului trebuind să se înlocuiască $\bar{\alpha}_k$ şi $\bar{\beta}_k$ prin $\overline{\overline{\alpha}}_k$ şi $\overline{\overline{\beta}}_k$.

Formulele de mai sus generalizează şi cazul palelor cu antrenare mecanică putîndu-se aplica atît palelor cu profunzime variabilă cît şi palelor cu profunzime constantă, atît palelor articulate cît şi palelor pe cardan sau cantilever.

Primită la redacţie la 1 august 1962

ВИБРАЦИЯ ЛОПАСТЕЙ РЕАКТИВНЫХ РОТОРОВ ВЕРТОЛЕТОВ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе изучается вибрация лопастей ротора вертолета, оборудованных на концах аэрореактивными двигателями (статорными).

После того как указывается способ, которым концентрированная масса аэрореактивного двигателя влияет на собственную частоту лопасти, выводится уравнение вынужденной вибрации, учитывающее как аэродинамические распределенные по лопасти концентрированные силы (возмущающие силы), так и силы, появляющиеся вследствие деформации лопасти.

В выражении возмущающих сил принимается во внимание способ крепления лопасти, ее форма и влияние сжимаемости в предположении, что число Маха $M_{\infty} \leqslant 07$.

Даются полезные для практических случаев решения уравнения вынужденной вибрации, а также уравнение резонантных угловых скоростей вращения.

VIBRATIONS DES PALES DES ROTORS RÉACTIFS D'HÉLICOPTÈRE

RÉSUMÉ

L'auteur étudie les vibrations dans les pales des rotors d'hélicoptère dont les extrémités sont munies d'aéroréacteurs.

Après avoir montré la manière dont la masse concentrée de l'aéroréacteur influe sur la fréquence propre de la pale, il établit l'équation des vibrations forcées, où l'on tient compte aussi bien des forces aérodynamiques distribuées le long de la pale et concentrées (forces perturbatrices), que des forces dues à la déformation de la pale.

En exprimant les forces perturbatrices, il tient compte de la façon dont la pale est fixée, de la forme de cette pale, ainsi que de l'influence de la compressibilité, dans l'hypothèse où le nombre de Mach est $M_\infty \leqslant 0{,}7$.

Le travail comprend, en outre, les solutions, utiles dans la pratique, de l'équation des vibrations forcées, aussi bien que l'équation des vitesses angulaires de résonance.

BIBLIOGRAFIE

1. G. A. FLAX, L. GOLAND, *Dinamic Effects in Rotor Blade Bending.* J.A.S., Decembrie, 1951.
2. Al. MARINESCU, *Vertical Vibration of Helicopter Rotor Blades.* Revue de mécanique appliquée, *2* (1959).
3. L. R. BISPLINGHOFF, H. ASHLEY, L. R. HALFMAN, *Aeroelasticity.* Adison Wesley Publishing Company, Cambridge Mass., 1955.
4. Al. MARINESCU, *Teoria elicopterului.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1960.
5. E. CARAFOLI, *Aerodinamica vitezelor mari.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1957.
6. Al. MARINESCU, *Asupra vibrațiilor consolei anticuplu la elicopterele cu un singur rotor.* St. cerc. mec. apl., București, **12**, *1* (1959).

VIBRATIONS DES PALES DES ROTORS RÉACTIFS D'HÉLICOPTÈRE

RÉSUMÉ

Cet article étudie les vibrations dans les pales des rotors d'hélicoptère dont les extrémités sont munies d'auto-réacteurs.

Après avoir montré la manière dont la masse concentrée de l'auto-réacteur influe sur la fréquence propre de la pale, il établit l'équation des vibrations forcées, où l'on tient compte aussi bien des forces aérodynamiques distribuées le long de la pale et concentrées [illegible] que des forces dues à la déformation de la pale.

En exprimant les forces perturbatrices, il tient compte de la façon dont la pale est fixée, de la forme de cette pale, ainsi que de l'influence de [illegible], dans l'hypothèse d'un rotor [illegible].

Le travail comprend, en outre, les solutions générales de l'équation des vibrations forcées, aussi bien que l'expression des [illegible] amplitudes de résonance.

BIBLIOGRAPHIE

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]
4. [illegible] MARTINEZ [illegible]
5. [illegible]
6. [illegible]

NOTE

TORSIUNEA UNOR BARE PRISMATICE CU SECȚIUNI ASIMETRICE

DE

EMERIC DEUTSCH

1. INTRODUCERE

În această lucrare vom studia problema torsiunii corespunzătoare unor secțiuni asimetrice a căror formă depinde de doi parametri. Pentru unele valori particulare ale parametrilor se obțin secțiuni ce se întîlnesc la paletele de turbină. De asemenea, prin particularizarea unuia din parametri, se obțin profile aerodinamice simetrice. Secțiunile studiate în lucrarea de față au mai fost studiate de J. Polášek și L. Špaček [1] și de J. Polášek [2]. Aplicînd o metodă diferită [3], vom arăta că funcția complexă a torsiunii se exprimă cu ajutorul funcțiilor hipergeometrice. În ceea ce privește rigiditatea la torsiune, vom obține expresia ei exactă, în [1] și [2] ea fiind dată doar cu ajutorul unei sume infinite.

În cursul calculelor vom face uz — fără a ne referi la ele — de cunoscutele relații funcționale privitoare la funcțiile Beta și Gamma ale lui Euler, anume

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \qquad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad 2^{2p-1}\,B(p,p) = B\left(p, \frac{1}{2}\right),$$

$$p\,B(p,q) = (p+q)\,B(p+1,q).$$

De asemenea, ne vom folosi și de următoarele relații [4]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{B(\alpha+n, \beta-n)\,B(n+1, \delta-n)} = \frac{\delta(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha+\beta+\delta-2)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\delta-1)}$$

$$(\alpha+\beta+\delta > 2), \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{B(\alpha+n,\beta-n)\,B(\gamma+n,\delta-n)} = \frac{(1-\beta)(1-\delta)}{\alpha\gamma\,B(\alpha,\beta)\,B(\gamma,\delta)} \times$$

$$\times\, {}_3F_2(2-\beta,2-\delta,2;\ \alpha+1,\gamma+1;\ z) \quad (|z|\leqslant 1,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta>4), \tag{1.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{B(\alpha+n,\beta-n)} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} F(1-\beta,1;\ \alpha;\ -z) \quad (|z|\leqslant 1,\ \alpha+\beta>2), \tag{1.3}$$

unde $F(\alpha_1, \alpha_2;\ \beta_1;\ z)$ este funcţia hipergeometrică iar

$${}_3F_2\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3;\ \beta_1, \beta_2;\ z)$$

este funcţia hipergeometrică generalizată.

2. ECUAŢII FUNDAMENTALE

Fie

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \tag{2.1}$$

funcţia care reprezintă conform cercul unitate $|\zeta| \leqslant 1$ dintr-un plan ζ $(\zeta = \rho e^{i\theta})$ pe un domeniu simplu-conex R dintr-un plan $z = x + iy$.

Se ştie [3], că funcţia complexă a torsiunii corespunzătoare secţiunii R, exprimată în variabila ζ, este dată de

$$f_0(\zeta) = i \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n + \text{const.}, \tag{2.2}$$

unde

$$b_n = \sum_{s=0}^{\infty} a_{n+s}\,\bar{a}_s \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Rigiditatea geometrică la torsiune a domeniului R este

$$P = I + D_0, \tag{2.4}$$

unde I este momentul de inerţie polar al lui R în raport cu originea planului z, iar

$$D_0 = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n \bar{b}_n. \tag{2.5}$$

3. FUNCŢIA REPREZENTĂRII CONFORME

Să considerăm secţiunea transversală R, definită de reprezentarea conformă a cercului $|\zeta| \leqslant 1$ prin funcţia

$$z = \omega(\zeta) = \frac{c}{2^{\lambda}}\,(1+\zeta)^{\lambda}\,(1+ik\zeta), \tag{3.1}$$

unde c, λ şi k sînt constante reale, supuse restricţiilor

$$c > 0, \quad 0 < \lambda \leqslant 1, \quad 0 < k < \sqrt{\frac{\lambda}{2+\lambda}}. \tag{3.2}$$

Conturul C al domeniului R este arătat în figura 1. Pentru $k=0$ se obțin profile simetrice similare cu profilele aerodinamice simetrice (fig. 2).

Ecuațiile parametrice ale lui C sînt

$$\begin{aligned} x &= c\cos^{\lambda}\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{\lambda\theta}{2} - k\sin\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\theta\right], \\ y &= c\cos^{\lambda}\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\lambda\theta}{2} + k\cos\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\theta\right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ținînd seamă de dezvoltarea

$$(1+\zeta)^{\lambda} = \frac{1}{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^{n}}{B(n+1,\ \lambda+1-n)},$$

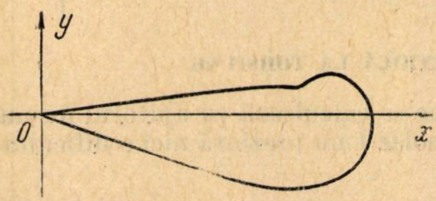


Fig. 1

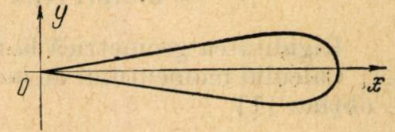


Fig. 2

funcția (3.1) a reprezentării conforme se poate scrie

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\zeta^{n}, \tag{3.4}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

cu

$$a_n = \frac{c}{2^{\lambda}(\lambda+1)}\left[\frac{1}{B(n+1,\ \lambda+1-n)} + \frac{i\,k}{B(n,\ \lambda+2-n)}\right]. \tag{3.5}$$

4. FUNCȚIA COMPLEXĂ A TORSIUNII

Pentru a găsi funcția complexă a torsiunii, trebuie să determinăm întîi coeficienții b_n definiți de (2.3). Avem

$$b_n = \frac{c^2}{2^{2\lambda}(\lambda+1)^2}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{1}{B(n+s+1,\ \lambda+1-n-s)} + \frac{ik}{B(n+s,\ \lambda+2-n-s)}\right]\left[\frac{1}{B(s+1,\ \lambda+1-s)} - \frac{ik}{B(s,\ \lambda+2-s)}\right]$$

sau, efectuînd calculele și ținînd seamă de (1.1)

$$b_n = \frac{c^2}{2^{2\lambda}(2\lambda+1)}\left[\frac{1+k^2}{B(\lambda+1-n,\ \lambda+1+n)} + ik\left\{\frac{1}{B(\lambda+n,\ \lambda+2-n)} - \frac{1}{B(\lambda+2+n,\ \lambda-n)}\right\}\right]. \tag{4.1}$$

Funcția complexă a torsiunii este dată acum de (2.2). Avem

$$f_0(\zeta) = \frac{i\,c^2}{2^{2\lambda}\,(2\lambda+1)}\left[(1+k^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{B(\lambda+1-n,\ \lambda+1+n)} + \right.$$

$$\left. + ik\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{B(\lambda+n,\ \lambda+2-n)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{B(\lambda+2+n,\ \lambda-n)}\right\}\right],$$

sau, ținînd seamă de (1.3)

$$f_0(\zeta) = \frac{i\,c^2}{2^{2\lambda}\,(2\lambda+1)}\left[\frac{1+k^2}{B(\lambda+1,\ \lambda+1)}F(-\lambda, 1; 1+\lambda; -\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{ik}{B(\lambda,\ \lambda+2)}\{F(-1-\lambda, 1;\ \lambda;\ -\zeta) - F(1-\lambda, 1;\ 2+\lambda; -\zeta)\}\right]. \qquad (4.2)$$

5. RIGIDITATEA GEOMETRICĂ LA TORSIUNE

Rigiditatea geometrică la torsiune se calculează cu ajutorul formulei (2.4). Calculul momentului de inerție polar I nu prezintă nici o dificultate. Se obține [1]

$$I = \frac{\pi c^4}{2^{4\lambda+2}\,B(2\lambda,\ 2\lambda)}\left[1 + 2k^2\left(1+\frac{2}{\lambda}+\frac{2}{2\lambda+1}\right) + k^4\left(1+\frac{2}{\lambda}\right)\right]. \qquad (5.1)$$

În ceea ce privește mărimea D_0, avem din (2.5), ținînd seamă de (4.1)

$$D_0 = -\frac{\pi\,c^4}{2^{4\lambda}\,(2\lambda+1)^2}\left[(1+k^2)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{B^2(\lambda+1-n,\ \lambda+1+n)} + \right.$$

$$+ k^2\sum_{n=0}^{\infty} n\left\{\frac{1}{B^2(\lambda+n,\ \lambda+2-n)} + \frac{1}{B^2(\lambda+2+n,\ \lambda-n)} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{B(\lambda+n,\ \lambda+2-n)\,B(\lambda+2+n,\ \lambda-n)}\right\}\right]. \qquad (5.2)$$

Avem însă succesiv

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left\{\frac{1}{B^2(\lambda+n,\ \lambda+2-n)} + \frac{1}{B^2(\lambda+2+n,\ \lambda-n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{B(\lambda+n,\ \lambda+2-n)\,B(\lambda+2+n,\ \lambda-n)}\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{B^2(\lambda+n,\ \lambda+2-n)} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{B^2(\lambda+2+n,\ \lambda-n)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{B^2(\lambda+n,\ \lambda+2-n)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{B^2(\lambda+2+n,\ \lambda-n)} -$$

$$- 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{B(\lambda+n,\ \lambda+2-n)\,B(\lambda+2+n,\ \lambda-n)} =$$

$$= -\frac{1}{B^2(\lambda, \lambda+2)} + \frac{1}{B^2(\lambda, \lambda+2)} + \frac{1}{B^2(\lambda+1, \lambda+1)} +$$

$$+ 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{B^2(\lambda+2+n, \lambda-n)} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{B(\lambda+n, \lambda+2-n)\, B(\lambda+2+n, \lambda-n)} =$$

$$= \frac{1}{B^2(\lambda+1, \lambda+1)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n}{B^2(\lambda+1+n, \lambda+1-n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{n}{B(\lambda+n, \lambda+2-n)\, B(\lambda+2+n, \lambda-n)} \right\} = \frac{1}{B^2(\lambda+1, \lambda+1)} +$$

$$+ 2\Gamma^2(2\lambda+2) \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda+1+n)(\lambda+1-n) - (\lambda+n)(\lambda-n)}{\Gamma(\lambda+2+n)\,\Gamma(\lambda+1+n)\,\Gamma(\lambda+2-n)\,\Gamma(\lambda+1-n)} =$$

$$= \frac{1}{B^2(\lambda+1, \lambda+1)} + \frac{2(2\lambda+1)}{(2\lambda+2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{B(\lambda+1+n, \lambda+2-n)\, B(\lambda+2+n, \lambda+1-n)}.$$

Astfel relația (5.2) devine

$$D_0 = -\frac{\pi c^4}{2^{4\lambda}(2\lambda+1)^2} \left[(1+k^2)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{B^2(\lambda+1-n, \lambda+1+n)} + \frac{k^2}{B^2(\lambda+1, \lambda+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(2\lambda+1)k^2}{(2\lambda+2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{B(\lambda+1+n, \lambda+2-n)\, B(\lambda+2+n, \lambda+1-n)} \right],$$

sau, făcînd uz de (1.2),

$$D_0 = -\frac{\pi c^4}{2^{4\lambda}(2\lambda+1)^2} \left[\frac{(1+k^2)^2 \lambda^2}{(\lambda+1)^2 B^2(\lambda+1, \lambda+1)} {}_3F_2(1-\lambda, 1-\lambda, 2; \lambda+2, \lambda+2; 1) + \right.$$

$$+ \frac{k^2}{B^2(\lambda+1, \lambda+1)} + \frac{2\lambda(2\lambda+1)k^2}{(\lambda+2)(2\lambda+2)^2 B^2(\lambda+1, \lambda+2)} \times$$

$$\left. \times\, {}_3F_2(-\lambda, 1-\lambda, 2; \lambda+2, \lambda+3; 1) \right]. \tag{5.3}$$

Din formula lui Dixon [5]

$${}_3F_2(\alpha, \beta, \gamma;\, \alpha-\beta+1, \alpha-\gamma+1;\, 1) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma(1+\alpha-\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\alpha-\beta-\gamma\right)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\alpha-\beta\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\alpha-\gamma\right)\Gamma(1+\alpha-\beta-\gamma)}$$

$$(\alpha - 2\beta - 2\gamma > -2),$$

deducem

$$ {}_3F_2(1-\lambda, 1-\lambda, 2; \lambda+2, \lambda+2; 1) = \frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda}, $$

$$ {}_3F_2(-\lambda, 1-\lambda, 2; \lambda+2, \lambda+3; 1) = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2(2\lambda+1)}, $$

astfel că relația (5.3) după unele calcule devine

$$ D_0 = -\frac{\pi c^4}{2^{4\lambda}\lambda^2 B^2(\lambda, \lambda)}\left[\lambda(1+k^2)^2 + 4\,\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}k^2\right]. \tag{5.4} $$

Din (2.4) obținem acum pentru rigiditatea geometrică la torsiune

$$ P = \frac{\pi c^4}{2^{4\lambda}}\left\{\frac{1}{4B(2\lambda, 2\lambda)}\left[1 + 2k^2\left(1 + \frac{2}{\lambda} + \frac{2}{2\lambda+1}\right) + k^4\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)\right] - \right. $$

$$ \left. - \frac{1}{\lambda^2 B^2(\lambda, \lambda)}\left[\lambda(1+k^2)^2 + 4\,\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\,k^2\right]\right\}. \tag{5.5} $$

6. CAZUL PROFILELOR SIMETRICE

Pentru $k = 0$ se obțin profile simetrice. Ecuațiile parametrice ale conturului devin

$$ x = c\cos^\lambda\frac{\theta}{2}\cos\frac{\lambda\theta}{2}, \qquad y = c\cos^\lambda\frac{\theta}{2}\sin\frac{\lambda\theta}{2}. \tag{6.1} $$

Grosimea maximă a secțiunii depinde de λ, valoarea ei fiind egală cu

$$ 2\,c\cos^{\lambda+1}[\pi/(2\lambda+2)]. $$

Funcția complexă a torsiunii se obține din (4.2)

$$ f_0(\zeta) = \frac{i c^2}{\lambda B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)} F(-\lambda, 1; \lambda+1; -\zeta). \tag{6.2} $$

Din (5.5) găsim rigiditatea geometrică la torsiune

$$ P = \frac{\pi c^4}{2^{4\lambda}}\left\{\frac{1}{4B(2\lambda, 2\lambda)} - \frac{1}{\lambda B^2(\lambda, \lambda)}\right\}. \tag{6.3} $$

Primită la redacție la 10 iulie 1962

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С АСИММЕТРИЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе изучается вопрос кручения стержня асимметрического сечения, форма которого зависит от двух параметров. Сечение получается путем конформного отображения круга $|\zeta| \leqslant 1$ на плоскости $z = x + i y$ при помощи функции (3.1). Для комплексной функции кручения находится выражение, данное в (4.2). Геометрическая жесткость при кручении дана в (5.5). В § 6 приводятся полученные результаты, соответствующие частным случаям симметричных профилей. Комплексная функция кручения и геометрической жесткости дана, соответственно, в (6.2) и (6.3).

TORSION DES BARRES PRISMATIQUES À SECTIONS ASYMÉTRIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur étudie le problème de la torsion correspondant à des sections asymétriques dont la forme dépend de deux paramètres. La section s'obtient par la représentation conforme du cercle $|\zeta| \leqslant 1$ sur un plan $z = x + i y$, à l'aide de la fonction (3.1). Pour la fonction complexe de la torsion, l'expression est donnée par (4.2). La rigidité géométrique à la torsion est fournie par (5.5). Dans le § 6, l'auteur particularise les résultats obtenus, dans le cas des profils symétriques. La fonction complexe de la torsion et la rigidité géométrique à la torsion se trouvent exprimées, respectivement, dans (6.2) et (6.3).

BIBLIOGRAFIE

1. J. POLÁŠEK, L. ŠPAČEK, *Torsional stiffness of airfoil sections.* Rozpravy CSAV, řada TV, *1*, 1–26, (1956).
2. J. POLÁŠEK, *Le centre de flexion et la rigidité en torsion des profils de l'aube.* IXe Congrès International de Mécanique Appliquée, Actes, **VI**, Bruxelles, 1957, 96–100.
3. I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1956.
4. E. DEUTSCH, *On the flexure problem.* Part II. *Flexure of a beam with symmetrical airfoil section.* Quart. J. Mech. Appl. Math., **15**, 317–324 (1962).
5. T. M. MACROBERT, *Functions of a complex variable.* Macmillan, London, 1954.

RECENZII

OCTAV ONICESCU, *Numere şi sisteme aleatoare*. Ed. Acad. R.P.R., 1962, 260 p.

Importanţa studiului şirurilor de valori aleatoare constă în posibilitatea reconstruirii mărimilor sau proceselor aleatoare care le-au generat. Teorema lui V. I. Glivenko care preconizează că „un şir aleator generat de o variabilă aleatoare îi relevă sub formă statistică toate caracteristicile proprii" este deosebit de importantă în acest sens.

Lucrarea mai sus-menţionată constă dintr-o prezentare sistematică a studiilor în acest domeniu, ale cărui baze au fost iniţiate de R. von Mises, sub o privire critică originală. Sînt prezentate studii asupra şirurilor de numere aleatoare — Bernoulli, Gauss, sau corespunzătoare variabilelor aleatoare generale, întrebuinţarea operatorilor de selecţie, studii asupra şirurilor aleatoare în timp generate de diferite procese evolutive.

Alt aspect important al tablourilor de numere aleatoare este considerat în legătură cu metoda de calcul Montecarlo. În locul numerelor aleatoare se folosesc în calculul cu maşinile electronice sistemele neregulate (quasi-aleatoare) obţinute printr-o anumită regulă aritmetică. Capitolul al II-lea cuprinde măsura lungimilor şi suprafeţelor, metode de obţinerea numerelor neregulat repartizate şi se încheie cu o amplă prezentare despre informaţie, entropie, surse, canale, codificare şi teorema centrală a lui C. E. Shannon.

Alte capitole se ocupă de mersul la întîmplare pe o reţea uni- bi- sau multi dimensională prezentînd ecuaţiile cu diferenţe corespunzătoare, de procedeele de integrare pentru ecuaţii cu diferenţe de tip eliptic, de procese multiplicative, de spaţii metrice statistice, aleatoare. Ultimul capitol, (VIII) este rezervat studiului mişcării browniene.

Lucrarea cuprinde — într-o formă clară — o expunere amplă şi foarte documentată a problemelor respective, ceea ce o face utilă unui mare număr de cititori.

Chr. Pelecudi

И. В. КРАГЕЛЬСКИЙ, *Трение и износ* **(Frecarea şi uzura). Москва, Машгиз, 1962, 383 p.**

Lucrarea prof. I. V. Kragelsky are drept scop examinarea din punct de vedere teoretic şi experimental a mecanismului intim al fenomenelor de frecare şi uzură. Frecarea uscată sau semifluidă şi uzura unor suprafeţe în contact constituie probleme de bază de o deosebită importanţă pentru toate domeniile tehnicii. Studiul acestor probleme este deosebit de complex, implicînd asocierea a variate și numeroase discipline ca : fizica solidului, chimia lubrifianților, mecanică, metalurgie și metalografie, mecanica fluidelor, electromagnetism, elasticitate, plasticitate, reologie etc. De altfel tocmai datorită complexității fenomenelor studiate, frecarea și uzura sînt încă considerate discipline relativ noi în care studiile sistematice și aprofundate datează numai din ultimele decenii. De aceea, apariția lucrării de față va fi privită cu un deosebit interes de către persoanele de specialitate.

Lucrarea cuprinde 12 capitole. Primul capitol este consacrat descrierii generale a proceselor de frecare și uzură : interacțiunea a două suprafețe, frecarea interioară și exterioară și factorii care le influențează, diferitele moduri de degradare și distrugere a suprafețelor. Toate aceste probleme sînt tratate în detaliu în capitolele următoare. Astfel în capitolul II se examinează problema apropierii a două suprafețe rugoase și aria efectivă de contact care se stabilește între acestea în diferite condiții (contact elastic asimilabil cu un ansamblu de sfere sau pivoți, contact elastoplastic, determinarea suprafeței reale de contact ținînd seama de rugozitatea suprafețelor, de materialele din care sînt confecționate etc.). Capitolul III este consacrat unor probleme termice ce apar în timpul frecării : calculul temperaturii locale dezvoltate, influența unui eventual film superficial, distrugerea locală a suprafeței de frecare ca rezultat al încălzirii, rezistența materialelor la impulsuri termice și tensiunile termice care se dezvoltă, metode indirecte de determinare a temperaturii dezvoltate prin frecare, metode experimentale directe de studiu a temperaturilor în procesele de frecare etc. În capitolul IV se examinează problema tranziției de la un tip de frecare la altul (condiții de tranziție de la deformații elastice la deformații plastice, tranziția de la deformații plastice la tăiere, presiunile critice corespunzătoare).

Capitolul V tratează uzura ca rezultat al proceselor de frecare ; după o clasificare a tipurilor de uzură și a diferitelor posibilități de modelare a uzurii se examinează posibilitățile de calcul a uzurii, influența diferiților factori asupra uzurii, teoria uzurii prin oboseală etc. În capitolul VI se examinează din punct de vedere calitativ și cantitativ forțele de frecare care apar ; astfel se expun mai întîi în mod critic diferitele teorii ale frecării (frecarea ca rezultat al creșterii neregularităților, ca rezultat al forțelor de interacțiune moleculară, al deplasării plastice de material și a sudurilor locale, ca rezultat al nedeformării materialelor, analiza termodinamică a frecării), iar apoi se analizează influența unui eventual film superficial asupra forței de frecare. În încheierea capitolului se dau metode pentru calculul forței de frecare în diferite cazuri (rezistența tangențială la deplasări elastice, la deplasări plastice repetate, la tăierea materialului, în cazul distrugerii unui film între cele două suprafețe, însumarea diferitelor rezistențe, legi de stare stabilite experimental, frecarea de alunecare etc.).

Următorul capitol (cap. VII) este consacrat unor aspecte reologice ale proceselor de frecare ca : proprietăți visco-elastice ale contactelor de frecare, influența duratei contactului pe suprafața reală de frecare, vibrații mecanice de relaxare. În continuare, în capitolul VIII se tratează frecarea la limită, în regim onctuos ; după o trecere în revistă a punctelor de vedere actuale asupra acestei probleme se examinează structura și proprietățile stratului de lubrifiant, influența microgeometriei suprafețelor, a vitezei de alunecare și a încărcării, a temperaturii dezvoltate și a materialelor în contact, precum și uzura care se produce în asemenea procese. Apoi, în capitolul IX se schițează o teorie hidrodinamică a ungerii semi-fluide.

Modul în care pot fi conduse studiile experimentale asupra proceselor de frecare și uzură sînt amplu expuse într-un alt capitol (cap. X) în care se prezintă o serie de mașini construite în acest scop, precum și aparatura de măsură corespunzătoare. În sfîrșit, ultimele două capitole sînt consacrate studiului materialelor de fricțiune și de antifricțiune ; pentru ambele categorii de materiale sînt expuse mai întîi condițiile care se impun și modul în care acestea pot fi satisfăcute, metode și rezultate experimentale, unele materiale moderne etc.

Din însăşi enumerarea problemelor tratate se constată faptul că lucrarea abordează o serie de aspecte fundamentale legate de procesele de frecare uscată, frecare la limită şi uzură. O mare parte din volumul lucrării este consacrat problemelor generale, fără însă a se neglija aspectele aplicative directe (metode de calcul al forţei de frecare şi uzurii, metode şi date experimentale privind materialele antifricţiune şi fricţiune etc.). Un merit deosebit al lucrării este constituit de preocuparea consecventă de a schiţa teorii pentru fenomene deosebit de complexe, care de obicei se examinează numai experimental (modelarea suprafeţelor rugoase, teoria termodinamică a frecării, teoria uzurii de oboseală, teorii reologice legate de procesele de frecare, teoria hidrodinamică a frecării semifluide, teorii ale fricţionabilităţii şi antifricţionabilităţii etc.).

Lucrarea se bazează în special pe rezultatele şcolii sovietice de frecare şi uzură în care, în afară de autor, mai figurează numeroşi specialişti îndeobşte cunoscuţi ca : M. M. Hruşciov, P. A. Rebinder, P. D. Dereaghin, G. V. Vinogradov, V. S. Scedrov, P. E. Diacenko, G. I. Epifanov, K. V. Slavisky, K. V. Saviţki, A. V. Cicinadze etc. Numeroase probleme legate de frecarea uscată şi la limită sînt redactate pe baza contribuţiilor personale ale autorului ca : influenţa diferiţilor parametrii şi în special a încărcării asupra ariei reale de contact (cap. II), modelarea proceselor care au loc pe suprafeţele de frecare (cap. III), influenţa vitezei asupra producerii diferitelor tipuri de frecare (cap. IV), influenţa vitezei de alunecare, metode de calcul a forţei de frecare (cap. VI), probleme de reologie legate de fenomenele de frecare (cap. VII), instalaţii şi metode experimentale de studii (cap. X), studiul unor materiale de fricţiune moderne (cap. XI) etc.

Scrisă sub o formă clară şi sintetică, lucrarea îşi atinge dublul scop propus : să contribuie la elucidarea complexelor fenomene ale frecării şi uzurii şi în acelaşi timp să pună la dispoziţia cititorului un număr de date deosebit de utile privind calculul forţei de frecare, legile generale ale uzurii, metode de reducere a uzurii suprafeţelor, metode de caracterizare a proprietăţilor funcţionale a materialelor de fricţiune şi antifricţiune etc. De aceea lucrarea se adresează în egală măsură specialiştilor în probleme de lubrificaţie, uzură, fizica solidului şi inginerilor din proiectare şi industria construcţiilor de maşini.

V. N. Constantinescu

* * * *Труды второй республиканской конференции по математике и механике* (Lucrările celei de-a doua conferinţe republicane de matematică şi mecanică), Издательство Академии Наук Казахской ССР, Alma Ata, 1962, 184 p.

Între 26 şi 30 octombrie 1959 s-a ţinut la Alma Ata a doua conferinţă republicană de matematică şi mecanică, organizată de Secţia de ştiinţe fizico-matematice a Academiei de ştiinţe a RSS Cazahă, de Universitatea de stat „S.M. Kirov" şi de Institutul pedagogic de stat „Abai". În cadrul lucrărilor conferinţei s-au prezentat referate în şedinţe plenare şi un număr de comunicări în cadrul a patru secţii de specialitate. În volumul de mai sus s-au publicat textele prescurtate sau rezumatele a 66 de comunicări.

În cadrul Secţiei de geometrie şi calcul numeric s-au publicat 9 comunicări, între care menţionăm studiul lui A. N. Kazangapov privitor la aplicarea metodelor nomografice şi la lucrările de programare la maşinile matematice. M. V. Penkovskii s-a ocupat de transformarea nomogramelor.

Secţia de ecuaţii diferenţiale cuprinde 19 comunicări. Unele din aceste lucrări sînt destinate problemelor de stabilitate a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ; astfel S. I. Gorşin se ocupă de stabilitatea „în mare", O. A. Jautîkov studiază stabilitatea soluției problemei lui Cauchy pentru sisteme infinite de ecuații cu derivate parțiale, S. K. Persidskii stabilitatea soluției ecuațiilor diferențiale etc. Printre alte probleme studiate, menționăm considerațiile făcute de M. Imanaliev asupra teoriei ecuațiilor integro-diferențiale neliniare cu parametru mic.

Cele 14 comunicări din Secția de analiză matematică sînt dedicate unor probleme foarte variate. Astfel N. P. Romanov stabilește unele teoreme de tip Tauber, M. M. Șamsadov dă o nouă metodă de calcul a rădăcinilor funcțiilor transcendente, P. G. Aizenghendler se ocupă de teoria operatorilor potențiali, Iu. G. Zolotarev aproximează funcțiile cu mai multe variabile prin metoda celor mai mici patrate, B. M. Urazbaev consideră formule asimptotice în algebră, B. S. Janbîrbaev determină proprietățile numerelor caracteristice ale unor ecuații integrale etc.

Cele mai multe comunicări s-au prezentat în Secția de mecanică (24 comunicări). Astfel, M. I. Erimbetov studiază o nouă clasă de soluții exacte a ecuațiilor teoriei elasticității în coordonate cilindrice iar I. P. Țai dă o metodă de separare a variabilelor în diferite sisteme de coordonate pentru ecuațiile elastostaticii și elastodinamicii. Alte lucrări sînt destinate mecanicii corpului solid rigid; astfel, M. P. Guliaev se ocupă de precesia regulată a solidului rigid cu un punct fix etc. Între lucrările destinate mecanicii pămînturilor, cităm pe cea care cuprinde rezultatele încercărilor făcute de A. E. Tleukabîlov. D. Kurmașev tratează stabilitatea critică a sistemelor cu reglare automată, diferite probleme de stabilitate fiind considerate de alți cercetători. Unele comunicări au caracterul de referate, privind realizările a diferite laboratoare de încercări din RSS Cazahă.

Volumul de mai sus este interesant și util cercetătorilor din domeniul mecanicii din țara noastră, atît datorită bogatului material prezentat cît și pentru faptul că dă posibilitatea de a cunoaște preocupările de ordin matematic și mecanic din Republica prietenă.

P. P. Teodorescu

---

* * * *Труды института машиноведения* (Lucrările institutului de mașini) seminarul de teoria mașinilor și mecanismelor, **XXIII**, *89—90*, Изд. Акад. Наук СССР, Moskva, 1962.

Ediția de față cuprinde caietele 89 și 90 incluse în același volum.

Caietul 89 cuprinde 7 comunicări.

1. L. A. RASTRIGHIN — *Echilibrarea automată a rotorilor prin metoda tatonărilor experimentale.*

În această lucrare este studiată problema echilibrării dinamice a rotorilor prin procedeele reglării automate. Problema echilibrării dinamice a elementelor în rotație este privită în general ca o problemă de sinteză dinamică a mecanismelor. În construcția modernă de mașini, ținînd seama de creșterea vitezelor de lucru și a maselor în mișcare, problema automatizării echilibrării dinamice a elementelor în mișcare, devine o problemă de bază. În lucrare este prezentată metoda tatonărilor cît și o instalație experimentală. Echilibrarea automată se realizează prin această metodă, prin optimarea unor funcții de vibrație ale reazemelor. Lucrarea este utilă pentru laboratoarele de încercări dinamice ale mașinilor.

2. B. L. DAVIDOV — *Cercetarea interacțiunii a două elemente flexibile în contact.*

În lucrarea de față este studiată problema determinării presiunilor specifice și a forțelor de frecare ce iau naștere între două corpuri flexibile care reazemă pe două role ideale și care corpuri flexibile sînt tangente între ele pe toată lungimea dintre reazime; tensiunile ambelor elemente de pe un reazim sînt considerate cunoscute și notate cu T_1 sus și U_1 jos. Elementului de jos i se comunică o mișcare întreținută prin rotirea rolei conducătoare A, în sens invers acelor de ceasornic; elementului în contact (tangent) se aplică reacțiunile normale și forțele de frecare de alunecare. Se determină: repartizarea presiunilor specifice între cele două elemente, variația tensiunilor în lungul elementelor flexibile, condițiile pentru care tensiunile firului de sus vor fi egale pentru ambele reazime și de asemenea studiul solicitărilor elementelor flexibile pe mai multe reazime (cu deschideri multiple).

Această lucrare este interesantă și utilă pentru calculul transportoarelor cu bandă.

3. I. I. TARTACOVSKI și I. V. EPESTEIN — *Aproximarea prin arce de cerc a unui profil de camă cu tachet plan.*

În această lucrare este dată o metodă de aproximare a profilului unei came, cu ajutorul arcelor de cerc, pentru orice lege de mișcare a tachetului; metoda permite schimbarea condițiilor de aproximare pe diferite porțiuni ale profilului camei. Razele cercurilor de curbură de aproximare cît și numărul arcelor de cerc pentru aproximare se determină din condiția ca eroarea maximă în valoare absolută, a poziției tachetului să nu depășească o valoare dinainte stabilită și că la capătul fiecărui arc de cerc eroarea să devină egală cu zero, sau să fie limitată print-un alt mijloc.

Lucrarea este utilă pentru proiectarea și prelucrarea pe mașini unelte a camelor cu tachet plan.

4. L. N. BORISENCO — *Asupra teoriei lui Freudenstein și a unor metode grafo-analitice de analiză și sinteză a mecanismelor patrulatere.*

În acest articol autorul utilizînd metoda lui Artobolevski de formare a mecanismelor prin adăugirea de grupe de elemente, deduce relația lui Freudenstein pe o cale mult mai simplă, generalizînd-o pentru mai multe tipuri de mecanisme patrulatere. De asemenea, prin construcții grafice simple autorul rezolvă o serie de probleme de sinteză a mecanismelor patrulatere în funcție de valorile instantanee date, ale unghiului de rotație, a vitezei unghiulare și a accelerației unghiulare ale elementului condus. Este arătată utilizarea acestor construcții, pentru determinarea razei de curbură a unui profil de camă. Cu ajutorul curbelor lui Burmester este rezolvată problema sintezei mecanismului patrulater în funcție de raportul de transmitere și primele lui două derivate.

5. I. B. LIUDMIRSKAIA — *Unele rezultate ale utilizării mașinilor cifrice pentru sinteza mecanismelor patrulatere articulate.*

În această lucrare sînt expuse problemele legate de prelucrarea datelor obținute prin schema operativă de lucru pentru sinteza mecanismelor patrulatere articulate, la mașina cifrică electronică tip „Ural".

Ca bază pentru metoda de lucru pe mașina cifrică, o constituie metoda interpolării prin patru noduri de interpolare — unul dublu — și prin unghiul de transmitere. În articol sînt prezentate de asemenea și unele rezultate din lucrările experimentale de sinteză a mecanismelor pe mașina cifrică „Ural".

6. L. N. REȘETOV — *Proiectarea mecanismelor directoare.*

În acest articol este prezentată metoda grafică și analitică de proiectare a mecanismelor directoare lineare și circulare din condiția tangenței de ordinul doi — suprapunerea razelor de curbură. Această condiție dă constructorului o mare libertate în alegerea dimensiunilor mecanismului și mai important decît atît permite o foarte ușoară adaptare a lui la oricare mașină de lucru.

Autorul arată că metoda de proiectare după condiția de tangență de ordinul doi este cea mai rațională. Aplicată mecanismelor lui Evens și Watt, această teorie permite deducerea unor dependențe funcționale între dimensiunile elementelor mecanismului director respectiv.

7. O. N. LEVIRSKAIA — *Sinteza reductoarelor planetare pe baza tabelelor și graficelor.*

Una din problemele de bază ale sintezei mecanismelor, și în același timp cea mai puțin studiată este problema alegerii schemei cinematice a mecanismului. Pentru rezolvarea acestei probleme este absolut necesar să existe date indicații de calcul pentru fiecare tip de mecanism, sub formă de tabele și grafice, după care să se poată în modul cel mai rapid să se determine diferitele variante ale mecanismului căutat și să se aleagă schema optimă pentru condițiile cerute. În articolul lui O. N. Levitskaia sînt date astfel de tabele și grafice pentru reductoarele planetare cu roțile dințate așezate pe un singur rînd, după care se poate în funcție de raportul de transmitere dat, găsi numărul de dinți pentru toate roțile cît și numărul de sateliți necesar. Aceste tabele și nomograme dau posibilitatea să se determine în modul cel mai rapid toate variantele posibile pentru un reductor planetar, care ar corespunde scopului propus.

Această lucrare este utilă pentru proiectanții și constructorii de mașini.

Caietul 90 cuprinde 6 comunicări.

1. L. N. REȘETOV — *Proiectarea mecanismelor directoare tip Evens și Watt.*

În această lucrare este stabilită dependența dintre dimensiunile elementelor mecanismelor directoare tip Evens și Watt. Sînt date formulele de calcul necesare la proiectarea acestor mecanisme și unele recomandări pentru alegerea dimensiunilor optime pentru elementele mecanismelor de acest tip.

Lucrarea este utilă proiectanților din construcția de mașini.

2. O. N. LEVITSKAIA — *Despre condițiile de montaj a reductoarelor plane tare cu satelit dublu.*

Acest articol cuprinde o analiză a diferitelor scheme de montaj a reductoarelor planetare cu satelit dublu și a condițiilor în care pot fi alcătuite fiecare din schemele studiate. Sînt comparate condițiile de montaj deduse de diferiți cercetători, cu cele propuse de Dobrovolski și Merrit.

Lucrarea este folositoare pentru proiectanții de mașini.

3. L. N. BORISENCO — *Asupra unor proprietăți ale curbelor algebrice și a utilizării lor în sinteza mecanismelor.*

În acest articol autorul prezintă cîteva proprietăți ale unor curbe algebrice de care apoi se folosește pentru a obține transformarea curbelor punctelor circulare și a centrelor lui Burmester într-un cerc. Pe baza acestei transformări este apoi rezolvată o problemă de sinteză a mecanismului patrulater articulat.

4. T. N. GHENDZEHADZE — *Sinteza mecanismelor spațiale cu came, cu un grad de libertate.*

În această lucrare este studiată problema sintezei cinematice a mecanismelor spațiale cu came.

Sînt deduse ecuațiile suprafețelor de lucru ale camelor pentru cazul, cînd rola tachetului este de formă conică sau *hiperboloidală*. Aceste ecuații pot fi folosite mai departe în problemele de sinteză dinamică, la rezolvarea problemei alegerii unghiului de presiune cît și, de asemenea, la stabilirea legăturii între suprafața de lucru a rolei și unghiul de presiune al mecanismului. Studiul acestei probleme este făcut pe cale analitică.

5. A. P. BESSANOV — *Metodele planului de fază și studiul mișcării mașinilor.*

În dinamica modernă a mașinilor sînt foarte des întîlnite probleme de integrare a ecuațiilor diferențiale de ordinul doi, nelineare. În mecanica nelineară o dezvoltare mai largă au luat-o problemele de oscilații nelineare, la care metoda planului de fază devine o problemă generală.

În articolul lui Bessanov sînt expuse metodele de integrare a ecuațiilor diferențiale nelineare de ordinul doi în planul de fază, metodele speciale de construire a curbelor integrale propuse de diferiți cercetători cît și o metodă originală.

Se fac apoi unele aprecieri privitoare la posibilitățile de utilizare a acestora în cercetarea problemelor de dinamică a mașinilor.

6. L. P. SOLDATKIN — *Despre proiectarea grupelor de bare articulate ce se alătură mecanismului cu trei elemente cu came.*

În această lucrare sînt expuse soluțiile a două probleme :

— proiectarea unui mecanism patrulater din bare articulate care se alătură unui mecanism cu trei elemente cu camă și care asigură o valoare constantă a forțelor de presiune în cupla superioară în tot timpul funcționării, indiferent de valoarea variabilă a forței rezistente din elementul activ ;

— proiectarea unui mecanism patrulater similar în combinație cu un mecanism cu came, în așa fel încît să permită ca momentul de acționare aplicat axului camei să fie constant, în tot timpul acționării forței rezistente din elementul activ, indiferent de legea de variație a acestei forțe.

Lucrarea este interesantă și utilă pentru proiectanți.

L. Calmaciuc

CL. MATHURIN, *Fonction caractéristique d'un contour algébrique simple. Application à l'équation* $\Delta(\Delta\varphi) = 0$ *de l'élastostatique plane* (Funcțiune caracteristică a unui contur algebric simplu. Aplicație la ecuația $\Delta(\Delta\varphi) = 0$ a elastostaticii plane). Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air. Notes techniques (Publicații științifice și tehnice ale Ministerului aerului. Note tehnice), *105*, Paris, 1962, X + 84 p.

În elasticitatea plană, prima problemă fundamentală (condiții la limită în tensiuni) a dat naștere la numeroase studii și la metode de calcul dintre cele mai variate. Între altele, metodei funcțiilor de variabilă complexă (G. V. Kolosov, N. I. Mushelișvili) i-a urmat metoda funcțiilor de variabilă ipercomplexă (L. Sobrero) și metoda funcțiilor biarmonice complexe (R. Legendre). În cursul celor șapte capitole ale cărții sale, autorul folosește prima și ultima dintre aceste metode, precum și unele idei ale acestor cercetători, pentru a da o sistematizare proprie a calculului, sistematizare utilă pentru o clasă de domenii destul de importantă în practică.

Considerînd domeniul d, mărginit sau nu, a cărui frontieră d^*, mărginită, este constituită dintr-un număr finit de conture analitice simple, autorul introduce o funcție analitică $G(z)$, asociată conturului analitic simplu d^*, numită funcție carateristică a conturului și legată de reprezentarea conformă corespunzătoare. Generalizînd metode de calcul cunoscute din cazul problemei armonice, autorul prezintă o metodă de rezolvare a problemei biarmonice fundamentale. Această metodă de calcul conduce adesea la rezultate finale exprimate într-o formă relativ simplă. Se consideră în special cazul în care d^* este un contur algebric simplu $P(x,y) = 0$ iar funcția $G(z)$ este meromorfă în d.

După formularea problemei plane, în capitolul I, se trece, în capitolul al II-lea, la un studiu detaliat al funcției $G(z)$. Menționăm că pe d^* avem $\overline{z} = G(z)$, funcția caracteristică putînd fi construită cu ușurință, plecînd de la reprezentarea conformă a domeniului interior d sau a domeniului exterior d_1 pe cercul unitate ; o clasificare fundamentală a unor astfel de contururi este dată în funcție de ordinul părții principale a lui $G(z)$.

Capitolele al III-lea și al IV-lea sînt destinate aplicării funcției caracteristice la rezolvarea problemelor la limită armonice și biarmonice prin prelungire analitică. În special se dă o nouă metodă de construire a funcției lui Green armonice pentru coroana circulară și pentru elipsă.

În capitolul al V-lea se demonstrează posibilitatea de a reduce orice problemă biarmonică la două probleme Dirichlet armonice, singurele singularități fiind cele ale funcției caracteristice. În capitolul al VI-lea se aplică metoda pentru cazul în care funcția $G(z)$ este meromorfă în domeniul d iar capitolul al VII-lea este consacrat cazului unor domenii multiplu conexe.

În cele de mai sus autorul a considerat, în special, cazurile în care conturul este format din cercuri, elipse sau familii de cuartice. Menționăm de asemenea că autorul găsește condițiile în care calculul poate fi condus pînă la sfîrșit fără mijloace tehnice speciale, cazurile în care trebuie folosite metode de calcul aproximative, precum și cazurile în care metoda propusă nu este aplicabilă. Se pare că metoda poate fi extinsă la unele ecuații de tip eliptic de o formă mai generală.

Lucrarea este însoțită numai de șapte indicații bibliografice.

Cartea lui Cl. Mathurin se caracterizează prin conciziune și claritate de expunere, fiecare afirmație fiind pe deplin justificată din punct de vedere matematic. Ea prezintă interes atît pentru cercetătorii din domeniul mecanicii solidelor deformabile cît și pentru matematicienii care se ocupă de ecuațiile fizicii matematice.

P. P. Teodorescu

Vector mechanics for engineers. Part II : *Dynamics* (Mecanica vectorială pentru ingineri. Partea a II-a : Dinamica). Edited by Harry R. Nara, John Wiley and Sons, Inc. New York—London, IX + 434 p.

Editorul acestei lucrări, împreună cu ceilalți șapte colaboratori ai săi, au avut intenția de a elabora un manual cu caracter introductiv în studiul dinamicii, avîndu-se în vedere în special aplicațiile în problemele tehnice. Cele șase capitole conțin o introducere istorică, cinematica, dinamica punctului material, dinamica unui sistem de puncte materiale, dinamica corpurilor rigide și o introducere în teoria vibrațiilor. În fiecare din aceste capitole, sînt prezentate, într-o expunere clară și accesibilă, rezultatele cele mai de seamă ale mecanicii clasice. Așa cum arată titlul, pentru demonstrații se utilizează metodele calculului vectorial. Un număr foarte mare de probleme dă cititorului posibilitatea de a-şi fixa bine cunoştinţele. Considerăm de altfel că acesta este aspectul cel mai valoros al lucrării. Urmînd probabil dezvoltarea unui anumit program, autorii nu au introdus şi un capitol de mecanică analitică. Cele cîteva referiri la principiile şi metodele mecanicii analitice, plasate în mod destul de curios în introducere, nu ni se par suficiente şi o tratare separată a lor, oricît de sumară, ar fi îmbogăţit lucrarea.

T. Oroveanu

H. WOLF, *Spannungsoptik, ein Lehr- und Nachschlagebuch für Forschung, Technik und Unterricht* (Fotoelasticitate [1]), carte de studiu şi informare pentru cercetare, tehnică şi învăţămînt). Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1961, XX+582 p.

Efectul fotoelastic care se produce la anumite materiale transparente, supuse acţiunii unor sarcini exterioare, a fost descoperit încă la începutul secolului trecut, dar aplicarea lui pentru determinarea stării de tensiune într-un corp solid deformabil s-a făcut mult mai tîrziu — în special pentru cazul unei stări de tensiune plană sau pentru cazul unei stări de deformaţie plană. De la primul tratat, complet la acea epocă, al lui Coker şi Filon, apărut în 1931, au mai fost publicate circa o duzină de cărţi mai importante asupra acestor probleme, privind în special cazul corpurilor elastice. Dat fiind marea dezvoltare pe care au căpătat-o în ultimul timp metodele experimentale, autorul încearcă să prezinte, într-un voluminos tratat, destul de complet, cele mai importante rezultate teoretice şi experimentale obţinute pînă în prezent în această direcţie. Precizăm că, în cuprinsul lucrării, se pune în special accentul pe descrierea aparatelor, a materialului de lucru şi a posibilităţilor practice de experimentare, autorul fiind el însuşi un distins experimentator. De asemenea, se expun pe larg principiile care stau la baza acestor fenomene, precum şi posibilităţile de calcul; în schimb se dau mai puţine exemple concrete de probleme studiate.

Lucrarea cuprinde 13 capitole, fiecare fiind însoţit de indicaţii bibliografice; la sfîrşit este dată o foarte bogată şi utilă bibliografie, alcătuită din 1119 titluri, care acoperă publicaţii apărute între 1813 şi 1959, în special în ţările occidentale; remarcăm totuşi că numeroase lucrări interesante apărute în U.R.S.S. şi în ţările de democraţie populară nu sînt menţionate.

Primul capitol are un caracter introductiv, cuprinzînd bazele teoriei elasticităţii bidimensionale (mai ales pentru cazul unei stări de tensiune plană), precum şi noţiunile geometrice ale opticii fizice, în special pentru cristale uniaxiale; observăm că se ţine seama şi de influenţa pe care o poate avea prezenţa unui cîmp electromagnetic. Capitolul al 2-lea este destinat descrierii aparaturii care se foloseşte în mod obişnuit (aparatura de bază) cît şi a diferitelor aparate auxiliare. Comportarea modelelor supuse la o stare de tensiune plană în lumină polarizată plan sau circular este descrisă în capitolul al 3-lea. Se introduc astfel noţiunile de linii izocline şi izocromate şi se discută determinarea constantelor elastice prin încercări la întindere, compresiune sau încovoiere.

Capitolele al 4-lea şi al 5-lea sînt dedicate problemelor teoretice şi, mai ales, experimentale legate de liniile izocromate, izocline şi izostatice. Se introduc punctele izotrope şi singulare și se studiază unele cazuri elementare de stare de tensiune (întindere, compresiune și încovoiere simplă a barei drepte, încovoiere cu forfecare a barei drepte, semiplan elastic, bare cu goluri sau cu crestături etc.). O atenție deosebită este acordată determinării ordinului liniilor izocromate; se indică astfel diferite posibilități de compensare experimentală (Sénarmont, Tardy, Ehringhaus- Berek, Brace- Köhler, Babinet- Soleil etc.). Apoi, pornind de la liniile izocline, se dau diferite posibilități de construire a traiectoriilor tensiunilor principale; cu această ocazie se dau și alte exemple elementare de stări de tensiune plană. În capitolul al 6-lea se expun pe larg cele mai importante metode de determinare a stării de tensiune plană, pe baze experimentale. După prezentarea metodelor clasice ale lui Coker și Filon, se trece la metoda determinării tensiunilor tangențiale prin calculul cu diferențe finite, expunîndu-se pe larg o schemă de calcul. După metodele de calcul ale lui M. M. Frocht, autorul prezintă în amănunt metoda Neuber, insistînd asupra posibilităților de construire a liniilor izopahe. O problemă importantă o constituie determinarea sumei tensiunilor normale (construirea liniilor izopahe); autorul se ocupă pe larg, cu această ocazie, de diferite metode experimentale pentru determinarea acestei sume: extensometrie, metode de interferență optică, analogie de membrană, analogie electrică, metoda moiré-urilor etc., precum și de diferite metode de determinare numerică aproximativă a soluției ecuației lui Laplace corespunzătoare (metode iterative, diferențe finite, relaxare etc).

---

[1] Cuvîntul german „Spannungsoptik" este folosit de fapt pentru a reprezenta determinarea stării de tensiune prin mijloace optice, în general, pentru un corp solid oarecare; neavînd corespondent în limba romînă, îl traducem prin *fotoelasticitate* (cuvînt intrat în nomenclatura de specialitate), cu toate că sfera acestui cuvînt este mai mică.

Unele rezultate privind probleme de similitudine și încercări pe modele se dau în capitolul al 7-lea; se arată erorile ce se pot face în cercetările fotoelastice și se introduce principiul lui B. de Saint Venant. În capitolul al 8-lea, foarte dezvoltat, se prezintă diferite materiale pentru modele, discutîndu-se pe larg proprietățile lor mecanice, optice, termice, electrice etc; se dau tabele și diagrame pentru materialele cele mai importante: sticlă, plexiglas, celuloid, cauciuc, gelatină, rășini sau diferite alte materiale produse artificial. Prelucrarea acestor materiale, precum și construirea modelelor se discută în capitolul al 9-lea; cu această ocazie se consideră și influența curgerii materialului și efectul de margine. Capitolul al 10-lea este dedicat problemelor de experimentare propriu-zisă, fotografiere etc.; datele indicate, bazate pe o bogată experiență, sînt deosebit de importante în practică pentru orice experimentator (culoare, fixare, negativ și pozitiv, întărire, hîrtie, diapozitive etc.).

În ultimele trei capitole, autorul se ocupă de unele probleme moderne, care s-au dezvoltat în ultimul timp. În capitolul al 11-lea se dau pe larg cele mai importante rezultate privind determinarea stării de tensiune tridimensionale. După o analiză a tăierii în felii și a stărilor de tensiune corespunzătoare se dau legile fotoelastice de bază în trei dimensiuni, introducîndu-se tensiunile principale secundare. Menționăm apoi analiza stării de tensiune cu ajutorul incidenței oblice. Calculul stării de tensiune spațiale, prin metoda determinării tensiunilor tangențiale cu diferențe finite, se face pe unul, două sau trei modele. Se expun apoi metode folosind lumină divergentă sau convergentă. O atenție deosebită este acordată metodei deformațiilor sferice și înghețării, după Racké. Tehnica de lucru pentru aceste probleme este descrisă pe larg în capitolul al 12-lea; se pune în special accentul pe problemele de topire și înghețare. Expunerea făcută este foarte utilă pentru experimentare. În capitolul al 13-lea se tratează cîteva probleme speciale: probleme axial simetrice (tensiuni centrifugale), probleme de vibrații și impact, probleme de fotoplasticitate, bazate pe studiile lui Mönch asupra dispersării dublei refracții în celuloid etc.

Cu toate că nu acoperă în întregime (este și foarte greu, de altfel) cele mai noi cercetări în această direcție, tratatul lui H. Wolf este deosebit de interesant și util, mai ales pentru cei care se ocupă cu experimentări efective, cuprinzînd — pe larg — o serie de date de ordin tehnic și practic, care nu se găsesc, în general, în nici o altă lucrare similară.

P. P. Teodorescu

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul XIII 1962

INDEX ALFABETIC

STUDII

CINEMATICA ȘI DINAMICA SOLIDULUI

	Nr.	Pag.
T. HACKER, Asupra stabilității longitudinale a avionului cu autopilot.	3	575
N. TIPEI, Asupra mișcării rachetei în mediu rezistent. II. Ascensiunea rachetei. Efectul curburii pămîntului	3	567
N. TIPEI, Bătaia rachetelor balistice.	5	1091

AEROMECANICĂ

	Nr.	Pag.
E. CARAFOLI, ADRIANA GHIA-NĂSTASE, Asupra problemei de rezistență minimă a aripii de grosime simetrică în curent supersonic	1	11
E. CARAFOLI, DAN MATEESCU, Interferența dintre aripă și fuzelaj în scurgerile conice de ordin superior.	2	275
E. CARAFOLI, Considerații teoretice asupra jeturilor laterale fluide	5	1061
T. HACKER, Despre calitățile de zbor ale avioanelor DAV parțial controlate (fără automat de stabilizare)	1	31
T. HACKER, Unele probleme ale stabilizării automate a avioanelor DAV în zbor imobil	2	295
D. MATEESCU, Aripi cu suprafețe de închidere în regim supersonic	5	1127
AL. MARINESCU, Vibrațiile palelor rotoarelor reactive de elicopter	6	1601
H. PASCAL, Determinarea aproximativă a presiunii și debitul curentului ascendent în forajul cu gaze	3	707
N. N. PATRAULEA, Obstacole fluide cu pînză de jet rotitoare	1	25
GH. RADO, Elicopter cu stabilitate proprie în zbor la punct fix	2	327
ȘERBAN SĂNDULESCU, ADRIANA NĂSTASE-GHIA, Problema mixtă a aripilor triunghiulare în mișcare conică de ordin superior.	5	1099
ȘT. N. SĂVULESCU, Unele aplicații ale ipotezei de organizare statistică limitativă a fluctuațiilor de energie turbulentă	2	311
ȘT. N. SĂVULESCU, GH. DARIE, V. TOMA, Aspecte tridimensionale ale tranziției provocate de un jet de intensitate mică pe o placă plană în scurgerea incompresibilă	6	1557
V. P. ȘIDLOVSKI, Problema mișcării unui gaz vîscos electroconductibil în apropierea unei plăci poroase infinite	3	701

HIDROMECANICĂ

	Nr.	Pag.
T. K. CHAUDHURY, Asupra mișcării longitudinale a unui cilindru circular într-un lichid vîscos conținut într-un cilindru circular-coaxial	3	735
G. CONSTANTINESCU, O nouă metodă pentru calculul tranziției de putere prin fluide	5	1073

	Nr.	Pag
D. DUMITRESCU, V. IONESCU, C. CRĂCIUN, Studiul unitar al mişcării fluidelor grele cu suprafaţă liberă	2	353
C. IAMANDI, Asupra similitudinii saltului hidraulic	6	1591
DAN GH. IONESCU, Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase	1	47
DAN GH. IONESCU, Asupra aplicării teoriei funcţiilor de variabilă complexă în hidrodinamica fluidelor vîscoase. IV. Soluţia pentru domenii multiple conexe	2	377
S. R. MAJUMDER, Mişcarea impulsivă de rotaţie a unei sfere într-un fluid vîscos	3	729
CR. MATEESCU, Probleme de profilarea economică a construcţiilor hidrotehnice. (Profiluri optime hidraulice).	6	1463
T. OROVEANU, Asupra dislocuirii petrolului de către apă în medii poroase fisurate	2	363
T. OROVEANU, Un caz limită de dezlocuire a petrolului de către apă în medii poroase fisurate	3	719

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

	Nr.	Pag
OLGA BIŢĂ, I. DINCĂ, Aspecte ale influenţei naturii suprafeţelor în frecare asupra rezistenţei la abraziune	2	409
OLGA BIŢĂ, I. DINCĂ, Comportarea la sarcini ridicate a unor aditivi pe bază de fosfor	5	1221
A. CHIŞU, D. MAROŞ, T. ALBU, G. HULPE, D. MATEIŞANU, ARPAD SZABÓ, Contribuţii asupra cercetării uzurii roţilor dinţate cu ajutorul izotopilor radioactivi	6	1549
V. N. CONSTANTINESCU, Unele consideraţii asupra calculului lagărelor cu aer alimentate sub presiune printr-un număr mare de orificii sau prin suprafeţe poroase	1	173
V. N. CONSTANTINESCU, Asupra scurgerii gazelor cu viteze mari în straturi subţiri	2	383
V. N. CONSTANTINESCU, Influenţa formei de variaţie a grosimii stratului de lubrifiant asupra caracteristicilor de funcţionare ale lagărelor lubrificate cu gaze	3	761
V. N. CONSTANTINESCU, Asupra unor metode aproximative de calcul a lagărelor circulare lubrificate cu gaze	4	935
V. N. CONSTANTINESCU, Asupra lubrificaţiei cu gaze în regim turbulent . .	5	1157
AL. NICA, Studiul comparativ al materialelor antifricţiune	2	401
D. PAVELESCU, I. ILIUC, S. BARBUL, Studiul unei metode radioactive pentru aprecierea calităţilor lubrifiante ale uleiurilor aditivate, prin prizma uzurii suprafeţelor. II.	1	191
GH. VASILCA, AL. NICA, Contribuţii la determinarea pe cale experimentală a parametrilor funcţionali de la lagărele motoarelor cu ardere internă. I. Parametrii funcţionali, metoda de lucru şi instalaţia experimentală . .	3	773
GH. VASILCA, Unele aspecte cantitative experimentale ale coeficientului de frecare la lagărele cu alunecare	4	957

TEORIA MECANISMELOR

	Nr.	Pag
G. BĂRĂNESCU, O generalizare a formulelor de analiză armonică a momentului motor produs de forţele de inerţie şi de greutăţile pieselor bielă-manivelă la motoarele cu ardere internă	5	1193
R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC, Asupra unor curbe sferice şi a mecanismelor necesare producerii lor	1	63
R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC, GR. ANTONESCU, Studiul vitezelor în mecanisme pe baze mecano-electronice	4	971
A. CZULAK, I. SZEKELY, Mecanism cu roţi dinţate pentru obţinerea unui mare număr de rapoarte de transmitere diferite	4	989

	Nr.	Pag.
FL. DUDIȚĂ, Transmisii policardanice	1	79
D. MANGERON, ELENA CROITORU, Contribuții la teoria generală a accelerațiilor reduse în coordonate punctuale și tangențiale	5	1177
N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU, P. ANTONESCU, Domeniul de aplicabilitate al metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate	6	1483
CHR. PELECUDI, Folosirea arcelor de came de translație cu tachet de translație la reprezentarea funcțiilor	1	51
CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN, L. CALMACIUC, Considerații asupra mișcării sferei cu centru fix pentru controlul automat al suprafeței	3	749
CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN, Sinteza mecanismelor cu came la prescrierea valorilor arcelor de came	6	1541

ELASTICITATE — PLASTICITATE — REZISTENȚA MATERIALELOR

	Nr.	Pag.
M. ARCAN, O metodă de calcul al diafragmelor de rigidizare cu un șir de goluri	2	451
M. ARCAN, ED. NICOLAU, Studii asupra structurilor de rezistență ale construcțiilor cu ajutorul modelelor din mase plastice	3	621
SMRITI KANA BHOWMICK, Asupra tensiunilor produse de un cuplu izolat care acționează într-un punct din interiorul unei benzi elastice infinite cu laturile paralele încastrate	1	97
S. GUIAȘU, Asupra principiului lui Hooke	4	883
N. IOSIPESCU, Cercetări fotoelastice asupra unui procedeu corect de încercare la forfecare pură a materialelor	2	473
L. LIBRESCU, Problema dinamică a învelitorilor subțiri, viscoelastice, de mică curbură	1	137
L. LIBRESCU, Asupra flaterului neliniar al structurilor cilindrice, subțiri, neomogene	3	681
L. LIBRESCU, Vibrațiile și stabilitatea aeroelastică a structurilor subțiri neomogene, cilindrice circulare, plasate într-un curent fluid compresibil	4	911
V. MANEA, Asupra ecuațiilor neliniare de mișcare ale unui mediu continuu deformabil	2	507
V. MANEA, Asupra ecuațiilor neliniare de mișcare a unui mediu continuu deformabil în coordonate curbilinii oarecare	3	669
V. MANEA, Asupra liniarizării ecuațiilor de mișcare ale unui mediu continuu deformabil	4	903
M. MIHAILESCU, Teoria de încovoiere la învelitori cilindrice cu raza variabilă	6	1453
M. MIȘICU, Structuri reologice. I	3	597
M. MIȘICU, Structuri reologice. II	6	1357
T. OROVEANU, C. STĂNESCU, Asupra divergenței aeroelastice a suprafețelor portante de secțiune variabilă în rotație	4	537
VALERIU PETCU, Momente de plastificare în grinzi continue de beton armat, încastrate la extremități	1	151
VALERIU PECTU, Momente plastice optime în grinzi continue de beton armat cu secțiune variabilă	2	497
VALERIU PETCU, Capacitatea portantă a grinzilor curbe de beton armat solicitate la torsiune cu încovoiere	3	651
VALERIU PETCU, Bazele teoriei structurilor static nedeterminate de beton armat, de egală siguranță plastică	4	891
VALERIU PETCU, Metodele directă și indirectă în calculul plastic al structurilor de beton armat	5	1273

	Nr.	Pag.
RADU PRIŞCU, GHEORGHE OLTEANU, Eficienţa înclinării tălpii de fundaţie la barajele de greutate	2	419
MIRCEA SOARE, Contribuţii la teoria încovoierii paraboloidului hiperbolic în şa	2	429
MIRCEA SOARE, Contribuţii la studiul deformaţiilor plăcilor curbe subţiri	5	1279
M. TANNENBAUM, Calculul la starea limită de rezistenţă al elementelor de beton precomprimat solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică	5	1261
M. TANNENBAUM, Teoria statistică a proprietăţilor deformative ale betonului	6	1425
P. P. TEODORESCU, Consideraţii în legătură cu problema plană a teoriei elasticităţii în coordonate triunghiulare	4	849
P. P. TEODORESCU, Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în coordonate curbilinii oarecare. I. Preliminarii matematice	5	1233
P. P. TEODORESCU, Asupra problemei plane a teoriei elasticităţii în coordonate curbilinii oarecare. II. Stare de solicitare	6	1387
C. TEODOSIU, Rezolvarea problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare	6	1409
V. VISARION, D. DRĂGHICESCU, Calculul cuptoarelor rotative de clincher	1	105
V. VISARION, D. DRĂGHICESCU, Calculul cuptoarelor rotative de clincher cu inele de rigidizare	4	865

TEHNOLOGIA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

	Nr.	Pag.
I. LĂZĂRESCU, G. ABRUDAN, G. ARGHIR, Asupra preciziei de prelucrare a pieselor conice	1	217
M. POPOV, I. MITRICĂ, E. DECIU, Influenţa faţetei şi a razei de racordare asupra uzurii sculei aşchietoare	1	203
M. POPOV, E. DECIU, I. MITRICĂ, Asupra regimurilor economice de strunjire a oţelurilor carbon	4	1001

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

	Nr.	Pag.
I. JAKAB, Un procedeu electric pentru amortizarea optimă a unor traductoare de mărimi mecanice	4	1021

NOTE

	Nr.	Pag.
EMERIC DEUTSCH, Torsiunea barelor prismatice cu secţiunea transversală în formă de cruce cu braţele opuse egale	2	529
EMERIC DEUTSCH, Torsiunea unor bare prismatice cu secţiuni asimetrice	6	1615
ED. NICOLAU, Torsiunea barelor cilindrice cu fisura diametrală de adîncime variabilă studiată cu ajutorul analogiei cu membrana	5	1301
V. V. TOPENCIAROV, B. I. CEKANKOV, Observaţii asupra formulei lui Rivals	4	1031

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

	Nr.	Pag.
V. MARCU, Metode moderne şi aplicaţii ale metalurgiei pulberilor şi metalizării prin pulverizare în construcţia de maşini şi instalaţii	5	1309

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE PESTE HOTARE

	Nr.	Pag.
D. MANGERON, A III-a conferinţă generală poloneză asupra teoriei mecanismelor şi maşinilor, Rogów-Warszawa, 8—10 iunie 1961	1	233
D. MANGERON, Simpozionul internaţional asupra oscilaţiilor neliniare, Kiev, 12—18 septembrie 1961	1	239
D. MANGERON, R. C. BOGDAN, A III-a conferinţă unională asupra problemelor fundamentale ale teoriei mecanismelor şi maşinilor, 23—28 iunie 1961	3	783

	Nr.	Pag.
D. MANGERON, Sesiunea jubiliară reunită a Academiilor de Ştiinţe a U.R.S.S., a R.S.S. Gruzia, a R.S.S. Azerbaidjan, a R.S.S. Armenia, consacrată celei de a 40-a aniversări a instituirii Puterii Sovietice în Gruzia şi a înfiinţării Partidului Comunist din Gruzia (30 noiembrie — 4 decembrie 1961)	3	791
* * * Al III-lea Congres al Consiliului Internaţional de ştiinţe aeronautice, Stockholm, Suedia, 27—31 august 1962	3	795

RECENZII

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ"

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том XII 1962

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СТАТЬИ

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

	№	Стр.
ТИПЕЙ Н., О движении ракеты в сопротивляющейся среде. II. Подъем ракеты. Эффект кривизны земли	3	567
ТИПЕЙ Н., О дальнобойности баллистических ракет	5	1091
ХАКЕР Т., О продольной устойчивости самолета с автопилотом	3	575

АЭРОМЕХАНИКА

	№	Стр.
КАРАФОЛИ Е. и АДРИАНА ГИЯ-НЭСТАСЕ, К задаче минимального сопротивления крыла симметричной толщины в сверхзвуковом потоке	1	11
КАРАФОЛИ Е. и ДАН МАТЕЕСКУ, Взаимодействие между крылом и фюзеляжем при конических течениях высшего порядка	3	275
КАРАФОЛИ Е., Теоретические соображения о боковых жидкостных струях	5	1061
МАРИНЕСКУ АЛ., Вибрация лопастей реактивных роторов вертолетов	6	1601
МАТЕЕСКУ Д., Крылья с поверхностями замыкания в сверхзвуковом режиме	5	1127
ПАСКАЛ Х., Приближенное определение давления и расхода восходящего потока при бурении газами	3	707
ПАТРАУЛЯ Н. Н., Препятствия с вращающейся струйной пеленой	1	25
РАДО Г., Вертолет с собственной устойчивостью в полете при висении	2	327
СЭНДУЛЕСКУ ШЕРБАН и АДРИАНА ГИЯ-НЭСТАСЕ, Смешанная задача треугольного крыла в коническом движении высшего порядка	5	1099
СЭВУЛЕСКУ ШТ. Н., Некоторые применения гипотезы ограничительной статистической организации флуктуации турбулентной энергии	2	311
СЭВУЛЕСКУ ШТ. Н., Г. ДАРИЕ и В. ТОМА, Трехмерные аспекты перехода, создаваемого слабой струей на плоской пластинке при несжимаемом истечении	6	1557
ХАКЕР Т., О летных качествах частично контролируемых (без стабилизирующего автомата) самолетов со взлетом и посадкой по вертикали	1	31
ХАКЕР Т., Об устойчивости при висении самолетов вертикального взлета и посадки с автоматом стабилизации	2	295
ШИДЛОВСКИЙ В. П., Задача о движении электропроводящего вязкого газа вблизи бесконечной пористой пластины	3	701

ГИДРОМЕХАНИКА

	№	Стр.
ДУМИТРЕСКУ Д., ИОНЕСКУ В. и КРЭЧУН К., Комплексное исследование движения тяжелых жидкостей со свободной поверхностью	2	355
ИОНЕСКУ ДАН Г., О применении теории функции комплексного переменного в гидродинамике вязких жидкостей	1	47
ИОНЕСКУ ДАН Г., О применении теории функций комплексного переменного в гидродинамике вязких жидкостей. IV. Решение для многосвязных областей	2	377
КОНСТАНТИНЕСКУ Г., Новый метод для расчета жидкостных силовых передач	5	1073
МАЖУМДЕР С. Р., Импульсивное вращательное движение сферы в вязкой жидкости	3	729
МАТЕЕСКУ КРИСТЯ, Вопросы экономического расчета гидротехнических сооружений	6	1463
ОРОВЯНУ Т., О вытеснении нефти водой в трещиноватых пористых средах	2	363
ОРОВЯНУ Т., Один предельный случай вытеснения нефти водой в трещиноватых пористых средах	3	719
ЧОДХЭРИ Т. К. О продольном движении круглого цилиндра в вязкой жидкости, заполняющей соосный круглый цилиндр	3	735
ЯМАНДИ К., О подобии гидравлического прыжка	6	1591

СМАЗКА-ТРЕНИЕ-ИЗНОС

	№	Стр.
БИЦЭ ОЛЬГА и И. ДИНКЭ, Аспекты влияния характера трущихся поверхностей на абразивную устойчивость	2	409
БИЦЭ ОЛЬГА и ДИНКЭ И., О поведении некоторых фосфорных присадок на повышенные нагрузки	5	1221
ВАСИЛКА Г. и НИКА А., К экспериментальному определению функциональных параметров подшипников двигателей внутреннего сгорания	3	773
ВАСИЛКА Г., Некоторые количественно-опытные аспекты коэффициента трения в подшипниках скольжения	4	957
КИШУ А., МАРОШ Д., АЛБУ Т., ХУЛПЕ Г., МАТЕЙШАНУ Д., ДАЛИ А., АРПАД САБО, К определению износа зубчатых колес при помощи радиоактивных изотопов	6	1549
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Некоторые соображения о расчете воздушных подшипников, питаемых под давлением через большое число отверстий или через пористые клапаны	1	173
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., О течении газов в тонких слоях при больших скоростях	2	383
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Влияние способа изменения толщины смазочного слоя на характеристики работы подшипников с газовой смазкой	3	761
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., К некоторым методам приблизительного расчета подшипников скольжения с газовой смазкой	4	935
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., К вопросу о смазке газами в вихревом режиме	5	1157
НИКА А., Сравнительное исследование антифрикционных материалов	2	401
ПАВЕЛЕСКУ Д., ИЛЮК И. и БАРБУЛ С., Исследование радиоактивного метода для оценки смазочных качеств масел с присадками по износу поверхностей (II)	1	191

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

	№	Стр.
БЭРЭНЕСКУ Д., Обобщение формул гармонического анализа движущего момента, произведенного силами инерции и весом деталей кривошипно-шатунного механизма у двигателей внутреннего сгорания	5	1193

	№	Стр.
БОГДАН Р. К., ПЕЛЕКУДИ К. и КАЛМАЧУК Л., О некоторых сферических кривых и механизмах, необходимых для их построения	1	63
БОГДАН Р. К., ПЕЛЕКУДИ К., КАЛМАЧУК Л., и АНТОНЕСКУ Г., Изучение скоростей в плоских механизмах на механо-электронных принципах	4	971
ДУДИЦЭ Ф., Многокарданные передачи	1	79
МАНДЖЕРОН Д. и КРОИТОРУ Е., К общей теории приведенных ускорений в тангенциальных и точечных координатах	5	1177
МАНОЛЕСКУ Н. И., ЕРЧАНУ И. и АНТОНЕСКУ П., Область применения кинематических методов исследования плоских шарнирных механизмов	6	1483
ПЕЛЕКУДИ К., Применение дуг поступальных кулачков с поступательным толкателем при изображении функций	1	51
ПЕЛЕКУДИ К., БОГДАН Р. К. и КАЛМАЧУК Л., Об осуществлении движения сфер с неподвижным центром для автоматического контроля поверхности	3	749
ПЕЛЕКУДИ К., БОГДАН Р. К., Синтез кулачковых механизмов для установления кривизны профиля кулачков	6	1541
ЧУЛАК А. и СЕКЕЙ И., Зубчатый механизм с большим числом ступеней скорости	4	989

УПРУГОСТЬ—ПЛАСТИЧНОСТЬ—СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

	№	Стр.
АРКАН М., Метод расчета диафрагм жесткости с одним рядом проемов	2	451
АРКАН М. и НИКОЛАУ Э., Исследования по прочностным конструкциям сооружений при помощи пластмассовых моделей	3	621
БАУМИК СМРИТИ КАНА, О напряжениях, произведенных изолированной парой, действующей в некоторой точке внутри бесконечной упругой полосы с защемленными параллельными сторонами	1	97
ВИСАРИОН В. и ДРЭГИЧЕСКУ Д., Вращающаяся печь для производства клинкеров	1	105
ВИСАРИОН В. и ДРЭГИЧЕСКУ Д., Расчет вращающихся цементных печей с кольцами жесткости	3	865
ГУЯШУ С., Принцип Гука	4	883
ИОСИПЕСКУ Н., Фотоупругие исследования по правильному способу испытания материалов на чистый срез	2	473
ЛИБРЕСКУ Л., Динамическая задача пологих вязкоупругих тонких оболочек	1	137
ЛИБРЕСКУ Л., О нелинейном флаттере неоднородных тонких цилиндрических конструкций	3	681
ЛИБРЕСКУ Л., Колебания и аэроупругая устойчивость тонких неоднородных цилиндрических оболочек, помещенных в потоке сжимаемой жидкости	4	911
МАНЯ В., О нелинейных уравнениях движения деформируемой сплошной среды	2	507
МАНЯ В., О нелинейных уравнениях движения сплошной деформируемой среды в произвольных криволинейных координатах	3	669
МАНЯ В., Приведение к линейному виду уравнений движения сплошных сред	4	73
МИШИКУ М., Реологические структуры I	3	597
МИШИКУ М., Реологические структуры II	6	1357
МИХАЙЛЕСКУ М., Теория изгиба применительно к цилиндрическим оболочкам с переменным радиусом кривизны	6	1453
ОРОВЯНУ Т. и СТЭНЕСКУ К., К аэроупругой дивергенции вращательных несущих поверхностей переменного сечения	4	837
ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Пластические моменты в железобетонных неразрезных балках, заделанных по концам	1	151

	№	Стр
ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Оптимальные пластические моменты в неразрезных железобетонных балках переменного сечения	2	497
ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Несущая способность кривых железобетонных балок, подверженных кручению и изгибу	3	651
ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Основы теории статически-неопределенных железобетонных конструкций равной пластической надежности	4	891
ПЕТКУ ВАЛЕРИУ, Прямой и косвенный методы в пластическом расчете железобетонных структур	5	1373
ТРИШКУ РАДУ и ОЛТЯНУ ГЕОРГЕ, Эффективность наклона подошвы фундамента гравитационных плотин	2	419
СОАРЕ МИРЧА, К теории изгиба гиперболического седловидного параболоида	2	429
СОАРЕ МИРЧА, К изучению деформации мембран в пластинках . . .	5	1279
ТАННЕНБАУМ М., Расчет по предельному состоянию сопротивления для деталей из предварительно-напряженного бетона, работающих на эксцентрическое сжатие с малым эксцентриситетом	5	1261
ТАННЕНБАУМ М., Статистическая теория свойства деформации бетона	6	1425
ТЕОДОРЕСКУ П. П., Соображения в связи с плоской задачей теории упругости в треугольных координатах	4	849
ТЕОДОРЕСКУ П. П., К плоской задаче теории упругости в произвольных криволинейных координатах I. Введение. Математические предпосылки	5	1233
ТЕОДОРЕСКУ П. П., К плоской задаче теории упругости в некоторых криволинейных координатах. II. Напряженное состояние	6	1387
ТЕОДОСИУ К., Решение плоской задачи теории упругости в случае произвольных массовых сил	6	1409

ТЕХНОЛОГИЯ СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

	№	Стр
ЛЭЗЭРЕСКУ И., АБРУДАН Г. и АРГИР Г., О точности обработки конических деталей	1	317
ПОПОВ М., МИТРИКЭ И. и ДЕЧУ Е., Влияние грани и радиуса сопряжения на износ режущего инструмента	1	203
ПОПОВ М., ДЕЧУ Е. и МИТРИКЭ И., Оптимальные режимы течения углеродистой стали	1	1001

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

	№	Стр
ЯКАБ И., Электрический способ оптимального успокоения некоторых датчиков механических величин	4	1021

ЗАМЕТКИ

	№	Стр
ДЕЙЧ Э., Кручение призматических стержней с крестообразным поперечным сечением с одинаковыми противоположными плечами . .	2	528
ДЕЙЧ Э., Кручение призматических стержней с асимметричным сечением	6	1615
НИКОЛАУ Э., Исследование кручения цилиндрических брусьев с диаметральной трещиной переменной глубины с помощью мембранной аналогии	5	1301
ТОПЕНЧАРОВ В. В., ЧЕКАНКОВ Б. И., К формуле Ривальса	4	1031

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

	№	Стр
МАРКУ В., Современные методы и применение порошковой металлургии и метализации распылением в машиностроении	5	1309

УЧАСТИЕ В НАУЧНЫХ МЕРОПРИЯТИЯХ ЗА РУБЕЖОМ

	№	Стр.
МАНДЖЕРОН Д., III-я Общепольская конференция по теории машин и механизмов (8—10 июня 1961 г., Рогув-Варшава)	1	233
МАНДЖЕРОН Д., Международный симпозиум по нелинейным колебаниям, Киев, 12—18 сентября 1961 года	1	239
МАНДЖЕРОН Д. и БОГДАН Р. К., III-е Всесоюзное совещание по основным проблемам теории машин и механизмов	3	783
МАНДЖЕРОН Д., Объединенная юбилейная сессия Академии Наук СССР, Грузинской ССР, Азербайжанской ССР и Армянской ССР, посвященная 40-летию установления советской власти в Грузии и создания Коммунистической партии Грузии (30 ноября — 4 декабря 1961 года)	3	791
* * * III Конгресс Международного Совета по аэронавтике, Стокгольм, Швеция, 27—31 августа 1962 года	3	795

РЕЦЕНЗИИ

ПУБЛИКАЦИИ, ПОСТУПИВШИЕ ПУТЕМ ОБМЕНА В РЕДАКЦИЮ

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome XIII 1962

INDEX ALPHABÉTIQUE

ÉTUDES

CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SOLIDE

	Nº	Page
T. HACKER, On the longitudinal stability of an aircraft with automatic pilot	3	575
N. TIPEI, On the motion of a rocket in resisting medium. II. Ascending motion. Effect of the earth curvature	3	567
N. TIPEI, Range of ballistic rockets	5	1091

AÉROMÉCANIQUE

	Nº	Page
ELIE CARAFOLI and ADRIANA GHIA-NĂSTASE, On the minimum drag problem of the wing of symmetrical thickness in supersonic flow	1	11
ELIE CARAFOLI and DAN MATEESCU, Wing-body interference in high-order conical flow	2	275
E. CARAFOLI, Theoretical considerations on lateral fluid jets	5	1061
T. HACKER, On the flight qualities of partially controlled VTOL aircrafts (without automatic pilot)	1	31
T. HACKER, On the stability of VTOL aircrafts with automatic stabilizer in hovering flight	2	295
D. MATEESCU, Wings with enclosing surfaces in supersonic flow	5	1127
AL. MARINESCU, Vibrations des pales des rotors réactifs d'hélicoptère	6	1601
H. PASCAL, Détermination approximative de la pression et du débit du courant, ascendant, lors du forage à gaz	3	707
N. N. PATRAULEA, Bodies with rotating jet sheets	1	25
GH. RADO, Hubschrauber mit Eigenstabilität im Schwebeflug	2	327
ŞERBAN SĂNDULESCU, ADRIANA NĂSTASE-GHIA, Das gemischte Problem des Dreickflügels in konischer Strömung höherer Ordnung	5	1099
ŞT. N. SĂVULESCU, Some applications of the hypothesis of limitative statistical organization of turbulent energy fluctuations	2	311
ŞT. SĂVULESCU, GH. DARIE, V. TOMA, Three-dimensional aspects of the transition caused by a low intensity jet on aflat plate in incompressible flow.	6	1557
V. P. SHIDLOVSKI, The flow of an electrically conducting gas in the vicinity of a porous infinite plate	3	701

HYDROMÉCANIQUE

	Nº	Page
T. K. CHAUDHURY, On the longitudinal motion of a circular cylinder in a viscous liquid contained in a coaxial circular cylinder	3	735
G. CONSTANTINESCU, A new approach to fluid power transmission analysis	5	1073
D. DUMITRESCU, V. IONESCU et C. CRĂCIUN, Étude unitaire du mouvement des fluides pesants à surface libre	2	353
C. IAMANDI, On the similarity of hydraulic jump	6	1591

	Nº	Page
DAN GH. IONESCU, Sur l'application de la théorie des fonctions d'une variable complexe dans l'hydrodynamique des fluides visqueux. III. Solution pour les domaines simplement connexes	1	47
DAN GH. IONESCU, Sur l'application de la théorie des fonctions d'une variable complexe dans l'hydrodynamique des fluides visqueux. IV. Solution pour les domaines multiplement connexes	2	377
S. R. MAJUMDER, The impulsive rotatory motion of a sphere in a viscous fluid	3	729
CR. MATEESCU, Problems of the economical design of hydraulic structures	6	1463
T. OROVEANU, Sur le déplacement par l'eau, du pétrole, dans les milieux poreux fissurés	2	363
T. OROVEANU, Un cas limite de déplacement du pétrole par l'eau dans un milieu poreux ayant des fissures	3	719

LUBRIFICATION— FROTTEMENT — USURE

OLGA BIŢĂ et I. DINCĂ, Aspects de l'influence de la nature des surfaces de frottement sur la résistance à l'abrasion	2	409
OLGA BIŢĂ and I. DINCĂ, Behaviour of some phosphorous compounds at heavy loads	5	1221
A. CHIŞU, D. MAROŞ, T. ALBU, G. HULPE, D. MATEIŞANU, ARPAD SZABÓ, Contributions to the investigation of the wear of toothed wheels by using radioactive isotopes	6	1549
V. N. CONSTANTINESCU, Some considerations on the calculation of hydrostatic gas bearings supplied through a large number of holes or through porous surfaces	1	173
V. N. CONSTANTINESCU, On the flow of high-speed gases in thin layers	2	383
V. N. CONSTANTINESCU, Influence of the film thickness variation on the operating characteristics of self-acting gas-bearings	3	761
V. N. CONSTANTINESCU, On some approximate methods for the analysis of gas lubricated journal bearings	4	935
V. N. CONSTANTINESCU, On gas lubrication in turbulent regime	5	1157
AL. NICA, Comparative study of anti-friction materials	2	401
D. PAVELESCU, I. ILIUC and S. BARBUL, Study of a radioactive method for estimating the lubricating qualities of compound oils by using the wear of surfaces. II	1	191
GH. VASILCA et AL. NICA, Contributions à la détermination, par voie expérimentale, des paramètres fonctionnels pour les paliers des moteurs à combustion interne. I. Paramètres fonctionnels, méthode de travail et installation expérimentale	3	773
GH. VASILCA, Quelques aspects quantitatifs expérimentaux concernant le coefficient de frottement dans le cas des paliers lisses	4	957

THÉORIE DES MÉCANISMES

G. BĂRĂNESCU, Eine Verallgemeinerung der Formeln der harmonischen Analyse des durch die Massenkraft und die Schwere der Triebwerke bei Verbrennungsmotoren hervorgerufenen Momentes	6	1193
R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC, Über sphärische Kurven und die zu ihrer Erzeugung erforderlichen Getriebe	1	63
R. C. BOGDAN, CHR. PELECUDI, L. CALMACIUC und GR. ANTONESCU, Das Studium der Geschwindigkeiten in den ebenen Getrieben auf mechanisch-elektronischer Basis	3	971
A. CZULAK, I. SZEKELY, Zahnradgetriebe zur Erzielung einer grossen Anzahl verschiedener Übersetzungsverhältnisse	4	989
FL. DUDIŢĂ, Transmissions par plusieurs cardans	1	79
D. MANGERON et ELENA CROITORU, Sur la théorie des accélérations réduites exprimée en coordonnées ponctuelles et tangentielles	5	1177

	Nº	Page
N. I. MANOLESCU, I. ERCEANU and P. ANTONESCU, Range of applicability of the methods of kinematic investigation of plane hinged mechanisms	6	1483
CHR. PELECUDI, Use of the arcs of translation cams with translation tappet for the representation of functions	1	51
CHR. PELECUDI, R. C. BOGDAN and L. CALMACIUC, Betrachtungen über die Erzeugung der Bewegung von Kugeln mit festem Mittelpunkt zur automatischen Oberflächenkontrolle	3	749
CHR. PELECUDI and R. C. BOGDAN, Synthesis of cam mechanisms at the prescribing of the values of cam arcs	6	1541

ÉLASTICITÉ – PLASTICITÉ – RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

	Nº	Page
M. ARCAN, A method for calculating rigidity diaphragms with a row of holes	2	451
M. ARCAN and ED. NICOLAU, Studies on strength structures of building by model of plastics	3	621
SMRITI KANA BHOWMICK, Note on the stresses produced by an isolated couple acting at a point inside an infinite elastic strip with its parallel edges fixed	1	97
S. GUIAȘU, On Hooke's principle	4	883
N. IOSIPESCU, Recherches photoélastiques sur un procédé correct d'essais au cisaillement pur des matériaux	2	473
L. LIBRESCU, Dynamic problem of shallow viscoelastic shells	1	137
L. LIBRESCU, Sur le flatter non linéaire des structures cylindriques, minces, non homogènes	3	681
L. LIBRESCU, Vibrations and aeroelastic stability of non-homogeneous thin cylindrical shells in incompressible flow	4	911
V. MANEA, Sur les équations non linéaires du mouvement d'un milieu continu déformable	2	507
V. MANEA, Sur les équations non linéaires du mouvement d'un milieu continu déformable, en coordonnées curvilignes quelconques	3	669
V. MANEA, Sur la linéarisation des équations de mouvement d'un milieu continu déformable	4	903
M. MIHAILESCU, Bending theory of cylindrical shells of variable curvature radius	6	1453
M. MIȘICU, Structures rhéologiques. I	3	597
M. MIȘICU, Rheologische Strukturen. II.	6	1357
T. OROVEANU et C. STĂNESCU, Sur la divergence aéroélastique des surfaces portantes de section variable en mouvement de rotation	4	837
VALERIU PETCU, Plastic moments in reinforced concrete continuous beams built-in at their ends	1	151
VALERIU PETCU, Optimum plastic moments in reinforced concrete continuous beams of variable cross-section	2	497
VALERIU PETCU, Carrying capacity of curved reinforced concrete beams subjected to torsion and bending	3	651
VALERIU PETCU, Bases of the theory of reinforced concrete structures of equal plastic safety	4	891
VALERIU PETCU, Direct and indirect methods in the plastic calculation of reinforced concrete structures	5	1273
RADU PRIȘCU et GHEORGHE OLTEANU, Efficacité de l'inclinaison de la surface de fondation dans le cas des barrages-poids	2	419
MIRCEA SOARE, Contributions to the bending theory of the saddle hypar	2	429
MIRCEA SOARE, Contributions to the study of membrane deformations of shells	5	1279

Nº Page
M. TANNENBAUM, Calcul, à l'état limite de résistance, des éléments de béton précontraint sollicités à la compression excentrique à faible excentricité . 5 1261
M. TANNENBAUM, Théorie statistique des propriétés déformatives du béton 6 1425
P. P. TEODORESCU, Considérations sur le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées triangulaires 4 849
P. P. TEODORESCU, Sur le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes quelconques. I. Introduction. Préliminaires mathématiques 5 1223
P. P. TEODORESCU, Sur le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes quelconques. II. Etat de sollicitation 6 1387
CR. TEODOSIU, Solving of the plane problem of the theory of elasticity in the case of arbitrary body forces 6 1409
V. VISARION et D. DRĂGHICESCU, Calcul des fours à clinker rotatifs . . . 1 105
V. VISARION and D. DRĂGHICESCU, Calculation of rotative clinker kilns with stiffening rings 4 865

TECHNOLOGIE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

I. LĂZĂRESCU, G. ABRUDAN und G. ARGHIR, Über die Bearbeitungsgenauigkeit kegelförmiger Werkstücke 1 217
M. POPOV, I. MITRICĂ et E. DECIU, Influence d'une face de coupe secondaire et du rayon d'arrondissement du coin sur l'usure des outils de coupe . . . 1 203
M. POPOV, E. D. DECIU und I. MITRICĂ, Über wirtschaftliches Drehen von Kohlenstahlwerkstoffen 4 1001

TECHNIQUE DES MESURES

I. JAKAB, An electrical technique for the optimum damping of mechanical transducers 4 1021

NOTES

EMERIC DEUTSCH, Torsion des barres prismatiques à section transversale en croix aux bras opposés égaux 2 529
EMERIC DEUTSCH, Torsion des barres prismatiques à sections asymétriques 6 1615
ED. NICOLAU, Torsion of cylindrical bars with diametral crack of variable depth, examined with the aid of the membrane analogy 5 1301
V. V. TOPENTSCHAROV et B. I. TSCHEKANKOV, Observations sur la formule de Rivals 4 1031

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

V. MARCU, Méthodes modernes et applications de la métallurgie des poudres et de la métallisation par pulvérisation dans la construction des machines et dans les installations 5 1309

PARTICIPATIONS À LA VIE SCIENTIFIQUE À L'ÉTRANGER

D. MANGERON, III, Gesamtpolnische Konferenz über Theorie von Maschinen und Getrieben, Rogow bei Warschau, 8–10. VI. 1961 . . . . 1 233
D. MANGERON, International Symposium on non-linear oscillations 1 239
D. MANGERON et R. C. BOGDAN, Die 3. Unionale Konferenz für Probleme der Getriebe- und Maschinenlehre, 23–28 VII 1961 . . . . 3 783

	Nº	Page
D. MANGERON, Session jubilaire réunie des Académies des Sciences de l'U.R.S.S., de la R.S.S. de Géorgie, de la R.S.S. d'Arménie et de la R.S.S. d'Azerbaïdjan à l'occasion du 40e anniversaire de l'instauration du pouvoir soviétique en Géorgie et de la fondation du Parti Communiste de Géorgie (30 novembre – 4 décembre 1961)	3	791
* * * International Council of the Aeronautical Sciences. Third Congress. Stockholm, Sweden, August 27–31, 1962	3	795

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

PUBLICATIONS REÇUES À LA RÉDACTION

Pentru a vă asigura o colecție completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pentru anul 1963.

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE, AGENŢIILE POŞTALE, FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

91